UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Středové promítání

Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Marie Chodorová, Ph.D.
2014

Vypracovala:
Veronika Motalová
M-Deg, 3.ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Marie Chodorové, PH.D., a že jsem v seznamu literatury uvedla všechny prameny použité při psaní této práce.

V Olomouci dne

. . . . . .

Veronika Motalová

Poděkování

Ráda bych poděkovala Mgr. Marii Chodorové, Ph.D. za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a vypracování bakalářské práce.

Obsah

Úvod **6**

1 Středové promítání, základní útvary **8**
1.1 Zobrazení bodu 8
1.2 Zobrazení přímky 10
1.2.1 Zvláštní polohy přímky 13
1.3 Zobrazení roviny 16
1.3.1 Zvláštní polohy roviny 16

2 Polohové úlohy ve středovém promítání **19**
2.1 Incidence 19
2.2 Vzájemná poloha přímek 19
2.3 Vzájemná poloha rovin 21
2.4 Vzájemná poloha přímky a roviny 24

3 Metrické úlohy **29**
3.1 Skutečná velikost úsečky 29
3.2 Přímka kolmá k rovině a rovina kolmá k přímce 33
3.3 Otáčení útvarů v rovině 35

4 Konstrukční úlohy **41**
4.1 Hranol 41
4.2 Jehlan 44
4.3 Krychle 47
4.4 Válec 50
4.5 Kužel 53
4.6 Krychle v kouli 56

Literatura **60**

Seznam obrázků

1 Zobrazení bodu . . . 8
2 Rozdělení prostoru . . . 9
3 Příklad 1.1. . . . 9
4 Zobrazení přímky . . . 11
5 Příklad 1.2. . . . 12
6 Příklad 1.3. . . . 12
7 Příklad 1.4. . . . 12
8 Zvláštní poloha přímky (1) . . . 13
9 Zvláštní poloha přímky (2) . . . 14
10 Zvláštní poloha přímky (3) . . . 14
11 Zvláštní poloha přímky (4) . . . 15
12 Zvláštní poloha přímky (5) . . . 15
13 Zvláštní poloha přímky (6) . . . 15
14 Zobrazení roviny . . . 16
15 Zvláštní poloha roviny (1) . . . 17
16 Zvláštní poloha roviny (2) . . . 17
17 Zvláštní poloha roviny (3) . . . 18
18 Vzájemná poloha přímek (1) . . . 20
19 Vzájemná poloha přímek (2) . . . 20
20 Vzájemná poloha přímek (3) . . . 20
21 Příklad 2.1. . . . 21
22 Vzájemná poloha rovin (1) . . . 22
23 Vzájemná poloha rovin (2a) . . . 22
24 Vzájemná poloha rovin (2b) . . . 23
25 Vzájemná poloha rovin (3) . . . 23
26 Příklad 2.2. . . . 23
27 Příklad 2.3. . . . 24
28 Vzájemná poloha přímky a roviny (1) . . . 24
29 Vzájemná poloha přímky a roviny (2) . . . 25
30 Vzájemná poloha přímky a roviny (3) . . . 25
31 Vzájemná poloha přímky a roviny (4) . . . 26
32 Vzájemná poloha přímky a roviny (5) . . . 26
33 Vzájemná poloha přímky a roviny (6) . . . 27
34 Vzájemná poloha přímky a roviny (7) . . . 27
35 Příklad 2.4. . . . 28
36 Příklad 2.5. . . . 28
37 Skutečná velikost úsečky (1) . . . 29
38 Skutečná velikost úsečky (2) . . . 29
39 Skutečná velikost úsečky . . . 30
40 Úvaha o skutečné velikosti úsečky . . . 31
41 Skutečná velikost úsečky (3) . . . 32
42 Příklad 3.1. . . . 32
43 Příklad 3.2. . . . 33
44 Přímka jdoucí bodem kolmá k rovině . . . 34

45 Příklad 3.3. 34
46 Rovina jdoucí bodem kolmá k přímce 35
47 Otáčení roviny zobrazeno ve třetí průmětně 36
48 Otáčení roviny do průmětny kolem stopy, zobrazení v prostoru . . 37
49 Otáčení roviny do průmětny kolem stopy, zobrazení v průmětně . 38
50 Příklad 3.4. 39
51 Příklad 3.5. 40
52 Zadání konstrukční úlohy o hranolu 42
53 Řešení konstrukční úlohy o hranolu 43
54 Zadání konstrukční úlohy o jehlanu 45
55 Řešení konstrukční úlohy o jehlanu 46
56 Zadání konstrukční úlohy o krychli 48
57 Řešení konstrukční úlohy o krychli 49
58 Zadání konstrukční úlohy o válci 51
59 Řešení konstrukční úlohy o válci 52
60 Zadání konstrukční úlohy o kuželu 54
61 Řešení konstrukční úlohy o kuželu 55
62 Zadání konstrukční úlohy o krychli v kouli 57
63 Řešení konstrukční úlohy o krychli v kouli 58

Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá středovým promítáním. Na většině středních škol se středové promítání nevyučuje. A proto je čtenáři tato zobrazovací metoda popsána od základů. Středové promítání je základem pro lineární perspektivu, která je využívaná v praxi například ve stavebnicví, nebo v umění.

Cílem této práce je představit zobrazovací metodu středové promítání na jednu průmětnu tak, aby ji čtenář pochopil a dokázal využít. Protože s metodou středového promítání se zpravidla nesetkáváme mezi prvními, je předpokládána znalost základních pojmů a slovních obratů, které jsou společné většině zobrazovacích metod.

Práce má čtyři kapitoly.

První kapitola se věnuje úvodu do středového promítání. Zobrazení základních objektů, tedy zobrazení bodu, přímky a roviny a také zobrazení zvláštních poloh přímek a rovin.

Druhá kapitola obsahuje úlohy o vzájemné poloze geometrických útvarů neboli polohové úlohy. Incidence geometrických útvarů, vzájemné polohy dvou přímek, dvou rovin, a nakonec vzájemná poloha přímky a roviny.

Třetí kapitola se zabývá základními metrickými úlohami. Tedy skutečnou velikostí úsečky na přímce v libovolné poloze a dvojicí úloh: přímka kolmá k rovině, rovina kolmá k přímce. Poslední podkapitolou je otáčení roviny kolem její stopy do průmětny. Tyto úlohy jsou nezbytné při většině úloh o konstrukci těles.

Ve čtvrté kapitole jsou konstrukční úlohy o hranatých i oblých tělesech. Tato kapitola procvičí základní dovednosti čtenáře. Příklady jsou zadány slovně a obrázkem, v práci je uveden potup konstrukce řešení a grafické řešení. Tato kapitola obsahuje pouze autorské příklady. K řešení úloh so oblých tělesech u čtenáře se předpokládá znalost zobrazení kružnice v kolineaci.

Práce obsahuje příklady, které mají procvičit a doplnit popsanou teorii. Tyto příklady jsou zpravidla umístěny na konci podkapitoly. Vždy se předpokládá, že středové promítání je zadáno středem a distancí.

Bakalářská práce je napsána v programu TEX, obrázky a příklady jsou vytvořeny v programu GeoGebrea.

Použité značení

$A = (A_S, A_2)$	bod, který je zadán svým středovým a pravoúhlým průmětem
$A = (a_S, N^a, U_S^a)$	bod, který je zadán nositelkou
$A = (A_S)$	bod, který je zadán svým středovým průmětem a další podmínkou v textu
$p = (p_S, p_2)$	přímka, která je zadaná svým středovým a pravoúhlý průmětem
$p = (p_S, N^p, U_S^p)$	přímka, která je zadaná svým sptředovým průmětem, stopníkem a úběžníkem
$\rho = (n^\rho, u_S^\rho)$	rovina, která je zadaná svou stopou a úběnicí

1 Středové promítání, základní útvary

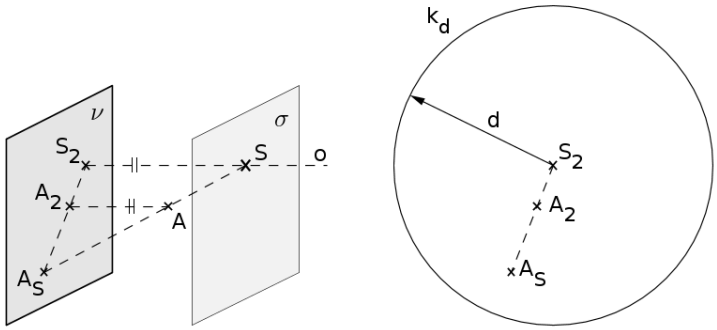
Středové promítání je dáno vlastní rovinou ν, kterou nazýváme **průmětna**, a vlastním bodem S, $S \notin \nu$ - **středem promítání**. Nákresnu ztotožníme s průmětnou. Toto promítání, na rozdíl od jiných zobrazovacích metod, pracuje s rozšířeným Eukleidovým prostorem a nezachovává dělící poměr.

Pravoúhlý průmět S_2 středu promítání S do průmětny ν se nazývá **hlavní bod**. Přímka $o = SS_2$ se nazývá **osa** a vzdálenost $|\overline{SS_2}|$ **distance** d, kterou při zobrazování prostoru do roviny znázorňujeme kružnicí, tzv. **distanční kružnicí** k_d. Rovina σ; $\sigma \parallel \nu \wedge S \in \sigma$ se nazývá **středová rovina**.

1.1 Zobrazení bodu

Bod, který neleží na ose, je jednoznačně určen svým pravoúhlým a středovým průmětem. Zobrazení bodů ležících na ose ukážeme v posledním odstavci kapitoly *Zobrazení přímky.*

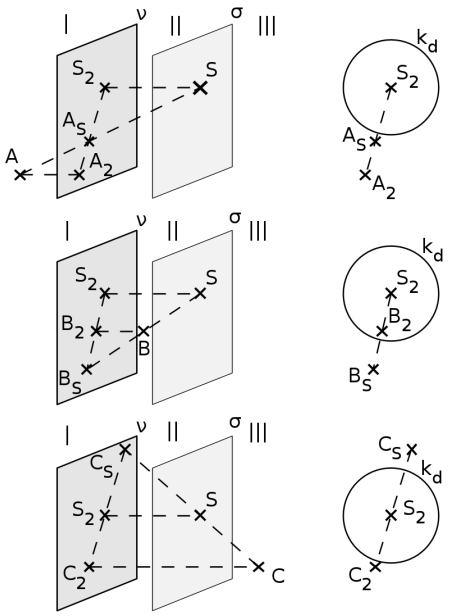
Středový průmět A_S bodu A je průsečík promítacího paprsku AS a roviny ν. **Pravoúhlý průmět** A_2 bodu A je průsečík pravoúhle promítacího paprsku s průmětnou ν. Přímka spojující hlavní bod, středový a pravoúhlý průmět bodu se nazývá **ordinála**. Uspořádáná dvojice (A_S, A_2) se označuje jako **středový obraz** bodu A.



Obr. 1: Zobrazení bodu

Středové promítání je vzájemně jednoznačné zobrazení. To znamená, že každému bodu v prostoru, který neleží na ose o, je přiřazen právě jeden středový obraz. A obráceně: z každé uspořádané dvojice (A_S, A_2) dokážeme jednoznačně určit bod A v prostoru.

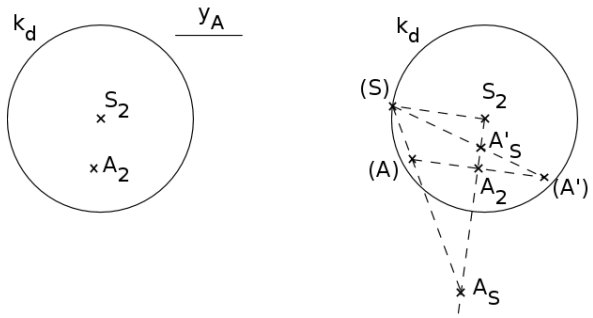
Průmětna ν a středová rovina σ rozdělují prostor na tři části. Část I („za průmětnou“, „pod průmětnou“), je poloprostor s hraniční rovinou ν neobsahující σ. Jestliže A; $A \in$ I potom $A_S \in \overline{S_2A_2}$. Část II je pás prostoru vymezený průmětnou a středovou rovinou. Jestliže B; $B \in$ II potom $B_2 \in \overline{S_2B_S}$. Část III je poloprostor určený hraniční rovinou σ, neobsahující ν. Jestliže C; $C \in$ III potom $S_2 \in \overline{C_SC_2}$.



Obr. 2: Rozdělení prostoru

Leží-li bod v průmětně, pak jeho pravoúhlý i středový průmět splývají se skutečným bodem $D = D_S = D_2$. Bod V, $V \in \sigma$, pravoúhlý průmět V_2, středovým průmětem je nevlastní bod V_S^∞. Nevlastní bod U^∞, středový průmět U_S, pravoúhlým průmětem je nevlastní bod U_2^∞. Zobrazení bodu ve středové rovině a nevlastního bodu viz Obr. 4 v následující kapitole.

Příklad 1.1. Sestrojte středový průmět A_S bodu A, je-li dán jeho pravoúhlý průmět A_2 a vzdálenost y_A; $y_A = |A\nu|$.



Obr. 3: Příklad 1.1.

Řešení: (Obr. 3) Rovinu určenou středem S a pravoúhle promítací přímkou bodu A sklopíme kolem stopy (to je přímka daná body S_2, A_2) do průmětny ν. Zadání má dvě řešení. $A \in \mathrm{II}$, nebo $A' \in \mathrm{I}$.

1.2 Zobrazení přímky

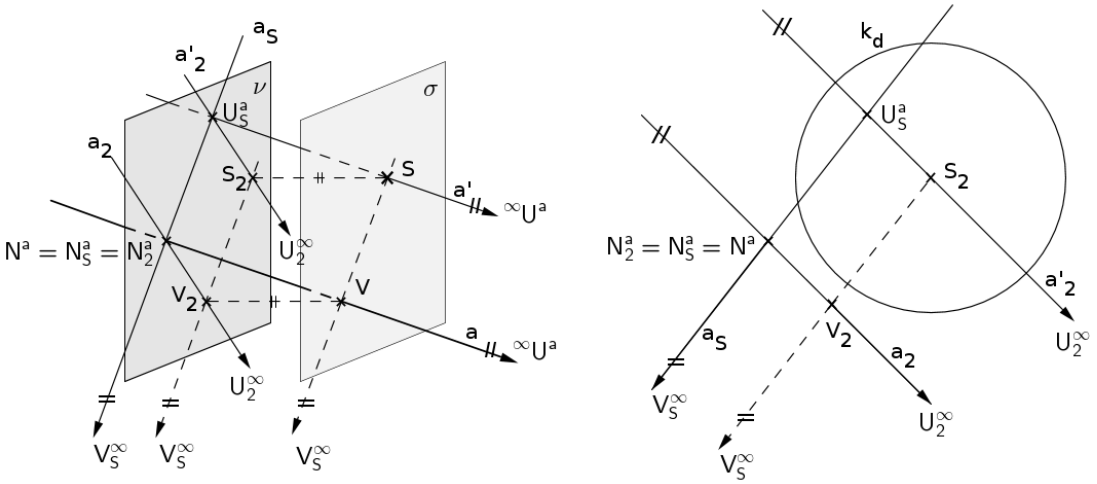
Přímku zobrazujeme pomocí pravoúhlého a středového průmětu. Mějme přímku a v obecné poloze. (To znamená $a \not\perp \nu,\ a \nparallel \nu,\ S \notin a$ a jiné. Zvláštní polohy přímky budou znázorněny v následující kapitole.) Rovina ρ; $\rho = (a, S)$ tzv. **středově promítací rovina** protne průmětnu ν v přímce, tuto přímku nazýváme **středový průmět přímky** a označujeme a_S. Rovina, která je kolmá k průmětně a prochází přímkou a, protne průmětnu v **pravoúhlém průmětu přímky**, označujeme a_2.

Uspořádaná dvojice přímek (a_S, a_2) se nazývá **středový obraz** přímky a.

Přímku můžeme také zobrazit pomocí dvou libobolných bodů, které na ní leží. S výhodou využíváme průsečík přímky s průmětnou tzv. **stopník** a nevlastní bod přímky tzv. **úběžník**.

Stopník N^a přímky a leží v průmětně ν, tedy $N^a = N_2^a = N_S^a$. Středové průměty stopníků dále označujeme bez dolního indexu „S“. Úběžník ${}^\infty U^a$ přímky a určíme tak, že sestrojíme **směrovou přímkou** a' přímky a, pro kterou platí $a' \parallel a \wedge S \in a'$. Průsečík směrové přímky s průmětnou ν je středový průmět ${}^\infty U_S^a$ bodu ${}^\infty U^a$, který dále označujeme zjednodušeně U_S^a. Pravoúhlé průměty přímky a a její směrové přímky a' jsou rovnoběžné ($a_2 \parallel a_2'$). Dokážeme sestrojit pravoúhlý průmět a_2' přímky a' (známe dva body, které na ní leží: střed promítání S a úběžník ${}^\infty U^a$). Můžeme určit pravoúhlý průmět ${}^\infty U_2^a$ úběžníku ${}^\infty U^a$, který označujeme zjednodušeně U_2^∞. Pomocí incidence bodu na přímce, kterou středové promítání zachovává, určíme středový a_S a pravoúhlý a_2 průmět přímky a.

Bod, ve kterém přímka a protne středovou rovinu σ, se nazývá **protiúběžník**.



Obr. 4: Zobrazení přímky

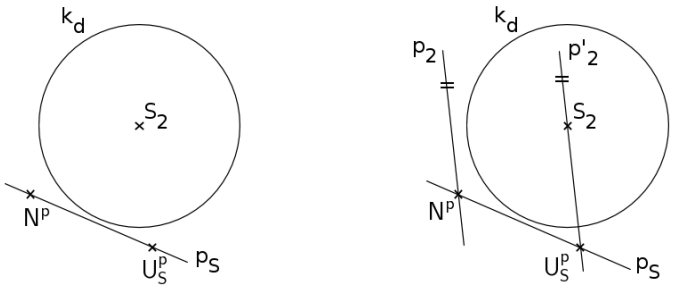
Polohu přímky a v prostoru si můžeme jednoduše představit, známe-li stopník a úběžník. Nejprve si představíme směrovou přímku a'. Známe dva její body: bod U_S^a, který leží v průmětně ν a střed promítání S, který leží na ose o ve vzdálenosti distance d. Přímka a je rovnoběžná s přímkou a' a prochází svým stopníkem N^a.

