

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Zobrazení kvadrik a oblých ploch
ve středovém promítání



Vedoucí diplomové práce:
Mgr. Marie Chodorová, Ph.D.
Rok odevzdání: 2016

Vypracovala:
Veronika Motalová
M-DG, 2.ročník NMgr

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Marie Chodorové, Ph.D. a že jsem v seznamu literatury uvedla všechny prameny použité při psaní této práce.

V Olomouci dne

.....
Veronika Motalová

Poděkování

Chtěla bych poděkovat své vedoucí diplomové práce Mgr. Marii Chodorové, Ph.D. za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce.

Obsah

Úvod	6
1 Středová kolineace	9
1.1 Středová kolineace mezi dvěma rovinami	9
1.2 Středová kolineace v rovině	11
1.3 Konstrukce kuželoseček užitím středové kolineace	12
2 Středové zobrazení kružnice	17
3 Rotační plochy	25
3.1 Rotační přímkové plochy	26
3.2 Kulová plocha a anuloid	27
3.3 Rotační kvadriky	28
4 Kulová plocha ve středovém promítání	31
4.1 Quételetova-Dandelinova věta	32
4.2 Kulová plocha ve středovém promítání	32
5 Rotační kvadriky ve středovém promítání	37
5.1 Elipsoid ve středovém promítání	38
5.2 Paraboloid ve středovém promítání	50
5.3 Hyperboloid ve středovém promítání	56
6 Oblé rotační plochy ve středovém promítání	70
6.1 Anuloid ve středovém promítání	71
6.2 Obecné oblé plochy ve středovém promítání	79
Závěr	83
Literatura	84
Přílohy	85

Seznam obrázků

1	Kolineace mezi rovinami	10
2	Kolineace v rovině	11
3	Příklad 1.1.(a) - zadání	12
4	Příklad 1.1.(a) - řešení	13
5	Příklad 1.1.(b)	14
6	Příklad 1.1.(c)	15
7	Kružnice se zobrazuje na úsečku	17
8	Kružnice se zobrazuje na polopřímku	18
9	Kružnice se zobrazuje na dvě polopřímky	18
10	Kružnice se zobrazuje na přímku	19
11	Kružnice se zobrazuje na nevlastní přímku	19
12	Kružnice se zobrazuje na kružnici	20
13	Otáčení roviny kružnice do průmětny	21
14	Příklad 2.1.	22
15	Příklad 2.2.	23
16	Příklad 2.3.	24
17	Rotační plocha	25
18	Rotační přímkové plochy po řadě: b), c), d)	27
19	Kulová plocha	27
20	Anuloidy	28
21	Rotační kvadrika - elipsoid	29
22	Rotační kvadrika - paraboloid	29
23	Rotační kvadrika - hyperboloid	30
24	Kulová plocha ve středovém promítání	31
25	Quételetova-Dandelinova věta	32
26	Příklad 4.1.	33
27	Příklad 4.2.	34
28	Příklad 4.3.	35
29	Příklad 4.4.	36
30	Protáhlý elipsoid, osa rovnoběžná s průmětnou	40
31	Zploštělý elipsoid, osa rovnoběžná s průmětnou	41
32	Protáhlý elipsoid, osa kolmá k průmětně	43
33	Zploštělý elipsoid, osa kolmá k průmětně	44
34	Protáhlý elipsoid	46
35	Zploštělý elipsoid	47
36	Kulová plocha	49
37	Rotační paraboloid, osa rovnoběžná s průmětnou	51
38	Rotační paraboloid, osa kolmá k průmětně	53
39	Rotační paraboloid	55
40	Rotační dvojdílný hyperboloid, osa rovnoběžná s průmětnou	58
41	Rotační jednodílný hyperboloid, osa rovnoběžná s průmětnou	59
42	Rotační dvojdílný hyperboloid, osa kolmá k průmětně	61
43	Rotační jednodílný hyperboloid, osa kolmá k průmětně	62
44	Rotační dvojdílný hyperboloid	64

45	Rotační jednodílný hyperboloid	65
46	Dva rotační hyperboloidy	67
47	Přímkové plocha - rotační jednodílný hyperboloid	69
48	Anuloid 1	72
49	Anuloid 2	74
50	Axoid	76
51	Menoid	78
52	Oblá plocha 1	80
53	Oblá plocha 2	82
54	Zadání elipsoidu, osa rovnoběžná s průmětnou	85
55	Zadání elipsoidu, osa kolmá k průmětně	86
56	Zadání elipsoidu	87
57	Zadání kulové plochy	88
58	Zadání rotačního paraboloidu, osa rovnoběžná s průmětnou	89
59	Zadání rotačního paraboloidu, osa kolmá k průmětně	90
60	Zadání rotačního paraboloidu	91
61	Zadání rotačního hyperboloidu, osa rovnoběžná s průmětnou . . .	92
62	Zadání rotačního hyperboloidu, osa kolmá k průmětně	93
63	Zadání rotačního hyperboloidu	94
64	Zadání dvou rotačních hyperboloidů	95
65	Zadání přímkové plochy	96
66	Zadání anuloidu 1	97
67	Zadání anuloidu 2	98
68	Zadání axoidu	99
69	Zadání menoidu	100
70	Zadání oblé plochy 1	101
71	Zadání oblé plochy 2	102

Úvod

Tato diplomová práce volně navazuje na mou bakalářskou práci, která podrobně vysvětluje základy středového promítání na jednu průmětnu. V textu se tedy vychází z předpokladu, že čtenář ovládá metodu středového promítání, základní polohové i metrické úlohy.

Cílem této práce je seznámit čtenáře se zobrazováním kvadrik a oblých ploch ve středovém promítání. Jednotlivé kapitoly na sebe navazují, k pochopení jedné kapitoly je potřeba porozumět teorii a mít dovednosti předložené v předchozích kapitolách.

Diplomová práce obsahuje velké množství obrázků. Prostorová schémata ilustrují teorii a pomáhají při jejím pochopení, příklady slouží k procvičení nabyté teorie. Všechny příklady v této diplomové práci jsou autorské a v každém uvedeném příkladě se předpokládá, že středové promítání je zadáno středem a distancí.

Diplomová práce je rozčleněna do šesti kapitol.

V první kapitole je čtenář seznámen s pojmem *kolineace* do té míry, aby následně porozuměl konstrukci kuželoseček užitím středové kolineace.

Tuto znalost využije ve druhé kapitole, která se podrobně zabývá zobrazením kružnice ve středovém promítání. Tato kapitola bude stěžejní při středovém zobrazování rotačních a oblých ploch a v následujících kapitolách na ni bude často odkazováno.

Třetí kapitola čtenáře seznamuje s rotačními plochami. Objasňuje, co jsou to rotační plochy a jak vznikají, věnuje se jejich terminologii a možnému rozdělení.

Následující kapitola je celá věnována středovému zobrazení kulové plochy. Je to z toho důvodu, že kulová plocha je velmi specifický případ rotační plochy a příklady na její středové zobrazení lze propojit mimo prostorovou představivost také se znalostmi základních konstrukcí ve středovém promítání.

Pátá kapitola se věnuje středovému zobrazení rotačních kvadrik a stejně strukturovaná je i poslední kapitola, která se věnuje středovému zobrazení oblých ploch. Tyto kapitoly jsou zaměřeny více na příklady, které slouží k procvičení a představě o středovém zobrazení rotačních ploch než na teorii zobrazování, protože potřebná teorie byla předložena v kapitolách předchozích. Po slovním zadání následuje stručný popis konstrukce a grafické řešení příkladu. Grafické

zadání je potom v příloze diplomové práce. Toto zadání vždy obsahuje určení středového promítání, osu rotační plochy o a na ní střed O (u nestředových kvadrik vrchol V) rotační kvadriky, či jiný význačný bod u oblých ploch a tvořící křivku k .

Diplomová práce je napsána v programu $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, obrázky a příklady jsou vytvořeny v programu DesignCAD 3D MAX 20.

Použité značení

$A = (A_S, A_2)$	bod, který je zadán svým středovým a pravoúhlým průmětem
$A = (A_S, a_S)$	bod, který je zadán nositelkou
$A = (A_S)$	bod, který je zadán svým středovým průmětem a další podmínkou v textu
$p = (p_S, p_2)$	přímka, která je zadána svým středovým a pravoúhlým průmětem
$p = (N^p, U_S^p)$	přímka, která je zadána svým středovým průmětem, stopníkem a úběžníkem
$\rho = (n^\rho, u_S^\rho)$	rovina, která je zadána svou stopou a úběžnicí
$\mathcal{K} = (S, o, u)$	středová kolineace v rovině, která je určena svým středem, osou a úběžnicí

1 Středová kolineace

Pojem středové kolineace nás bude provázet v podstatě celým tímto textem. Proto nejprve vysvětlíme, co znamená tento pojem, a následně se zaměříme na to, jak lze středovou kolineaci využít při konstrukci obrazu kružnice.

Středová kolineace je obecně geometrické zobrazení, které uvažujeme v rozšířeném Eukleidovském prostoru, je určené středem a dvojicí rovin, jejichž průsečnice se nazývá osa. Podle toho, zda střed a osa jsou vlastní, nebo nevlastní prvky mluvíme o speciálních případech středové kolineace, například o afinitě, stejnolehlosti, posunutí a další. Dále ji můžeme specifikovat pomocí charakteristiky, mluvíme například o středové a osově souměrnosti.

1.1 Středová kolineace mezi dvěma rovinami

Středová kolineace mezi dvěma rovinami je tedy vzájemně jednoznačné geometrické zobrazení, to je geometrická příbuznost dvou rovin. Je určena vlastním bodem S , který nazýváme **střed promítání** a dvěma rovinami ρ_1, ρ_2 , jejichž průsečnicí je vlastní přímka o nazývaná **osa kolineace**. Dále budeme uvažovat roviny ρ_1, ρ_2 , pro které platí $\rho_1 \nparallel \rho_2, \rho_1 \neq \rho_2$ a bod S , který neleží na žádné z rovin ρ_1, ρ_2 .

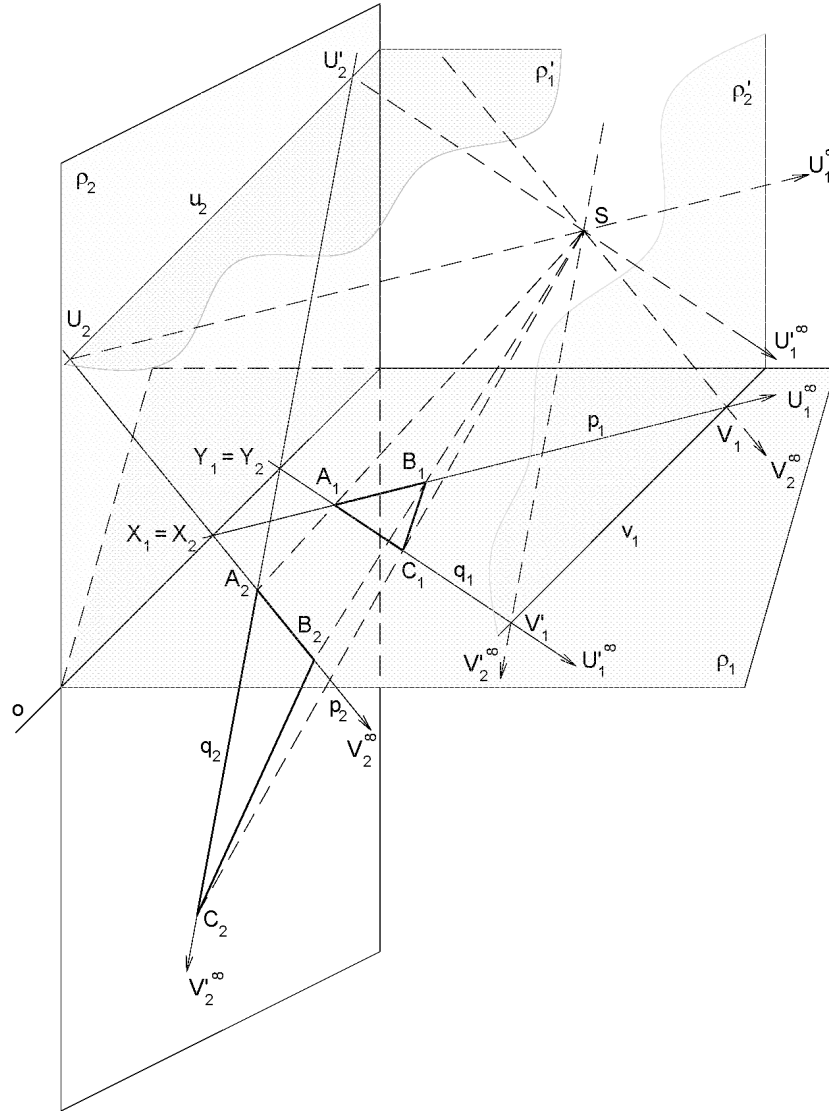
Středová kolineace se středem S a osou o je tedy zobrazení které:

- každému bodu A_1 roviny ρ_1 přiřadí bod A_2 roviny ρ_2 tak, že přímka A_1A_2 prochází bodem S ,
- každé přímce p_1 roviny ρ_1 , která není rovnoběžná s osou o přiřadí přímku p_2 roviny ρ_2 tak, že se přímky p_1, p_2 protínají v bodě na ose o ,
- každé přímce roviny ρ_1 rovnoběžné s osou o přiřadí přímku roviny ρ_2 rovnoběžnou s osou o
- každému bodu na přímce p_1 roviny ρ_1 přiřadí bod na přímce p_2 roviny ρ_2 .

Vlastnosti kolineárního zobrazení, například jak se může zobrazit přímka v závislosti na své poloze vůči prvkům určujícím středovou kolineaci, vyplývají ze středového promítání.

Zaměříme se na práci s rozšířeným prostorem. Je důležité si uvědomit, že ve středové kolineaci se vlastní bod může zobrazit jako bod nevlastní. V obrázku

(Obr. 1) vlastnímu bodu V_1 přímky p_1 , odpovídá nevlastní bod V_2^∞ přímky p_2 a vlastnímu bodu U_2 přímky p_2 , odpovídá nevlastní bod U_1^∞ přímky p_1 . Vlastní body V_1 , U_2 nazýváme souhrnně **úběžníky přímek**, pro přesnost je bod V_1 úběžník přímky p_1 a bod U_2 úběžník přímky p_2 . Podobně se i vlastní přímka může zobrazit jako přímka nevlastní. Ve stejném obrázku vlastní přímce v_1 odpovídá nevlastní přímka roviny ρ_2 , která by se jmenovala v_2^∞ a vlastní přímce u_2 odpovídá nevlastní přímka u_1^∞ roviny ρ_1 . Vlastní přímky v_1 , u_2 se nazývají **úběžnice rovin**, konkrétně v_1 je úběžnice roviny ρ_1 a u_2 je úběžnice roviny ρ_2 . Je tedy zřejmé, že úběžnice jsou rovnoběžné s osou kolineace a že každý bod úběžnice se zobrazí jako nevlastní.



Obr. 1: Kolineace mezi rovinami

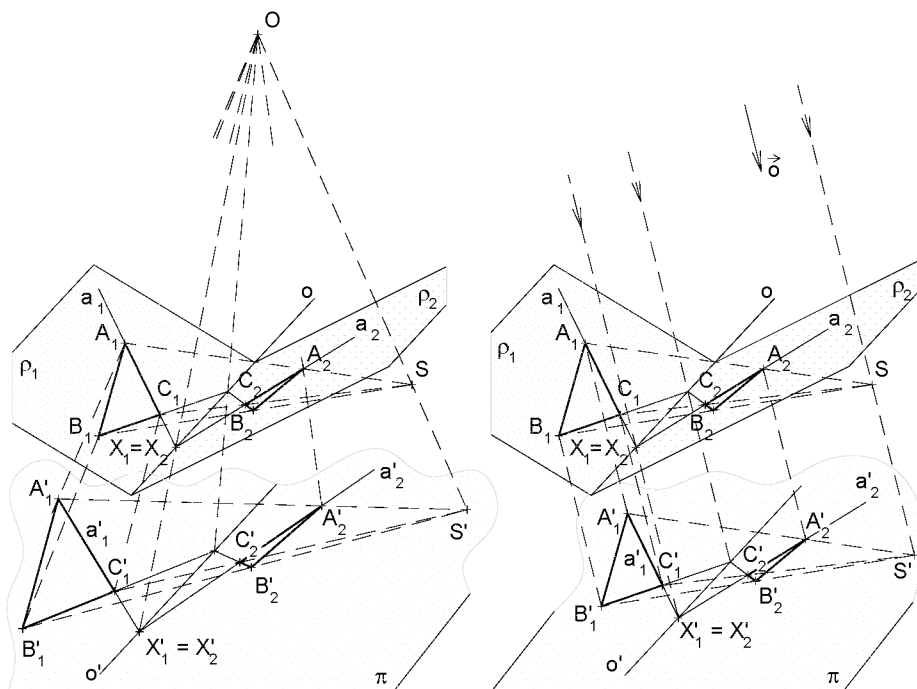
Ve středové kolineaci existují takzvané **samodružné body**, jsou to právě všechny body patřící ose o , například bod $X_1 = X_2$.

1.2 Středová kolineace v rovině

Středová kolineace v rovině vznikne středovým, či rovnoběžným promítnutím středové kolineace mezi rovinami do roviny. Nechť tedy je dána středová kolineace středem S a dvojicí různoběžných rovin ρ_1, ρ_2 , dále nechť je dána další rovina π a bod $O, O \neq S, O \notin \rho_1, O \notin \rho_2, O \notin \pi$, či směr $\vec{o}, \vec{o} \nparallel \rho_1, \vec{o} \nparallel \rho_2, \vec{o} \nparallel \pi$.

Střed středové kolineace v rovině je bod S' , je to bod S promítnutý (z bodu O , či směrem $\vec{o}$) do roviny π , osou kolineace v rovině je přímka o' , která je průmětem přímky o do roviny π . Dvojice kolineárně sdružených bodů například A'_1, A'_2 (přímek a'_1, a'_2) ve středové kolineaci v rovině jsou průměty dvojic kolineárně sdružených bodů A_1, A_2 (přímek a_1, a_2) ve středové kolineaci mezi dvěma rovinami. Viz Obr. 2.

Protože při řešení úloh se využívá pouze kolineace v rovině, budeme v následujícím textu označovat vzor bodu bez jakéhokoliv indexu A a obraz bodu s čárkou A' .



Obr. 2: Kolineace v rovině

1.3 Konstrukce kuželoseček užitím středové kolineace

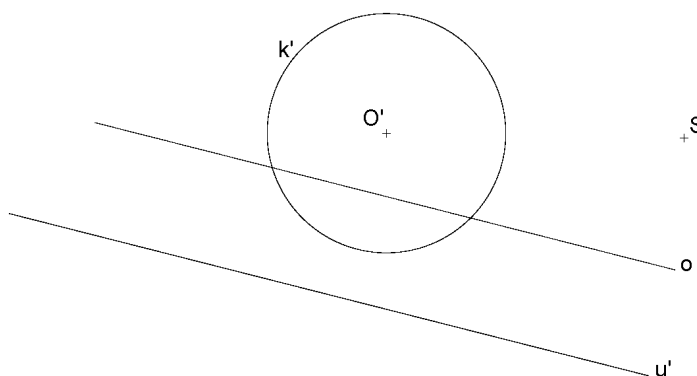
Tato kapitola se zaměří na využití středové kolineace v rovině ke konstrukci obrazu kružnice. Kružnice se ve středové kolineaci v rovině zobrazí jako kuželosečka. To znamená, že obrazem kružnice může být elipsa (kružnice je speciální případ elipsy), parabola, či hyperbola. Druh kuželosečky závisí na počtu bodů kružnice, které se zobrazí jako nevlastní body. Je důležité si uvědomit, že střed kružnice se nezobrazí na střed kuželosečky.

Konstrukci kuželosečky ze známé kružnice budeme často používat v následujících kapitolách, konkrétně při zobrazování kružnice ve středovém promítání.

Obraz kružnice můžeme získat jako obraz libovolného útvaru. To znamená pomocí zobrazení dostatečného počtu bodů, případně tečen v těchto bodech. Častější a elegantnější způsob ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad 1.1. V dané středové kolineaci $\mathcal{K} = (S, o, u')$ sestrojte odpovídající kuželosečku k k dané kružnici k' .

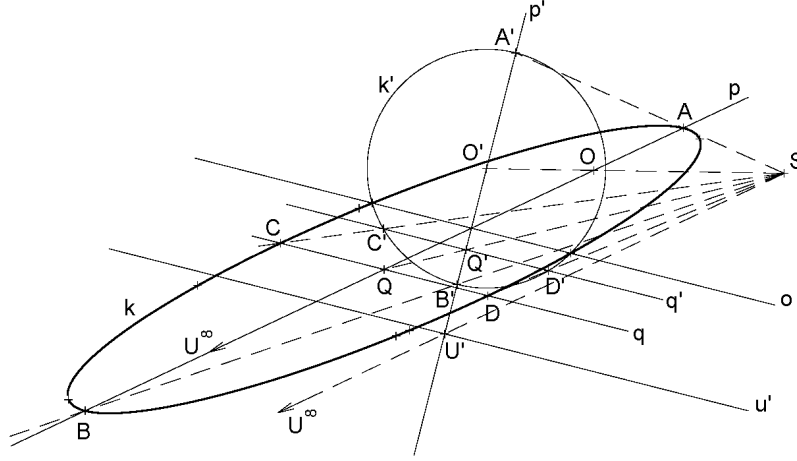
(a) $k' \cap u' = \emptyset$ (Obr. 3)



Obr. 3: Příklad 1.1.(a) - zadání

Řešení: (Obr. 4) Kružnice k' nemá s úběžnicí u' žádný společný bod, proto obrazem této kružnice bude kuželosečka, jejíž všechny body jsou vlastní, tedy obrazem bude elipsa.

Chceme určit její sdružené průměry. Pro sdružené průměry platí, že se navzájem půlí, proto volíme první průměr na přímkce p' , která je kolmá k ose kolineace o a druhý průměr na přímkce q' , která je rovnoběžná s osou o .

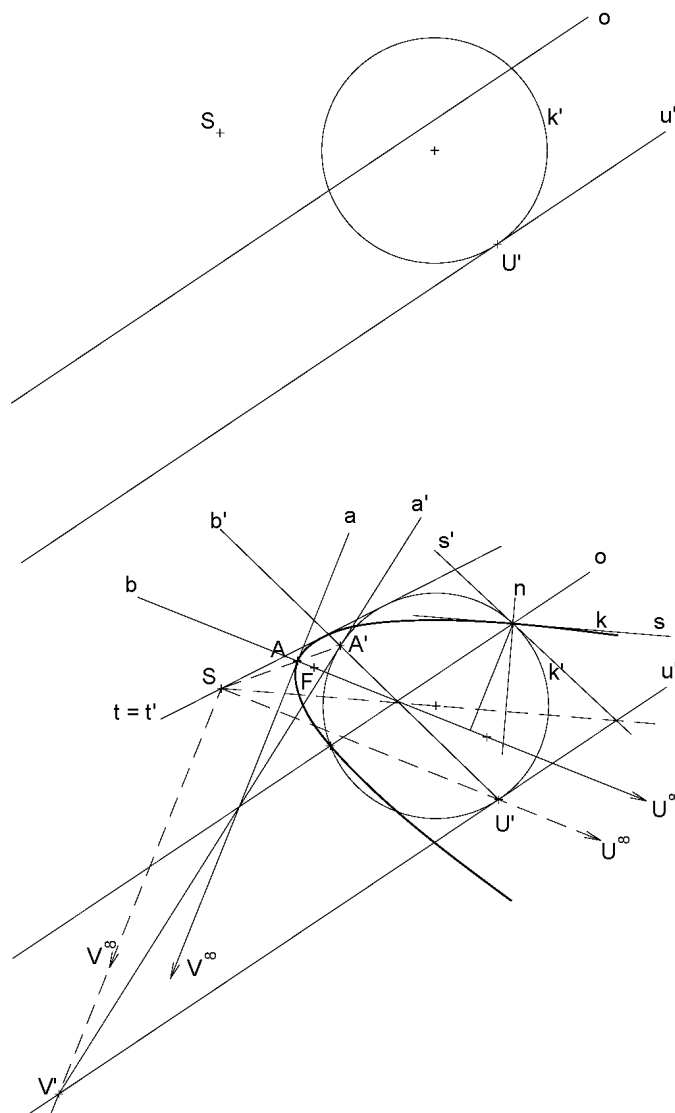


Obr. 4: Příklad 1.1.(a) - řešení

První vzor průměru na přímce p' označíme $A'B'$ a hledáme obrazy těchto prvků. Například pomocí samodružného bodu $p' \cap o$ (v obrázku není označen) přímky p' a bodu U' přímky p' , $U' = p' \cap u'$. Vlastní bod U' je tedy úběžník přímky p' a zobrazí se na nevlastní bod U^∞ . Nevlastní bod U^∞ určuje směr přímky p . Známe dva body přímky p , samodružný bod a U^∞ , sestojíme přímku p ($p \parallel SU'$, $U^\infty \in p$) a body A, B , které leží na spojnici SA', SB' .