Jestliže body přímky a leží „za průmětnou“, pak středové průměty těchto bodů leží mezi body N^a a U_S^a. Jestliže body přímky a leží v části prostoru II, pak jejich středové průměty leží na polopřímce s hraničním bodem N^a neobsahující bod U_S^a. Jestliže body přímky a leží v části prostoru III, pak jejich středové průměty leží na polopřímce určené bodem U_S^a neobsahující bod N^a.

Důležitým pojmem je **nositelka bodu**. Je to přímka v obecné poloze určena svým stopníkem a úběžníkem, na níž leží daný bod. Známe-li středový průmět přímky (to znamená také středové průměty jejího stopníku a úběžníku) a středový průmět daného bodu, který leží na takto určené přímce, je tento bod jednoznačně určen. Tímto způsobem dokážeme určit každý bod. Největší význam má nositelka bodu pro body, které leží na ose $o = SS_2$, a dosud jsme je neuvažovali.

Středové promítání je vzájemně jednoznačné zobrazení bodů prostoru na průmětnu ν.

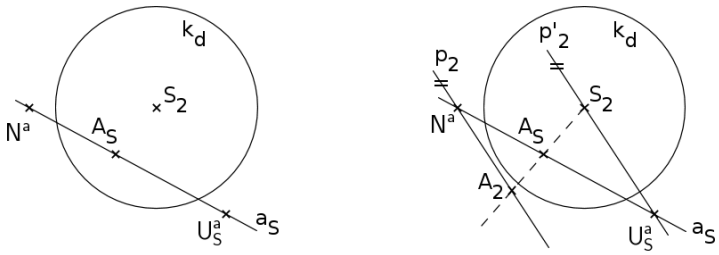
Příklad 1.2. Je dána přímka $p = (p_S, N^p, U_S^p)$, zobrazte pravoúhlý průmět p_2 přímky p.



Obr. 5: Příklad 1.2.

Řešení: (Obr. 5) Střed promítání S a úběžník ${}^{\infty}U^p$ přímky p leží na směrové přímce p' přímky p, $p'_2 = S_2U^p_S$. Pravoúhlé průměty přímky p a její směrové přímky p' jsou rovnoběžné. Stopník N^p leží na přímce p.

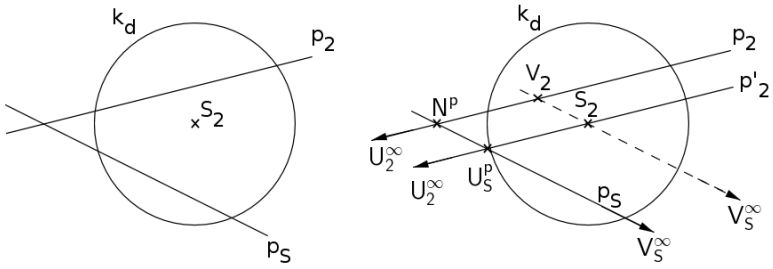
Příklad 1.3. Je dán bod $A = (a_S, N^a, U^a_S)$, určete pravoúhlý průmět A_2 bodu A.



Obr. 6: Příklad 1.3.

Řešení: (Obr. 6) (Viz předchozí příklad) sestrojíme pravoúhlý průmět p_2 přímky p. Bod A leží na nositelce, tedy $A_2 \in p_2$ a průměty bodu leží na ordinále.

Příklad 1.4. Je dána přímka $p = (p_S, p_2)$, zobrazte středové a pravoúhlé průměty stopníku, úběžníku a protiúběžníku přímky p.



Obr. 7: Příklad 1.4.

Řešení: (Obr. 7) Stopník, jeho středový a pravoúhlý průmět splývají, proto musí ležet současně na středovém p_S a pravoúhlém p_2 průmětu přímky p, tedy $N^p =$

$p_S \cap p_2$. Známe-li pravoúhlý průmět p_2 přímky p, dokážeme určit pravoúhlý průmět směrové přímky p_2' a také středový průmět U_S^p úběžníku, pomocí ordinály určíme bod U_2^∞. Abychom zobrazili protiúběžník V, nejprve si uvědomíme, co je to za bod. Leží na přímce p a ve středové rovině σ, jeho středovým průmětem je nevlastní bod V_S^∞. Pravoúhlý průmět V_2 leží na pravoúhlém průmětu přímky a na ordinále.

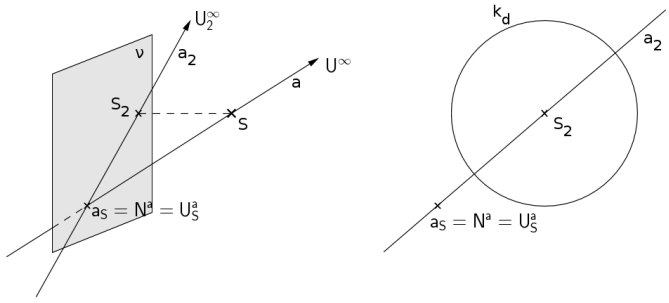
1.2.1 Zvláštní polohy přímky

Tato kapitola se bude věnovat přímkám, které mají zvláštní polohu vzhledem k prvkům určujícím středové promítání, a nebyly uvažovány v předchozí kapitole. Poslední ukážeme zobrazení nevlastní přímky.

Zobrazte přímku:

(1) a; $S \in a$, tzv. **středová přímka**.

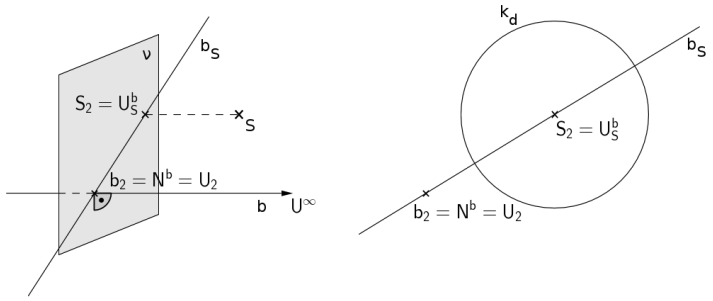
Středové průměty všech bodů přímky se zobrazí do jednoho bodu, tedy středovým průmětem přímky je bod a_S a pravoúhlým průmětem je přímka a_2, $S_2 \in a_2$. Středové průměty stopníku a úběžníku splývají se středovým průmětem přímky a_S, viz Obr. 8.



Obr. 8: Zvláštní poloha přímky (1)

(2) b; $b \perp \nu$.

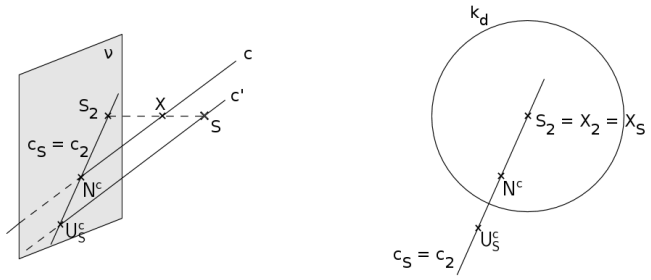
Pravoúhlé průměty všech bodů přímky se zobrazí do jediného bodu, pravoúhlého průmětu b_2 přímky b. Středovým průmětem je přímka b_S, $S_2 \in b_S$. Pravoúhlé průměty stopníku a úběžníku splývají s pravoúhlým průmětem přímky b_2, viz Obr. 9.



Obr. 9: Zvláštní poloha přímky (2)

(3) c; $c \cap o = X$, kde X je právě jeden vlastní bod.

Rovina, procházející přímkou c a středem S, je totožná s rovinou, procházející přímkou c kolmou k půmětně ν. Proto $c_S = c_2$, tato přímka prochází hlavním bodem S_2. Aby byla přímka jednoznačně určena, je nutné ji určit stopníkem a úběžníkem, viz Obr. 10.



Obr. 10: Zvláštní poloha přímky (3)

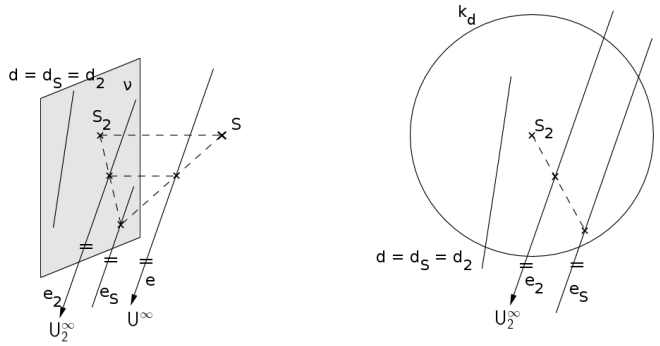
(4) d, e; $d, e \parallel \nu$.

$d \subset \nu$

Středový i pravoúhlý průmět splývají se skutečnou přímou $d = d_S = d_2$. Stopník ani úběžník nebereme v úvahu. (Obr. 11)

$e \not\subset \nu$

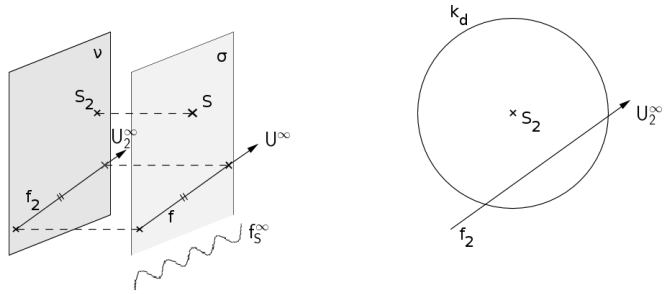
Průměty přímky nesplývají, ale jsou spolu rovnoběžné $d_S \parallel d_2$. Protože stopník a úběžník jsou nevlastní body, určujeme obvykle polohu takové přímky jedním bodem, který na ní leží. (Obr. 11)



Obr. 11: Zvláštní poloha přímky (4)

(5) $f;\ \ f \in \sigma$.

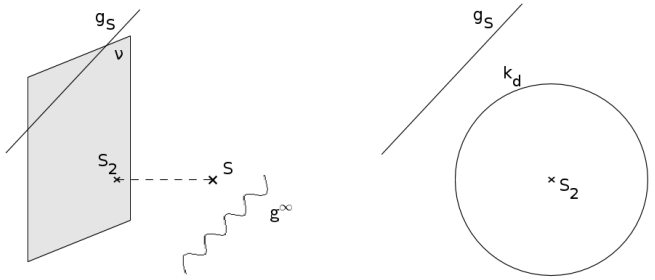
Středovým průmětem přímky f je nevlastní přímka f_S^∞, v Obr. 12 znázorněna vlnovkou. Pravoúhlý průmět f_2 přímky f dokážeme sestrojit stejným způsobem jako v případě přímky v obecné poloze. Tato přímka nemá stopník ani úběžník.



Obr. 12: Zvláštní poloha přímky (5)

(6) Nevlastní přímka g^∞.

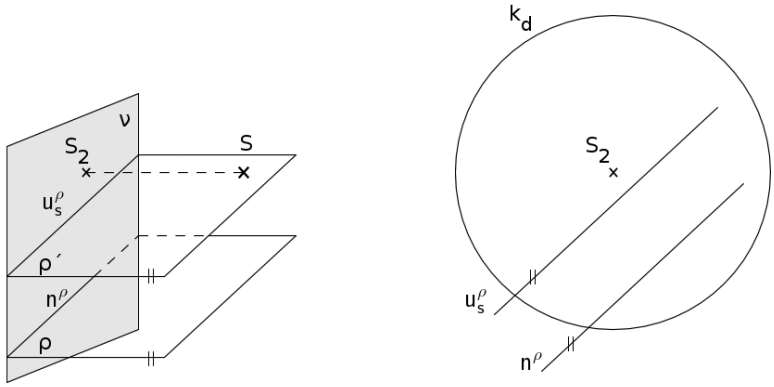
Nevlastní přímka spolu se středem promítání určují rovinu, tedy umíme určit středový průmět g_S přímky g^∞. Pravoúhlým průmětem je nevlastní přímka g_2^∞. Nevlastní přímka také nemá stopník ani úběžník.



Obr. 13: Zvláštní poloha přímky (6)

1.3 Zobrazení roviny

Středovým průmětěm roviny, ve které neleží střed promítání S, je celá průmětna ν. Vlastní rovinu ρ, $S \notin \rho$ nebo $\rho \nparallel \nu$, určujeme její stopou a úběžnicí. Vyjmuté případy budou samozřejmě v následujícím textu. **Stopa** roviny ρ je přímka označovaná n^ρ, $n^\rho = \rho \cap \nu$. Úběžnici roviny označovanou u_S^ρ sestrojíme podobně jako úběžník přímky. Nejprve definujeme **směrovou rovinu** ρ' roviny ρ, tzn. $\rho' \parallel \rho \ \wedge \ S \in \rho'$. **Úběžnice** roviny je přímka $u_S^\rho = \rho' \cap \nu$, neboli středový průmět nevlastní přímky roviny ρ. Protože rovina ρ je rovnoběžná s rovinou ρ', je také $n^\rho \parallel u_S^\rho$.



Obr. 14: Zobrazení roviny

Přímka, která je průsečnicí roviny ρ a středové roviny σ, se nazývá **protiúběžnice**.

Rovinu určují dvě rovnoběžky, dvě různoběžky, přímka a bod na ní neležící, tři nekolineární body. Tedy rovinu ve středovém promítání můžeme určit stopou a úběnicí, nebo středovým obrazem dvou rovnoběžek, dvou různoběžek, přímky a bodu na ní neležícím, třemi nekolineárními body.

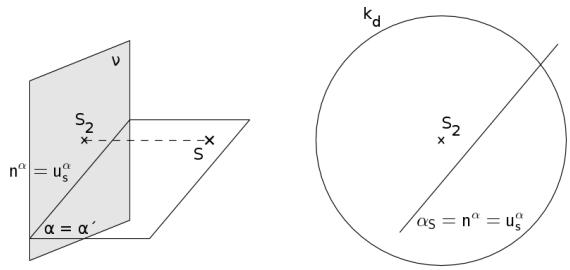
1.3.1 Zvláštní polohy roviny

V této kapitole uvedeme polohy rovin, které jsou v předchozím textu vynechány. Jejich zobrazení ve středovém promítání je odlišné od zobrazení rovin v obecné poloze.

Zobrazte rovinu:

(1) α; $S \in \alpha$, tzv. **středově promítací rovina**.

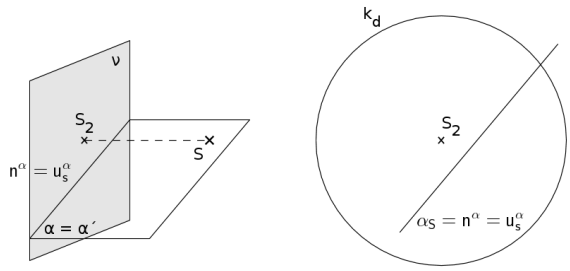
Promítací paprsky všech bodů roviny α jsou přímky ležící v rovině. Proto středovým průmětem roviny α není celá průmětna ν, ale pouze jediná přímka α_S, $\alpha_S = n^\alpha$, která nemusí procházet hlavním bodem. Rovina α splývá se svou směrovou rovinou α', tedy stopa splývá s úběžnicí, $\alpha_S = n^\alpha = u_S^\alpha$, viz Obr. 15.



Obr. 15: Zvláštní poloha roviny (1)

(2) β; $\beta \perp \nu$.

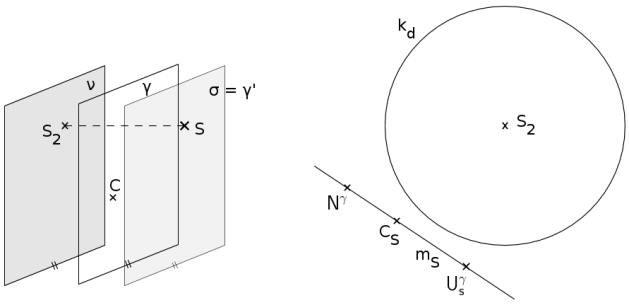
Odlišuje se od roviny v obecné poloze tak, že úběžnice u_S^β vždy prochází pravoúhlým průmětem S_2 středu promítání S, viz Obr. 16.



Obr. 16: Zvláštní poloha roviny (2)

(3) γ; $\gamma \parallel \nu$.

Rovina se s průmětnou ν protne v nevlastní přímce, stopě ${}^\infty n^\gamma$. Úběžnice je také nevlastní přímka ${}^\infty u_S^\gamma$. Jsou-li stopa a úběžnice roviny nevlastní přímky, potom víme, že rovina je rovnoběžná s průmětnou ν. Nedokážeme ale jednoznačně určit polohu roviny γ, to je vzdálenost rovin γ a ν. Proto polohu roviny rovnoběžné s průmětnou zpravidla určujeme libovolným bodem, který leží v dané rovině. (O stopě ani úběžnici obvykle nehovoříme.)



Obr. 17: Zvláštní poloha roviny (3)

2 Polohové úlohy ve středovém promítání

Polohové úlohy jsou úlohy, ve kerých se zajímáme o vzájemnou polohu útvarů, ne o velikosti úseček, nebo úhlů.

Při konstrukci úloh, které jsou polohové, není nutné znát umístění středu promítání S ani velikost distance d.

2.1 Incidence

Jestliže bod leží na přímce, pak jeho středový průmět leží na středovém průmětu přímky. Naopak ale z toho, že středový průmět bodu leží na středovém průmětu přímky nutně neplyne, že bod leží na přímce.

Přímka, která leží v rovině, protne průmětnu ν v bodě takové přímky, která je průsečnicí roviny s průmětnou. Tedy stopník přímky leží na stopě roviny. Podobná úvaha lze provést pro směrovou přímku a směrovou rovinu, z této úvahy vyplyne, že úběžník přímky, (která leží v rovině) patří úběžnici této roviny.

2.2 Vzájemná poloha přímek

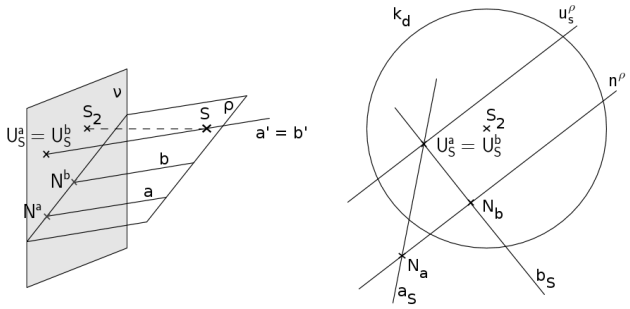
Tato kapitola se bude zabývat vzájemnou polohou dvou různých přímek. V prostoru mohou nastat tři možnosti.

Určete průsečík dvou přímek:

(1) a, b; $a \parallel b$; $a \cap b = X^\infty$, kde X^∞ je právě jeden nevlastní bod.