Středem Q kuželosečky k je střed jejího průměru, tedy střed úsečky AB . Druhý průměr na přímce q musí procházet středem kuželosečky k a jak bylo řečeno výše, je rovnoběžný s osou o . Najdeme vzor Q' bodu Q ($Q \in p \Rightarrow Q' \in p', Q' \in SQ$) a vzor q' přímky q ($q' \parallel q$). Druhý vzor průměru na přímce q' označíme $C'D'$, zbývá nalézt obrazy C, D bodů C', D' a sestojit elipsu danou sdruženými průměry AB, CD pomocí Rytzovy konstrukce.

(b) $k' \cap u' = \{U'\}$

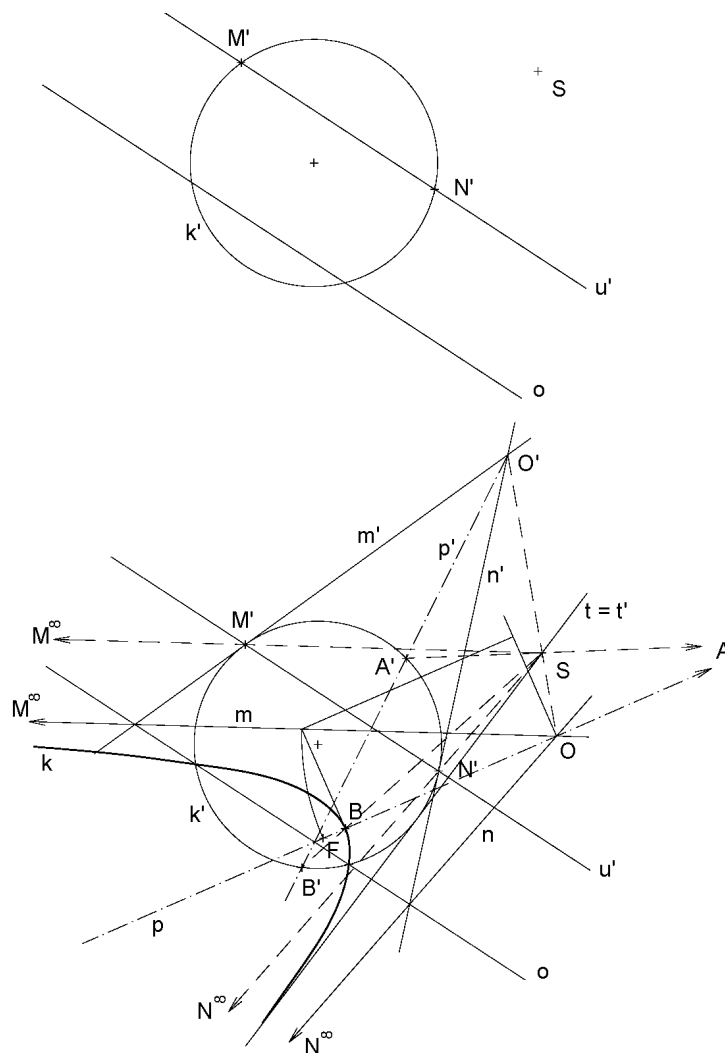


Obr. 5: Příklad 1.1.(b)

Řešení: (Obr. 5) Kružnice k' má s úběžnicí u' společný právě jeden bod U' . Je to bod na úběžnici, a proto se zobrazí jako nevlastní. To znamená, že obrazem kružnice k' je kuželosečka k , která má právě jeden nevlastní bod, obrazem kružnice k' je parabola k . Sestrojíme její osu b , vrcholovou tečnu a a ohnisko F .

Bod U' se zobrazí na nevlastní bod U^∞ , nevlastní bod paraboly určuje směr její osy, ($U^\infty \in SU'$) SU' je směr osy b paraboly k . Víme, že vrcholová tečna paraboly je kolmá k její ose, proto směr vrcholové tečny určený nevlastním bodem V^∞ je kolmý ke směru osy b paraboly k určeným nevlastním bodem U^∞ . Vzor bodu V^∞ je bod V' na úběžnici u' . V' je vzor bodu V^∞ , kterým musí

(c) $k' \cap u' = \{M', N'\}$



Obr. 6: Příklad 1.1.(c)

Řešení: (Obr. 6) Kružnice k' má s úběžnicí u' společné právě dva různé body M', N' . Tyto body leží na úběžnici, a proto jejich obrazy budou nevlastní body. Obrazem kružnice k' bude tedy kuželosečka k , která má dva nevlastní body, to je hyperbola. Určíme asymptoty m, n , střed O , hlavní osu p , vrcholy A, B a ohniska E, F hyperboly k .

Bod $M' (N')$ se zobrazí na nevlastní bod $M^\infty (N^\infty)$, tento nevlastní bod určuje směr asymptoty $m (n)$. Protože asymptota je tečna hyperboly v nevlastním bodě, je vzorem asymptoty $m (n)$ tečna $m' (n')$ kružnice k' v bodě $M' (N')$. Pomocí bodu $M' (N')$ a samodružného bodu přímky $m' (n')$ určíme asymptotu $m (n)$. Průsečík vzorů asymptot m', n' je vzor O' středu O hyperboly k , bod O je průsečíkem asymptot m, n a musí ležet na spojnici SO' . Víme, že osy hyperboly pólí úhel asymptot, tedy můžeme určit obrazy hlavní p a vedlejší osy hyperboly k . Využitím bodu O přímky p a samodružného bodu přímky p , určíme přímku p' , která je vzorem přímky p . Průsečíky přímky p' a kružnice k' jsou body A', B' , jsou to vzory vrcholů A, B hyperboly k . Body A, B patří přímce p a leží po řadě na spojnici bodů SA', SB' . Víme, že hlavní osou hyperboly je právě přímka p , protože vzor druhé z přímek, která pólí osy asymptot nemá s kružnicí k' žádný společný bod. Body, ve kterých se kružnice k' protne s osou o kolineace $\mathcal{K}$, jsou samodružné body, které patří hyperbole k . Jako v předchozím případě určíme tečnu hyperboly k , kterou je například samodružná přímka $t = t'$. Pomocí ohniskových vlastností hyperboly určíme její ohniska.

2 Středové zobrazení kružnice

Tato kapitola se bude podrobně zabývat zobrazením kružnice ve středovém promítání. Budeme využívat znalosti z předchozí kapitoly, proto nebudeme v následujícím textu znovu opakovat, jak a proč se zobrazí kružnice ve středové kolíneaci v rovině. Zobrazením kružnice ve středovém promítání se budeme zabývat podrobně proto, že jej využijeme při konstrukci středových průmětů kvadrik a oblých těles. Budeme rozlišovat případy podle polohy roviny kružnice vzhledem k průmětně a následně podle polohy kružnice vzhledem ke středu promítání. Přímka v je protiúběžnice roviny ρ kružnice. ($v = \rho \cap \sigma$, $S \in \sigma$).

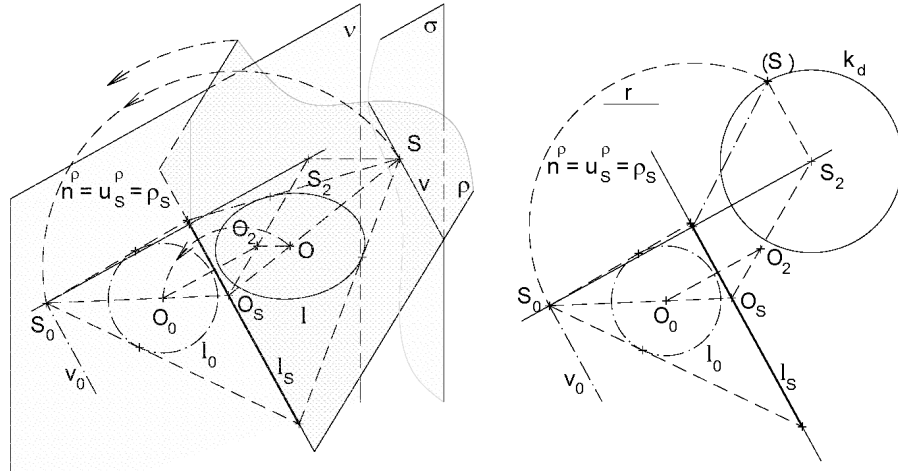
Zobrazte kružnici l danou středem $O = (O_S, O_2)$ a poloměrem r . Kružnice l leží v rovině $\rho = (n^\rho, u_S^\rho)$.

(1) $(S \in \rho) \wedge (\rho \nparallel v)$, tzv. středově promítací rovina

V tomto případě nezáleží na tom, zda rovina ρ je nebo není kolmá k průmětně ν . Středově promítací rovina ρ se zobrazí na jedinou přímku $n^\rho = u_S^\rho = \rho_S$, a tedy kružnice l , která v ní leží, bude jistou částí této přímky. Jakou konkrétně částí přímky zjistíme otočením roviny ρ do průmětny ν .

(a) $l \cap v = \emptyset$

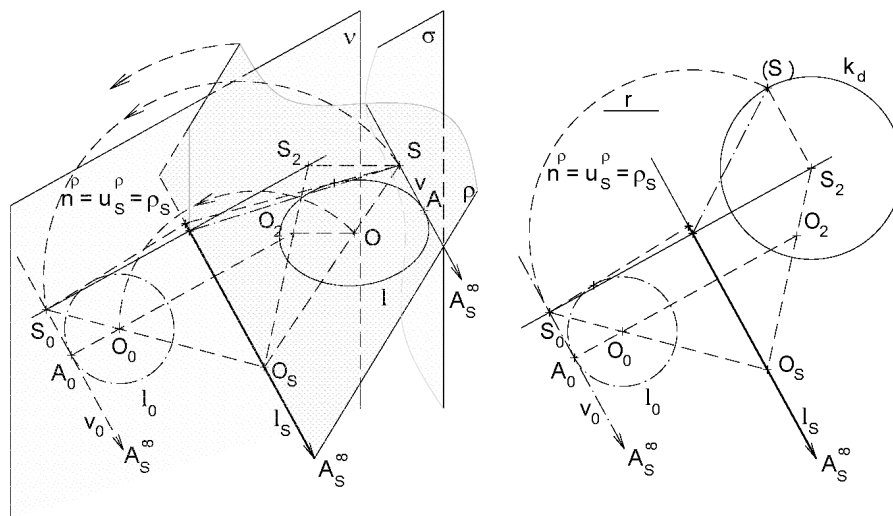
Kružnice l nemá žádný společný bod s protiúběžnicí v , proto středovým průmětem této kružnice l je úsečka l_S . Střed promítání S leží vně kružnice l . (Obr. 7)



Obr. 7: Kružnice se zobrazuje na úsečku

(b) $l \cap v = \{A\}$, S leží vně l

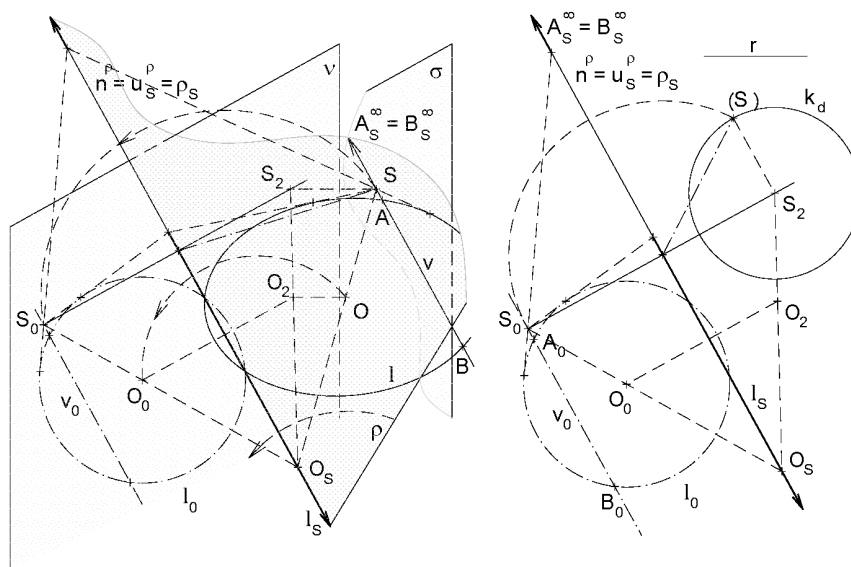
Kružnice l má s protiúběžnicí v společný právě jeden bod A , $A \neq S$. Středovým průmětem bodu A je nevlastní bod A_S^∞ , proto středovým průmětem kružnice l bude polopřímka l_S . (Obr. 8)



Obr. 8: Kružnice se zobrazuje na polopřímku

(c) $l \cap v = \{A, B\}$, S leží vně l

Kružnice l má s protiúběžnicí v společné právě dva různé body A, B . Středovým průmětem obou těchto bodů je nevlastní bod přímky $n^\rho = u_S^\rho = \rho_S$, ale středovým průmětem kružnice l nebude celá tato přímka.

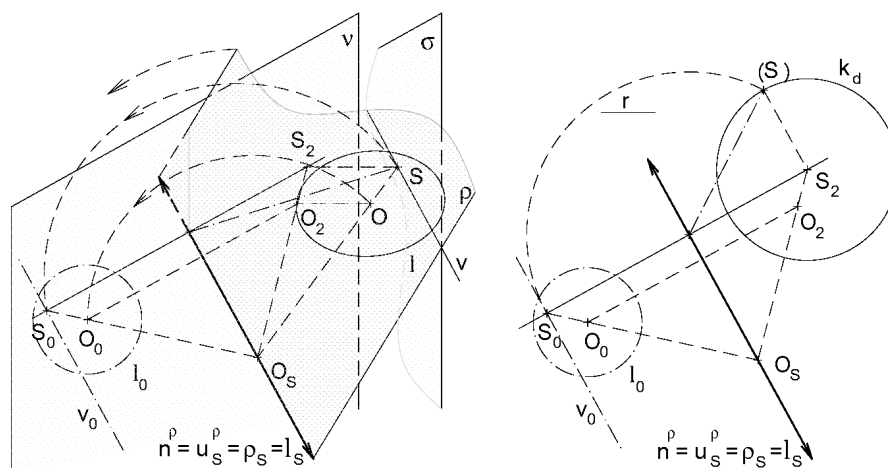


Obr. 9: Kružnice se zobrazuje na dvě polopřímky

Středovým průmětem kružnice l bude sjednocení dvou polopřímek. (Obr. 9)

(d) S leží uvnitř l

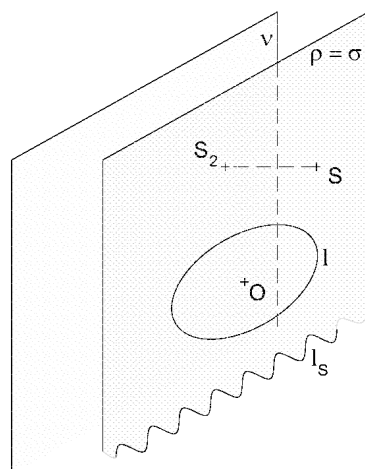
Jestliže je bod S vnitřním bodem kružnice l , nebo patří kružnici, je středovým průmětem kružnice l celá přímka $n^p = u_S^p = \rho_S$. (Obr. 10)



Obr. 10: Kružnice se zobrazuje na přímku

(2) $(S \in \rho) \wedge (\rho \parallel \nu)$

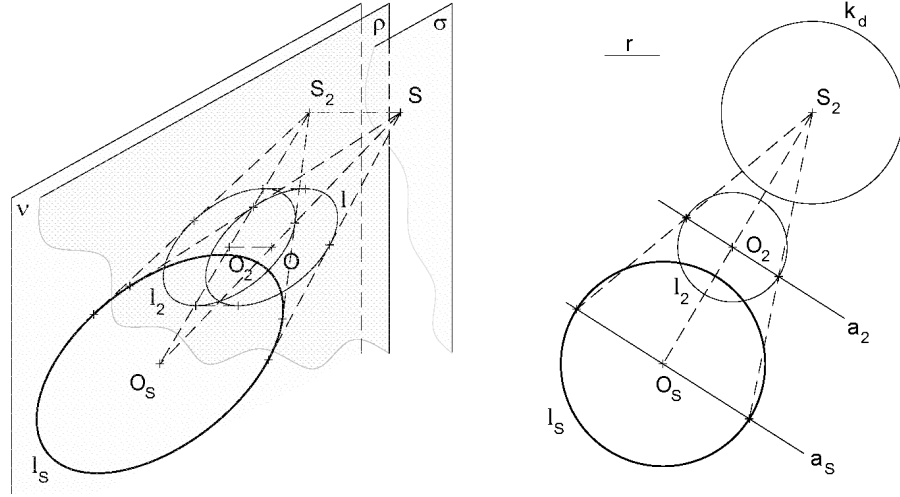
Rovina ρ je totožná se středovou rovinou σ . Středový průmět libovolného útvaru ve středové rovině σ leží na nevlastní přímce roviny σ . (Obr. 11)



Obr. 11: Kružnice se zobrazuje na nevlastní přímku

$$(3) (S \notin \rho) \wedge (\rho \parallel \nu)$$

Protože rovina ρ je rovnoběžná s průmětnou ν , je pravoúhlý průmět l_2 kružnice l shodný se skutečnou kružnicí l . Středovým průmětem l_S kružnice l je kružnice s kružnicí l_2 stejnolehá ve stejnolehlosti se středem S_2 a dvojicí odpovídajících si bodů $O_2 \rightarrow O_S$. (Obr. 12)

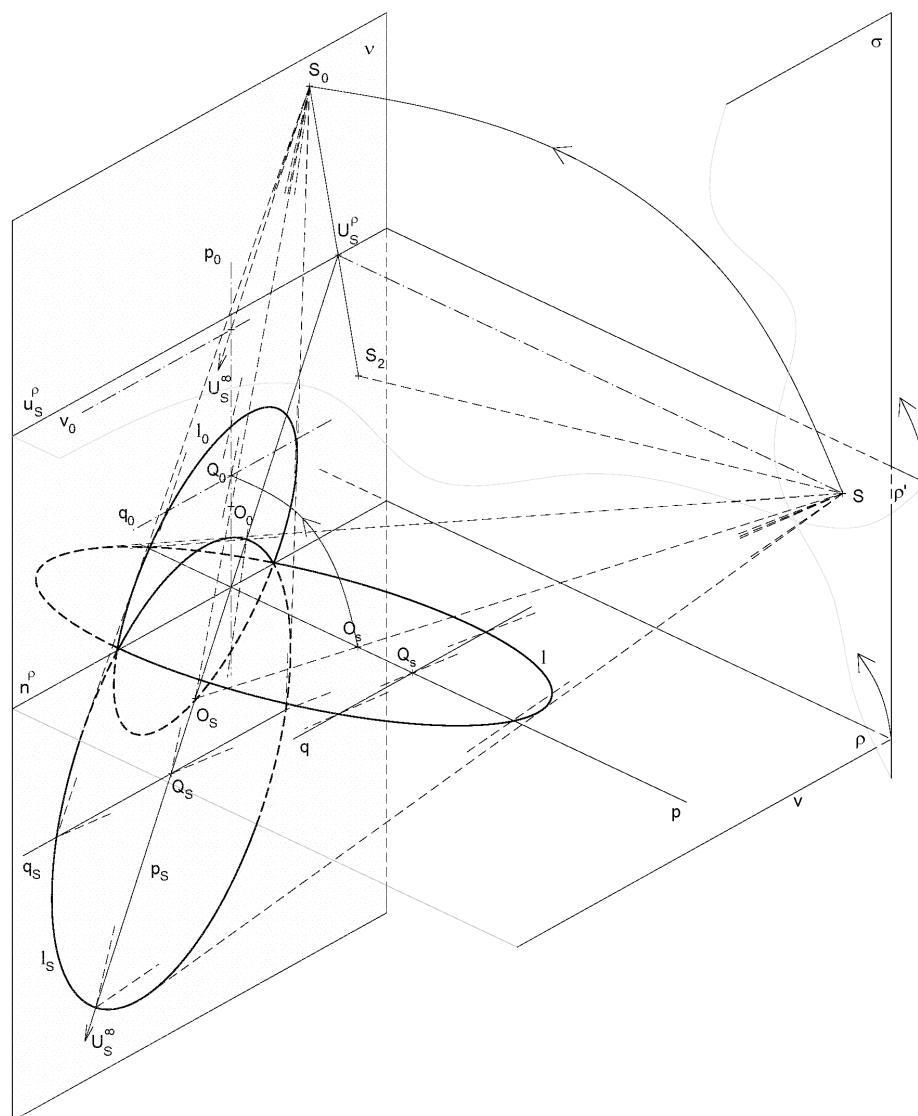


Obr. 12: Kružnice se zobrazuje na kružnici

$$(4) (S \notin \rho) \wedge (\rho \nparallel \nu)$$

V tomto případě nejsou rozdílné případy, kdy rovina ρ je nebo není kolmá k průmětně ν . Při řešení budeme postupovat tak, že rovinu ρ otočíme kolem její půdorysné stopy n^ρ do průmětny ν . Víme,¹ že bodu O_0 (otočený bod O) odpovídá ve středové kolineaci v rovině bod O_S (středový průmět bodu O). Středová kolineace $\mathcal{K}$ je určena středem S_0 (ve stejném smyslu otočený střed promítání S), osou n^ρ a úběžnicemi u_S^ρ , v_0 (otočená protiúběžnice v roviny ρ). V této kolineaci známe vzor, to je kružnice k_0 , a hledáme její obraz, to je kuželosečku k_S . Postupujeme jako v předchozí podkapitole (*Konstrukce kuželoseček užitím středové kolineace*). Tedy už víme, že mohou nastat tři různé případy, rozděleno podle druhu kuželosečky, na kterou se kružnice l zobrazí. V Obr. 13 je naznačeno prostorové řešení zobrazení kružnice l , jejímž středovým průmětem je elipsa l_S .

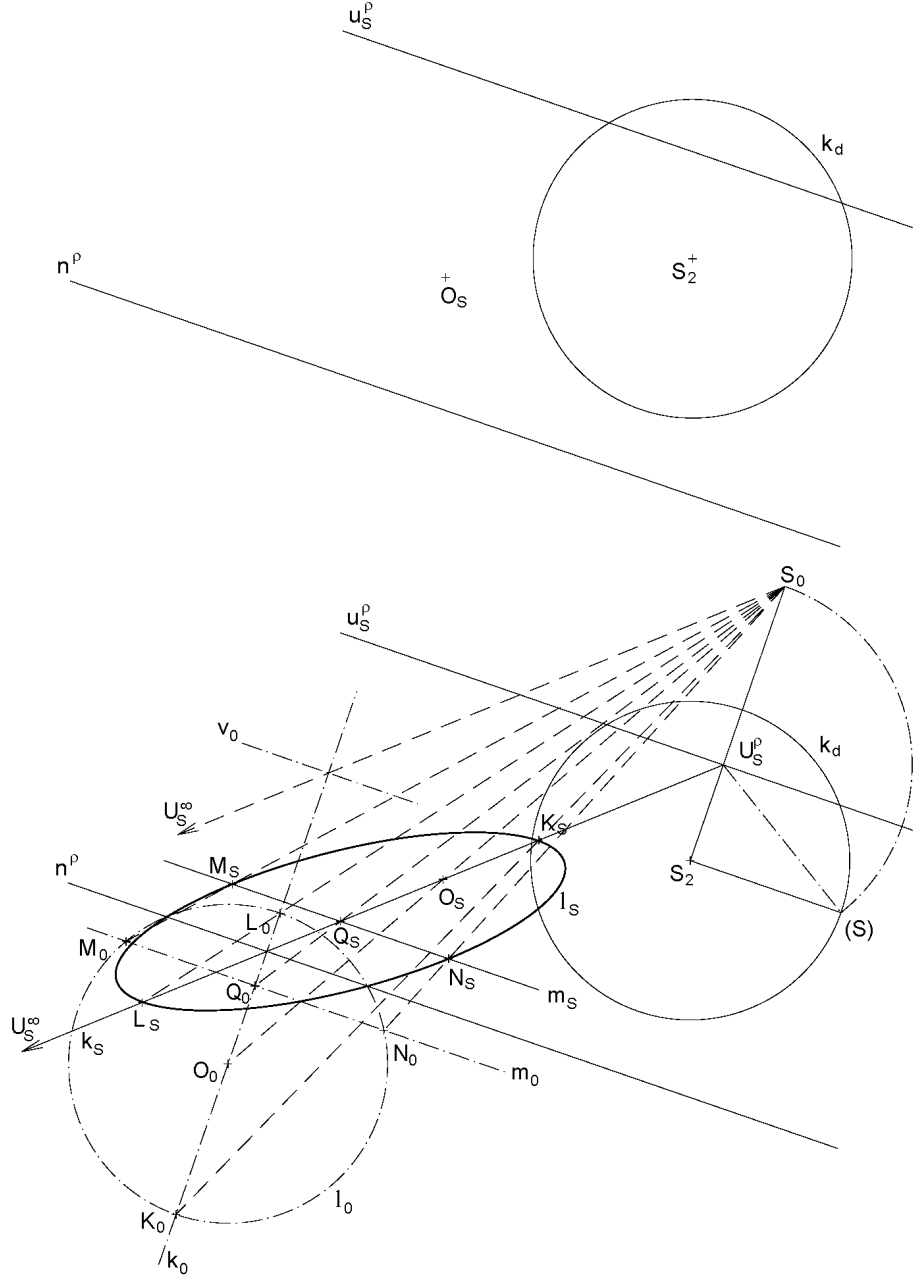
¹Víme, že středový průmět útvaru U_S odpovídá skutečnému útvaru U v prostorové kolineaci. Dále víme, že otočení roviny kolem její stopy do průmětny můžeme nahradit kosoúhlým rovnoběžným promítáním do průmětny. Tedy prostorovou kolineaci promítneme rovnoběžně do průmětny ν , tím získáme středovou kolineaci $\mathcal{K}$ v rovině.



Obr. 13: Otáčení roviny kružnice do průmětny

Podrobněji v následujících příkladech.

Příklad 2.1. Ve středovém promítání zobrazte kružnici l , se středem $O = (O_S)$, která leží v rovině $\rho = (n^\rho, u_S^\rho)$. Zvolte poloměr r tak, aby jejím středovým průmětem byla elipsa.

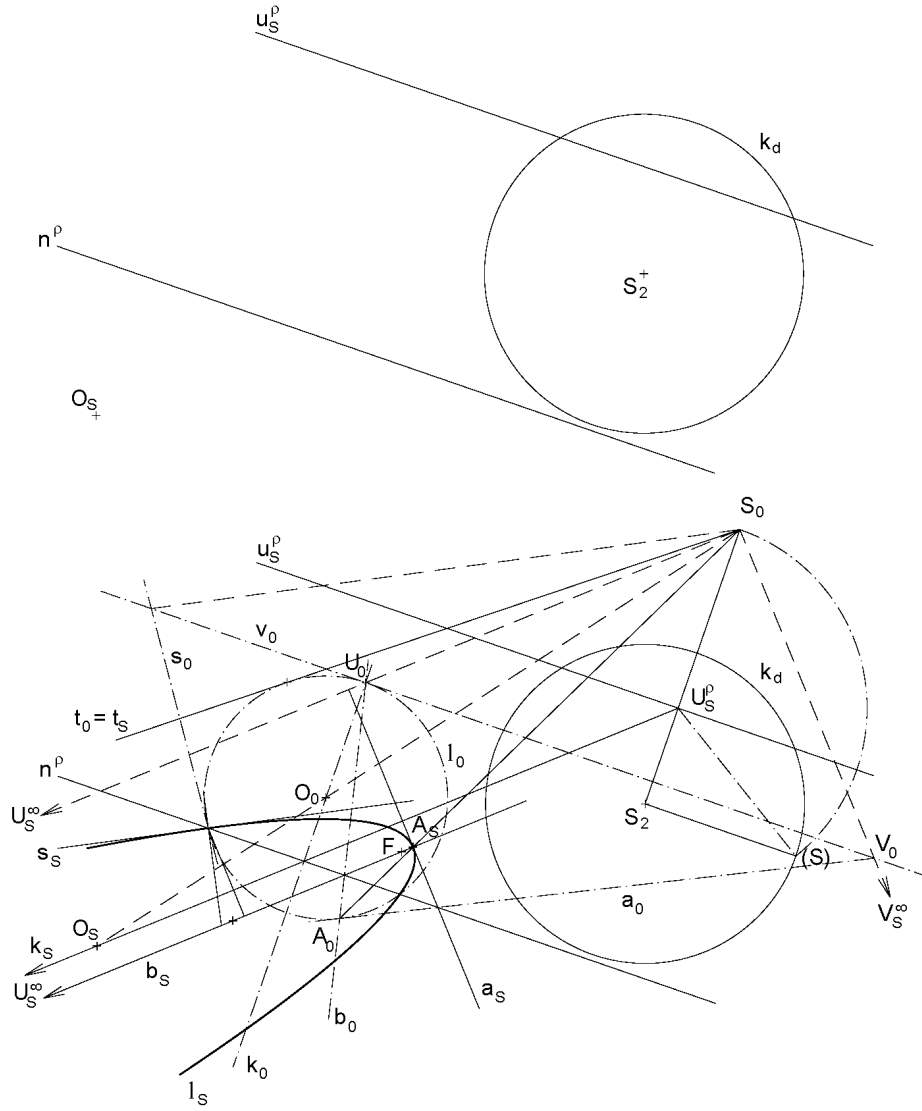


Obr. 14: Příklad 2.1.

Řešení: (Obr. 14) Rovinu ρ otáčíme kolem její stopy do průmětny ν . Bod O leží v rovině, s výhodou jsme zvolili, že leží na spádové přímce k roviny ρ . Získali jsme otočený bod O_0 bodu O a otočenou polohu v_0 protiúběžnice v . Poloměr r kružnice l zvolíme tak, aby kružnice l neměla žádný bod, který by se zobrazil

jako nevlastní. Tedy aby kružnice neobsahovala žádný bod, který by patřil protiúběžnici v , tedy $l_0 \cap v_0 = \emptyset$. Dále řešíme s využitím kolineace $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} = (S_0, n^\rho, v_0)$.

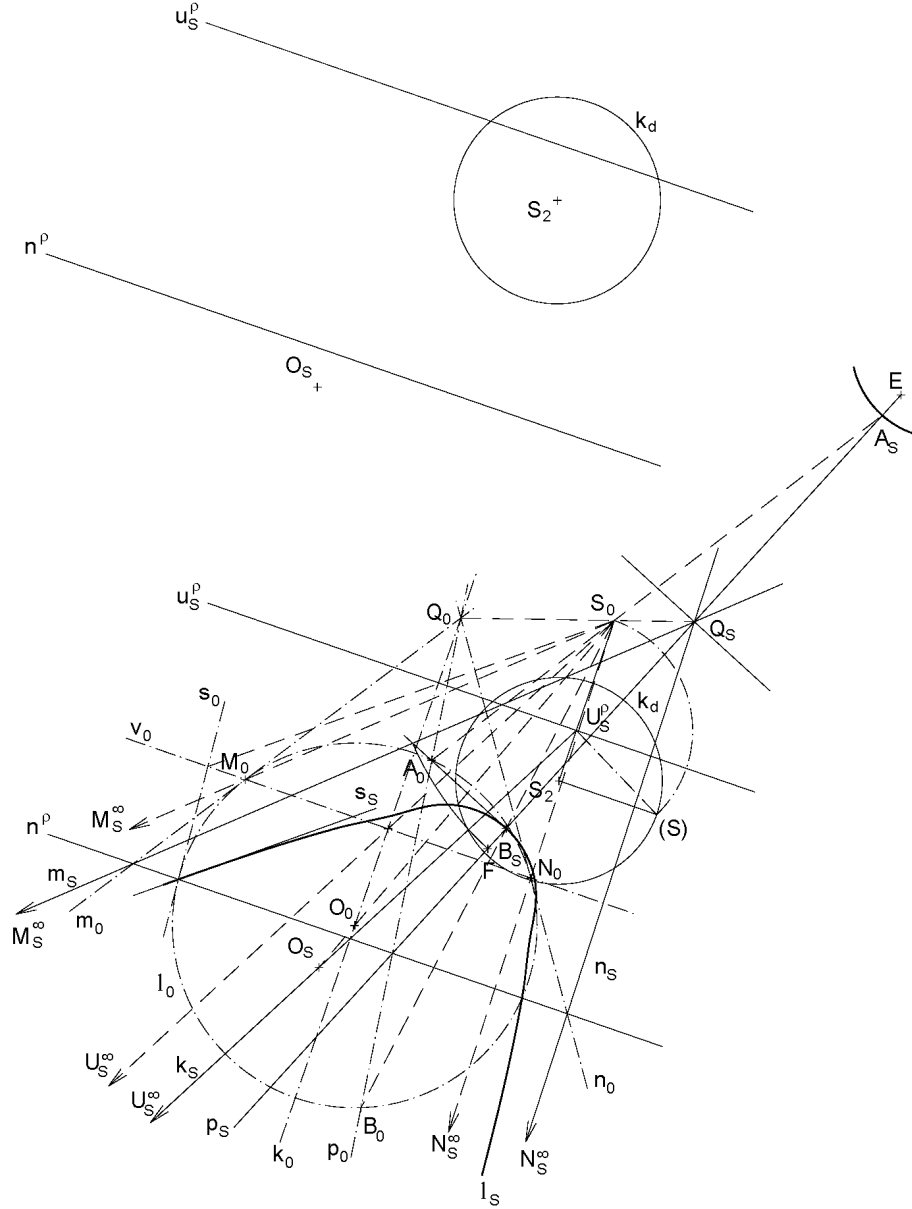
Příklad 2.2. Ve středovém promítání zobrazte kružnici l , se středem $O = (O_S)$, která leží v rovině $\rho = (n^\rho, u_S^\rho)$. Zvolte poloměr r tak, aby jejím středovým průmětem byla parabola.



Obr. 15: Příklad 2.2.

Řešení: (Obr. 15) Rovinu ρ otáčíme kolem její stopy do průmětny ν , stejně jako v předchozím případě. Poloměr r kružnice l zvolíme tak, aby kružnice l měla právě jeden bod, který by se zobrazil jako nevlastní bod. Tedy aby kružnice obsahovala právě jeden bod, který by patřil protiúběžnici v , to je $l_0 \cap v_0 = \{U_0\}$. Dále řešíme s využitím kolineace $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} = (S_0, n^\rho, v_0)$.

Příklad 2.3. Ve středovém promítání zobrazte kružnici l , se středem $O = (O_S)$, která leží v rovině $\rho = (n^\rho, u_S^\rho)$. Zvolte poloměr r tak, aby jejím středovým průmětem byla hyperbola.



Obr. 16: Příklad 2.3.

Řešení: (Obr. 16) Rovinu ρ otáčíme kolem její stopy do průmětny ν stále stejným způsobem. Poloměr r kružnice l zvolíme tak, aby kružnice l měla právě dva různé body, které by se zobrazily jako body nevlastní. Tedy aby právě dva různé body kružnice patřily protiúběžnici v , tedy $l_0 \cap v_0 = \{M_0, N_0\}$. Dále řešíme s využitím kolineace $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} = (S_0, n^\rho, v_0)$.

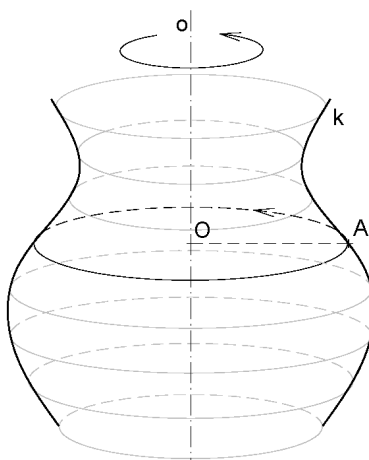
3 Rotační plochy

Samozřejmě některé speciální rotační plochy jsou nám dobře známe, například koule, válcová a kuželová plocha. V této kapitole budeme popisovat rotační plochy a jejich prvky.

Rotační plocha vzniká rotací libovolné křivky k , kterou nazýváme **tvořící křivka** kolem osy otáčení o , to je **osy rotační plochy**.

Každý bod A křivky k , který neleží na ose o , se pohybuje po kružnici, to je **kružnici otáčení bodu A** . Tato kružnice leží v rovině ρ kolmé k ose o , rovinu ρ nazýváme **rovinou otáčení bodu A** . Střed O kružnice otáčení bodu A leží na ose rotační plochy o a v rovině otáčení ρ , tedy $O = o \cap \rho$, nazýváme ho **střed otáčení bodu A** , poloměr $r = |OA|$ kružnice otáčení bodu A nazýváme **poloměr otáčení bodu A** . Viz Obr. 17.

Kružnice otáčení libovolného bodu tvořící křivky k se nazývá rovnoběžková kružnice, nebo **rovnoběžka plochy**. Řezem rotační plochy rovinou, která obsahuje osu rotační plochy o , je křivka, kterou nazýváme **meridián plochy**. Protože rotační plocha je souměrná podle osy rotační plochy o , je meridián také souměrný podle osy o . Proto budeme často uvažovat **polomeridián plochy**, to je část meridiánu ležící v jedné polorovině meridiánu s hraniční přímkou o . Všechny meridiány plochy (polomeridiány) jsou shodné křivky. (Rovina libovolné rovnoběžky plochy a rovina libovolného meridiánu jsou k sobě kolmé. Je zřejmé, že plocha je souměrná podle každé roviny meridiánu.)



Obr. 17: Rotační plocha

V případě, že tvořící křivka k a osa rotační plochy o určují jedinou rovinu, je zřejmé, že tvořící křivka je polomeridiánem plochy. V dalším budeme, až na jednu výjimku, vždy uvažovat tvořící křivku s touto podmínkou.

Speciální rotační plochy vznikají, je-li tvořící křivkou přímka, či kuželosečka. Viz následující podkapitoly.

3.1 Rotační přímkové plochy

Rotační plochu, která vznikne rotací přímky kolem libovolné osy, nazýváme rotační přímkovou plochou.² Postupně vyložíme jednotlivé případy v závislosti na vzájemné poloze tvořící přímky k a osy rotace o . Na konci této kapitoly zmíníme speciální případ, který vznikne rotací přímky kolem mimoběžné osy. Zde je ta výjimka, kdy meridián není tvořící křivkou plochy. Tato plocha může vzniknout i jiným způsobem, a proto ji ve výčtu nevynecháme.

- (a) Tvořící přímka k a osa rotace o jsou totožné.

Rotací přímky kolem sebe sama vzniká opět stejná přímka k .

- (b) Tvořící přímka k a osa rotace o jsou rovnoběžné, nesplývající.

Rotací přímky k kolem osy o , která je s ní rovnoběžná, vznikne **rotační válcová plocha**. (Obr. 18)

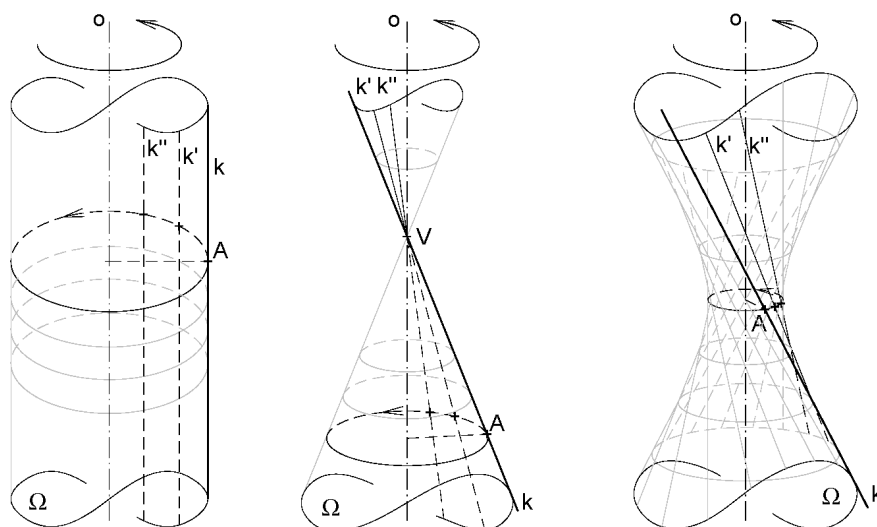
- (c) Tvořící přímka k a osa rotace o jsou různoběžné.

Je-li osa rotace o kolmá k tvořící přímce k vzniklá rotační plocha je rovina. Není-li osa rotace o kolmá k tvořící přímce, rotací vzniká **rotační kuželová plocha**. (Obr. 18)

- (d) Tvořící přímka k a osa rotace o jsou mimoběžné.

Je-li osa rotace o kolmá k tvořící přímce k , rotační plochou by byla část roviny. (Tento případ většinou neuvažujeme.) Není-li osa rotace o kolmá k tvořící přímce, rotační plochou je **jednodílný rotační hyperboloid**. (Obr. 18) Více o této ploše v na konci podkapitoly *Rotační kvadriky*.

²Stejně rotační přímkové plochy vznikají rotací singulární kuželosečky kolem některé své osy. Singulární kuželosečky: prázdná množina (zpravidla se neuvažuje), bod, přímka, dvojice různoběžných přímek, dvojice rovnoběžných přímek



Obr. 18: Rotační přímkové plochy
po řadě: b), c), d)

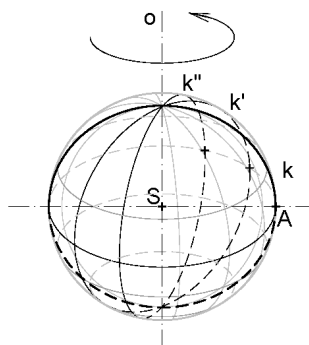
3.2 Kulová plocha a anuloid

Tvořící křivkou k rotační plochy je kružnice. Kružnice je sice speciální případ elipsy, ale rotační plochy, které vznikají jsou natolik specifické, že je uvedeme v samostatné kapitole.

V následujícím textu uvedeme dva případy, ve kterých osa rotace o leží v rovině tvořící kružnice k .

- (a) Střed S tvořící kružnice k leží na ose rotace o .

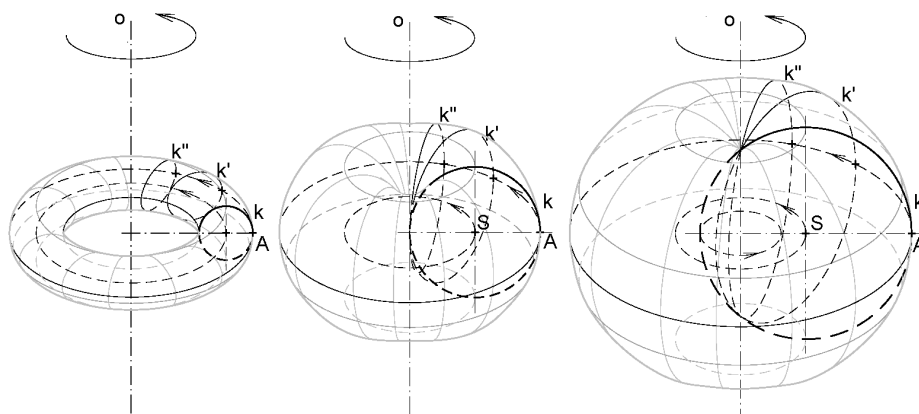
Rotací tvořící kružnice k kolem libovolné přímky procházející jejím středem vznikne **kulová plocha**. Kulová plocha je souměrná podle svého středu a podle každé roviny, ve které leží střed. (Obr. 19)



Obr. 19: Kulová plocha

(b) Střed S tvořící kružnice k neleží na ose rotace o .

V tomto případě vzniká rotační plocha zvaná **anuloid**, také kruhový prstenec, torus, spirická plocha. Jestliže se osa rotace o a tvořící kružnice k dotýkají, nazývá se plocha axoid, jestliže se protínají, nazývá se menoid. (Obr. 20)



Obr. 20: Anuloidy

Jestliže osa rotace o neleží v rovině tvořící kružnice k , vzniklá plocha se nazývá globoid.

3.3 Rotační kvadriky

Rotační plochy, které vznikají rotací regulární kuželosečky³ kolem některé své osy, se nazývají rotační kvadriky.

Body, ve kterých se rotační plocha protíná s osou rotace, nazýváme **vrcholy kvadriky**. Je-li kuželosečka (tvořící křivka) středová kuželosečka, je vytvořená rotační kvadrika středová. To znamená, že je souměrná podle svého středu. Víme z předchozího, že každá rotační plocha je souměrná podle roviny procházející osou rotační plochy.

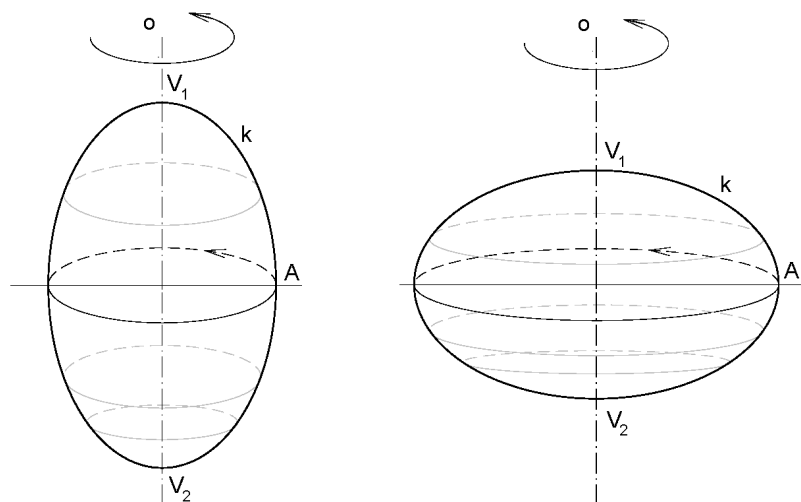
(a) Tvořící křivka k je elipsa.

Elipsa má střed, hlavní a vedlejší osu. Rotací elipsy⁴ kolem její hlavní osy vznikne rotační plocha nazývaná **protáhlý elipsoid**. Rotací elipsy kolem její vedlejší osy elipsy vznikne takzvaný **zploštělý elipsoid**. Rotační

³regulární kuželosečky: elipsa, parabola, hyperbola

⁴nikoliv kružnice jako speciálního případu elipsy

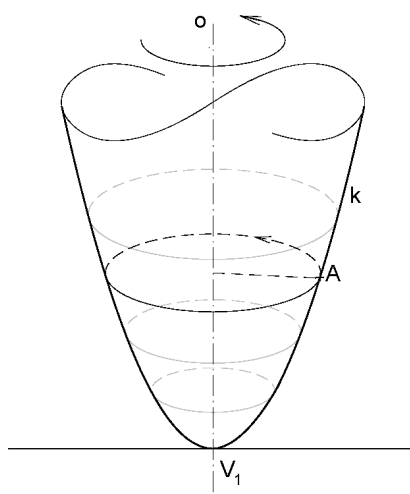
kvadrika je souměrná podle středu a také podle roviny, která prochází středem rotační kvadriky a je kolmá k ose rotační plochy. (Obr. 21)



Obr. 21: Rotační kvadrika - elipsoid

(b) Tvořící křivka k je parabola.

Parabola nemá střed a má jedinou osu. Rotace paraboly kolem její osy vytvoří rotační kvadriku zvanou **rotační paraboloid**. Tato kvadrika nemá střed a je souměrná právě podle rovin, jímž patří osa rotačního paraboloidu. (Obr. 22)

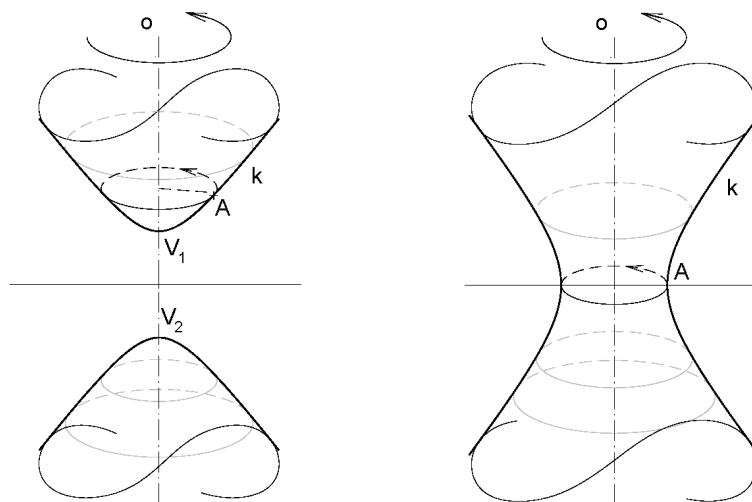


Obr. 22: Rotační kvadrika - paraboloid

(c) Tvořící křivka k je hyperbola.