Směrové přímky přímek a a b splývají $a' = b'$, tedy přímky mají společný úběžník ${}^\infty U^a = {}^\infty U^b$. Středové průměty rovnoběžných přímek a, b jsou různoběžné $a_S \nparallel b_S$.

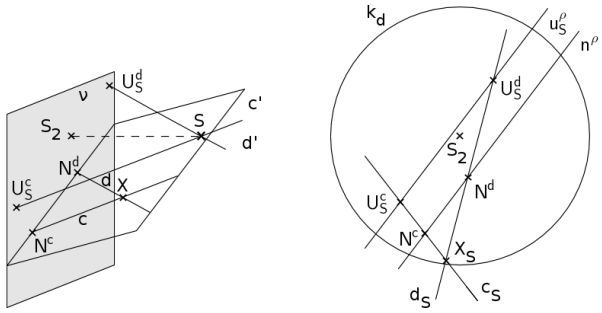
Rovnoběžné přímky a, b určují rovinu ρ. Aby přímka ležela v rovině musí stopník přímky ležet na stopě roviny a úběžník přímky na úběžnici roviny. Dva stopníky N^a, N^b tedy určují stopu n^ρ roviny ρ. Úběžnice u_S^ρ roviny ρ je rovnoběžná se stopou roviny ρ a patří jí úběžník ${}^\infty U^a = {}^\infty U^b$ přímek a, b.



Obr. 18: Vzájemná poloha přímek (1)

(2) c, d; $c \cap d = X$, kde X je právě jeden vlastní bod.

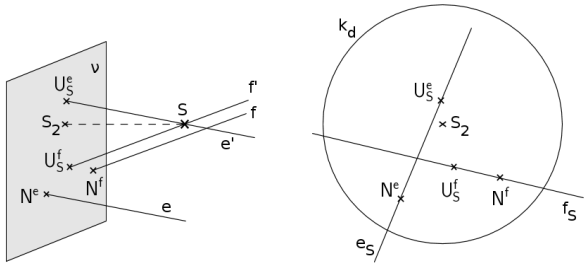
Různoběžné přímky c, d určují rovinu ρ. Přímka leží v rovině, jestliže její stopník leží na stopě roviny a úběžník přímky na úběžnici roviny. Proto musí platit $N^c N^d = n^\rho$, $U_S^c U_S^d = u_S^\rho$ a současně $N^c N^d \parallel U_S^c U_S^d$.



Obr. 19: Vzájemná poloha přímek (2)

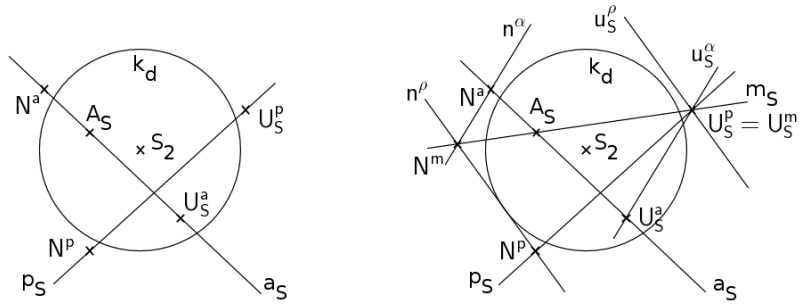
(3) e, f; $e \cap f = \emptyset$.

Dvě mimoběžné přímky nemají žádný společný bod a neurčují rovinu. Máme-li dvě přímky e, f, jejichž spojnice stopníků není rovnoběžná se spojnicí středových průmětů úběžníků ($N^e N^f \nparallel U_S^e U_S^f$), jsou tyto dvě přímky mimoběžné.



Obr. 20: Vzájemná poloha přímek (3)

Příklad 2.1. Je dán bod $A = (a_S, N^a, U_S^a)$ a přímka $p = (p_S, N^p, U_S^p)$, $A \notin p$. Sestrojte přímku m procházející bodem A a rovnoběžnou s přímkou p. Sestrojte stopu a úběžnici roviny ρ danou přímkou p a bodem A.



Obr. 21: Příklad 2.1.

Řešení: (Obr. 21) Jestliže přímka m má být rovnoběžná s přímkou p, pak jejich směrové přímky splývají, a tedy mají společný úběžník $U_S^p = U_S^m$. Bod A má ležet na přímce m, proto $A_S \in m_S$, aby byla přímka m jednoznačně určena, je nutné určit její stopník. Víme, že nositelka a a přímka m jsou různoběžné (společný bod A), proto leží v rovině α ($U_S^m U_S^a \parallel N^m N^a$). Na stopě roviny α leží stopník N^m přímky m. Rovina ρ je určena bodem A a přímkou p, potom přímka m, která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem A, leží také v rovině ρ. Tedy $n^\rho = N^p N^m$.

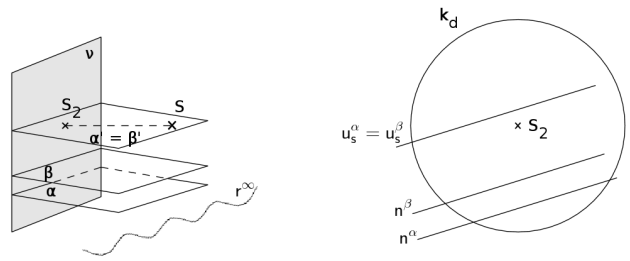
2.3 Vzájemná poloha rovin

Tato kapitola se bude zabývat vzájemnou polohou dvou různých rovin, obě v obecné poloze. Případy, ve kterých je jedna z rovin ve speciální poloze, jsou triviální. Rozlišíme dva případy vzájemné polohy vlastních rovin a třetí případ, ve kterém je jedna rovina nevlastní.

Určete průsečnici rovin:

(1) α, β; $\alpha \parallel \beta$; $\alpha \cap \beta = r^\infty$, r^∞ je nevlastní přímka.

Směrové roviny spolu splývají $\alpha' = \beta'$, proto roviny α a β mají společnou úběžnici $u_S^\alpha = u_S^\beta$. Stopy rovin jsou rovnoběžné $n^\alpha \parallel n^\beta$.

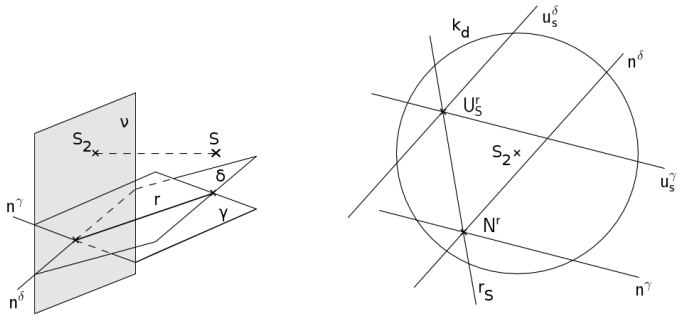


Obr. 22: Vzájemná poloha rovin (1)

(2) γ, δ; $\gamma \cap \delta = r$, r je vlastní přímka.

(a) $n^\gamma \parallel u_S^\gamma \nparallel n^\delta \parallel u_S^\delta$

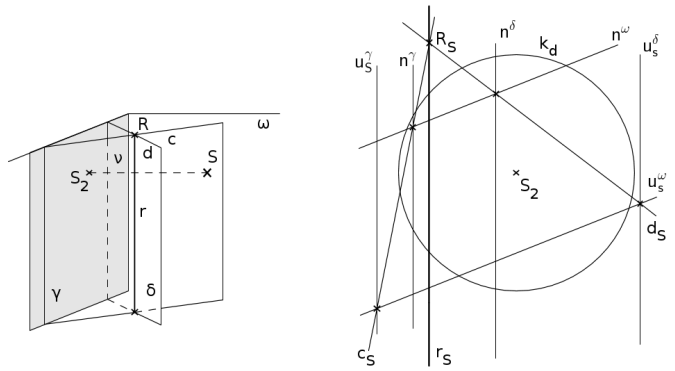
Průsečnici r určíme pomocí jejího stopníku, který leží na stopách obou rovin, $N^r = n^\gamma \cap n^\delta$ a úběžníku, který leží na úběžnících obou rovin, tedy ${}^\infty U_S^r = u_S^\gamma \cap u_S^\delta$.



Obr. 23: Vzájemná poloha rovin (2a)

(b) $n^\gamma \parallel u_S^\gamma \parallel n^\delta \parallel u_S^\delta$

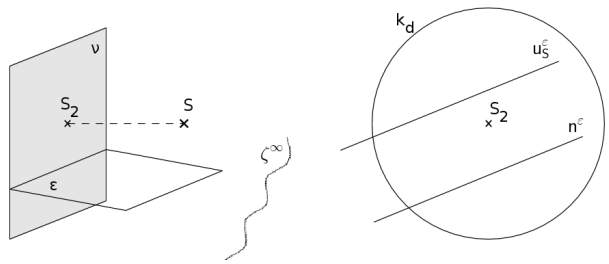
Průsečnice r je rovnoběžná s průmětnou ν, nemá stopník ani úběžník, ale její středový průmět r_S bude rovnoběžný se stopami rovin γ a δ. Polohu průsečnice r určíme pomocí libovolného bodu R; $R \in r$. Zvolíme libovolnou rovinu ω; $\omega \nparallel \nu$. Potom platí $\gamma \cap \omega = c$, $\delta \cap \omega = d$, nakonec $c \cap d = R$.



Obr. 24: Vzájemná poloha rovin (2b)

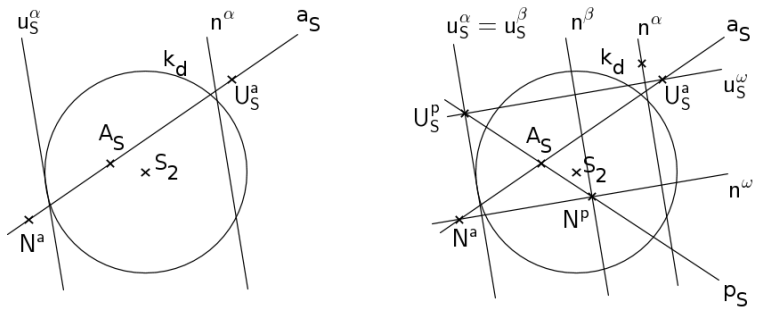
(3) ε, ζ^∞; $\varepsilon \cap \zeta^\infty = r^\infty$.

Průsečnicí vlastní roviny ε a nevlastní roviny ζ^∞ je nevlastní přímka.



Obr. 25: Vzájemná poloha rovin (3)

Příklad 2.2. Je dán bod $A = (a_S, N^a, U_S^a)$ a rovina $\alpha = (n^\alpha, u_S^\alpha)$. Sestrojte stopu a úběžnici roviny β, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou α.

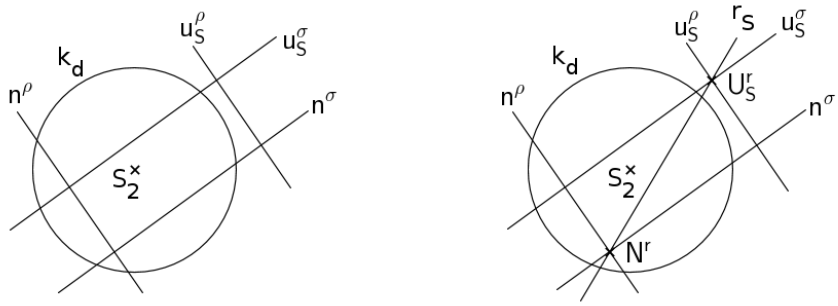


Obr. 26: Příklad 2.2.

Řešení: (Obr. 26) Jestliže jsou dvě roviny rovnoběžné, pak mají společnou úběžnici $u_S^\alpha = u_S^\beta$ a navzájem rovnoběžné stopy. Abychom určili stopu roviny β, bodem A vedeme libovolnou přímku p; $p \subset \beta$. Úběžník přímky p leží na úběžnici

roviny β a stopníkem přímky p bude procházet hledaná stopa roviny β. Stopník přímky p určíme pomocí roviny ω; $\omega = (a, p)$.

Příklad 2.3. Je dána rovina $\rho = (n^\rho, u_S^\rho)$ a rovina $\sigma = (n^\sigma, u_S^\sigma)$. Jaká je jejich vzájemná poloha? Určete jejich průsečnici.



Obr. 27: Příklad 2.3.

Řešení: (Obr. 27) Roviny jsou různoběžné, mají společnou vlastní přímku r, viz *Vzájemná poloha rovin.*

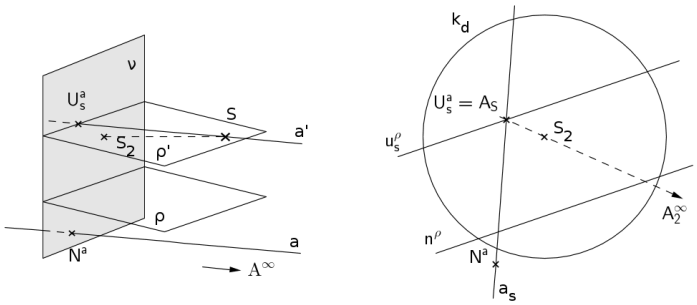
2.4 Vzájemná poloha přímky a roviny

Přímka může ležet v rovině, viz *2.1 Incidence*, nebo s ní mít právě jeden společný bod, ať už vlastní nebo nevlastní. Rozlišíme několik případů podle polohy přímky a roviny vzhledem k prvkům určujícím středové promítání.

Určete průsečík přímky s rovinou:

(1) a, ρ; $a \parallel \rho \wedge a \notin \rho$; $a \cap \rho = A^\infty$.

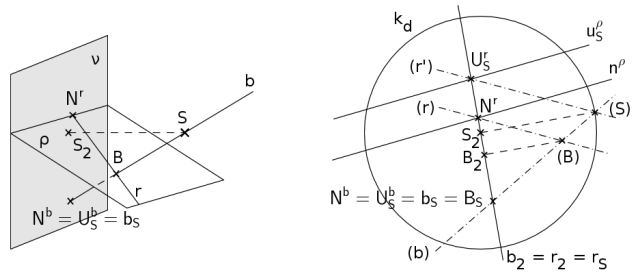
Jestliže přímka je rovnoběžná s rovinou, pak směrová přímka leží ve směrové rovině a tedy úběžník přímky leží na úběžnici roviny, stopník přímky však neleží na stopě roviny. Společným bodem je nevlastní bod A^∞.



Obr. 28: Vzájemná poloha přímky a roviny (1)

(2) b, ρ; $S \in b$; $b \cap \rho = B$.

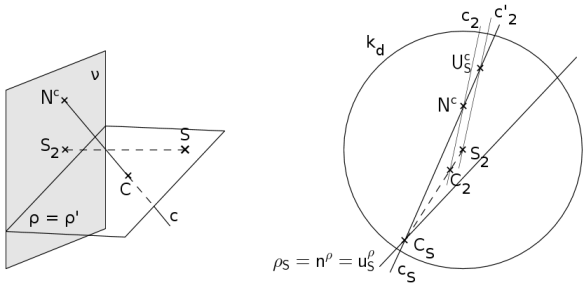
Středově promítcí přímka b se zobrazí do jednoho bodu b_S. Středový průmět bodu B, protože $B \in b$, se také zobrazí do bodu b_S. V rovině λ, ve které leží přímka b a která je kolmá k průmětně ν existuje přímka r taková, že $r = \rho \cap \lambda$, tedy $B = r \cap b$. Protože rovina λ je kolmá k ν, tak platí následující: $b_2 = r_2 = r_S$. Rovinu λ sklopíme do průmětny ν a ve sklopení určíme pravoúhlý průmět B_2 bodu B.



Obr. 29: Vzájemná poloha přímky a roviny (2)

(3) c, ρ; $S \in \rho$; $c \cap \rho = C$.

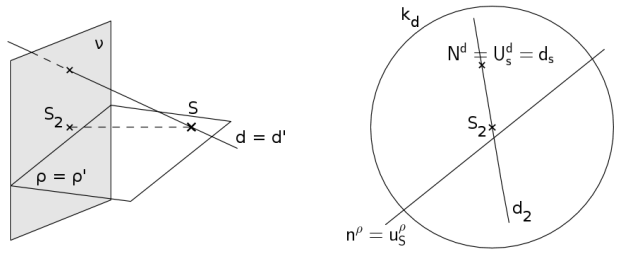
Středově promítací rovina se zobrazí jako přímka ρ_S, proto $C_S \in \rho_S$. Bod C; $C \in c$, proto $C_S \in c_S$. Z toho plyne, že $C_S = c_S \cap \rho_S$. Pravoúhlý průmět C_2 bodu C leží na pravoúhlém průmětu c_2 přímky c a na ordinále.



Obr. 30: Vzájemná poloha přímky a roviny (3)

(4) d, ρ; $S \in d \wedge S \in \rho$; $d \cap \rho = S$.

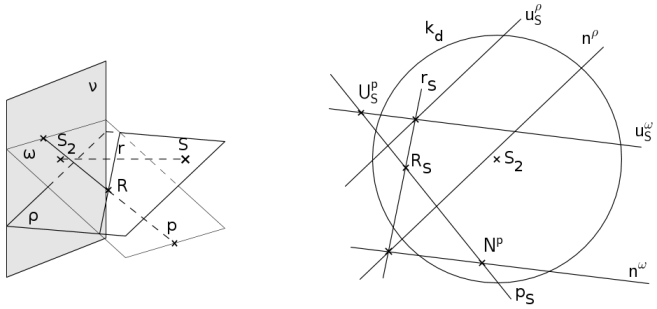
Společným bodem středově promítácí přímky d a středově promítací roviny ρ je střed promítání S.



Obr. 31: Vzájemná poloha přímky a roviny (4)

(5) p, ρ; $p \cap \rho = R$.

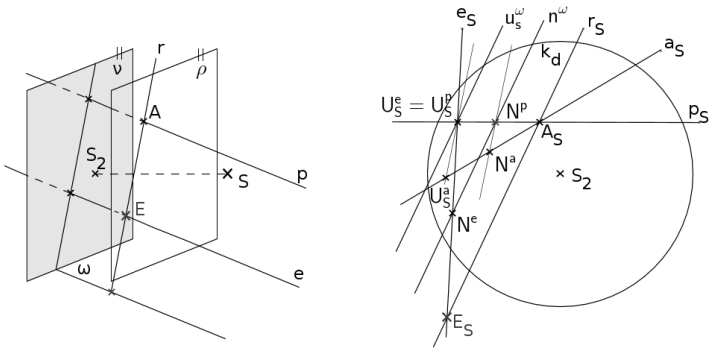
Přímka p a rovina ρ v obecné poloze. Přímkou p proložíme pomocnou rovinu ω. Ve středovém promítání volíme libovolnou pomocnou rovinu, nelze s výhodou použít speciální polohy roviny např. $S \in \omega$, $\omega \perp \nu \ldots$ Sestrojíme průsečnici r; $r = \rho \cap \omega$. Hledaný průsečík R, je tedy průsečík dvou přímek, $R = p \cap r$.



Obr. 32: Vzájemná poloha přímky a roviny (5)

(6) e, ρ; $\rho \parallel \nu$; $e \cap \rho = E$.

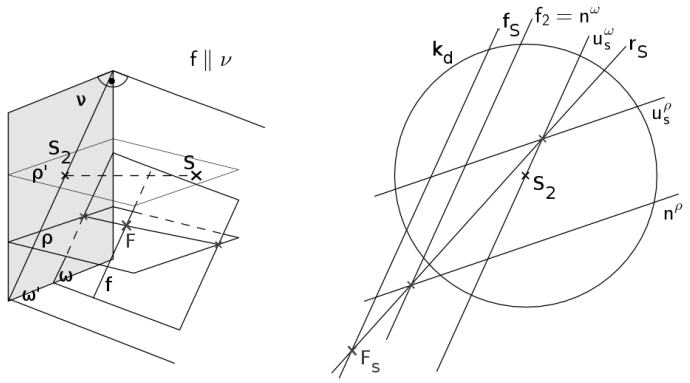
Rovina ρ je rovnoběžná s průmětnou ν, proto je určená bodem A, který je dán nositelkou a. Průsečík E nemůžeme zkonstruovat přímo. (Nezapomeňme, že body A a E leží v ρ.) Zobrazme nejprve přímku p, pro kterou platí $p \parallel e \wedge A \in p$. Přímky p, e určjí rovinu ω. Tato rovina ω protíná danou rovinu ρ v přímce r, která je rovnoběžná s ν a prochází bodem A (proto i $r_S \parallel n^\omega$). Hledaný průsečík $E = e \cap \rho$ je průsečík přímky e s průsečnicí r.



Obr. 33: Vzájemná poloha přímky a roviny (6)

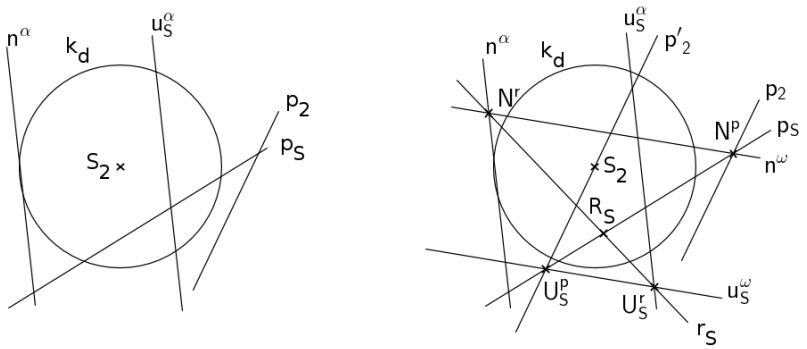
(7) f, ρ; $f \parallel \nu$; $f \cap \rho = F$.

Přímka f nemá stopník ani úběžník, je tedy jednoznačně určena svým středovým a pravoúhlým průmětem a nemůžeme jí proložit libovolnou pomocnou rovinu jako v předchozím případě. Můžeme ale proložit rovinu ω; $f \in \omega \wedge \omega \perp \nu$. Stopa roviny ω splývá s pravoúhlým průmětem přímky f a úběžnice prochází hlavním bodem. Nyní určíme průsečnici r, $r = \rho \cap \omega$ a pro hledaný průsečík F platí $F = r \cap f$.



Obr. 34: Vzájemná poloha přímky a roviny (7)

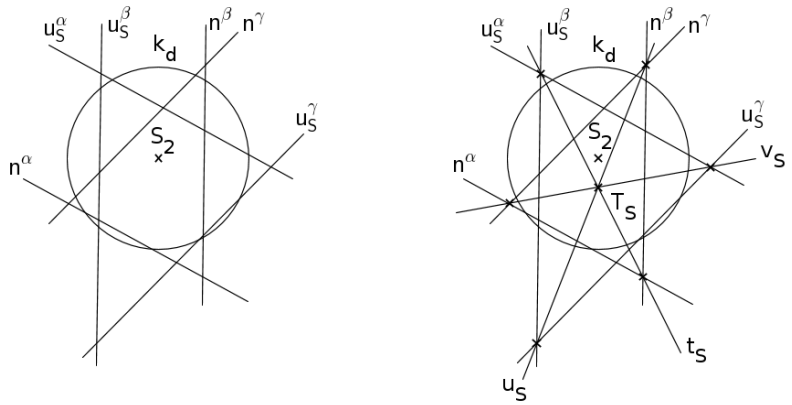
Příklad 2.4. Je dána přímka $p = (p_S, p_2)$ a rovina $\alpha = (n^\alpha, u_S^\alpha)$. Jaká je jejich vzájemná poloha? Určete jejich průsečík.



Obr. 35: Příklad 2.4.

Řešení: (Obr. 35) Přímka p není s rovinou α rovnoběžná, protože $U_S^p \notin u_S^\alpha$, tedy mají společný vlastní bod R, který určíme tak, že přímkou p proložíme vhodnou pomocnou rovinu ω. Určíme průsečnici $r = \omega \cap \alpha$. Dále určíme bod R, jakožto průsečík přímek r a p.

Příklad 2.5. Jsou dány roviny $\alpha = (n^\alpha, u_S^\alpha)$, $\beta = (n^\beta, u_S^\beta)$, $\gamma = (n^\gamma, u_S^\gamma)$. Jaká je jejich vzájemná poloha? Určete jejich společné body.



Obr. 36: Příklad 2.5.

Řešení: (Obr. 36) Všechny tři roviny jsou navzájem různoběžné. $\alpha \cap \beta = t$, $\beta \cap \gamma = u$, $\alpha \cap \gamma = v$. Mají společný jediný bod T; $T = t \cap u \cap v$.

3 Metrické úlohy

Metrické úlohy vyžadují zjišťování, či určování délek úseček, nebo velikostí úhlů. Jsou to úlohy, zabývající se měřením velikostí.

Narozdíl od polohových úloh je nutné znát umístění středu promítání S a velikost distance d.

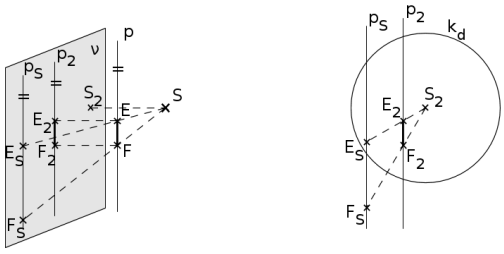
3.1 Skutečná velikost úsečky

Tato kapitola se bude zabývat určováním velikostí úseček ležících na přímkách ve speciální poloze, potom provedeme úvahu, na základě které lze určit skutečná velikost úsečky na přímce v obecné poloze.

Určete velikost úsečky:

(1) $\overline{EF} \subset p;\ \ p \parallel \nu.$

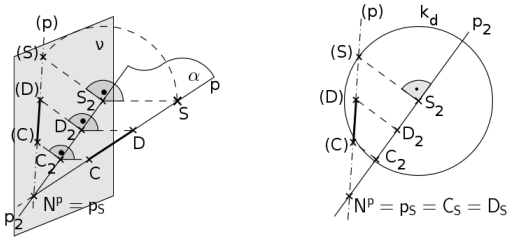
Velikost úsečky na přímce rovnoběžné s průmětnou je pravoúhlým promítáním zachována, tedy $|\overline{EF}| = |\overline{E_2F_2}|$.



Obr. 37: Skutečná velikost úsečky (1)

(2) $\overline{CD} \subset p;\ \ S \in p.$

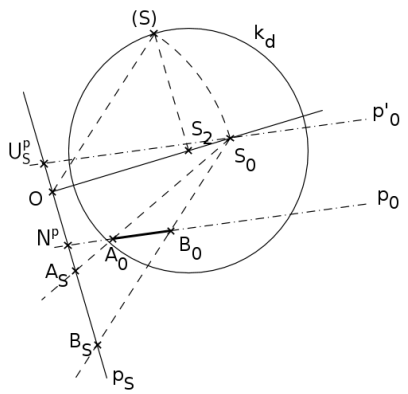
Středové průměty bodů C, D splývají, skutečnou velikost úsečky zjistíme sklopením pravoúhle promítací roviny α přímky p do průmětny ν.



Obr. 38: Skutečná velikost úsečky (2)

(3) $\overline{AB} \subset p$.

Skutečnou velikost úsečky $\overline{AB} \subset p$ určíme otočením středově promítací roviny $\lambda = (p, S)$ přímky p kolem její stopy p_S do průmětny ν. Lze využít postupu užívaného v kótovaném promítání. Otočíme bod S do bodu S_0 (vzdálenost středu S od průmětny ν je distance d, určíme střed O a poloměr otáčení $|O(S)|$). Směrová přímka $p' = SU_S^p$ leží v rovině λ, a proto $p'_0 = S_0U_S^p$. Vzhledem k rovnoběžnosti přímek p, p' platí, že $p_0 \parallel p'_0$ a $N^p \in p_0$. Jestliže z bodu S_0 promítneme A_S, B_S do bodů A_0, B_0 přímky p_0, pak $|\overline{AB}| = |\overline{A_0B_0}|$.



Obr. 39: Skutečná velikost úsečky

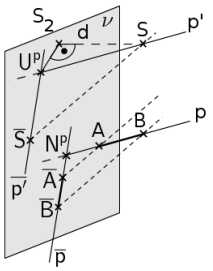
V případě, že se body A_0, B_0 promítají na přímku p_0 pod malým úhlem, vyslovíme následující úvahu, graficky znázorněnou na Obr. 40.

Mějme v prostoru dánu průmětnu ν a přímku p, jejímž stopníkem je bod N^p a zvolme libovolnou přímku $\overline{p}$ takovou, že $\overline{p} \subset \nu$ a procházející bodem N^p. Na přímce p nechť jsou body A a B. Určíme body $\overline{A}$, $\overline{B}$ ležící na přímce $\overline{p}$ tak, aby $|N^pA| = |N^p\overline{A}|$ a $|N^pB| = |N^p\overline{B}|$. Tedy velikost úsečky s krajími body A, B je stejná jako velikost úsečky s krajními body $\overline{A}$, $\overline{B}$. Paprsky $A\overline{A}$, $B\overline{B}$ jsou rovnoběžné a leží v rovině α; $\alpha = (p, \overline{p})$, jsou to paprsky kosoúhlého promítání, které úsečku přímky p promítne do stejně velké úsečky přímky $\overline{p}$.

Středové promítání nechť je zadáno středem S a průmětnou ν.

Středem promítání S vedeme směrovou přímku p' přímky p, p' protne průmětnu ν v úběžníku U^p. Dále přímka $\overline{p'}$, která leží v ν a prochází úběžníkem U^p je rovnoběžná s přímkou $\overline{p}$. Paprsek kosoúhlého promítání procházející bodem S, rovnoběžný s $A\overline{A}$, protne přímku $\overline{p'}$ a tedy průmětnu ν v bodě $\overline{S}$. Máme tedy dva podobné rovnoramenné trojúhelníky: $\triangle N^p\overline{A}A \simeq \triangle U^p\overline{S}S$. Proto $|U^pS| = |U^p\overline{S}|$.

Z pravoúhlého trojúhelníku U^pS_2S lze zjistit velikost úsečky U^pS, protože známe velikosti odvěsen U^pS_2, d.



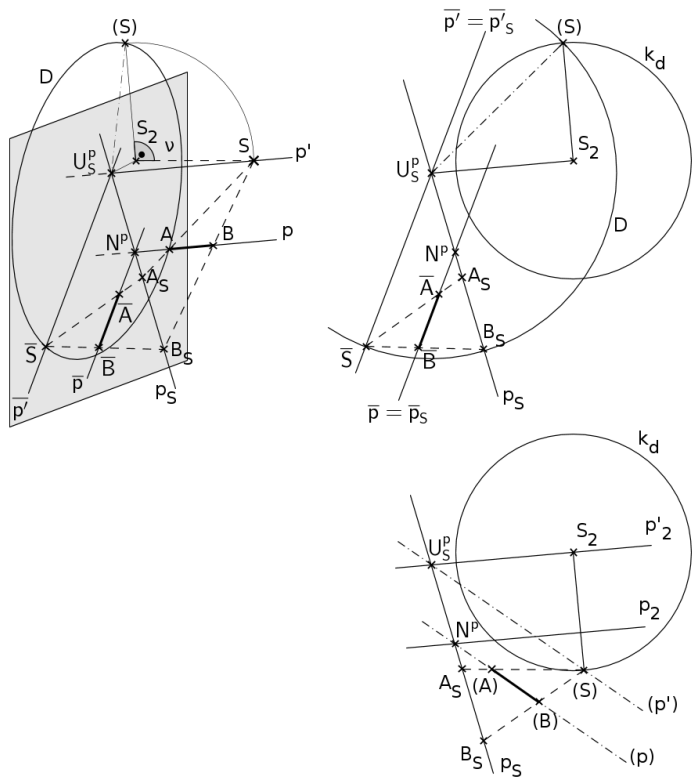
Obr. 40: Úvaha o skutečné velikosti úsečky

Libovolnou volbou směru přímky $\overline{p}$ vznikne jediný bod $\overline{S}$, avšak při každém směru přímky $\overline{p}$ je velikost úsečky $U^pS = U^p\overline{S}$ vždy stejná. Bod $\overline{S}$ tedy leží na kružnici D se středem U^p a poloměrem $|U^pS| = |U^p\overline{S}|$, která se nazývá **dělící kružnice**, viz Obr. 41.

Ztotožníme-li přímku $\overline{p'}$ se sklopenou přímkou (p), potom $\overline{S} = (S)$, viz v pravo dole v Obr. 41.

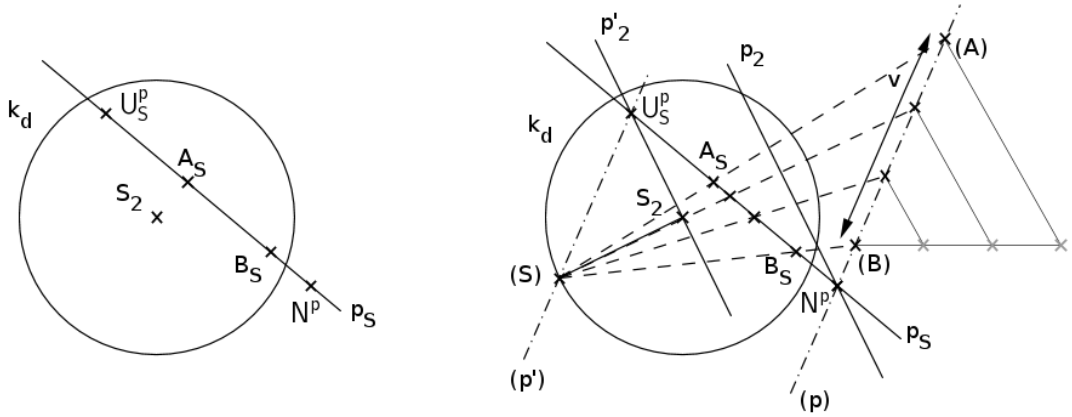
V souvislosti s touto úvahou vyslovíme následující větu, která je i s důkazem ve zdroji [2] na straně 54.

Nechť existují $A, B \in p$, kde přímka p je daná svým stopníkem a úběžníkem, $N^p \neq U^p_S$. Na kružnici D (dělící kružnice), $D \subset \nu$ se středem U^p_S a poloměrem $|U^p_S S|$ zvolme bod $\overline{S} \notin p_S$ a bodem N^p veďme rovnoběžku $\overline{p}$ s přímkou $\overline{S}U^p_S$. Promítneme-li body A_S, B_S z bodu $\overline{S}$ na přímku $\overline{p}$ do bodů $\overline{A}$, $\overline{B}$, pak platí $|\overline{AB}| = |\overline{\overline{A}\,\overline{B}}|$.



Obr. 41: Skutečná velikost úsečky (3)

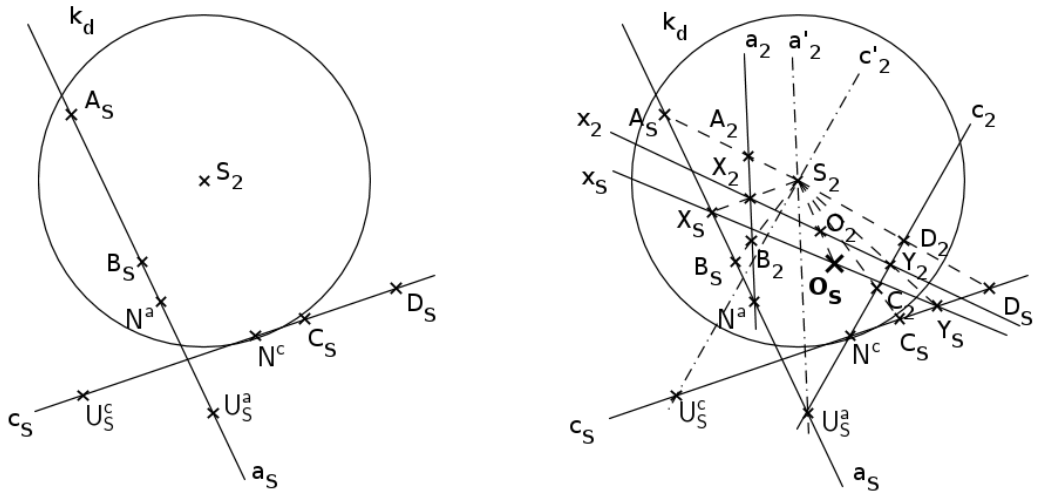
Příklad 3.1. Je dána přímka $p = (p_S, N^p, U_S^p)$ a na ní úsečka $\overline{AB} = (\overline{A_S B_S})$. Určete velikost v úsečky $\overline{AB}$ a rozdělte ji na tři stejné části.



Obr. 42: Příklad 3.1.

Řešení: (Obr. 42) Přímka p je v obecné poloze. Pomocí konstrukce dělící kružnice, nebo jejího zjedndušení nalezneme sklopenou přímku (p). Na ní je úsečka $\overline{AB}$ ve skutečné velikosti. Určíme třetiny úsečky $\overline{AB}$ a sestrojíme středové průměty obou vnitřních bodů úsečky.

Příklad 3.2. Sestrojte střed O úsečky $\overline{XY}$, kde X je střed úsečky $\overline{AB}$ ležící na přímce $a = (a_S, N^a, U_S^a)$ a Y je střed úsečky $\overline{CD}$ ležící na přímce $c = (c_S, N^c, U_S^c)$.