Víme, že hyperbola má střed, hlavní a vedlejší osu. Rotací hyperboly ko-

lem její hlavní osy vzniká takzvaný **rotační dvojdílný hyperboloid**. Rotací hyperboly kolem její vedlejší osy vzniká **rotační jednodílný hyperboloid**. Obě tyto rotační kvadriky jsou souměrné podle svého středu a také podle roviny procházející tímto středem, která je kolmá k ose rotační plochy. (Obr. 23)



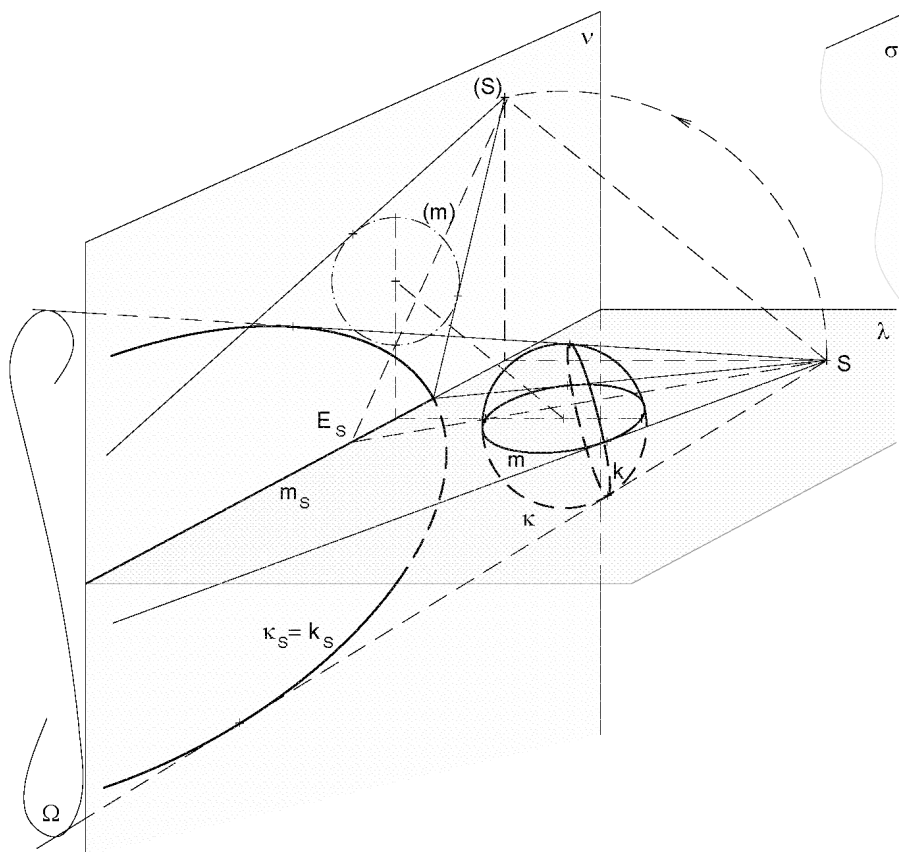
Obr. 23: Rotační kvadrika - hyperboloid

Rotační jednodílný hyperboloid je plocha, která může vzniknout jak rotací hyperboly kolem její vedlejší osy, tak rotací přímky mimoběžné s osou rotace. Podrobně vysvětluje například Urban ([2], s. 105–106).

4 Kulová plocha ve středovém promítání

Jestliže střed promítání S leží uvnitř nebo na kulové ploše κ , pak je středovým průmětem kulové plochy κ celá průmětna ν . Proto budeme v dalším textu vždy předpokládat střed promítání S vně kulové plochy κ .

Středový průmět kulové plochy κ do průmětny ν je shodný s řezem jisté kuželové plochy Ω průmětnou ν . Takové rotační kuželové plochy Ω , kterou lze opsat kulové ploše κ ze středu promítání S . Tato plocha Ω se dotýká kulové plochy κ podél kružnice k . Středovým průmětem kulové plochy κ bude tedy středový průmět kružnice k . Tato kružnice k se zobrazí jako kuželosečka. (Obr. 24) Typ kuželosečky závisí na poloze kružnice k vzhledem ke středové rovině σ . Viz dříve.



Obr. 24: Kulová plocha ve středovém promítání

Při sestavování středového průmětu kulové plochy je velmi užitečné znát Quételetovu-Dandelinovu větu.

4.1 Quételetova-Dandelinova věta

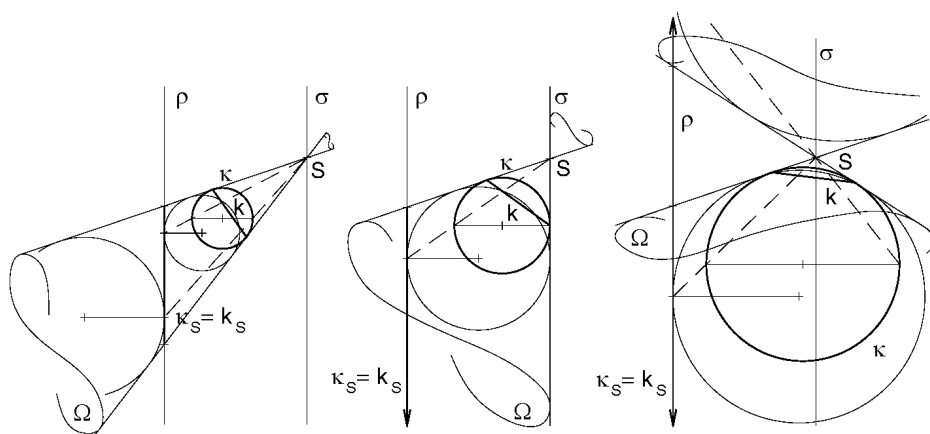
Z důvodu rozsahu a zaměření textu uvedeme Quételetovu-Dandelinovu větu bez důkazu. Kompletní důkaz ukazuje například Urban ([1], s. 324–335).

Řezy rotační kuželové plochy rovinami, které nejsou vrcholové jsou kuželosečky s ohnisky v dotykových bodech kulových ploch vepsaných kuželové ploše a dotýkajících se roviny řezu. (Obr. 25)

Jestliže rovina řezu není rovnoběžná s žádnou površkou rotační kuželové plochy, je řezem kuželosečka typu elipsa.

Jestliže rovina řezu je rovnoběžná s právě jednou površkou rotační kuželové plochy, je řezem kuželosečka typu parabola.

Jestliže rovina řezu je rovnoběžná s právě dvěma površkami rotační kuželové plochy, je řezem kuželosečka typu hyperbola.

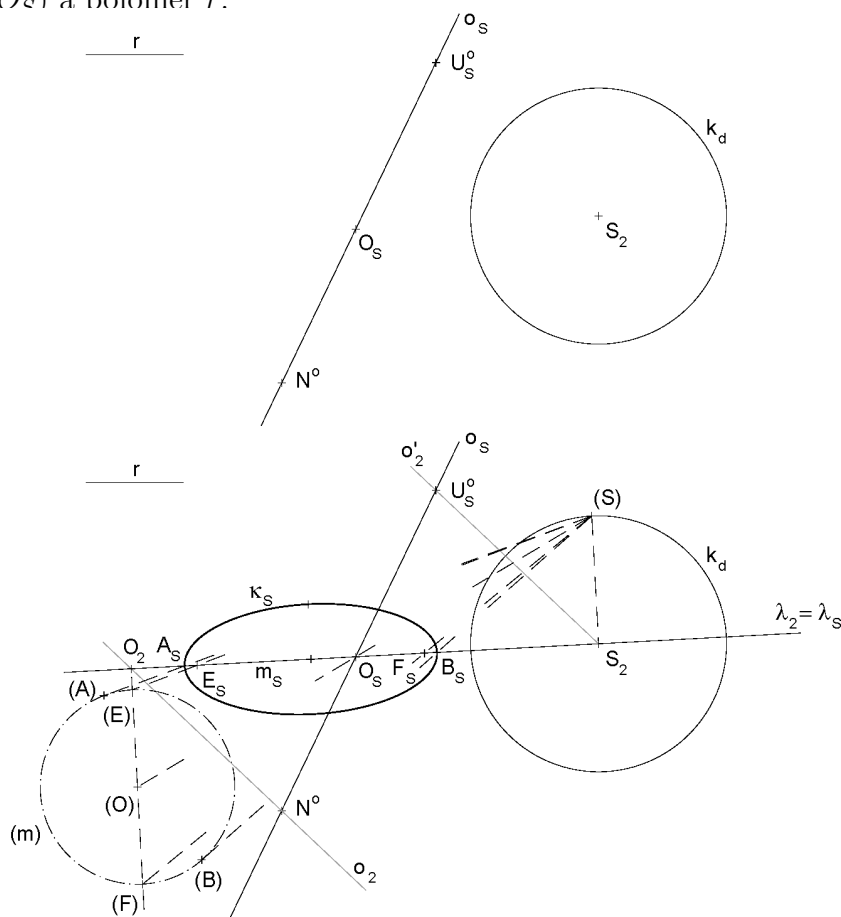


Obr. 25: Quételetova-Dandelinova věta

4.2 Kulová plocha ve středovém promítání

Tato podkapitola se již bude věnovat zobrazení kulové plochy ve středovém promítání.

Příklad 4.1. Sestrojte středový průmět kulové plochy κ , je-li dán její střed O , $O = (o_S, O_s)$ a poloměr r .



Obr. 26: Příklad 4.1.

Řešení: (Obr. 26) Uvažujeme rovinu λ , která prochází přímkou SO a je kolmá k průmětně ν . Rovina λ je rovina souměrnosti kulové plochy κ a protíná kulovou plochu κ v hlavní kružnici m . Protože kružnice m leží v rovině λ kolmé k průmětně ν obsahuje body E, F , ležící nejbližší a nejdále od průmětny ν , (popřípadě uvažujeme pouze jeden z nich), jejichž středové průměty jsou ohnisky středového průmětu kulové plochy κ . Přesně podle Quételet-Dandelinovy věty. Středovým průmětem kružnice m bude úsečka na přímce $\lambda_S = \lambda_2$ (popřípadě část této přímky). Uvažujme body A, B , to je průsečíky kružnice m s rotační kuželovou plochou Ω . Středové průměty těchto bodů jsou krajními body středového průmětu kružnice m .

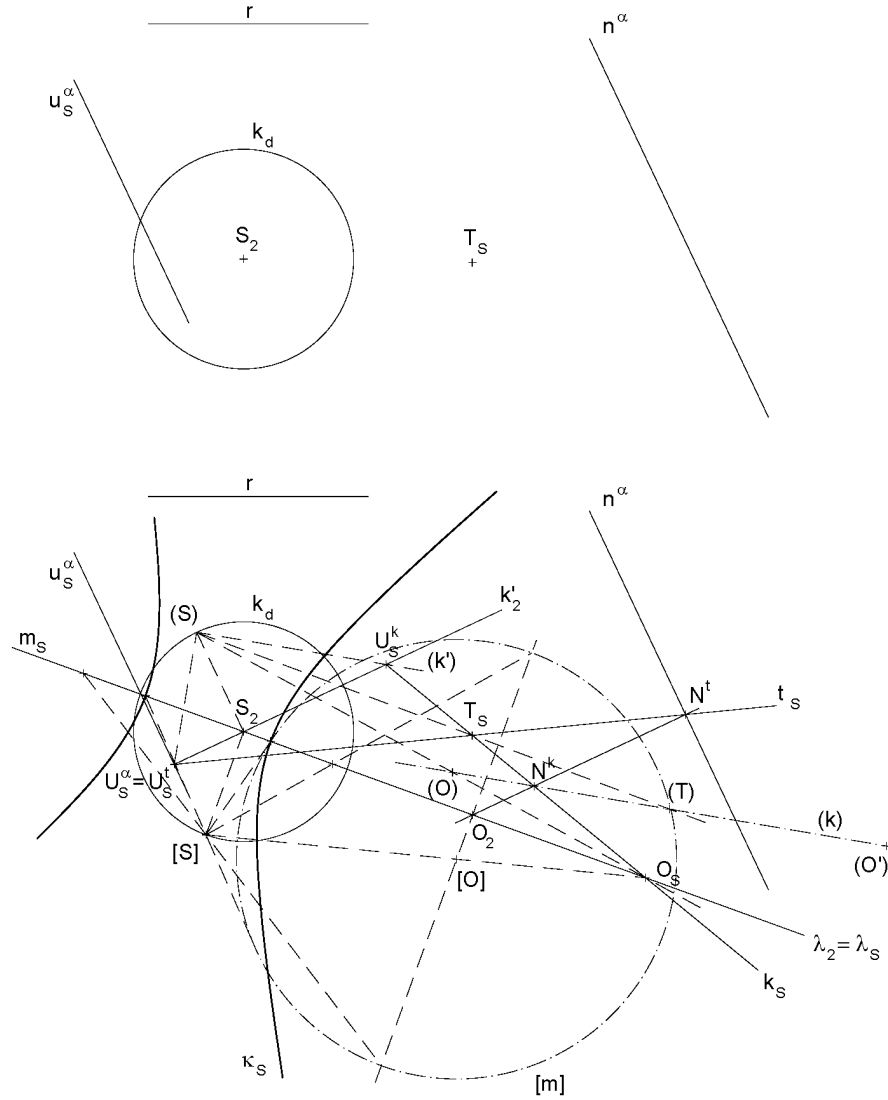
Rovinu λ sklopíme kolem její stopy $n^\lambda = \lambda_S$ do průmětny ν . Ve sklopení sestrojíme kružnici (m) , dotykové body $(A), (B)$ a body $(E), (F)$. Nakonec sestrojíme odpovídající kuželosečku κ_S , která je středovým průmětem kulové plochy κ .

Obr. 27: Příklad 4.2.

Řešení: (Obr. 27) K sestrojení kulové plochy κ potřebujeme určit její poloměr r .

- $k; (k \perp \alpha) \wedge (O \in k)$,
- $T; \{T\} = k \cap \alpha$,
- $r; r = |TO|$,
- $\kappa; \kappa = (O, r)$.
 - $\lambda; (SO \subset \lambda) \wedge (\lambda \perp \nu)$, sklopení roviny λ viz předchozí příklad,
 - to, že středovým průmětem kulové plochy κ bude elipsa, určíme například ze vzájemné polohy ohnisek a vrcholů.

Příklad 4.3. Sestrojte středový průmět kulové plochy κ , je-li dána tečná rovina α , $\alpha = (n^\alpha, u_S^\alpha)$ s bodem dotyku T , $T = (T_S)$ a poloměr r kulové plochy κ .

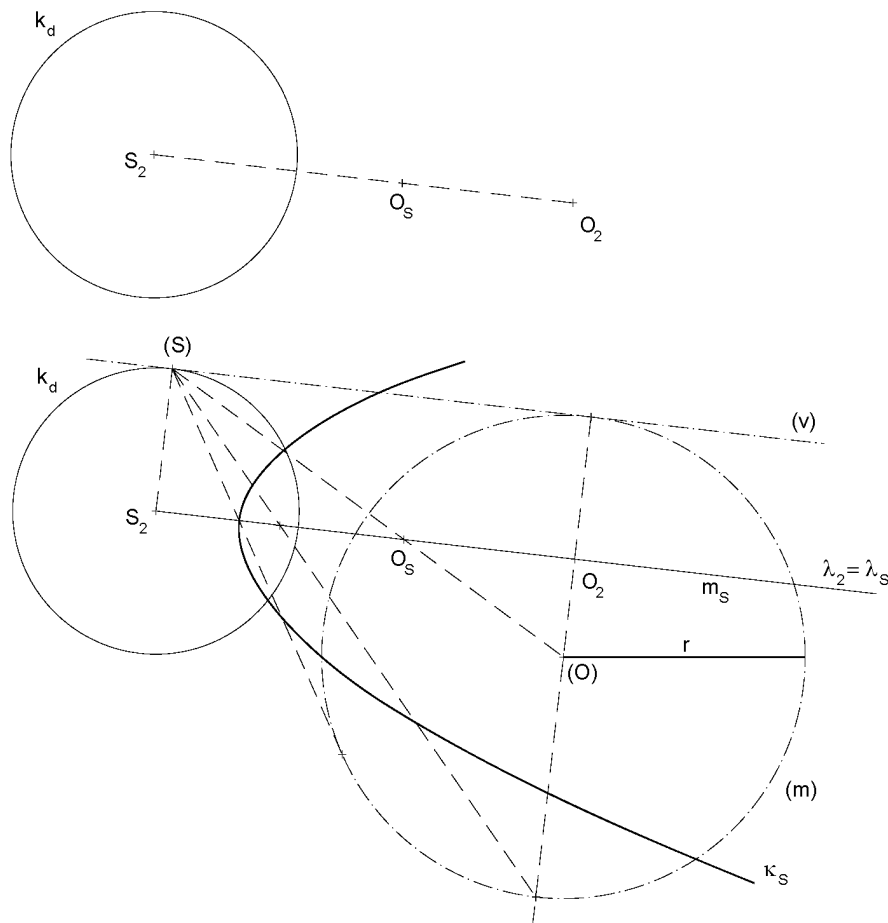


Obr. 28: Příklad 4.3.

Řešení: (Obr. 28) K sestavení kulové plochy κ potřebujeme určit její střed O .

- k ; $(k \perp \alpha) \wedge (T \in k)$,
- O ; $(O \in k) \wedge (|Ot| = r)$, (zvolíme jedno řešení)
- κ ; $\kappa = (O, r)$.
 - λ ; $(SO \subset \lambda) \wedge (\lambda \perp \nu)$, sklopení roviny λ viz předchozí příklad,
 - to, že středovým průmětem kulové plochy κ bude hyperbola, určíme například ze vzájemné polohy ohnisek a vrcholů.

Příklad 4.4. Je-li dán střed O , $O = (O_S, O_2)$, určete poloměr r kulové plochy κ , $\kappa = (O, r)$ tak, aby její středový průmět byl parabola. Středový průmět kulové plochy κ zobrazte.



Obr. 29: Příklad 4.4.

Řešení: (Obr. 29)

- λ ; $(SO \subset \lambda) \wedge (\lambda \perp \nu)$,
- sklopení roviny λ do průmětny ν (viz předchozí příklad),
- aby středovým průmětem kulové plochy κ byla parabola, určíme poloměr r kružnice m tak, aby se dotýkala středové roviny v právě jednom bodě. ((ν) je sklopená poloha protiúběžnice roviny λ .)

5 Rotační kvadriky ve středovém promítání

Průmět rotační plochy se obvykle nezobrazuje přímo. Zobrazí se nejprve některé její křivky, například rovnoběžky, či meridiány dané plochy. Volíme jednodušší křivky v dostatečném počtu. Zdánlivým obrysem rotační plochy je potom obálka těchto křivek, jestliže existuje.

U rotačních ploch volíme za zobrazované křivky rovnoběžky plochy. Rovnoběžka plochy je vždy kružnice, kterou umíme zobrazit. Při zobrazování rotačních přímkových ploch můžeme zobrazovat také jednotlivé polohy otočené tvořící přímky, tedy meridiánu. (Protože přímka je jednodušší než kružnice.)

V následujících podkapitolách se budeme zabývat středovým promítáním rotačních kvadrik. Podkapitoly jsou rozděleny podle typu tvořící křivky.

5.1 Elipsoid ve středovém promítání

Tato podkapitola se bude věnovat středovému zobrazení elipsoidu. Je to rotační plocha, jejíž středový průmět budeme zobrazovat jako obálku dostatečného počtu rovnoběžek plochy. Pro porovnání protáhlého a zploštělého elipsoidu budou obě tyto kvadriky vznikat rotací shodné křivky k , kolem shodné osy o se středem O rotační plochy.

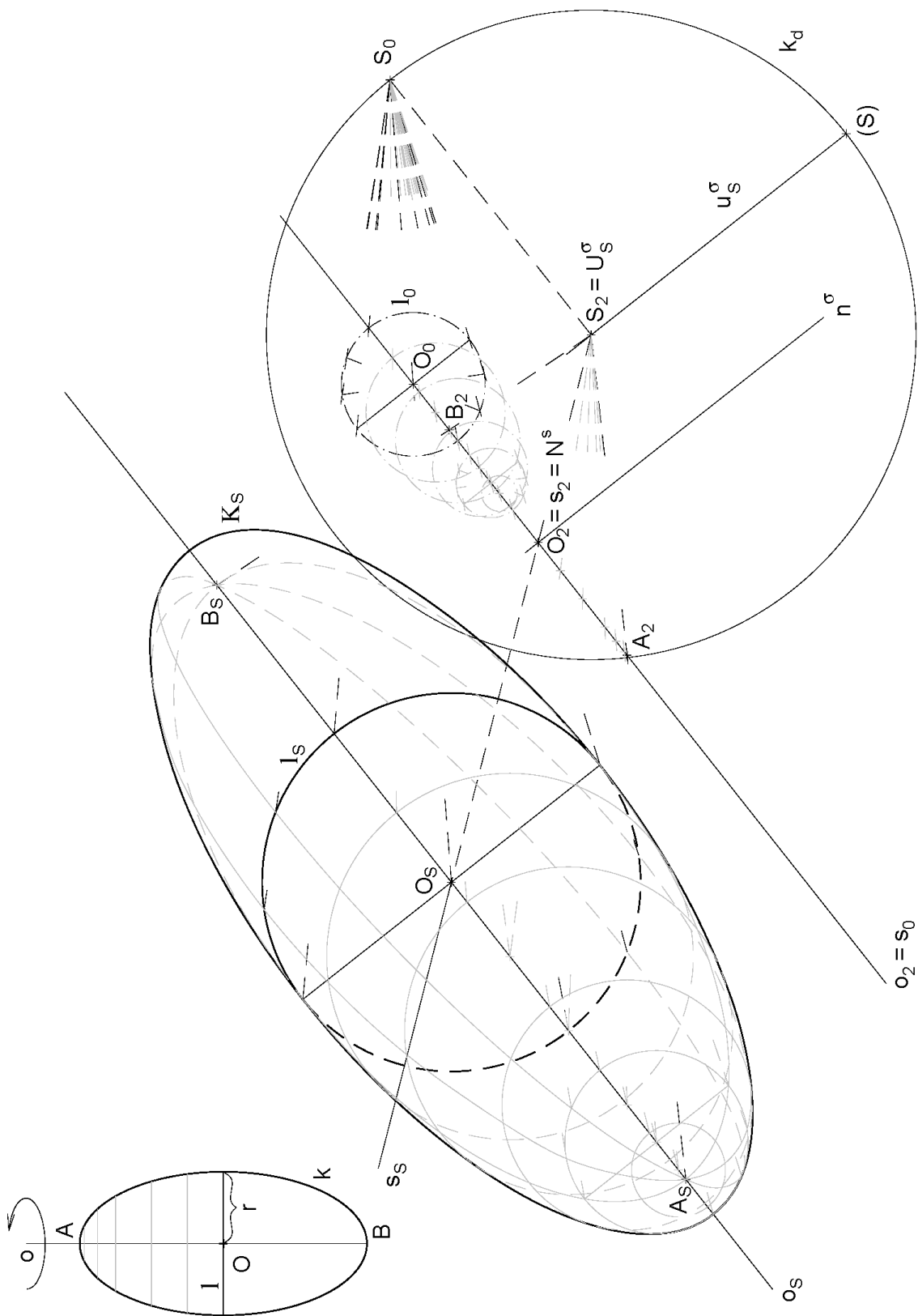
Poznámka: Kuželosečka i kvadrika jsou souměrné podle středu O , ale středový průmět kvadriky není souměrný podle středu O (středové promítání nezachovává poměr velikostí).

Příklad 5.1. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací elipsy k kolem její hlavní, respektive vedlejší osy. Je-li dána elipsa k , osa rotační plochy $o = (o_S, o_2)$ rovnoběžná s průmětnou a bod $O = (O_S, O_2)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. (Zadání v příloze Obr. 54.)

Postup konstrukce: (shodný pro oba rotační elipsoidy)

- zobrazení středových průmětů vrcholů A, B kvadriky κ ,
 - rovnoběžné promítání zachovává velikost úsečky,
 - tj. $|A_2B_2| = \text{délka osy elipsy } k, (\text{hlavní, resp. vedlejší osy}),$
- sestrojení středového průmětu rovnoběžky $l; l = (O, r)$,
 - $O \dots$ střed elipsy $k =$ střed kvadriky κ ,
 - $r \dots$ délka poloosy elipsy k , (vedlejší, resp. hlavní poloosy),
 - rovnoběžka l leží v rovině $\sigma; \sigma \perp o \wedge O \in \sigma$,
 - otočení roviny σ kolem její stopy n^σ do průmětny ν ,
protože $o \parallel \nu \Rightarrow \sigma \perp \nu$, jedná se o sklopení,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (4),
- sestrojení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
 - zobrazeny pouze rovnoběžky v jednom poloprostoru s hraniční rovinou σ ,
- sestrojení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka rovnoběžek (pokud existuje),
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící elipsy k , sestrojené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 30, respektive Obr. 31.