Obr. 43: Příklad 3.2.

Řešení: (Obr. 43) Rovnoběžné promítání zachovává dělící poměr. Při řešení příkladu toho můžeme využít. Najdeme pravoúhlé průměty koncových bodů úsečky, sestrojíme pravoúhlý průmět středu úsečky a z něj středový průmět středu úsečky. Tento postup provedeme třikrát.

3.2 Přímka kolmá k rovině a rovina kolmá k přímce

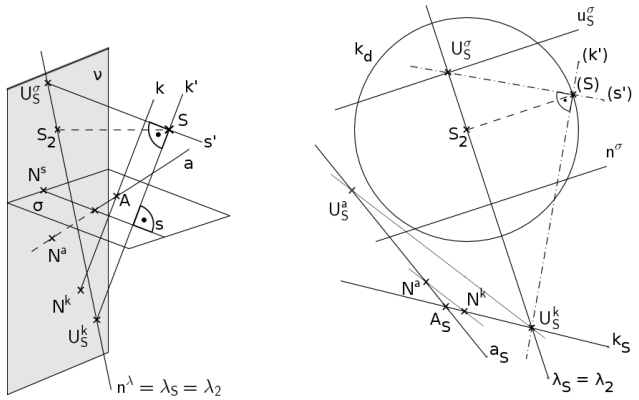
Konstrukce těchto dvou úloh (z nichž by stačilo odvodit jednu a druhá se konstruuje „opačným“ postupem) je velmi častá při konstrukci těles.

Přímka kolmá k rovině:

- Sestrojte přímku k; $k \perp \sigma \wedge A \in k$.

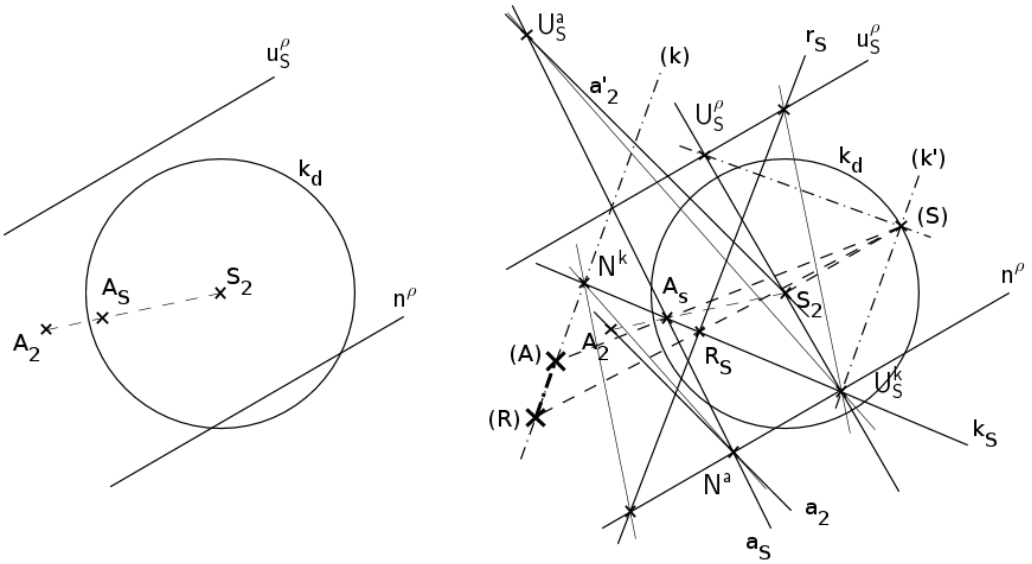
  Všechny přímky, kolmé k rovině, jsou navzájem rovnoběžné, mají tedy společnou směrovou přímku k' a úběžník nazvaný **úběžník kolmic (normál)**, označujeme obvykle U_S^k. Je-li přímka k kolmá k rovině σ je kolmá ke všem přímkám roviny, tedy i ke spádovým přímkám. Proto směrová přímka k' a směrová přímka spádové přímky s' jsou na sebe kolmé, obě prochází středem promítání S a určují rovinu λ, která je kolmá jak k průmětně ν tak k rovině σ. Úběžník kolmic patří směrové přímce k' a leží v průmětně ν, proto tedy leží na stopě roviny λ.

Známe tedy úběžník přímky k, což je úběžník kolmice U_S^k. Zbývá nám dourčit stopník N^k přímky k, který určíme pomocí roviny ω, která je daná přímkami a, k.



Obr. 44: Přímka jdoucí bodem kolmá k rovině

Příklad 3.3. Určete vzdálenost v bodu $A = (A_S, A_2)$ od doviny $\rho = (n^\rho, u_S^\rho)$.



Obr. 45: Příklad 3.3.

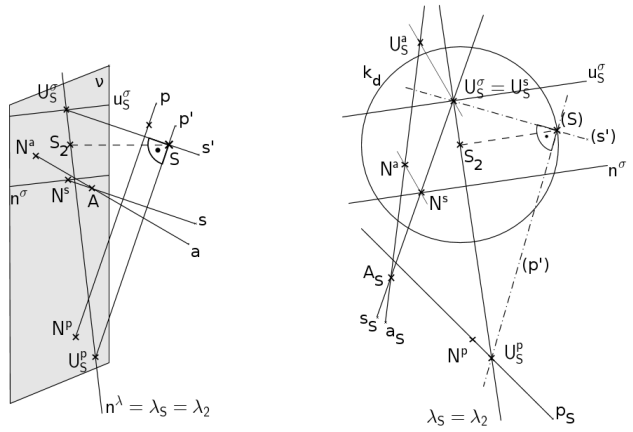
Řešení: (Obr. 45) Nejprve pomocí libovolné přímky a; $A \in a$ zjistíme, že $A \notin \rho$. Hledáme vzdálenost bodu od roviny, neboli vzdálenost na kolmici k, $k \perp \rho \wedge A \in k$, daného bodu A od průsečíku $R = k \cap \rho$. Vzdálenost $v = |A\rho| = |AR| = |(A)(R)|$.

Rovina kolmá k přímce:

- Sestrojte rovinu σ; $\sigma \perp p \wedge A \in \sigma$.

  Přímka p je kolmá ke spádové přímce s hledané roviny σ, tedy i $p' \perp s'$. Přímky p' a s' určují rovinu λ, kolmou k průmětně ν a k rovině σ, kterou chceme určit. Rovinu λ můžeme sklopit do průmětny ν a získáme úběžník U_S^σ roviny σ. To je bod, kterým prochází směrová přímka s' spádové přímky s roviny σ, a stopa roviny λ. Úběžnice u_S^σ a stopa roviny λ leží v průmětně ν a jsou na sebe kolmé.

  Známe tedy úběžnici roviny σ a bod A, který má v rovině σ ležet. Zbývá dourčit stopu n^σ roviny σ, která bude procházet stopníkem N^s spádové přímky s. Stopník N^s určíme sestrojením roviny ω, kterou určují dvě různoběžné přímky a a s.



Obr. 46: Rovina jdoucí bodem kolmá k přímce

3.3 Otáčení útvarů v rovině

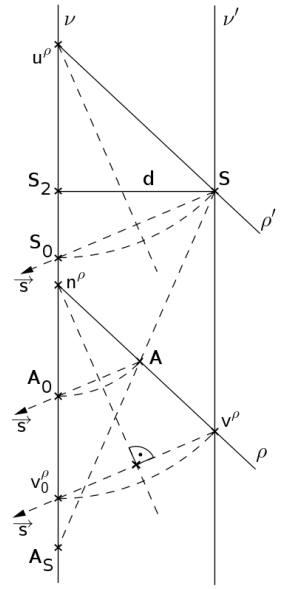
Chceme-li určit skutečnou velikost útvaru v rovině ρ v obecné poloze, nebo naopak sestrojit středový průmět útvaru (ležícího v rovině ρ), jehož velikost a tvar známe, pak potřebujeme rovinu ρ otočit do průmětny ν kolem stopy n^ρ.

Při otočení roviny ρ do průmětny ν kolem stopy n^ρ přejde bod $A \in \rho$ po kružnici otáčení do bodu $A_0 \in \nu$, viz Obr. 47. (Kružnice otáčení leží v rovině kolmé k průmětně ν a má střed na stopě n^ρ.)

Přímky AA_0, BB_0,... jsou navzájem rovnoběžné, současně jsou také kolmé k jedné z rovin souměrnosti rovin ρ a ν.

Otočení roviny můžeme nahradit kosoúhlým (rovnoběžným) promítáním dané směrem $\overrightarrow{s} = AA_0$.

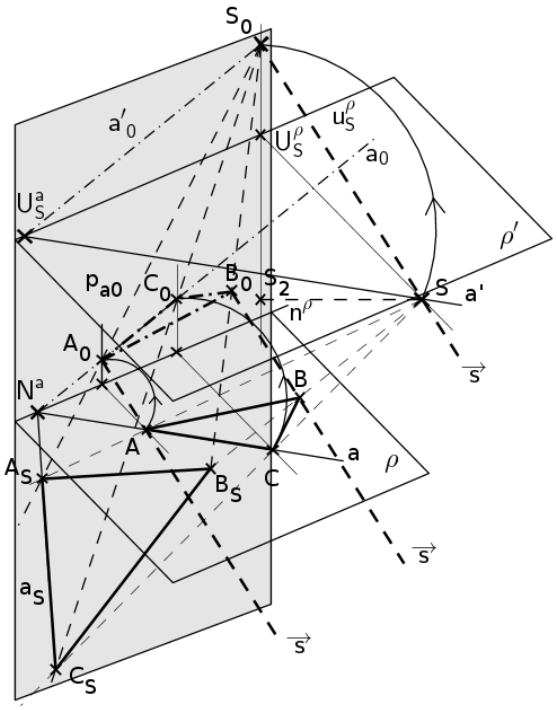
Rovnoběžné promítnutí ve směru $\overrightarrow{s} = AA_0$ středu S odpovídá otočení směrové roviny ρ' do průmětny ν kolem u_S^ρ (ve stejném smyslu jako otočení roviny ρ).



Obr. 47: Otáčení roviny zobrazeno ve třetí průmětně

Středové zobrazení, ve kterém každému bodu $A \in \rho$ odpovídá jeho středový průmět A_S, je zřejmě prostorová kolineace, určená středem S, osou n^ρ a úběžnicí u_S^ρ. Rovnoběžným promítnutím této prostorové kolineace ve směru $\overrightarrow{s} = AA_0$ do roviny ν přechází tato prostorová kolineace v kolineaci rovinnou, jejíž střed S_0 je průmět bodu S ve směru $\overrightarrow{s} = AA_0$ do roviny ν, osa je n^ρ, jedna úběžnice je u_S^ρ a druhá v_0^ρ je průmětem protiúběžnice.

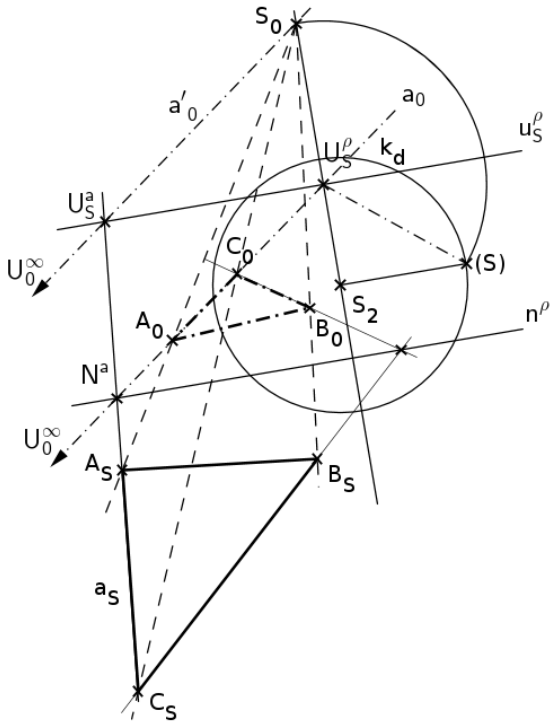
Chceme-li otočit rovinu ρ kolem stopy n^ρ do průmětny ν, využijeme kolineaci $\mathcal{K} = (S_0, n^\rho, u_S^\rho)$. Střed S_0 určíme pomocí otočení směrové roviny ρ' kolem u_S^ρ do průmětny ν. Bod S přejde po kružnici otáčení do bodu S_0. Kružnice otáčení má střed v bodě U_S^ρ a poloměr $|U_S^\rho S| = |U_S^\rho(S)|$, viz Obr. 48.



Obr. 48: Otáčení roviny do průmětny kolem stopy, zobrazení v prostoru

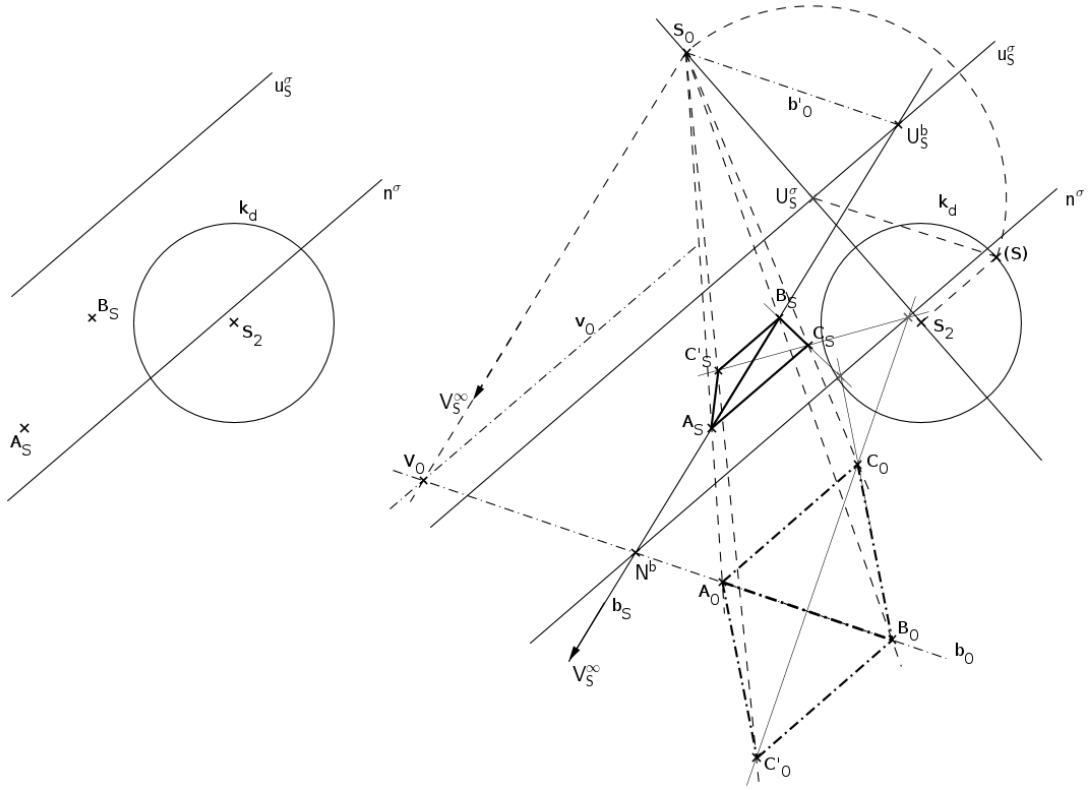
Nechť je v rovině ρ přímka $a = AC$, její stopník N^a leží na stopě roviny, úběžník U_S^a leží na úběžnici roviny.

Vzhledem ke kolineaci $\mathcal{K}$ je stopník N^a samodružný bod a úběžníku U_S^a odpovídá nevlastní bod U_0^∞. Tedy přímce a v kolineaci $\mathcal{K}$ odpovídá přímka $a_0 = N^a U_0^\infty$, neboli přímka a_0 je rovnoběžná s přímkou $a_0' = S_0 U_S^a$ a prochází bodem N^a. Body A_0, C_0 leží na přímce a_0 a získali jsme je promítnutím středových průmětů A_S, C_S bodů A, C ze středu kolineace S_0, viz Obr. 49.



Obr. 49: Otáčení roviny do průmětny kolem stopy, zobrazení v průmětně

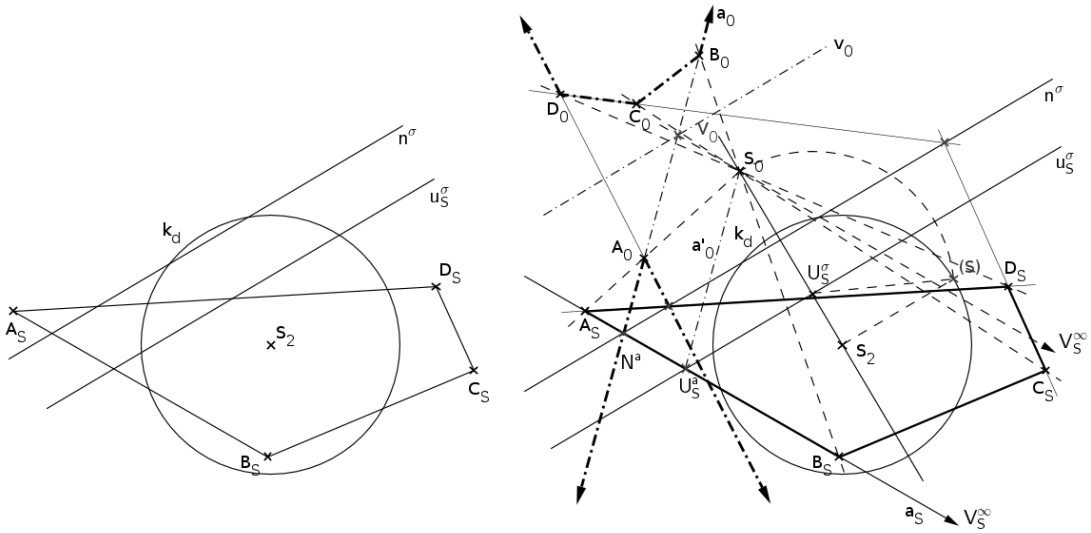
Příklad 3.4. Je dána rovina $\rho = (n^\rho, u_S^\rho)$ a v ní ležící body $A = (A_S)$ a $B = (B_S)$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC.



Obr. 50: Příklad 3.4.

Řešení: (Obr. 50) Body A, B leží na přímce b v rovině ρ. Rovinu ρ otočíme do průmětny ν kolem stopy n^ρ. V otočení nalezneme vrcholy C, C' a pomocí vztahů kolineace nalezneme středové průměty bodu C, C'.

Příklad 3.5. Otočte čtyřúhelník $ABCD = (A_S B_S C_S D_S)$, kerý leží v rovině $\rho = (n^\rho, u_S^\rho)$.



Obr. 51: Příklad 3.5.

Řešení: (Obr. 51) Při otáčení útvarů musíme dávat pozor na tvar otočeného útvaru. Ten závisí na poloze otočené protiúběžnice. Nebo ho určíme využitím samodružných bodů. ($N^a = N_0^a$; jestliže $N^a \in AB$ pak $N_0^a \in A_0B_0$)

4 Konstrukční úlohy

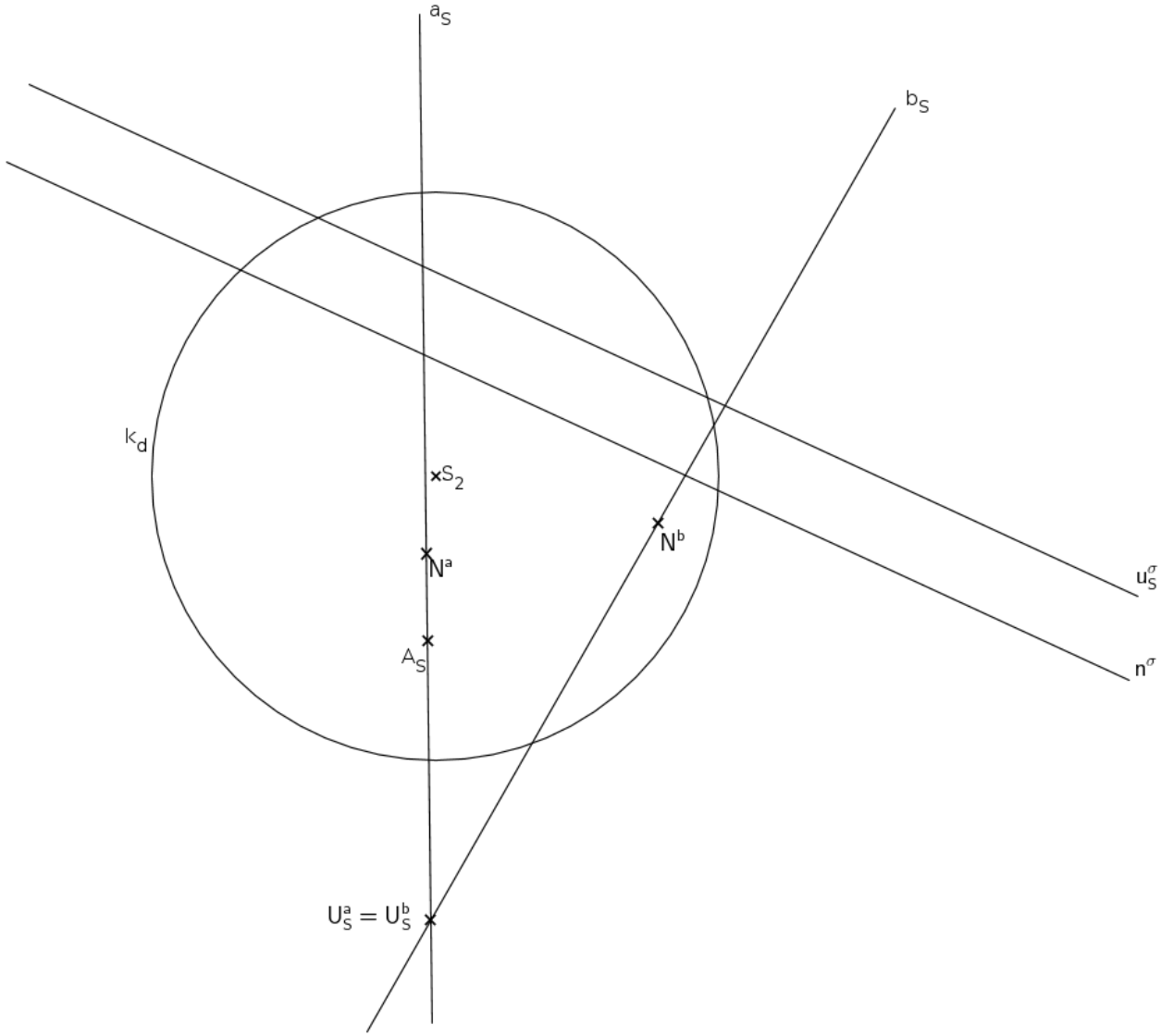
4.1 Hranol

Sestrojte pravidelný trojboký hranol $ABCDEF$, jsou-li dány přímky $a = (a_S, a_2)$, $b = (b_S, b_2)$, na kterých leží dvě jeho hrany po řadě AD, BE. Dále je dán vrchol dolní podstavy $A = (A_S)$, $A \in a$ a rovina horní podstavy $\sigma = (n^\sigma, u_S^\sigma)$.

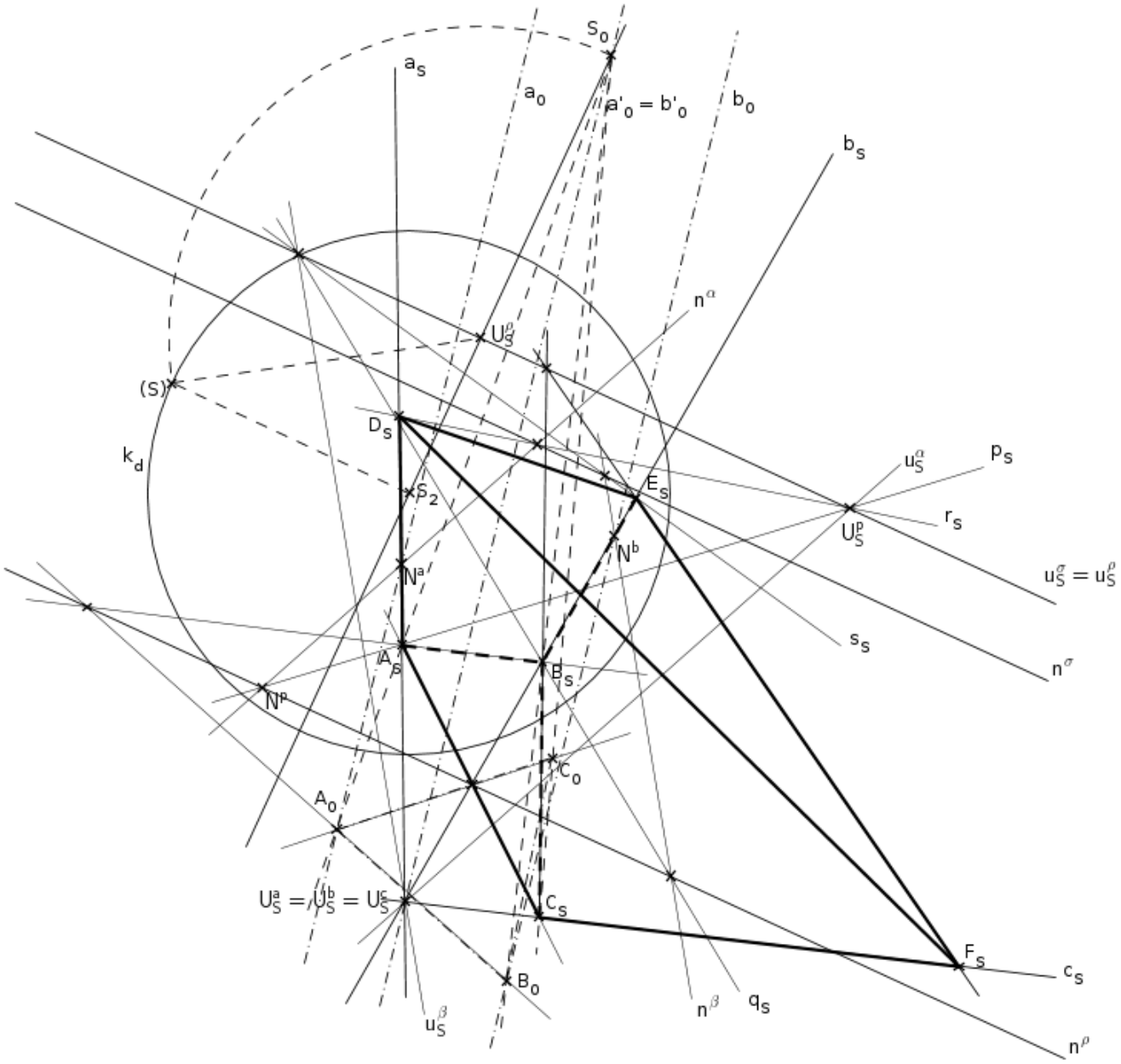
Postup konstrukce

1. ρ; $\rho \parallel \sigma \wedge A \in \rho$ ... rovina dolní podstavy;
2. B; $B = b \cap \rho$;
3. otočení roviny ρ kolem n^ρ do průmětny ν; v otočení sestrojíme rovnostranný trojúhelník $A_0B_0C_0$, k sestrojení středových průmětů bodů A, B, C využijeme kolineace $\mathcal{K} = (S_0, n^\rho, u_S^\rho)$;
4. c; $c \parallel a \wedge C \in c$;
5. D; $D = a \cap \sigma$;
6. E; $E = b \cap \sigma$;
7. F; využití rovnoběžnosti:

   $AC \parallel DF$, $BC \parallel EF$;
8. určení viditelnosti: Body A, B jsou pod průmětnou ν, body D, E nad průmětnou ν. Podstava DEF je viditelná.



Obr. 52: Zadání konstrukční úlohy o hranolu



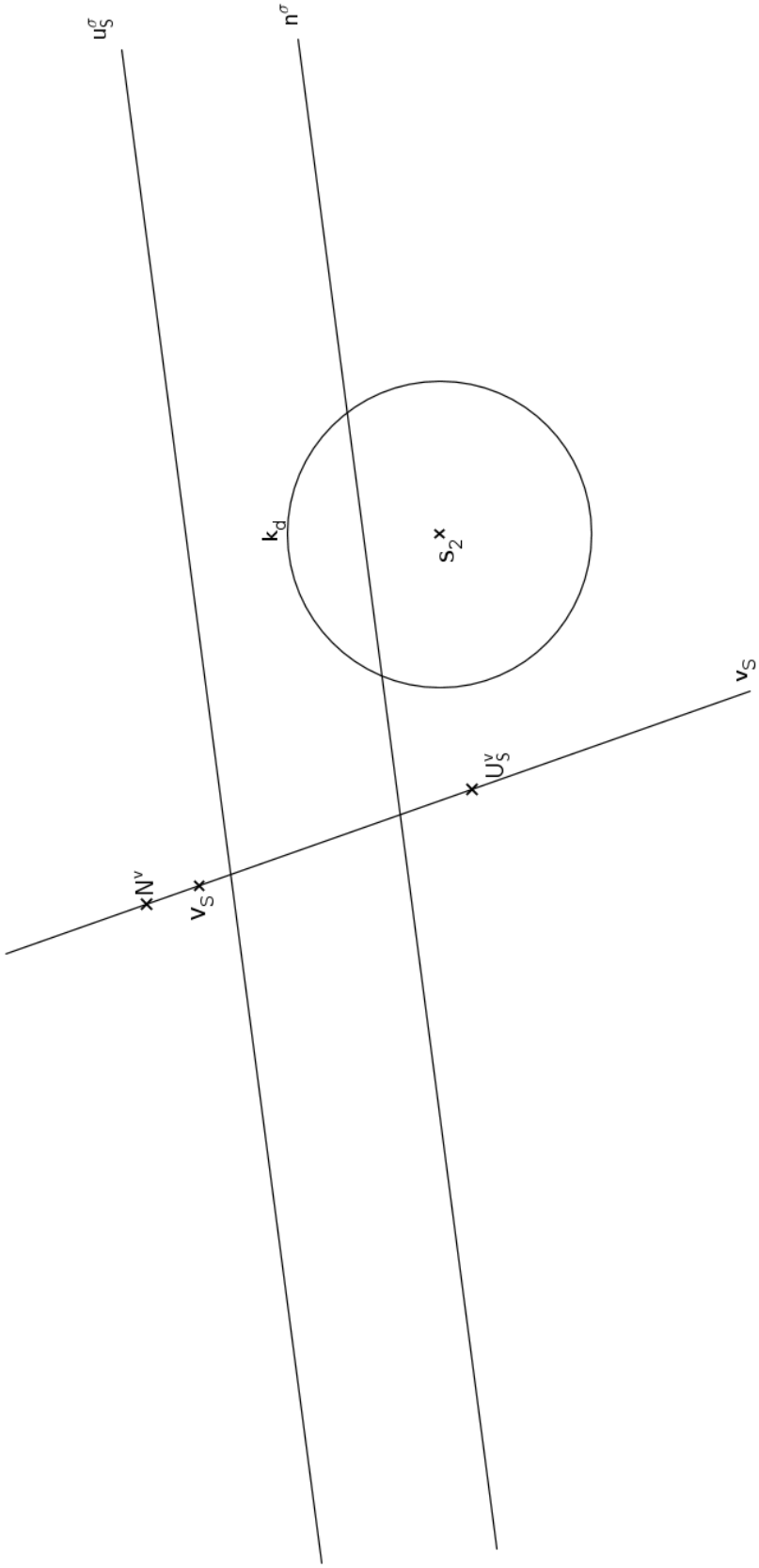
Obr. 53: Řešení konstrukční úlohy o hranolu

4.2 Jehlan

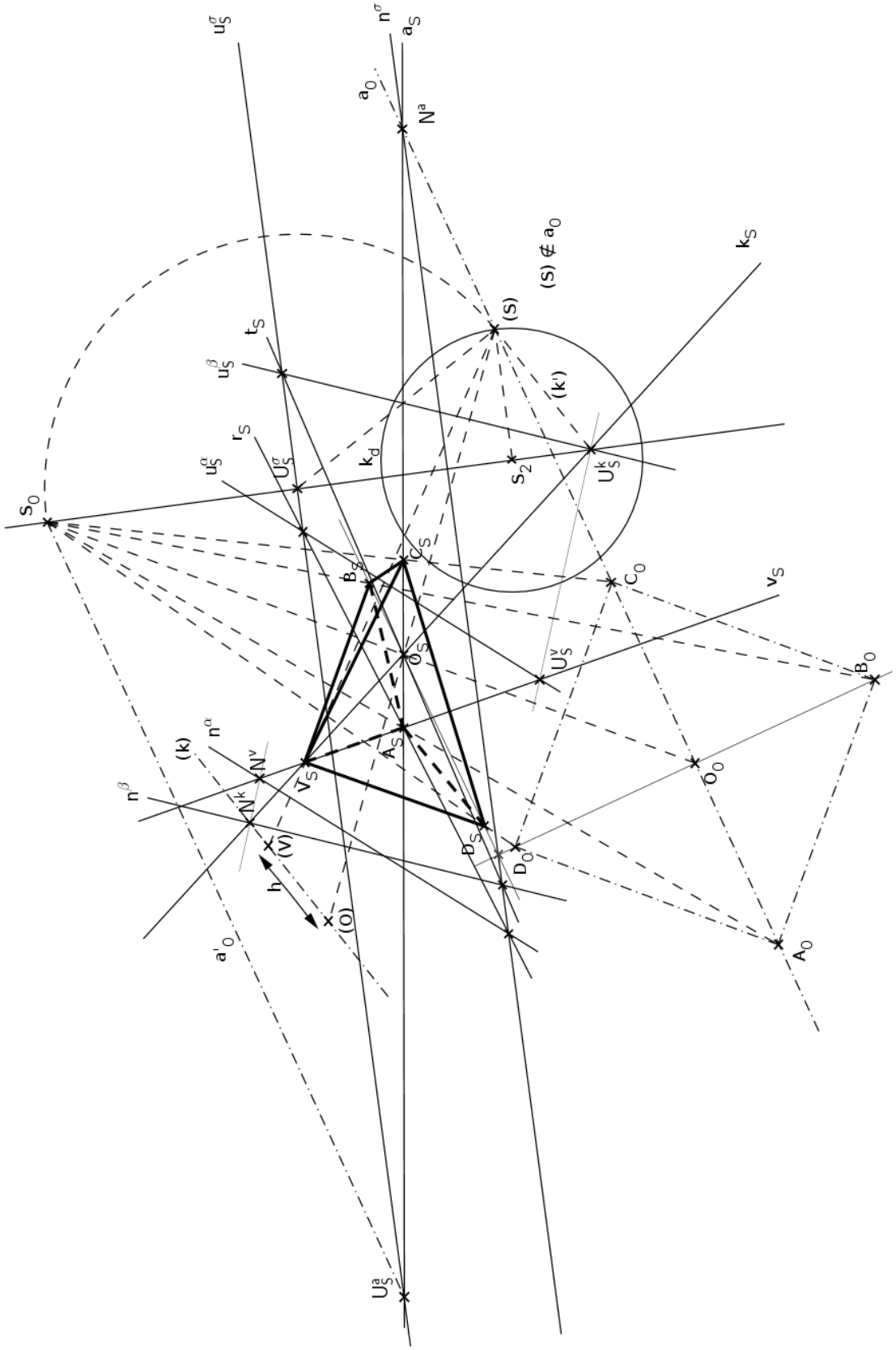
Sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan, je-li dána rovina podstavy $\sigma = (n^\sigma, u_S^\sigma)$, vrchol jehlanu $V = (V_S)$ a přímka $v = (v_S, N^v, U_S^v)$, na které leží hrana AV. Určete skutečnou velikost h výšky jehlanu.

Postup konstrukce

1. $A = v \cap \sigma$ ... vrchol podstavy;
2. k; $k \perp \sigma \wedge V \in k$;
3. O; $O = k \cap \sigma$, O ... střed podstavy;
4. otočení roviny σ kolem n^σ do průmětny ν, v otočení sestrojíme čtverec $A_0B_0C_0D_0$ se středem O_0, užitím kolineace $\mathcal{K} = (S_0, n^\sigma, u_S^\sigma)$ sestrojíme středové průměty bodů B, C, D;
5. určení skutečné velikosti úsečky $h = \overline{OV}$;
6. určení viditelnosti: Body O, V leží pod průmětnou ν, ale bod V leží k ν blíž než bod O a proto je viditelný. Jehlan nestojí „na špičce“ a není vidět celá jeho podstava $ABCD$.



Obr. 54: Zadání konstrukční úlohy o jehlanu



Obr. 55: Řešení konstrukční úlohy o jehlanu

4.3 Krychle

Sestrojte krychli $ABCDA'B'C'D'$, je-li dána rovina $\sigma = (n^\sigma, u_S^\sigma)$ a v ní střed podstavy $O' = (O'_S)$ a vrchol $A' = (A'_S)$.