Obr. 30: Protáhlý elipsoid, osa rovnoběžná s průmětnou

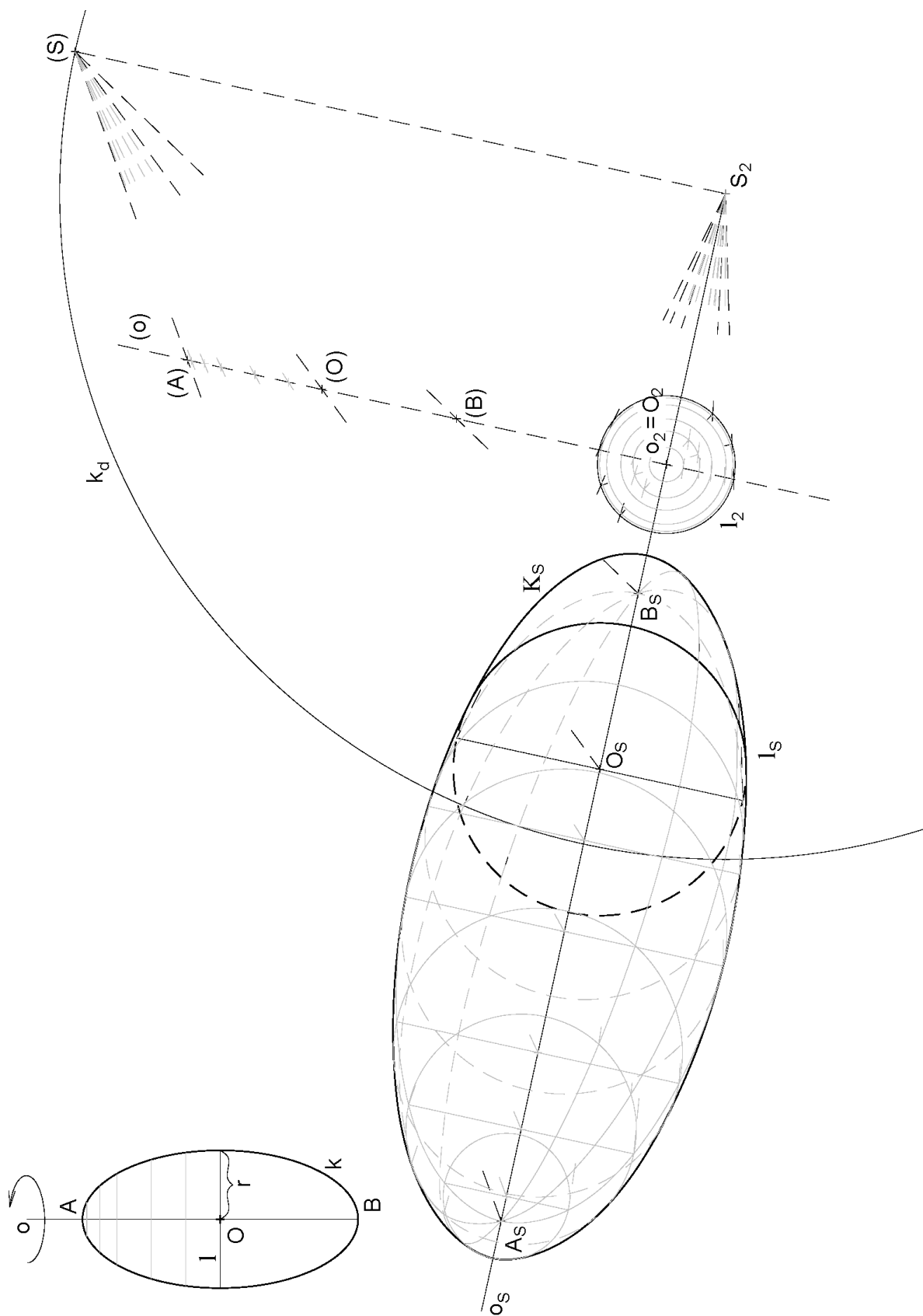
41

Příklad 5.2. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací elipsy k kolem její hlavní, respektive vedlejší osy. Je-li dána elipsa k , osa rotační plochy $o = (o_S, o_2)$ kolmá k průmětně a bod $O = (O_S, O_2)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. (Zadání v příloze Obr. 55.)

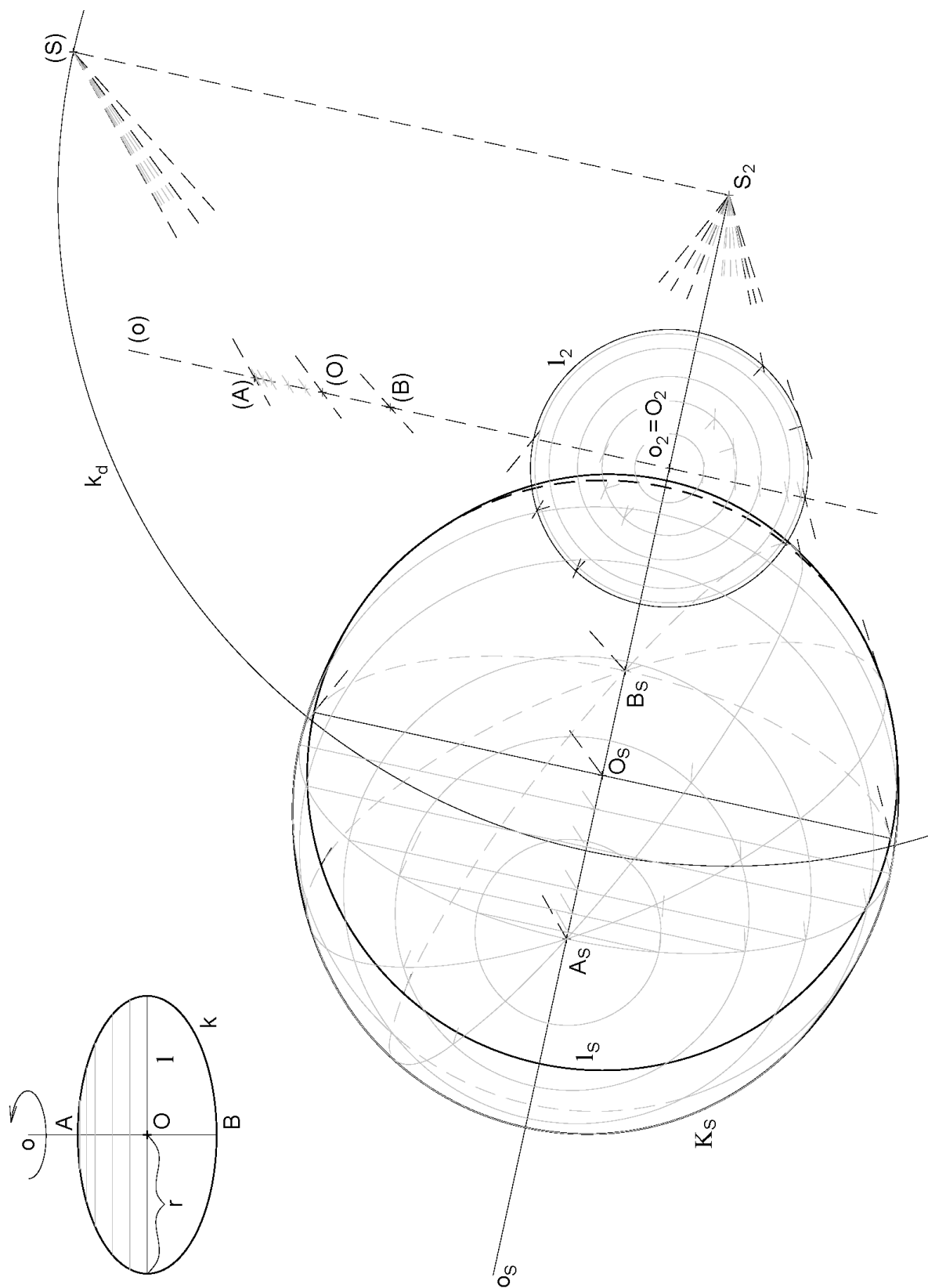
Postup konstrukce: (shodný pro oba rotační elipsoidy)

- zobrazení středových průmětů vrcholů A, B kvadriky κ ,
 - sklopení osy o ,
- sestrojení středového průmětu rovnoběžky l ; $l = (O, r)$,
 - $O \dots$ střed elipsy k = střed kvadriky κ ,
 - $r \dots$ délka poloosy elipsy k , (vedlejší resp. hlavní poloosy),
 - rovnoběžka l leží v rovině σ ; $\sigma \perp o \wedge O \in \sigma$,
 - $o \perp \nu \Rightarrow \sigma \parallel \nu$,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (3),
- sestrojení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
 - zobrazeny pouze rovnoběžky v jednom poloprostoru s hraniční rovinou σ ,
- sestrojení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka rovnoběžek (pokud existuje),
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící elipsy k , sestrojené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 32, respektive Obr. 33.



Obr. 32: Protáhlý elipsoid, osa kolmá k průmětně



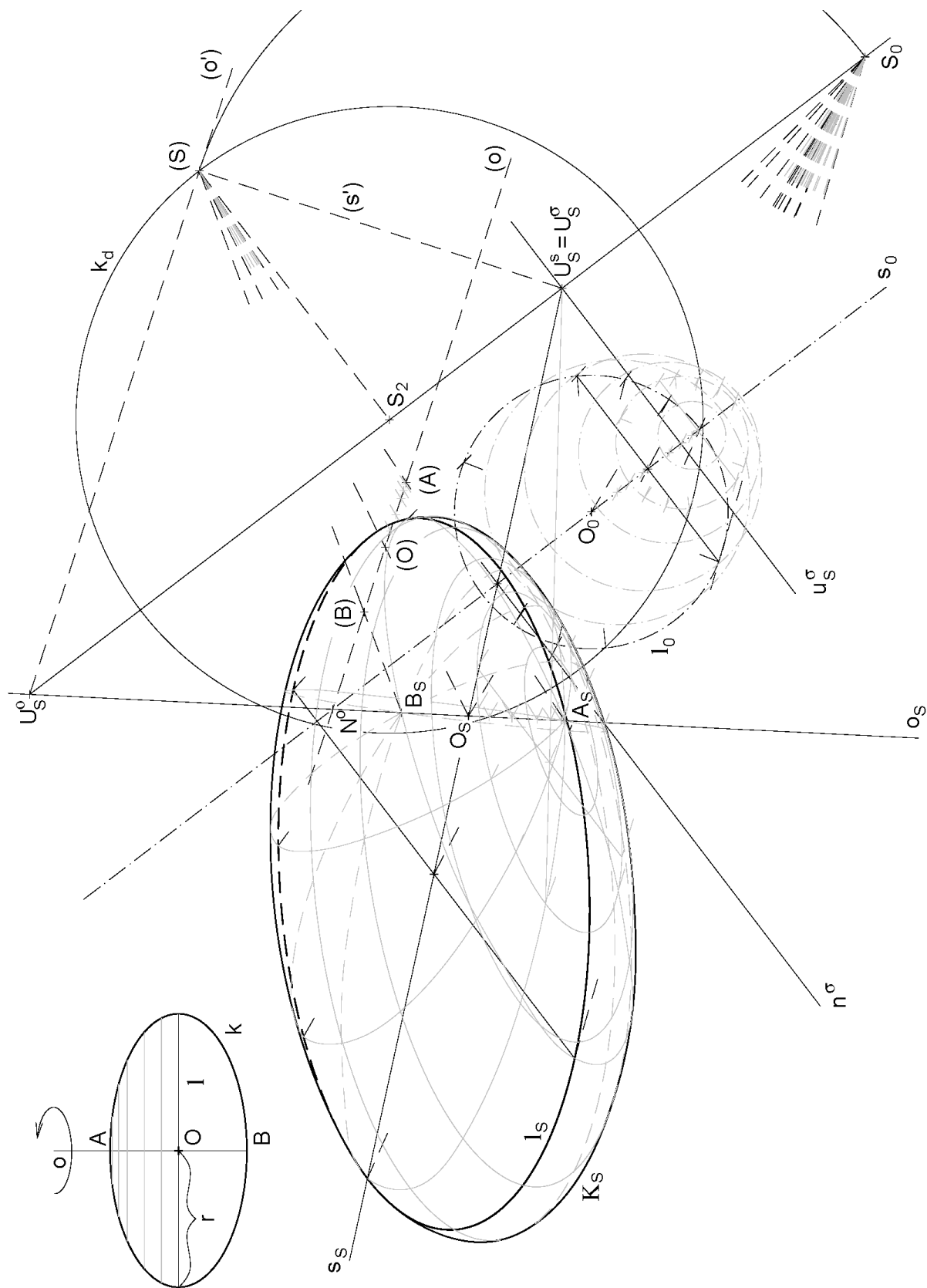
Obr. 33: Zploštělý elipsoid, osa kolmá k průmětně

Příklad 5.3. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací elipsy k kolem její hlavní, respektive vedlejší osy. Je-li dána elipsa k , osa rotační plochy o , $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O = (O_S)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. (Zadání v příloze Obr. 56.)

Postup konstrukce: (shodný pro oba rotační elipsoidy)

- zobrazení středových průmětů vrcholů A, B kvadriky κ ,
 - sklopení osy o ,
- sestrojení středového průmětu rovnoběžky l ; $l = (O, r)$,
 - $O \dots$ střed elipsy k = střed kvadriky κ ,
 - $r \dots$ délka poloosy elipsy k , (vedlejší resp. hlavní poloosy),
 - rovnoběžka l leží v rovině σ ; $\sigma \perp o \wedge O \in \sigma$,
 - otočení roviny σ kolem její stopy n^σ do průmětny ν ,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (4),
- sestrojení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
 - zobrazeny pouze rovnoběžky v jednom poloprostoru s hraniční rovinou σ ,
- sestrojení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka rovnoběžek (pokud existuje),
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící elipsy k , sestrojené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 34, respektive Obr. 35.



Obr. 35: Zploštělý elipsoid

Příklad 5.4. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací kružnice k kolem některé její osy. Je-li dána kružnice k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O = (O_S)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. Zobraďte stejným postupem jako oba elipsoidy a výsledky porovnejte s předchozími příklady. (Zadání v příloze Obr. 57.)

Postup konstrukce:

- zobrazení středových průmětů vrcholů A, B kvadriky κ ,
 - sklopení osy o ,
- sestrojení středového průmětu rovnoběžky l ; $l = (O, r)$,
 - $O \dots$ střed kružnice $k =$ střed kvadriky κ ,
 - $r \dots$ délka poloměru kružnice k ,
 - rovnoběžka l leží v rovině σ ; $\sigma \perp o \wedge O \in \sigma$,
 - otočení roviny σ kolem její stopy n^σ do průmětny ν ,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (4),
- sestrojení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
 - zobrazeny pouze rovnoběžky v jednom poloprostoru s hraniční rovinou σ ,
- sestrojení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka rovnoběžek (pokud existuje),
 - lze přesně podle podkapitoly 4.2 *Kulová plocha ve středovém promítání*, příklad 4.1.,
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící kružnice k , sestrojené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 36.

49

5.2 Paraboloid ve středovém promítání

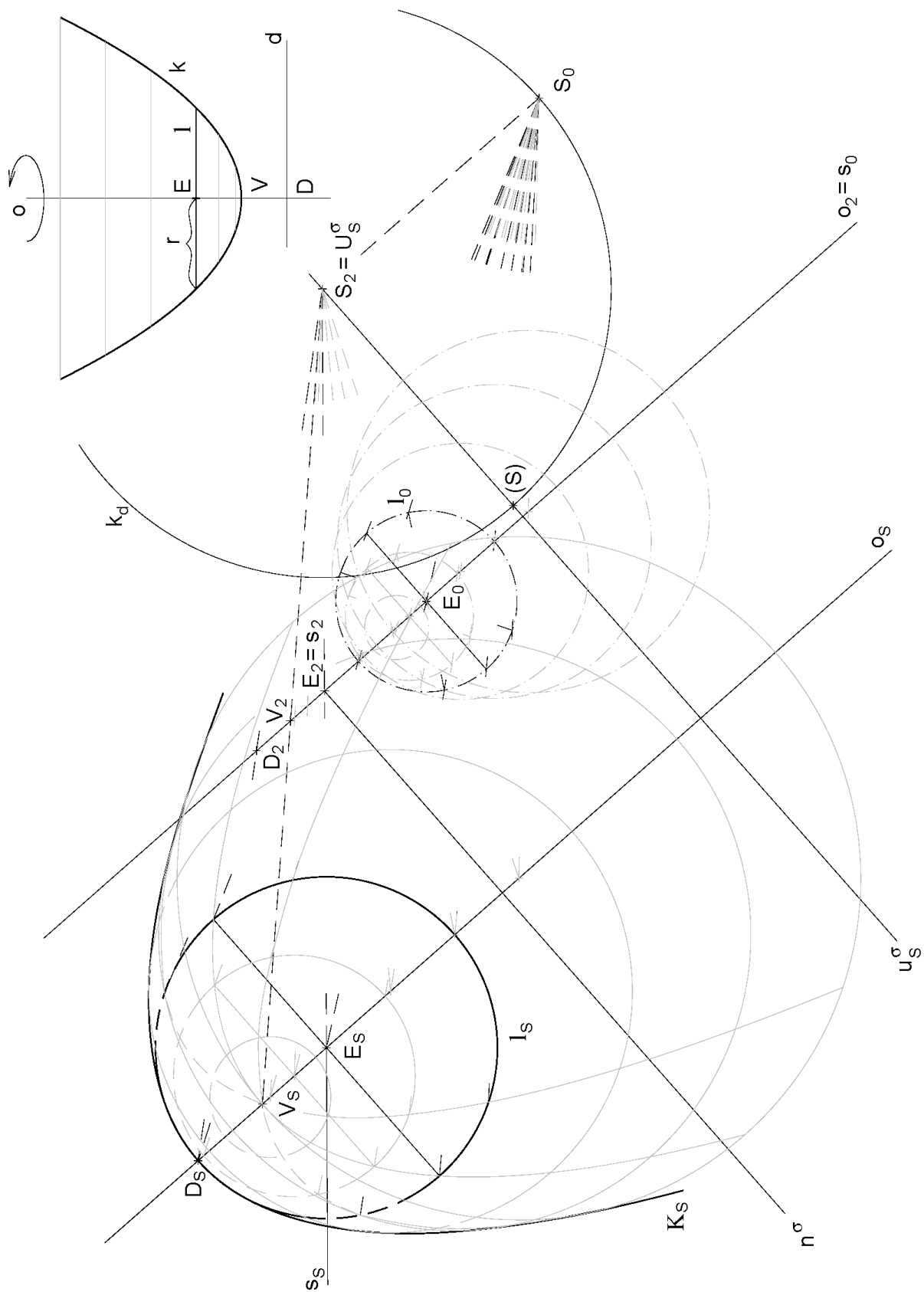
Tato podkapitola bude rozebírat rotační kvadriku, která vznikne rotací paraboly kolem její osy. Středový průmět paraboloidu budeme zobrazovat jako obálku středových průmětů jednotlivých rovnoběžek.

Příklad 5.5. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací paraboly k kolem její osy. Je-li dána parabola k , osa rotační plochy $o = (o_S, o_2)$ rovnoběžná s průmětnou a bod $V = (V_S, V_2)$ ležící na přímce o , který je vrcholem kvadriky. Zvolte vhodně jednu z možností zobrazení kvadriky. (Zadání v příloze Obr. 58.)

Postup konstrukce:

- sestrojení středového průmětu rovnoběžky l ; $l = (E, r)$,
 - $E \dots$ libovolně zvolený bod (zde ohnisko řídící paraboly k),
 - $r \dots$ vzdálenost průsečíku přímky, procházející bodem E kolmé k ose o , s parabolou k a bodu E ,
 - určení bodu E , $E \in o \wedge |EV| = |E_2V_2|$, (rovnoběžné promítání zachovává velikost úsečky),
 - rovnoběžka l leží v rovině σ ; $\sigma \perp o \wedge E \in \sigma$,
 - otočení roviny σ kolem její stopy n^σ do průmětny ν ,
protože $o \parallel \nu \Rightarrow \sigma \perp \nu$, jedná se o sklopení,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (4),
- sestrojení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
- sestrojení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka rovnoběžek (pokud existuje),
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící paraboly k , sestrojené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 37.



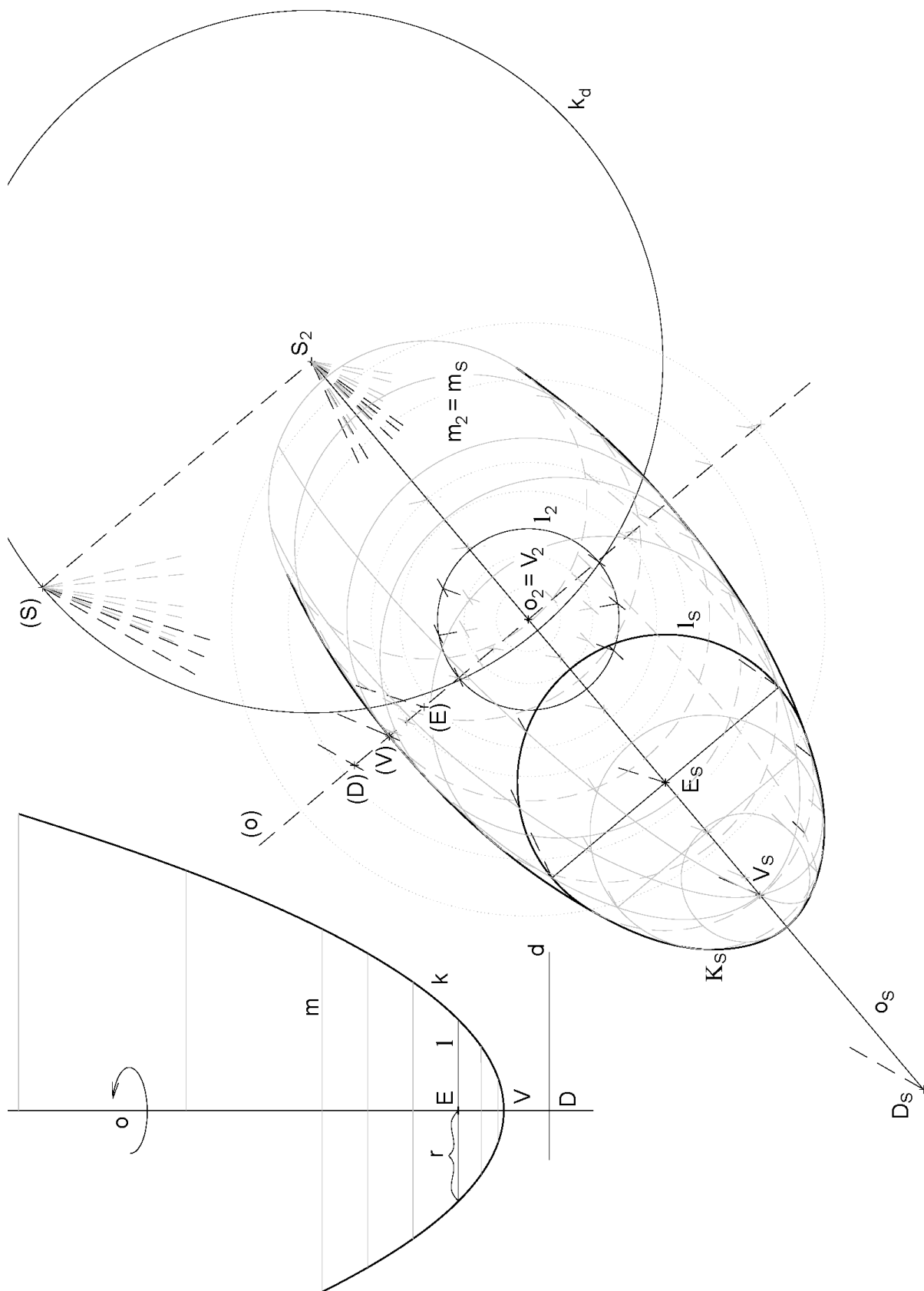
Obr. 37: Rotační paraboloid, osa rovnoběžná s průmětnou

Příklad 5.6. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací paraboly k kolem její osy. Je-li dána parabola k , osa rotační plochy $o = (o_S, o_2)$ kolmá k průmětně a bod $V = (V_S, V_2)$ ležící na přímce o , který je vrcholem kvadriky. Zvolte vhodně jednu z možností zobrazení kvadriky. (Zadání v příloze Obr. 59.)

Postup konstrukce:

- sestrojení středového průmětu rovnoběžky l ; $l = (E, r)$,
 - $E \dots$ libovolně zvolený bod (zde ohnisko řídící paraboly k),
 - $r \dots$ vzdálenost průsečíku přímky, procházející bodem E kolmé k ose o , s parabolou k a bodu E ,
 - určení bodu E , ve sklopení osy o ,
 - rovnoběžka l leží v rovině σ ; $\sigma \perp o \wedge E \in \sigma$,
 - $o \perp \nu \Rightarrow \sigma \parallel \nu$,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (3),
- sestrojení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
- sestrojení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka rovnoběžek (pokud existuje),
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící paraboly k , sestrojené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 38.



Obr. 38: Rotační paraboloid, osa kolmá k průmětně

Příklad 5.7. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací paraboly k kolem její osy. Je-li dána parabola k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $V = (V_S)$ ležící na přímce o , který je vrcholem kvadriky. Zvolte vhodně jednu z možností zobrazení kvadriky. (Zadání v příloze Obr. 60.)

Postup konstrukce:

- sestrojení středového průmětu rovnoběžky l ; $l = (E, r)$,
 - $E \dots$ libovolně zvolený bod (zde ohnisko řídící paraboly k),
 - $r \dots$ vzdálenost průsečíku přímky, procházející bodem E kolmé k ose o , s parabolou k a bodu E ,
 - určení bodu E , ve sklopení osy o ,
 - rovnoběžka l leží v rovině σ ; $\sigma \perp o \wedge O \in \sigma$,
 - otočení roviny σ kolem její stopy n^σ do průmětny ν ,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (4),
- sestrojení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
- sestrojení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka rovnoběžek (pokud existuje),
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící paraboly k , sestrojené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 39.

5.3 Hyperboloid ve středovém promítání

V této podkapitole se budeme zabývat středovým promítáním rotační plochy, která vznikne rotací hyperboly. Jako v předchozích příkladech budeme průmět rotační plochy zobrazovat jako obálku rovnoběžek plochy. Pro porovnání také zobrazíme jednodílný a dvojdílný hyperboloid jako plochy, které vznikly rotací stejné křivky k kolem stejné osy rotace o se stejným středem O rotační kvadriky.

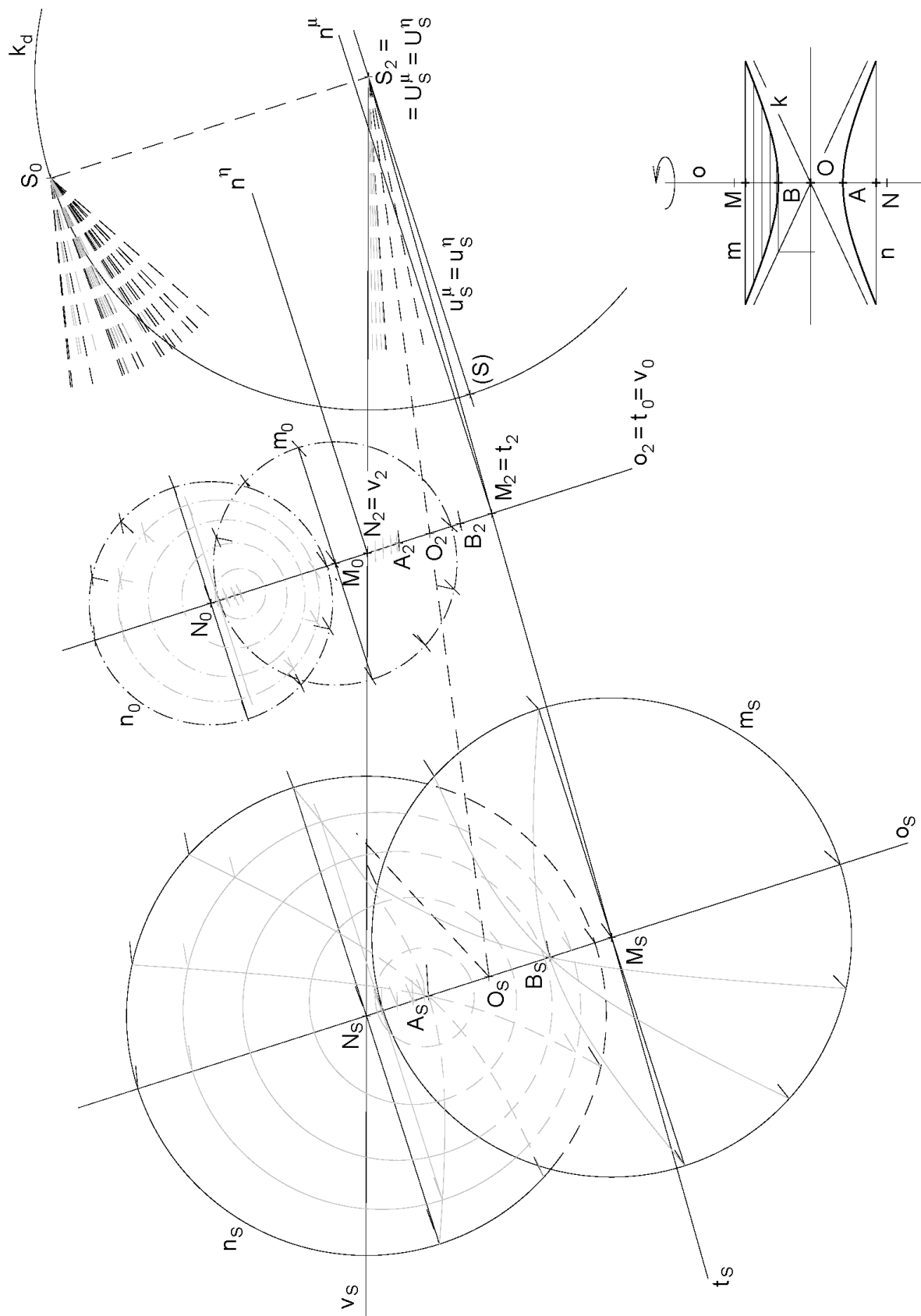
Jak víme z předchozího, jednodílný rotační hyperboloid můžeme uvažovat také jako přímkovou plochu. V posledním příkladě tedy nezobrazíme tuto kvadriku jako obálku rovnoběžek, ale jako obálku přímek.

Příklad 5.8. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací hyperboly k kolem její hlavní, respektive vedlejší osy. Je-li dána hyperbola k , osa rotační plochy $o = (o_S, o_2)$ rovnoběžná s průmětnou a bod $O = (O_S, O_2)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. (Zadání v příloze Obr. 61.)

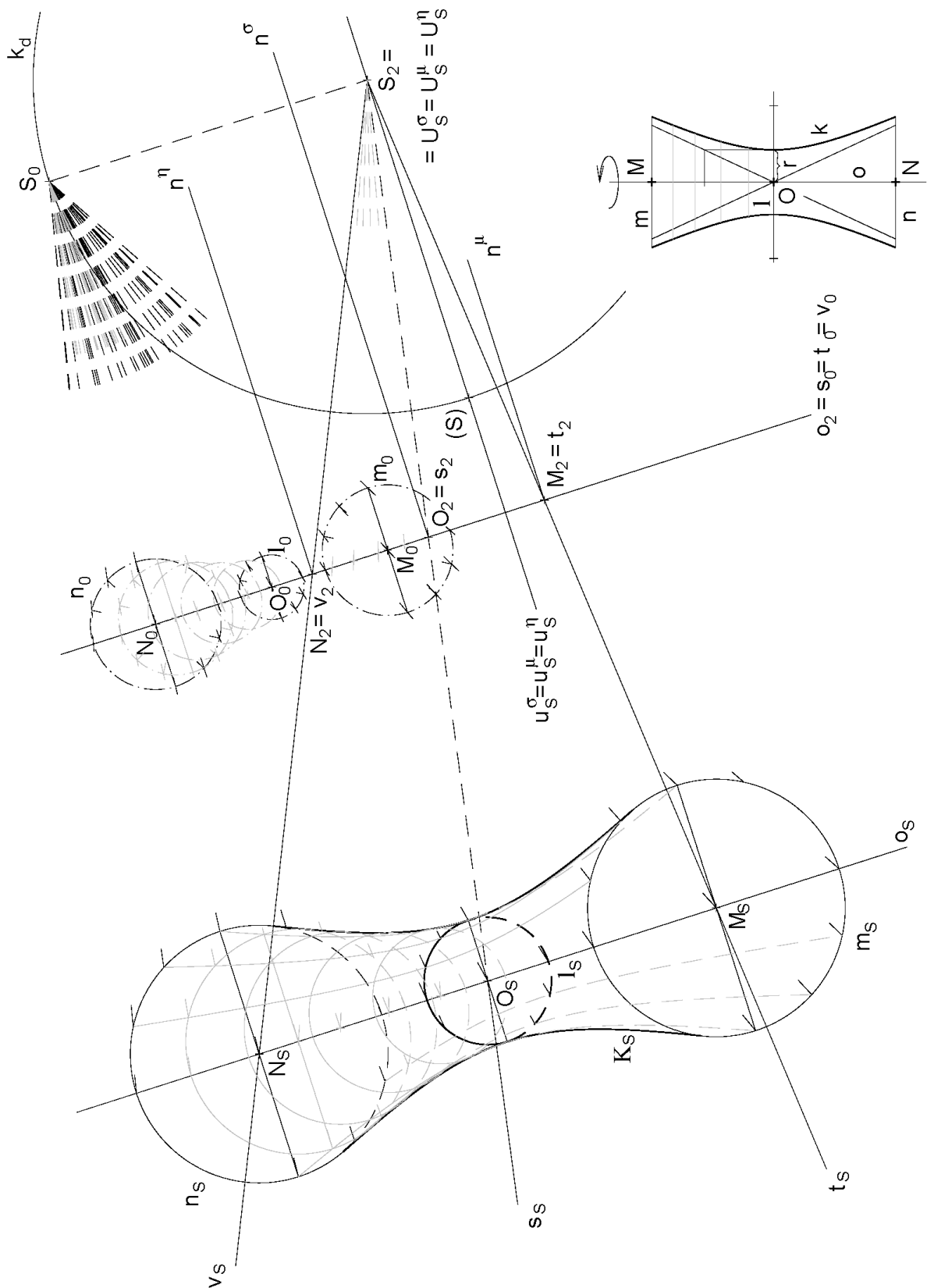
Postup konstrukce: (pro oba rotační hyperboloidy současně)

- zobrazení středových průmětů vrcholů A, B kvadriky κ ,
 - pouze u dvojdílného hyperboloidu (rotace hyperboly k kolem hlavní osy),
 - rovnoběžné promítání zachovává velikost úsečky,
 - tj. $|A_2B_2| = \text{délka hlavní osy hyperboly } k$,
- sestavení středového průmětu rovnoběžky l ; $l = (O, r)$,
 - pouze u jednodílného hyperboloidu (rotace hyperboly k kolem vedlejší osy),
 - $O \dots$ střed hyperboly $k =$ střed kvadriky κ ,
 - $r \dots$ délka hlavní poloosy hyperboly k ,
 - rovnoběžka l leží v rovině σ ; $\sigma \perp o \wedge O \in \sigma$,
 - otočení roviny σ kolem její stopy n^σ do průmětny ν , protože $o \parallel \nu \Rightarrow \sigma \perp \nu$, jedná se o sklopení,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (4),
- sestavení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
 - zobrazeny pouze rovnoběžky v jednom poloprostoru s hraniční rovinou σ ,
- sestavení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka rovnoběžek (pokud existuje),
 - neexistuje v případě dvojdílného hyperboloidu, středovým průmětem plochy κ je celá průmětna ν ,
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící hyperboly k , sestavené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 40, respektive Obr. 41.



Obr. 40: Rotační dvojdílný hyperboloid, osa rovnoběžná s průmětnou



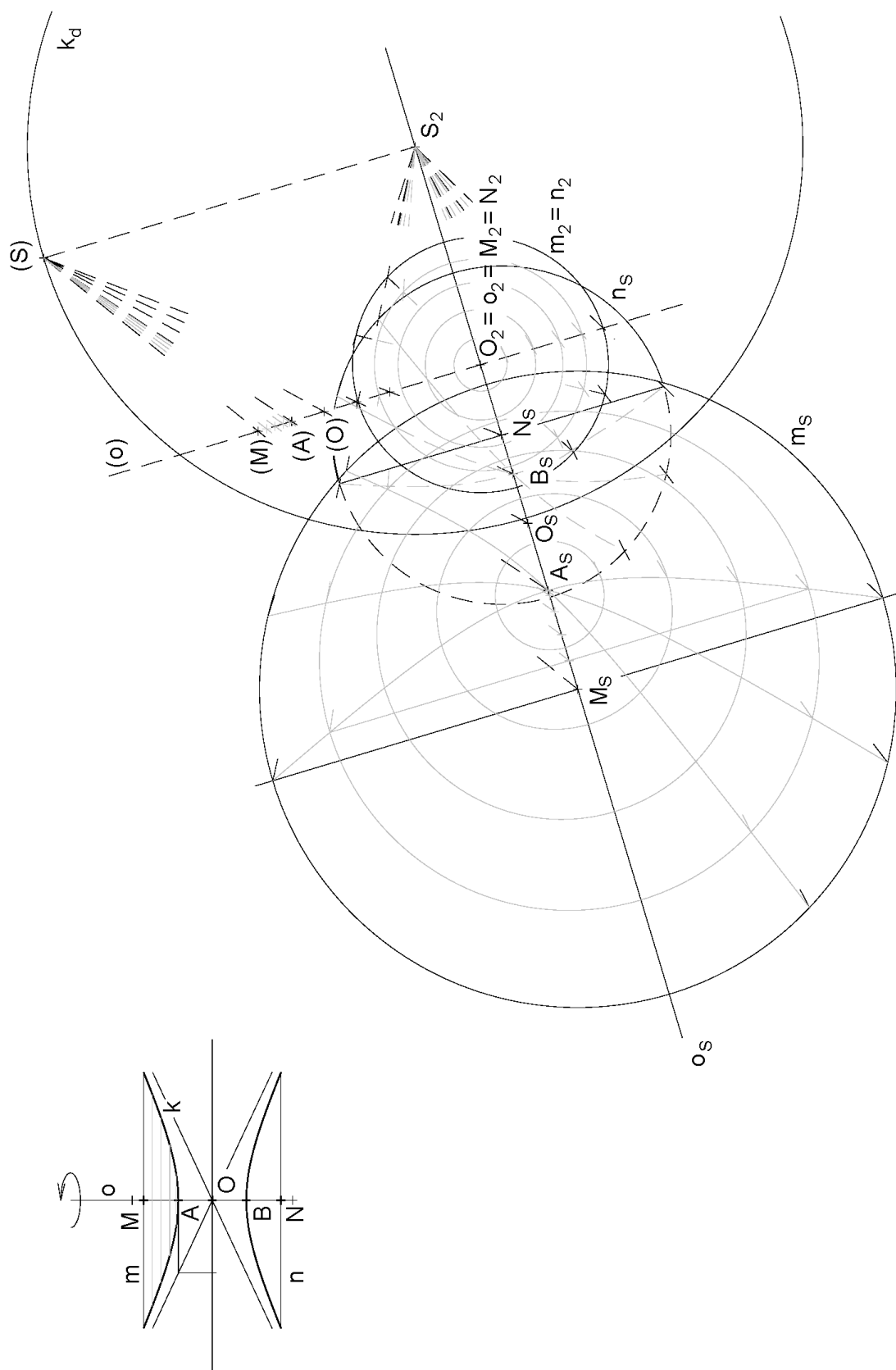
Obr. 41: Rotační jednodílný hyperboloid, osa rovnoběžná s průmětnou

Příklad 5.9. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací hyperboly k kolem její hlavní, respektive vedlejší osy. Je-li dána hyperbola k , osa rotační plochy $o = (o_S, o_2)$ kolmá k průmětně a bod $O = (O_S, O_2)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. (Zadání v příloze Obr. 62.)

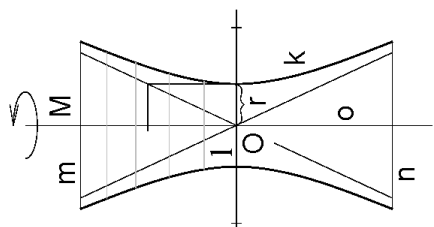
Postup konstrukce: (pro oba rotační hyperboloidy současně)

- zobrazení středových průmětů vrcholů A, B kvadriky κ ,
 - pouze u dvojdílného hyperboloidu (rotace hyperboly k kolem hlavní osy),
 - sklopení osy o ,
- sestrojení středového průmětu rovnoběžky l ; $l = (O, r)$,
 - pouze u jednodílného hyperboloidu (rotace hyperboly k kolem vedlejší osy),
 - $O \dots$ střed hyperboly k = střed kvadriky κ ,
 - $r \dots$ délka hlavní poloosy hyperboly k ,
 - rovnoběžka l leží v rovině σ ; $\sigma \perp o \wedge O \in \sigma$,
 - $o \perp \nu \Rightarrow \sigma \parallel \nu$,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (3),
- sestrojení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
 - zobrazeny pouze rovnoběžky v jednom poloprostoru s hraniční rovinou σ ,
- sestrojení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka rovnoběžek (pokud existuje),
 - neexistuje v případě dvojdílného hyperboloidu, středovým průmětem plochy κ je celá průmětna ν ,
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící hyperboly k , sestrojené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 42, respektive Obr. 43.



Obr. 42: Rotační dvojdílný hyperboloid, osa kolmá k průmětně



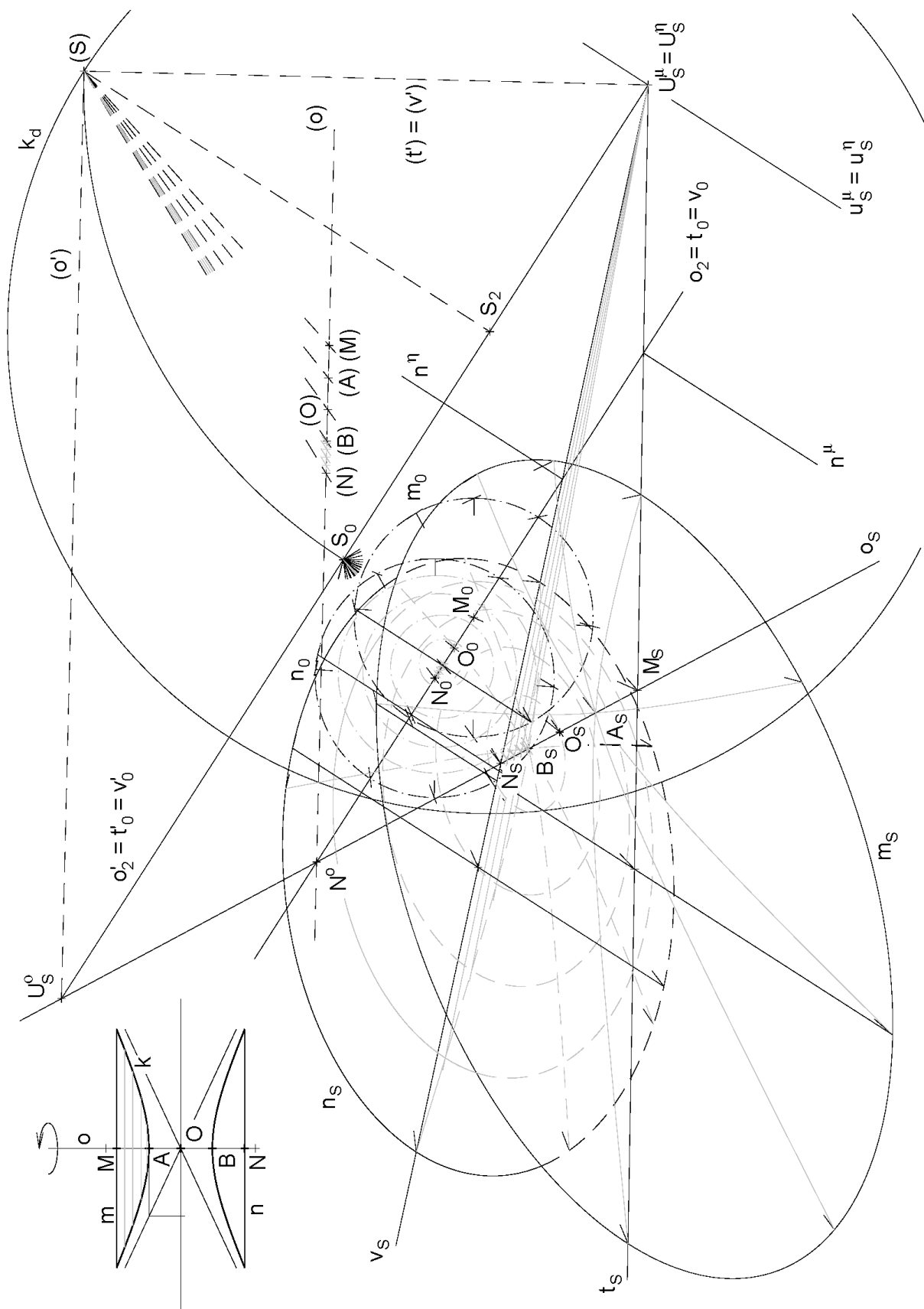
62

Příklad 5.10. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací hyperboly k kolem její hlavní, respektive vedlejší osy. Je-li dána hyperbola k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O = (O_S)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. (Zadání v příloze Obr. 63.)

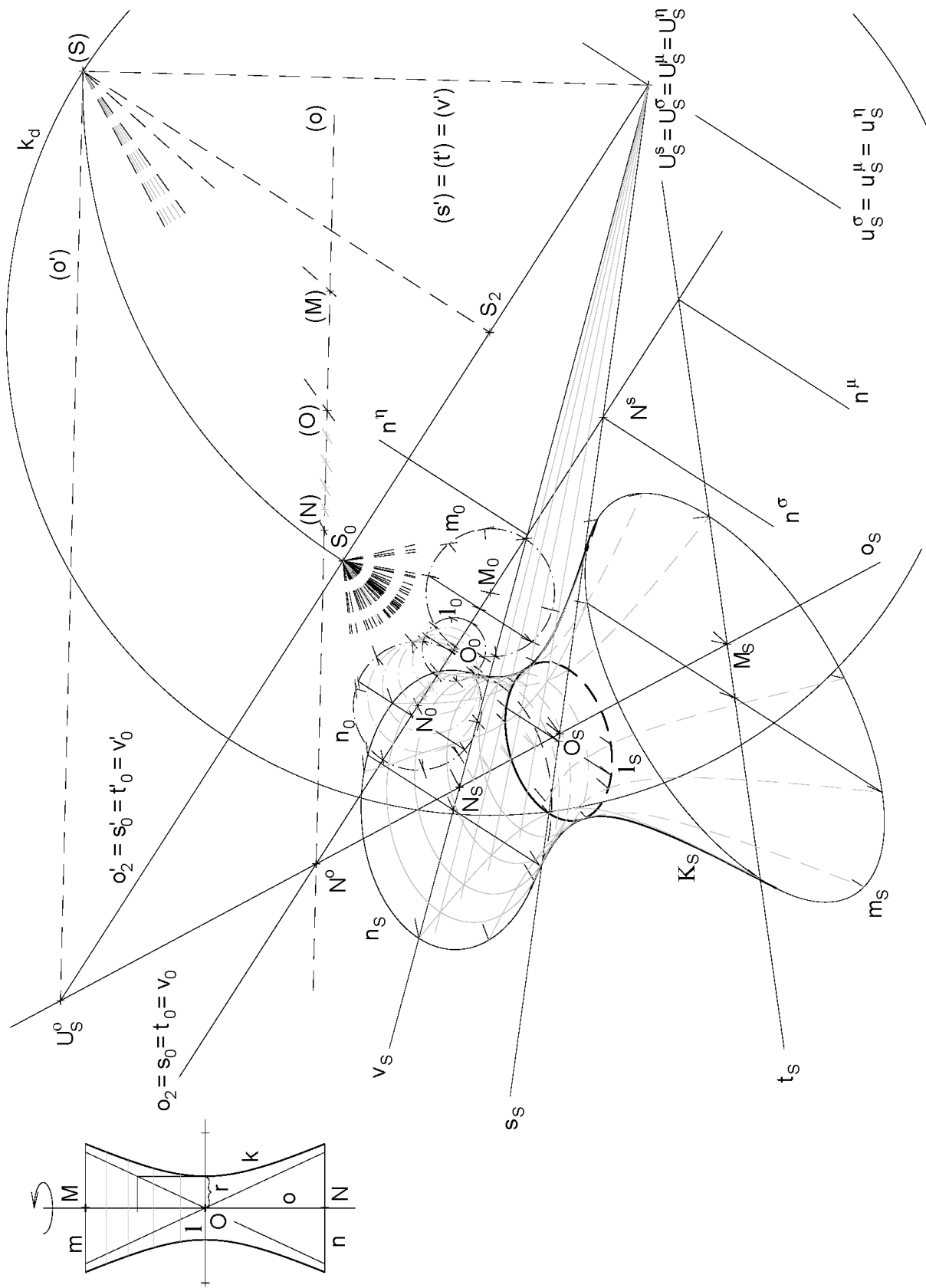
Postup konstrukce: (pro oba rotační hyperboloidy současně)

- zobrazení středových průmětů vrcholů A, B kvadriky κ ,
 - pouze u dvojdílného hyperboloidu (rotace hyperboly k kolem hlavní osy),
 - sklopení osy o ,
- sestavení středového průmětu rovnoběžky l ; $l = (O, r)$,
 - pouze u jednodílného hyperboloidu (rotace hyperboly k kolem vedlejší osy),
 - $O \dots$ střed hyperboly k = střed kvadriky κ ,
 - $r \dots$ délka hlavní poloosy hyperboly k ,
 - rovnoběžka l leží v rovině σ ; $\sigma \perp o \wedge O \in \sigma$,
 - otočení roviny σ kolem její stopy n^σ do průmětny ν ,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (4),
- sestavení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
 - zobrazeny pouze rovnoběžky v jednom poloprostoru s hraniční rovinou σ ,
- sestavení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka plochy (pokud existuje),
 - neexistuje v případě dvojdílného hyperboloidu, středovým průmětem plochy κ je celá průmětna ν ,
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící hyperboly k , sestavené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 44, respektive Obr. 45.



Obr. 44: Rotační dvojdílný hyperboloid



Obr. 45: Rotační jednodílný hyperboloid

Příklad 5.11. Sestrojte dvě rotační kvadriky ${}^1\kappa, {}^2\kappa$, které vzniknou rotací rovnosé hyperboly k kolem obou jejích os. Je dána rovnosá hyperbola k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O = (O_S)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. (Zadání v příloze Obr. 64.)