Postup konstrukce

1. rovinu podstavy σ otočíme kolem n^σ do průmětny ν, v otočení sestrojíme čtverec $A'_0B'_0C'_0D'_0$ se středem O'_0, užitím kolineace $\mathcal{K} = (S_0, n^\sigma, u_S^\sigma)$ určíme středové průměty bodů B', C', D';

2. k; $k \perp \sigma \wedge O' \in k$;

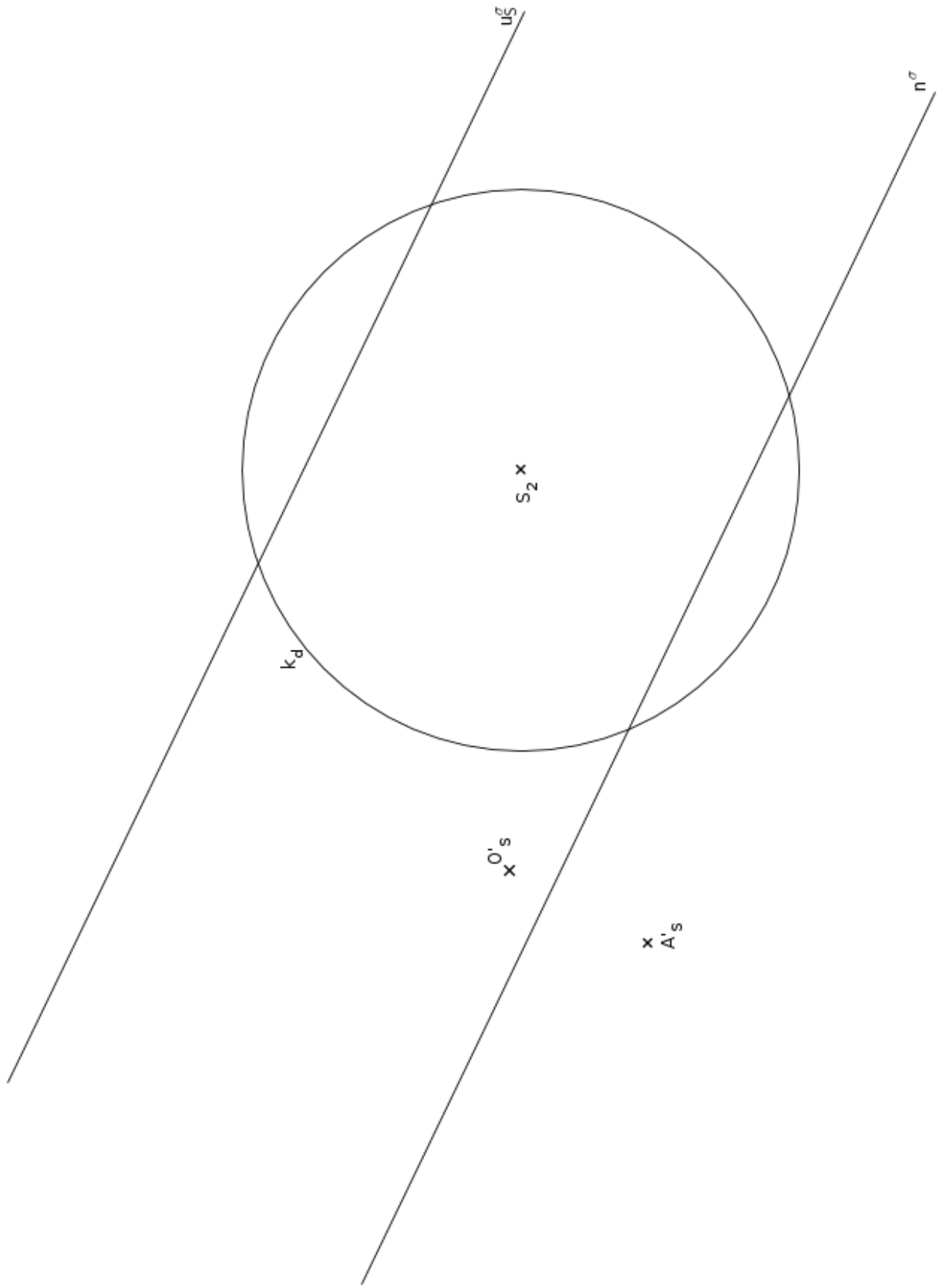
3. $O \in k \wedge |\overline{AB}| = |\overline{OO'}|$;

4. Body A, B, C, D sestrojíme pomocí rovnoběžnosti:

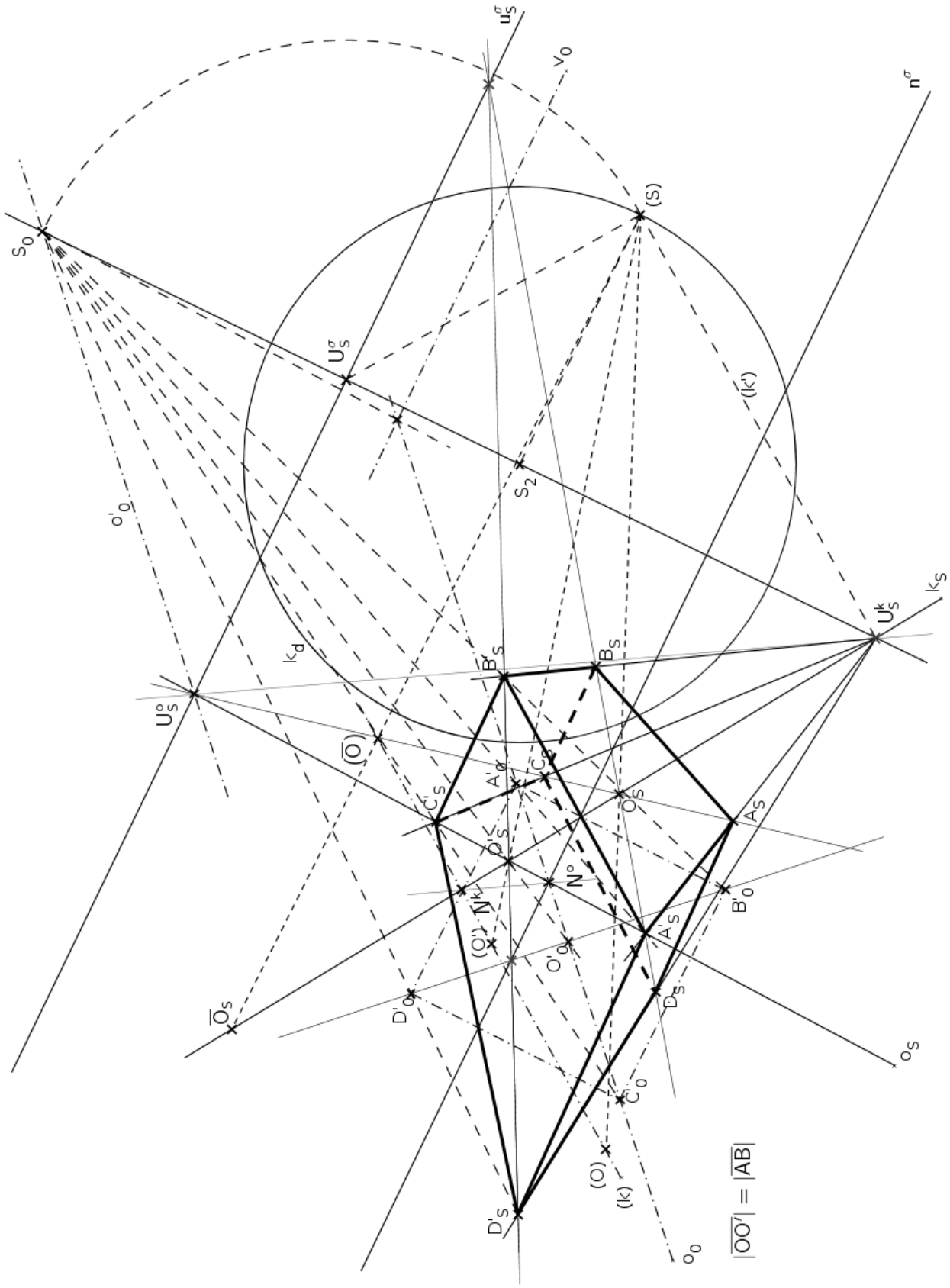
   $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD' \parallel OO'$,

   $AOC \parallel A'O'C'$, $BOD \parallel B'O'D'$;

5. určení viditelnosti: Body O, O' leží pod průmětnou ν, ale bod O' je k ν blíž než bod O a proto je viditelný.



Obr. 56: Zadání konstrukční úlohy o krychli



Obr. 57: Řešení konstrukční úlohy o krychli

4.4 Válec

Sestrojte rotační válec. Jsou-li dány středy obou podstav $A = (a_S, N^a, U_S^a)$, $B = (B_S, N^b, U_S^b)$ a poloměr r. Dále určete skutečnou velikost výšky válce h.

Postup konstrukce

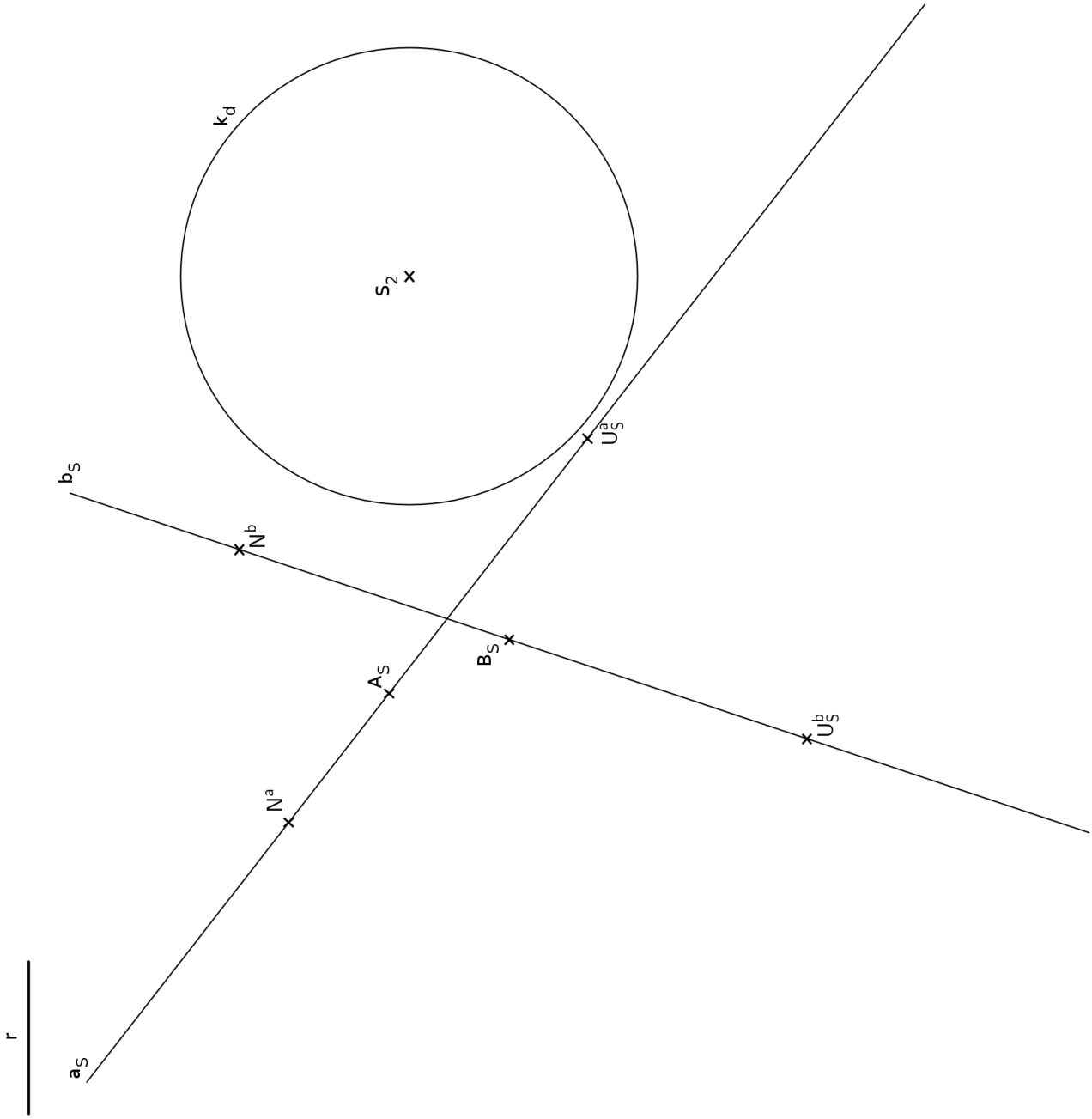
1. o; $o = AB$;
2. α; $\alpha \perp o \wedge A \in \alpha \ldots$ rovina jedné podstavy

   využití spádové přímky m procházející bodem A roviny α;
3. β; $\beta \perp o \wedge B \in \beta \ldots$ rovina druhé podstavy

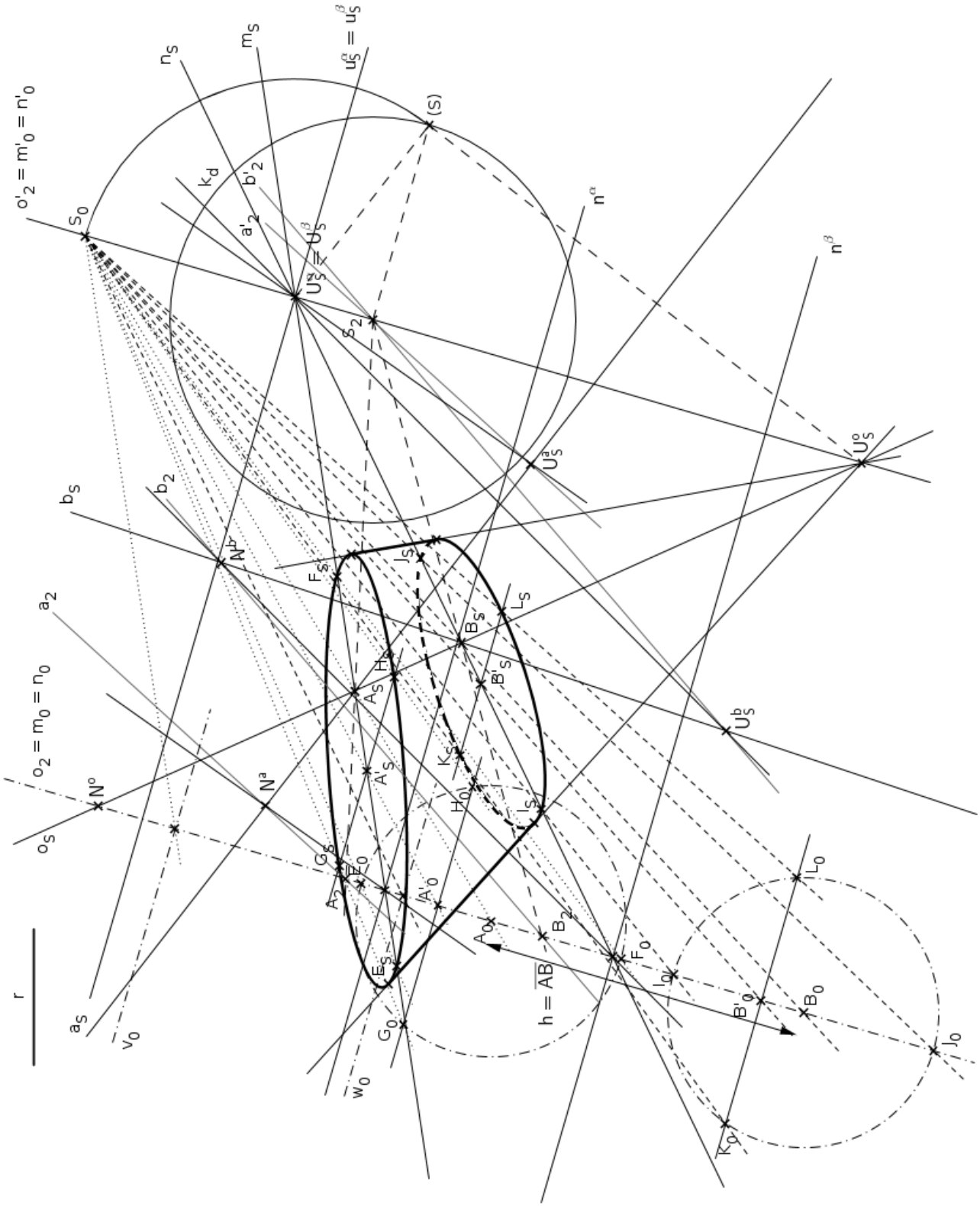
   využití spádové přímky n procházející bodem B roviny β;
4. otočení roviny α kolem n^α do průmětny ν, v otočení sestrojíme kružnici se středem A a poloměrem r, využitím kolineace $\mathcal{K} = (S_0, n^\alpha, u_S^\alpha)$

   EF, GH jsou sdružené průměry středového průmětu podstavné kružnice, v našem případě se jedná o elipsu;
5. otočení roviny β kolem n^β do průmětny ν, v otočení sestrojíme kružnici se středem B a poloměrem r, využitím kolineace $\mathcal{K} = (S_0, n^\beta, u_S^\beta)$

   IJ, KL jsou sdružené průměry středového průmětu podstavné kružnice, v našem případě se jedná o elipsu;
6. zdánlivý obrys válce určíme jako společné tečny průmětů podstav;
7. určení skutečné velikosti výšky válce $h = \overline{AB}$;
8. určení viditelnosti: Body A, B leží pod průmětnou ν, bod A je k ν blíž než bod B, proto podstava se středem A je horní a viditelná. Body změny viditelnosti jsou body dotyku tečen k průmětům podstav.



Obr. 58: Zadání konstrukční úlohy o válci



Obr. 59: Řešení konstrukční úlohy o válci

4.5 Kužel

Sestrojte rotační kužel, je-li dána rovina podstavy $\rho = (n^\rho, u_S^\rho)$, střed podstavy $O = (O_S)$, poloměr podstavy r a výška kužele v.