Postup konstrukce:

- zobrazení středových průmětů vrcholů kvadriky ${}^2\kappa$,
 - pouze u dvojdílného hyperboloidu (rotace hyperboly k kolem hlavní osy),
 - sklopení osy o ,
- sestavení středového průmětu rovnoběžky l ; $l = (O, r)$,
 - pouze u jednodílného hyperboloidu (rotace hyperboly k kolem vedlejší osy),
 - $O \dots$ střed hyperboly k = střed kvadriky ${}^1\kappa$,
 - $r \dots$ délka hlavní poloosy hyperboly k ,
 - rovnoběžka l leží v rovině σ ; $\sigma \perp o \wedge O \in \sigma$,
 - otočení roviny σ kolem její stopy n^σ do průmětny ν ,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (4),
- sestavení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
 - zobrazeny pouze rovnoběžky v jednom poloprostoru s hraniční rovinou σ ,
- sestavení zdánlivých obrysů ploch ${}^1\kappa, {}^2\kappa$,
 - to jsou obálky rovnoběžek (pokud existují),
- určení viditelnosti (zobrazených rovnoběžek, ploch vůči sobě),
- polohy otočené tvořící hyperboly 1k resp. 2k , sestavené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 46.

Příklad 5.12. Sestrojte přímkovou plochu κ , která vznikne rotací přímky k kolem osy o . Je-li dána tvořící přímka $k = (N^k, U_S^k)$ a osa rotační plochy o , $o = (N^o, U_S^o)$. (Zadání v příloze Obr. 65.)

Přímka je jednoznačně určena libovolnými dvěma body, rotace přímky bude tedy jednoznačně určena rotací dvou libovolných bodů.

Postup konstrukce:

- rotace bodu A' ,
 - zvolení libovolného bodu A , $A \in o \dots$ střed otáčení bodu A' ,
 - rovina α ; $A \in \alpha \wedge \alpha \perp o \dots$ rovina otáčení bodu A' ,
 - bod A' ; $A' = \alpha \cap k$,
 - kružnice a , $a = (A, r = |AA'|) \dots$ kružnice otáčení bodu A' ,
 - zvolení směru a velikosti úhlu, ve kterém budeme zobrazovat jednotlivé polohy otočené tvořící přímky
 - otočené polohy bodu A' , to jsou body 1, 2, 3, $\dots$,
 - sestrojujeme v otočení roviny α kolem její stopy n^α do průmětny ν ,
- rotace bodu B' (analogicky),
 - zvolení libovolného bodu B , $B \in o \dots$ střed otáčení bodu B' ,
 - rovina β ; $B \in \beta \wedge \beta \perp o \dots$ rovina otáčení bodu B' ,
 - bod B' ; $B' = \beta \cap k$,
 - kružnice b , $b = (B, r = |BB'|) \dots$ kružnice otáčení bodu B' ,
 - otočené polohy bodu B' , to jsou body $I, II, III, \dots$,
stejný směr a velikost úhlu otáčení
 - sestrojujeme v otočení roviny β kolem její stopy n^β do průmětny ν ,
- sestrojení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka přímků (pokud existuje),
- určení viditelnosti zobrazených přímků,
- další dvě rovnoběžky plochy sestrojené pro větší názornost.

Řešení: Obr. 47.

6 Oblé rotační plochy ve středovém promítání

Oblé rotační plochy zobrazujeme stejným způsobem jako rotační kvadriky. To znamená, že zobrazíme jednotlivé rovnoběžky plochy a jejich obálka je středovým průmětem plochy. V případě oblých ploch zpravidla neexistuje jednodušší křivka, jejíž rotací by vznikla rotační plocha, jako v případě rotačního jednodílného hyperboloidu.

Následující podkapitoly se věnují některým konkrétním zobrazením oblých rotačních ploch ve středovém promítání.

6.1 Anuloid ve středovém promítání

V této podkapitole budou uvedeny příklady zobrazení rotační plochy, která vznikne rotací kružnice k kolem osy o , která neprochází středem této kružnice, tedy anuloidu.

Příklad 6.1. Sestrojte rotační plochu κ , která vznikne rotací kružnice k kolem osy o . Je-li dána kružnice k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O' = (O'_S)$ ležící na přímce o , který je nejbližším bodem kružnice k . (Zadání v příloze Obr. 66.)

Postup konstrukce:

- sestrojení středového průmětu rovnoběžky l ; $l = (O', r_2)$,
 $O' \dots$ ze zadání,
 $r_2 \dots$ vzdálenost bodu O' a nejvzdálenějšího bodu kružnice k ,
 - rovnoběžka l leží v rovině σ ; $\sigma \perp o \wedge O \in \sigma$,
 - otočení roviny σ kolem její stopy n^σ do průmětny ν ,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (4),
 - v rovině σ leží také rovnoběžka se středem O' a poloměrem r_1
a kružnice otáčení bodu O (střed kružnice k) se středem O' a poloměrem r ,
- sestrojení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
 - zobrazeny rovnoběžky v jednom poloprostoru s hraniční rovinou σ ,
 - také druhá takzvaná kráterová rovnoběžka⁵,
- sestrojení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka rovnoběžek (pokud existuje),
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící kružnice k , sestrojené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 48.

⁵Rovnoběžka plochy se nazývá kráterová rovnoběžka, jestliže tečna vedená z každého bodu této rovnoběžky k meridiánu je kolmá k ose rotační plochy. Zde to jsou právě dvě rovnoběžky plochy, které mají poloměr r .

Příklad 6.2. Sestrojte rotační plochu κ , která vznikne rotací kružnice k kolem osy o . Je-li dána kružnice k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O' = (O'_S)$ ležící na přímce o , který je nejbližším bodem kružnice k . (Zadání v příloze Obr. 67.)

Postup konstrukce:

- sestrojení středového průmětu rovnoběžky l ; $l = (O', r_2)$,
 $O' \dots$ ze zadání,
 $r_2 \dots$ vzdálenost bodu O' a nejvzdálenějšího bodu kružnice k ,
 - rovnoběžka l leží v rovině σ ; $\sigma \perp o \wedge O \in \sigma$,
 - otočení roviny σ kolem její stopy n^σ do průmětny ν ,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (4),
 - v rovině σ leží také rovnoběžka se středem O' a poloměrem r_1
a kružnice otáčení bodu O (střed kružnice k) se středem O' a poloměrem r ,
- sestrojení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
 - zobrazeny rovnoběžky v jednom poloprostoru s hraniční rovinou σ ,
 - také druhá takzvaná kráterová rovnoběžka,
- sestrojení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka rovnoběžek (pokud existuje),
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící kružnice k , sestrojené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 49.

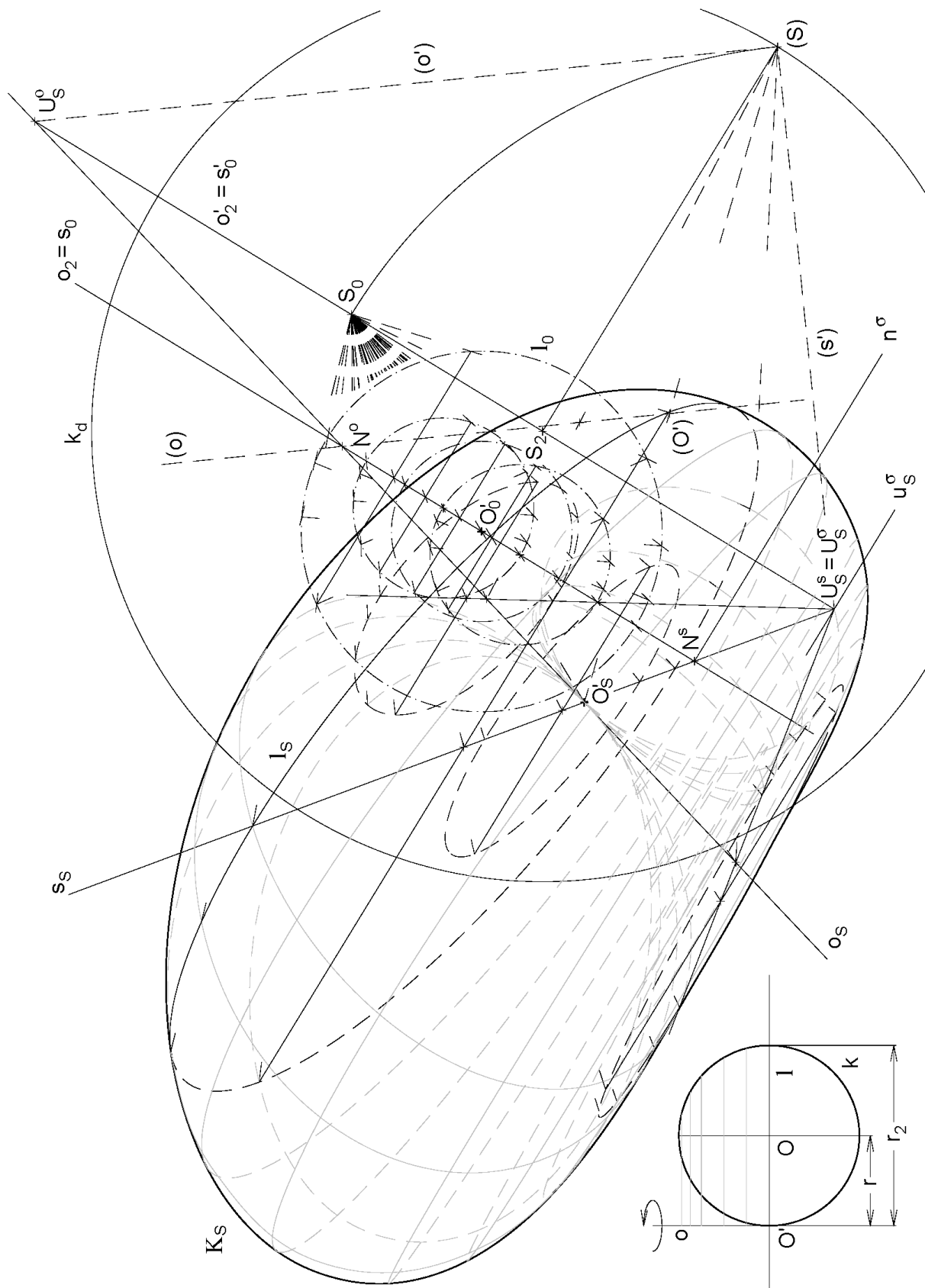
74

Příklad 6.3. Sestrojte rotační plochu κ , která vznikne rotací kružnice k kolem osy o . Je-li dána kružnice k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O' = (O'_S)$ ležící na přímce o , který je nejbližším bodem kružnice k . (Zadání v příloze Obr. 68.)

Postup konstrukce:

- sestrojení středového průmětu rovnoběžky l ; $l = (O', r_2)$,
 $O' \dots$ ze zadání,
 $r_2 \dots$ vzdálenost bodu O' a nejvzdálenějšího bodu kružnice k ,
 - rovnoběžka l leží v rovině σ ; $\sigma \perp o \wedge O \in \sigma$,
 - otočení roviny σ kolem její stopy n^σ do průmětny ν ,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (4),
 - v rovině σ leží také rovnoběžka se středem O' a poloměrem r_1
 a kružnice otáčení bodu O (střed kružnice k) se středem O' a poloměrem r ,
- sestrojení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
 - zobrazeny rovnoběžky v jednom poloprostoru s hraniční rovinou σ ,
 - také druhá takzvaná kráterová rovnoběžka,
- sestrojení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka rovnoběžek (pokud existuje),
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící kružnice k , sestrojené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 50.



Obr. 50: Axoid

Příklad 6.4. Sestrojte rotační plochu κ , která vznikne rotací kružnice k kolem osy o . Je-li dána kružnice k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O' = (O'_S)$, který je průsečíkem osy o a kolmice k ose o vedené středem kružnice k . (Zadání v příloze Obr. 69.)

Postup konstrukce:

- sestrojení středového průmětu rovnoběžky l ; $l = (O', r_2)$,
 O' ... ze zadání,
 r_2 ... vzdálenost bodu O' a nejvzdálenějšího bodu kružnice k ,
 - rovnoběžka l leží v rovině σ ; $\sigma \perp o \wedge O \in \sigma$,
 - otočení roviny σ kolem její stopy n^σ do průmětny ν ,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (4),
 - v rovině σ leží také rovnoběžka se středem O' a poloměrem r_1
 a kružnice otáčení bodu O (střed kružnice k) se středem O' a poloměrem r ,
- sestrojení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
 - zobrazeny rovnoběžky v jednom poloprostoru s hraniční rovinou σ ,
 - také druhá takzvaná kráterová rovnoběžka,
- sestrojení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka rovnoběžek (pokud existuje),
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící kružnice k , sestrojené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 51.

6.2 Obecné oblé plochy ve středovém promítání

Podkapitola se věnuje zobrazení rotačních ploch, které vzniknou rotací obecné křivky k kolem osy o . Na křivku k je dán pouze požadavek, aby křivka k a osa o určovaly právě jednu rovinu.

Příklad 6.5. Sestrojte rotační plochu κ , která vznikne rotací křivky k kolem osy o . Je-li dána křivka k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $A = (A_S)$ ležící na přímce o , dle zadání. (Zadání v příloze Obr. 70.)

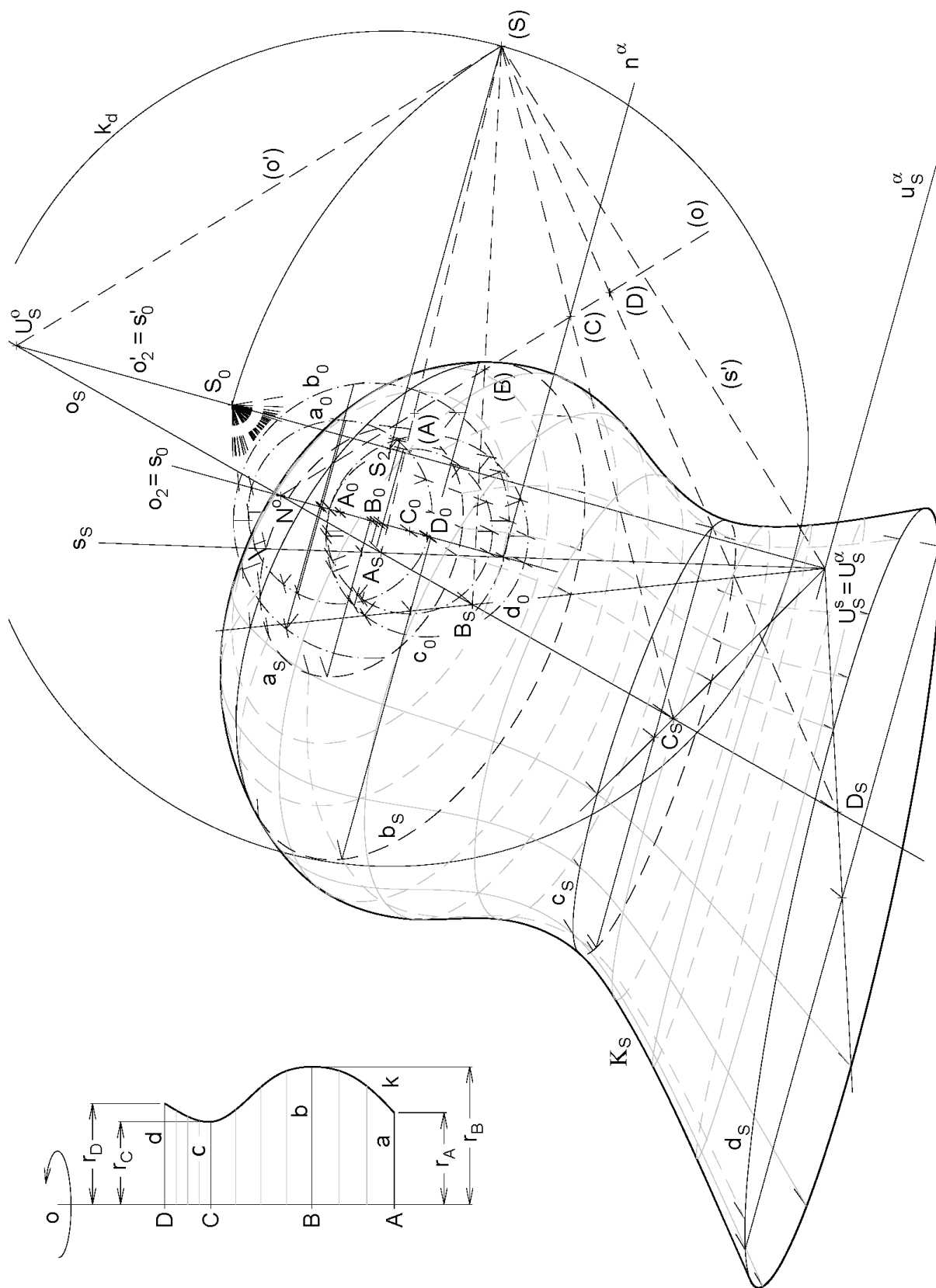
Postup konstrukce:

- sestrojení středového průmětu rovnoběžky a ; $a = (A, r_A)$,
 $A, r_A \dots$ ze zadání,
 - rovnoběžka a leží v rovině α ; $\alpha \perp o \wedge A \in \alpha$,
 - otočení roviny α kolem její stopy n^α do průmětny ν ,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice*, příklad (4),
- sestrojení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
 - rovnoběžka b ; $b = (B, r_B)^6$,
 - rovnoběžka c ; $c = (C, r_C)^7$,
 - rovnoběžka d ; $d = (D, r_D)$,
 - další rovnoběžky (dle potřeby),
- sestrojení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka rovnoběžek (pokud existuje),
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící křivky k , sestrojené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 52.

⁶Rovnoběžka b je takzvaná rovníková rovnoběžka, to je rovnoběžka plochy, která má ve svém okolí největší poloměr.

⁷Rovnoběžka c je takzvaná hrdelní rovnoběžka, to je rovnoběžka plochy, která má ve svém okolí nejmenší poloměr.



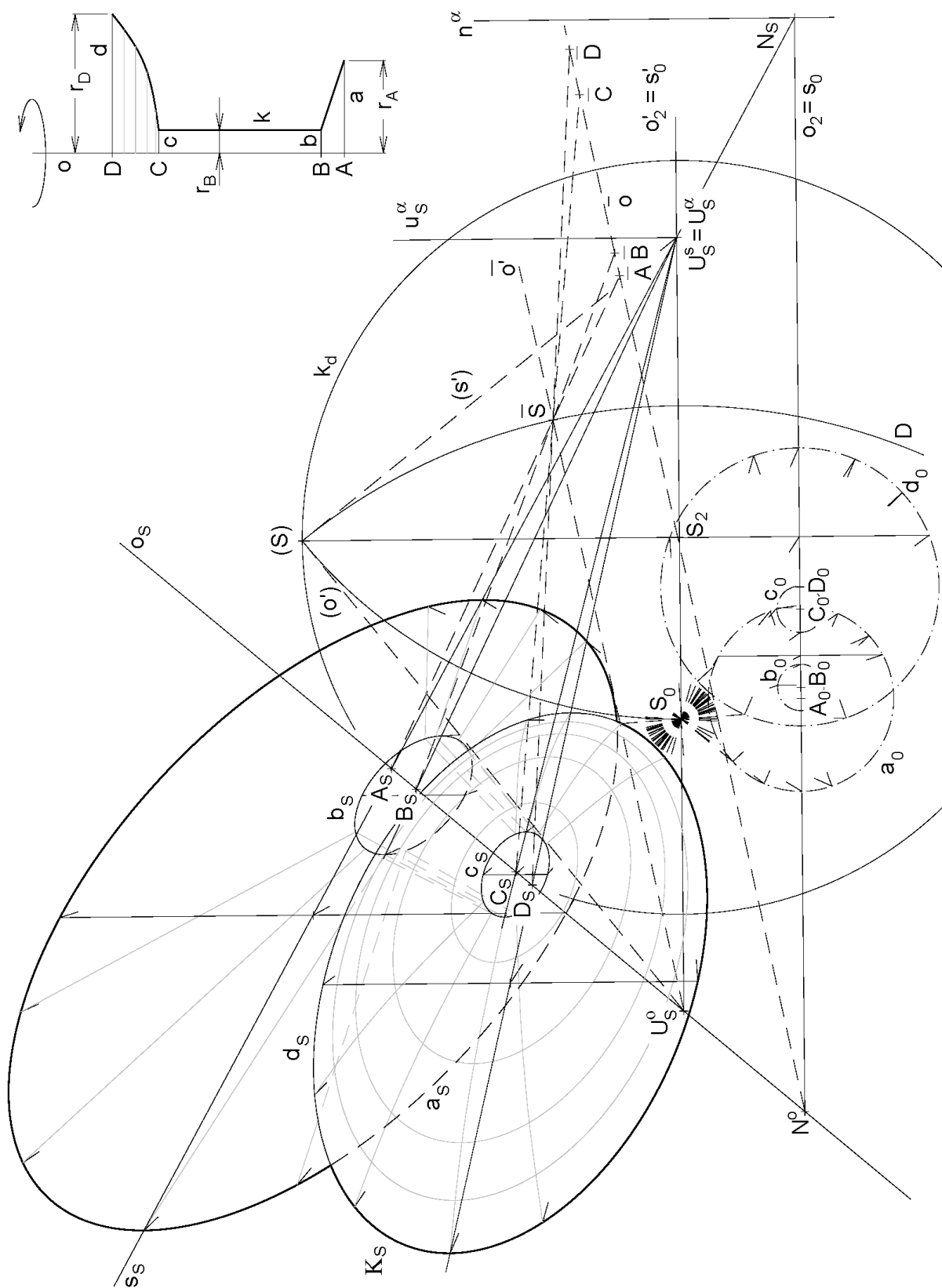
Obr. 52: Oblá plocha 1

Příklad 6.6. Sestrojte rotační plochu κ , která vznikne rotací křivky k kolem osy o . Je-li dána křivka k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $A = (A_S)$ ležící na přímce o , dle zadání. (Zadání v příloze Obr. 71.)

Postup konstrukce:

- sestrojení středového průmětu rovnoběžky a ; $a = (A, r_A)$,
 $A, r_A \dots$ ze zadání,
 - rovnoběžka a leží v rovině α ; $\alpha \perp o \wedge A \in \alpha$,
 - otočení roviny α kolem její stopy n^α do průmětny ν ,
 - viz kapitola 2 *Středové zobrazení kružnice* příklad (4),
- sestrojení středových průmětů dalších rovnoběžek plochy (analogicky),
 - rovnoběžka b ; $b = (B, r_B)$,
 - rovnoběžka c ; $c = (C, r_C)$,
 - rovnoběžka d ; $d = (D, r_D)$,
 - další rovnoběžky (dle potřeby),
- sestrojení zdánlivého obrysu plochy κ ,
 - to je obálka rovnoběžek (pokud existuje),
- určení viditelnosti zobrazených rovnoběžek plochy,
- polohy otočené tvořící křivky k , sestrojené množinově pro větší názornost.

Řešení: Obr. 53.



Obr. 53: Oblá plocha 2

Závěr

Cílem diplomové práce bylo seznámit čtenáře se středovým zobrazením kvadrik a oblých ploch. Čtenář by měl nejenom umět zobrazovat kružnice plochy, ale také představit si skutečnou zobrazovanou plochu. Například zobrazení protáhlého elipsoidu, zploštělého elipsoidu a kulové plochy se shodnou osou rotace je zařazeno z toho důvodu, aby čtenář mohl tyto kvadriky lépe porovnat, pochopit a být veden k představě skutečných ploch v prostoru a jejich rozdílů i přes podobnost středových průmětů. Proto si myslím, že cíl práce byl splněn.