Postup konstrukce

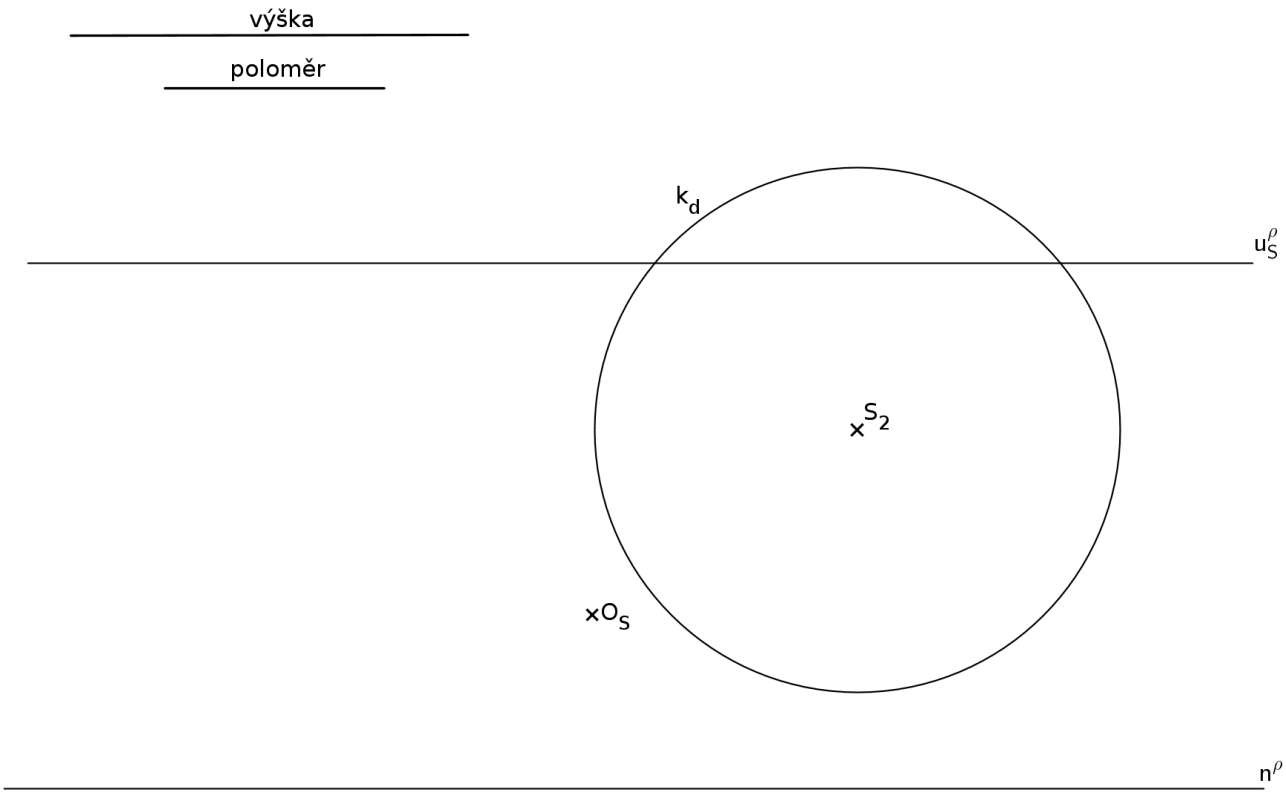
1. otočení roviny ρ kolem n^ρ do průmětny ν, v otočení sestrojení kružnice se středem O a poloměrem r, užitím kolineace $\mathcal{K} = (S_0, n^\rho, u_S^\rho)$ sestrojení středového průmětu podstavy, ktyrým je v našem případě opět elipsa, určená sdruženými průměty PQ, MN;

2. k; $k \perp \rho \wedge O \in k \ldots$ osa kužele;

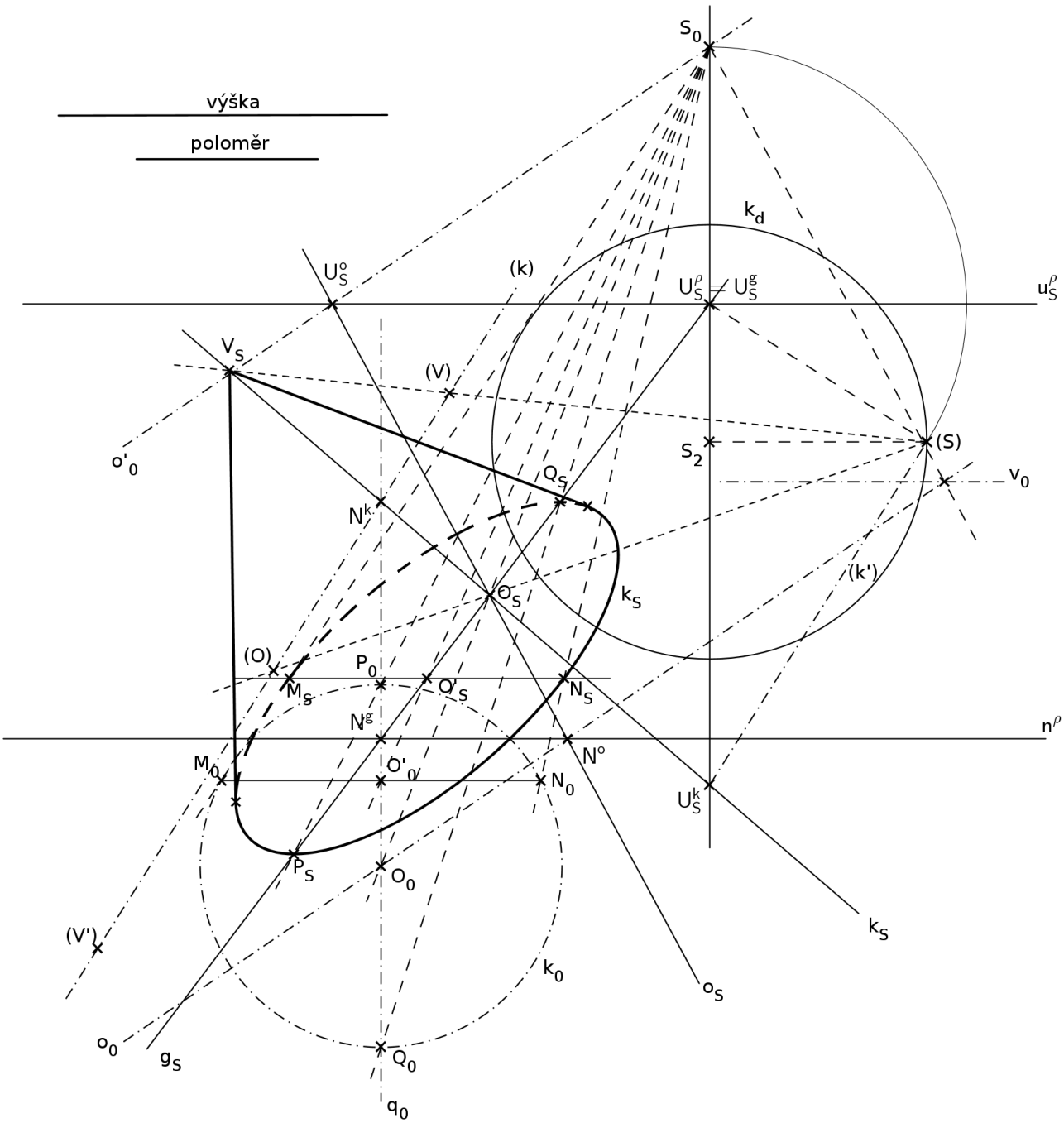
3. V; $V \in k \wedge v = \overline{OV}$;

4. zdánlivý obrys kužele určíme jako tečny průmětu podstavy vedené z průmětu vrcholu V;

5. určení viditelnosti: Bod V je nad průmětnou ν, bod O je pod průmětnou ν, proto podstava není celá viditelná.



Obr. 60: Zadání konstrukční úlohy o kuželu



Obr. 61: Řešení konstrukční úlohy o kuželu

4.6 Krychle v kouli

Sestrojte krychli $ABCDA'B'C'D'$, je-li dána kulová plocha κ se středem $O = (o_S, N^o, U_S^o)$ a poloměrem r, která je krychli „vepsaná“ a tečná rovina $\sigma = (n^\sigma, u_S^\sigma)$ kulové plochy, ve které leží stěna $ABCD$ a hrana AB je rovnoběžná s průmětnou ν.

Postup konstrukce

1. k; $k \perp \sigma \wedge O \in k$;
2. T; $T = k \cap \sigma$ ... bod dotyku kulové plochy κ s rovinou σ;
3. $a/2 = |OT|$;
4. rovinu σ otočíme kolem n^σ do průmětny ν, v otočení sestrojíme čtverec $A_0B_0C_0D_0$ jehož střed je v bodě T_0 a hrana $A_0B_0 \parallel n^\sigma$, pomocí kolineace $\mathcal{K} = (S_0, n^\sigma, u_S^\sigma)$ sestrojíme středový průmět stěny $ABCD$;
5. T'; $T' \in k \wedge |OT| = |OT'|$;

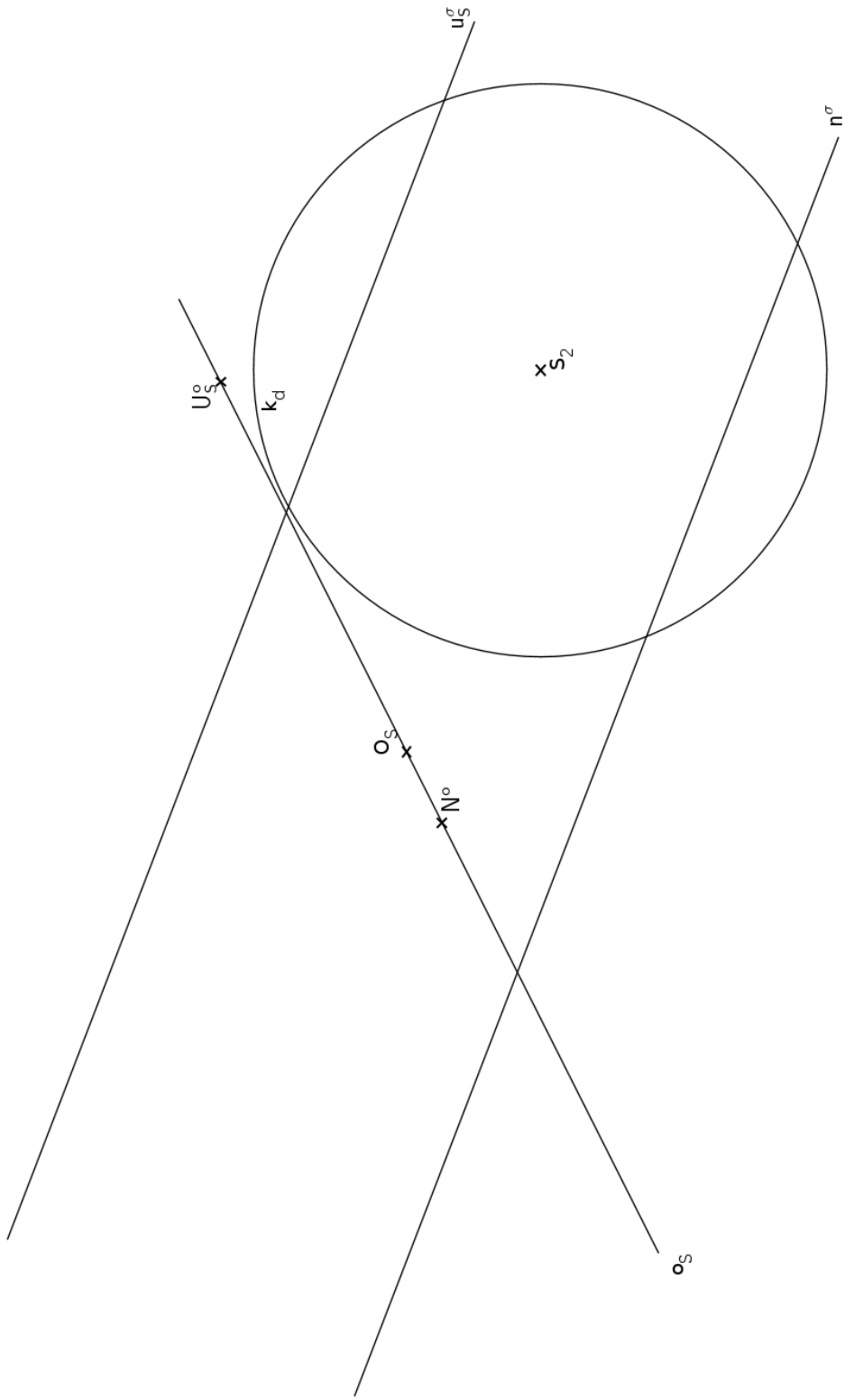
   $|TT'| = a$;
6. využitím rovnoběžnosti doplníme zbývající vrcholy:

   $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$,

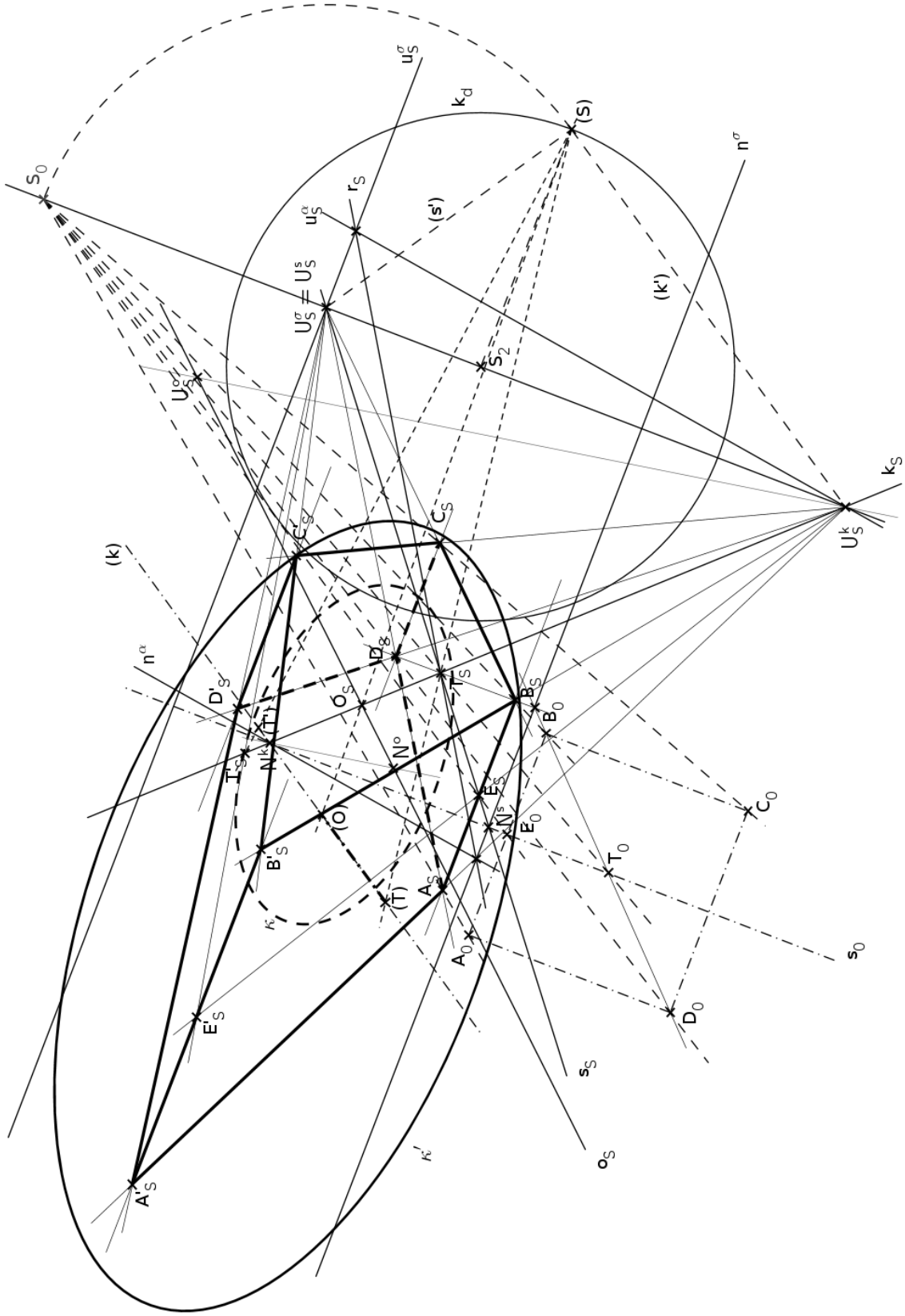
   $AB \parallel CD \parallel A'B' \parallel C'D'$,

   $AD \parallel BC \parallel A'D' \parallel B'C'$;
7. určení viditelnosti: Body na přímkce k: bod T' je nad průmětnou ν, body O, T jsou pod průmětnou ν, bod O k je k ν blíž než bod T. Proto je podstava $A'B'C'D'$ viditelná.

Poznámka: Kulové plochy κ a („opsaná“) κ' jsou v řešení úlohy zobrazeny pro zajímavost.



Obr. 62: Zadání konstrukční úlohy o krychli v kouli



Obr. 63: Řešení konstrukční úlohy o krychli v kouli

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo zpracovat teorii o středovém promítání, ukázat zobrazení geometrických útvarů a základní postupy konstrukcí polohových a metrických úloh, které budou nakonec využity při konstrukci těles.

Důraz je kladen na poslední kapitolu, která měla obsahovat (a také obsahuje) autorské příklady o konstrukci těles.

Rozsah práce nedovolil vyčerpat céle téma středového promítání. V bakalářské práci se proto nevyskytuje určení velikosti úhlů, zobrazení kružnice, i když je využito při konstrukci válce a kužele, průniky těles a osvětlení.

Literatura

[1] URBAN, Alois. Středové promítání: Středové promítní na jednu průmětnu *Deskriptivní geometrie I. díl.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1964. s. 150-157.

[2] MACHALA, František. *Středové promítání a lineární perspektiva.* Vyd. 2. Olomouc: Rektorát Univerzity Palackého v Olomouci, 1992, s. 7-76. ISBN 80707671653

[3] HOLÁŇ, Štěpán a Libuše HOLÁŇOVÁ. *Cvičení z deskriptivní geomerie II: Promítací metody.* Brno: CERM Brno, 1998, s. 72-85. ISBN 8021406488.

[4] DRÁBEK, Karel, František HARANT, Miroslav MENŠÍK a Ota SETZER. *Deskriptivní geometrie II.* dotisk. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1964, s. 79-93.

[5] JUKLOVÁ, Lenka. Středové promítání. *Katedra algebry a geometrie* [online]. [cit. 2014-03-16]. Dostupné z: http://www.kag.upol.cz/data/upload/16/aplikace/stred.pdf

[6] HALFAROVÁ, Hana. Středové promítání: Sbírka příkladů. *Deskriptivní geometrie* [online]. 13.4.2008 [cit. 2014-03-16]. Dostupné z: http://www.deskriptiva.unas.cz/stred_raspri.pdf