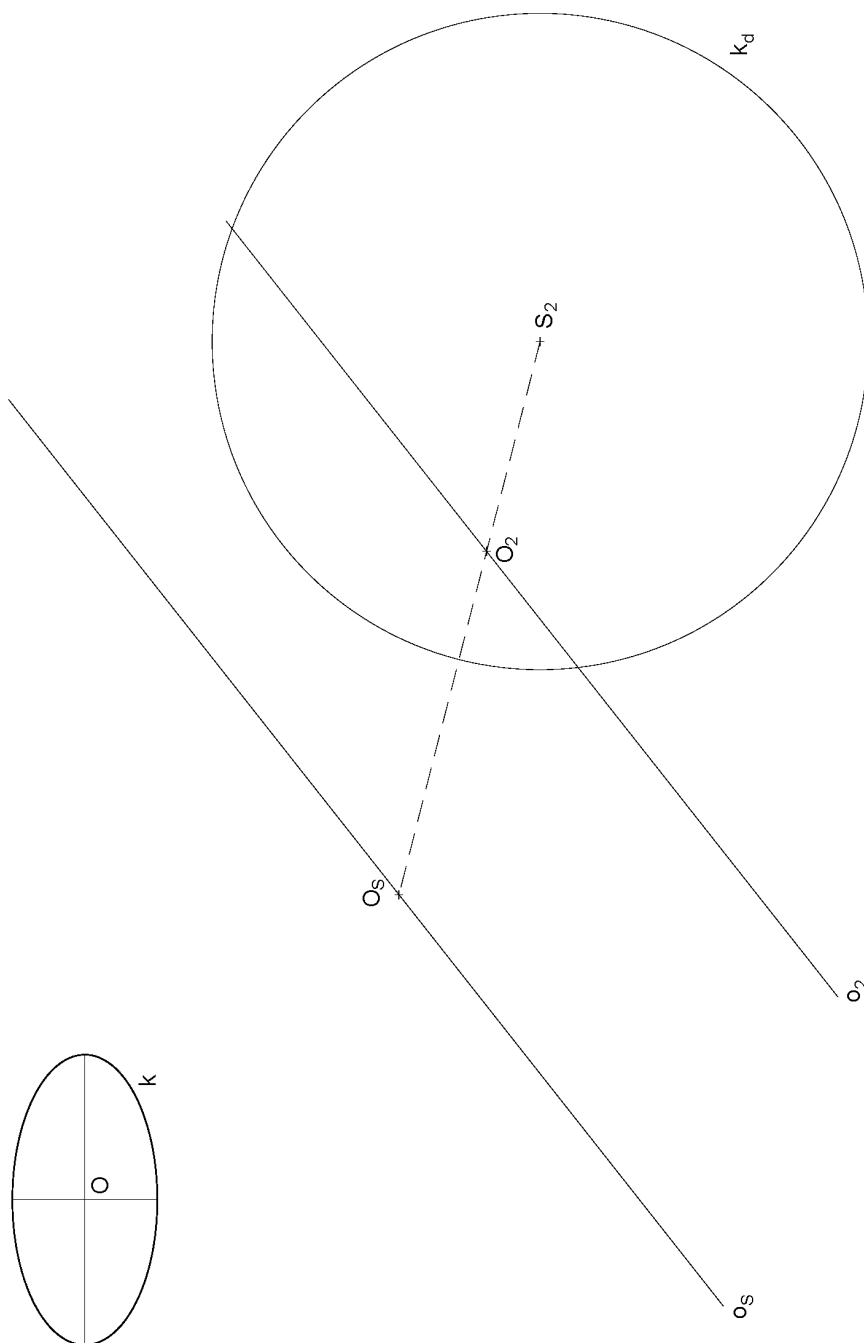
V běžně dostupné literatuře není podrobně ani systematicky téma středového promítání kvadrik a oblých ploch zpracováno. Tato skutečnost vedla ke vzniku této diplomové práce, která alespoň částečně doplňuje tuto mezeru. Domnívám se, že tento text může sloužit pro prohloubení znalostí a procvičení konstrukcí ve středovém promítání, či alespoň ukázat, že i ve středovém promítání lze zobrazit oblé plochy.

Literatura

- [1] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie I. díl*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1964. S. 102–113, kap. 5.6., 5.7., 5.8. Středová kolineace a osová afinita. S. 150–157, kap. 10.1 Středové promítání na jednu průmětnu. S. 324–335, kap. 13.1. Quételetova-Dandelinova věta pro rovinné řezy rotační kuželové plochy. S. 335–342, kap. 13.2. Konstrukce kuželoseček užitím středové kolineace.
- [2] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie II. díl*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1967. S. 105–115, kap. 18.3 Speciální rotační plochy.
- [3] HOLÁŇ, Štěpán a Libuše HOLÁŇOVÁ. *Cvičení z deskriptivní geometrie II: Promítací metody*. Brno: CERM, 1998. S. 72–85, kap. 6 Středové promítání. ISBN 8021406488.
- [4] MACHALA, František. *Středové promítání a lineární perspektiva*. Vyd. 2. Olomouc: Rektorát Univerzity Palackého v Olomouci, 1992. S. 7–76. kap. I. Středové promítání. ISBN 80-7067-165-3.
- [5] KRAEMER, Emil. *Zobrazovací metody: (promítání rovnoběžné)*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. S. 47–50, kap. 1.6 Rotační plochy. ISBN 80-04-21778-8.
- [6] DRÁBEK, Karel, František HARANT, Miroslav MENŠÍK a Ota SETZER. *Deskriptivní geometrie II*. Dotisk. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1964. S. 8–11, kap. 1.3. Kolineace v prostoru a v rovině. S. 79–93, kap. 6 Středové promítání.
- [7] JUKLOVÁ, Lenka. *Rotační plochy*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. S. 10, 11, kap. 1.1 Základní konstrukce na rotačních plochách. S. 64–68, kap. 2.1 Definice rotačních kvadrik a jejich vlastností. ISBN 978-80-244-3236-6.

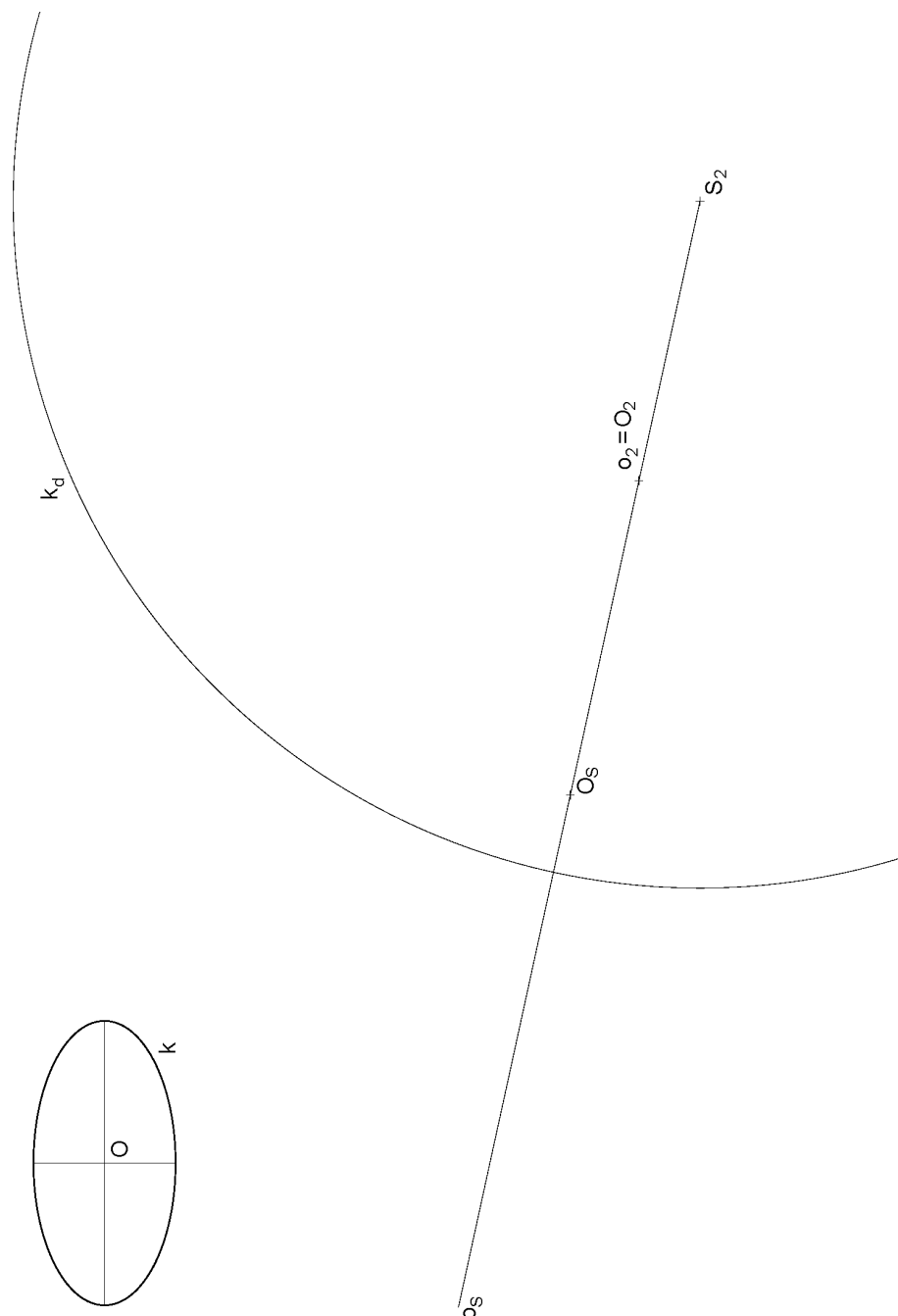
Přílohy

Příklad 5.1. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací elipsy k kolem její hlavní, respektive vedlejší osy. Je-li dána elipsa k , osa rotační plochy $o = (o_S, o_2)$ rovnoběžná s průmětnou a bod $O = (O_S, O_2)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. (Obr. 54)



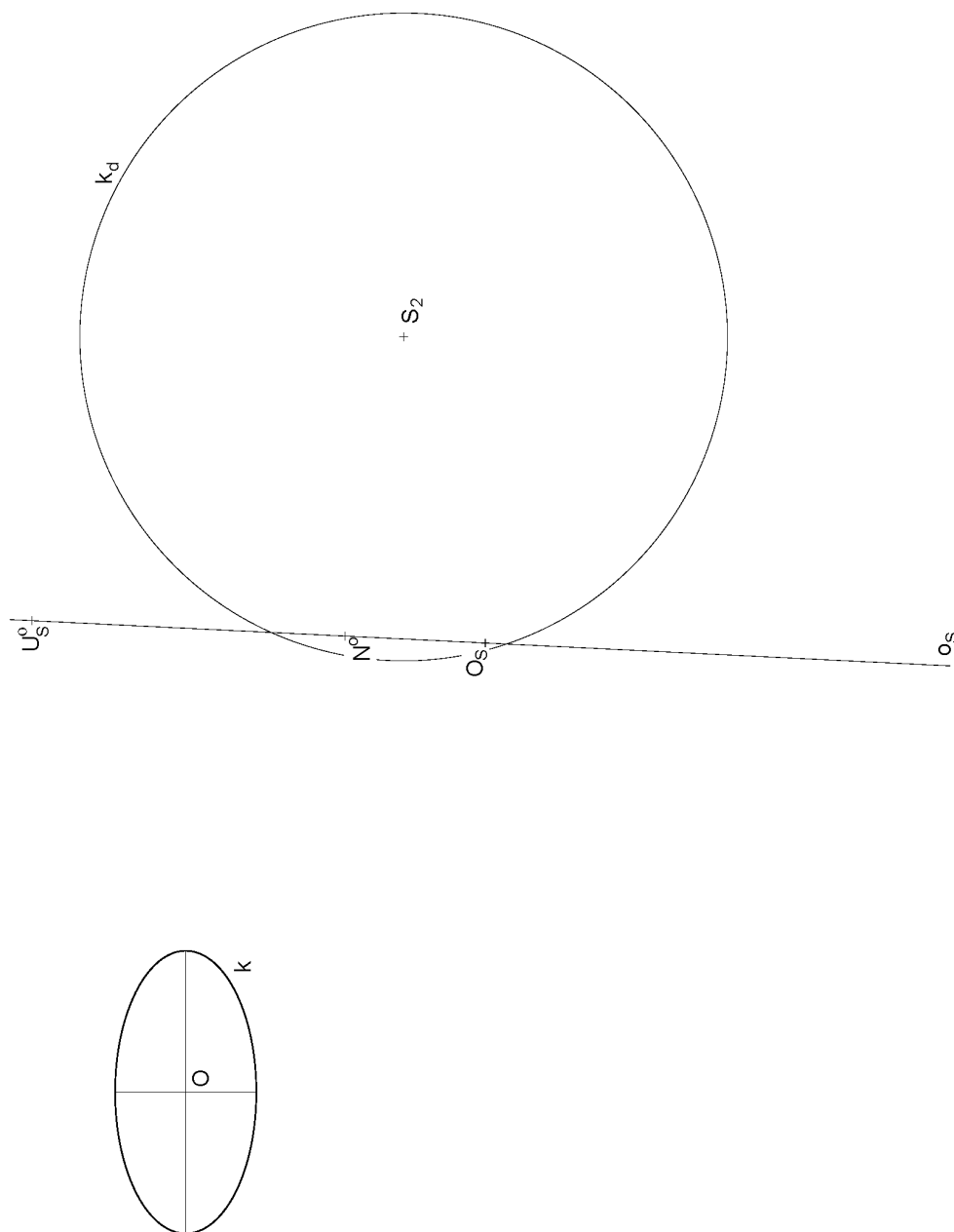
Obr. 54: Zadání elipsoidu, osa rovnoběžná s průmětnou

Příklad 5.2. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací elipsy k kolem její hlavní, respektive vedlejší osy. Je-li dána elipsa k , osa rotační plochy $o = (o_S, o_2)$ kolmá k průmětně a bod $O = (O_S, O_2)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. (Obr. 55)



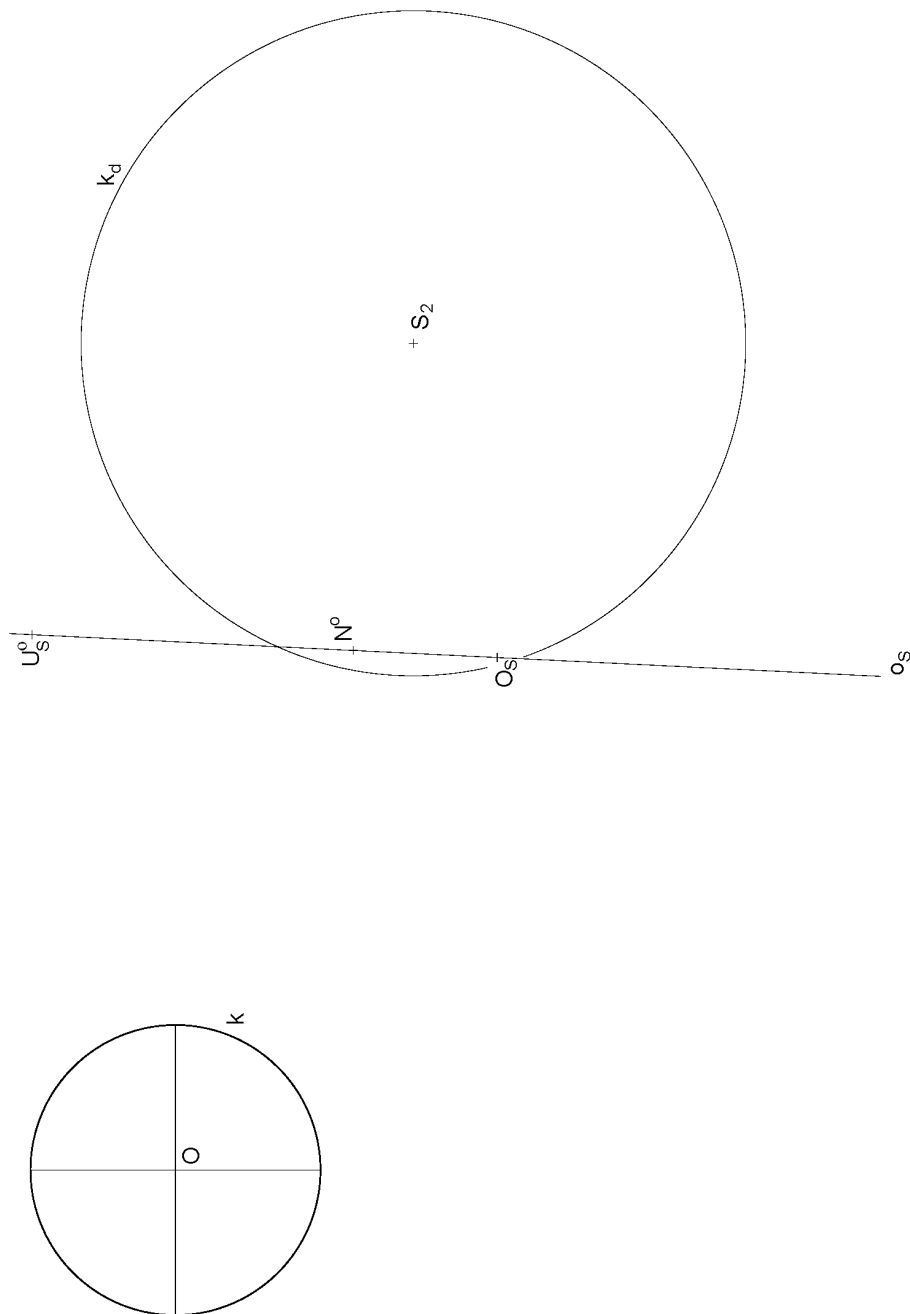
Obr. 55: Zadání elipsoidu, osa kolmá k průmětně

Příklad 5.3. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací elipsy k kolem její hlavní, respektive vedlejší osy. Je-li dána elipsa k , osa rotační plochy o , $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O = (O_S)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. (Obr. 56)



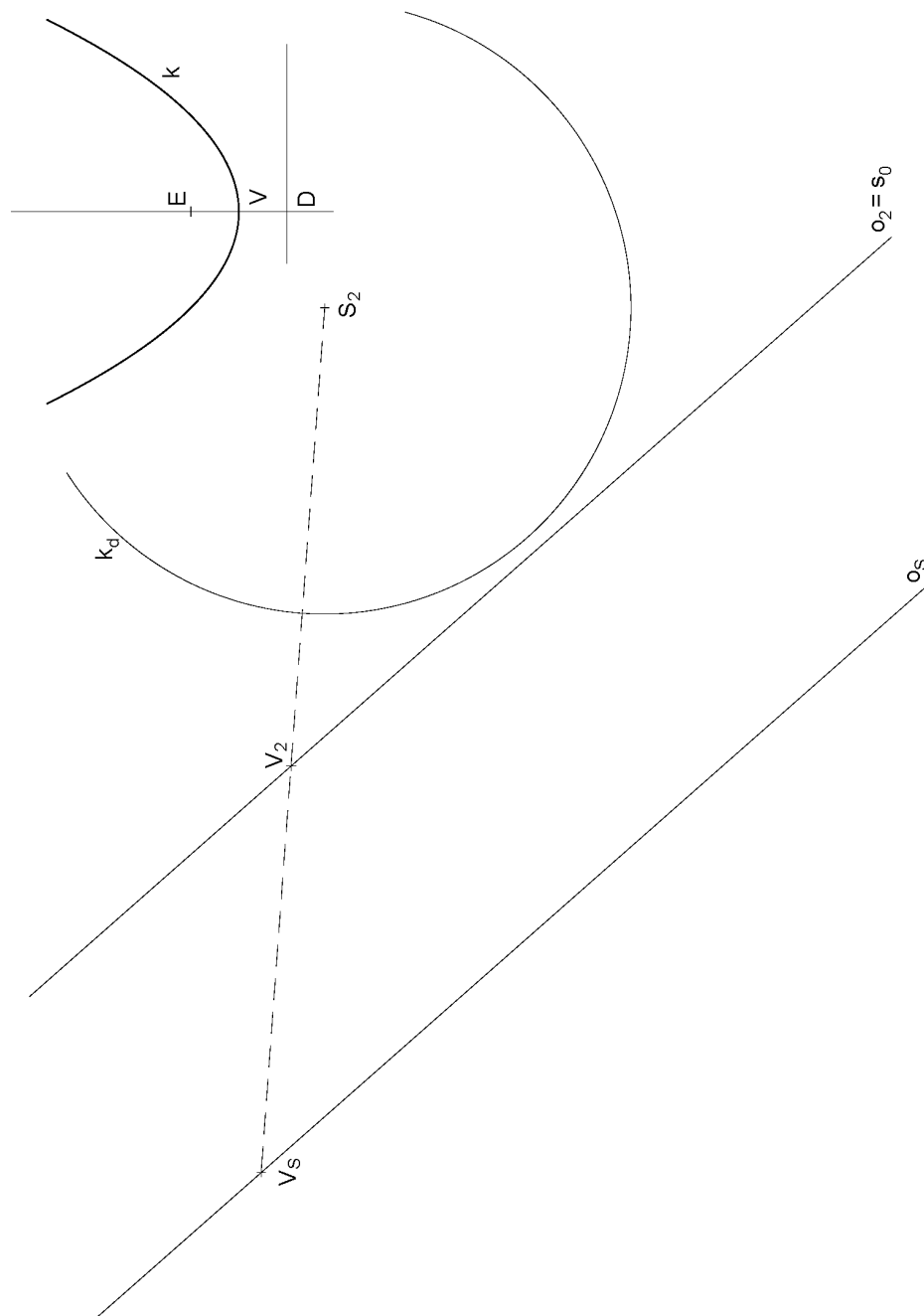
Obr. 56: Zadání elipsoidu

Příklad 5.4. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací kružnice k kolem některé její osy. Je-li dána kružnice k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O = (O_S)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. Zobraďte stejným postupem jako oba elipsoidy a výsledky porovnejte s předchozími příklady. (Obr. 57)



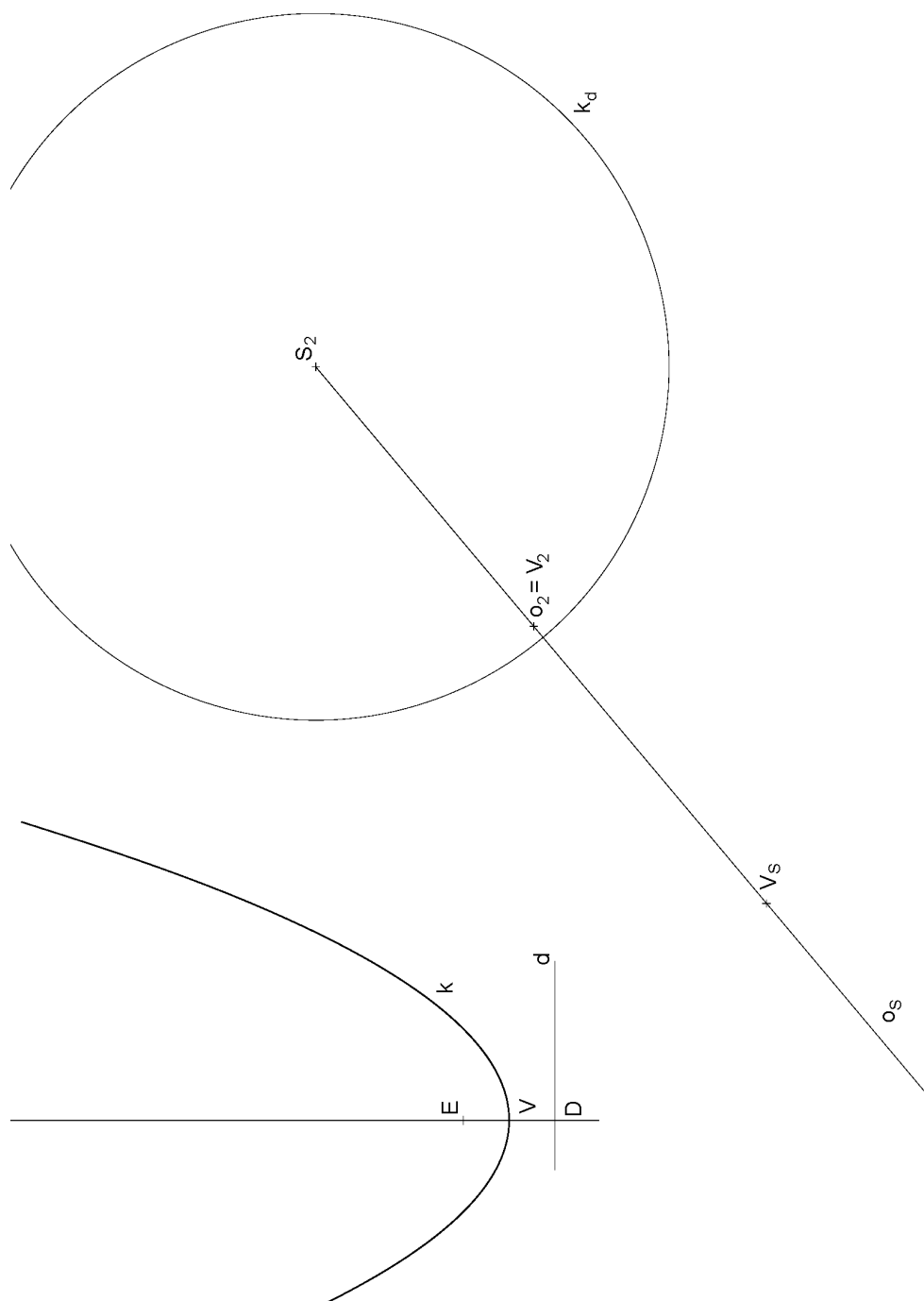
Obr. 57: Zadání kulové plochy

Příklad 5.5. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací paraboly k kolem její osy. Je-li dána parabola k , osa rotační plochy $o = (o_S, o_2)$ rovnoběžná s průmětnou a bod $V = (V_S, V_2)$ ležící na přímce o , který je vrcholem kvadriky. Zvolte vhodně jednu z možností zobrazení kvadriky. (Obr. 58)



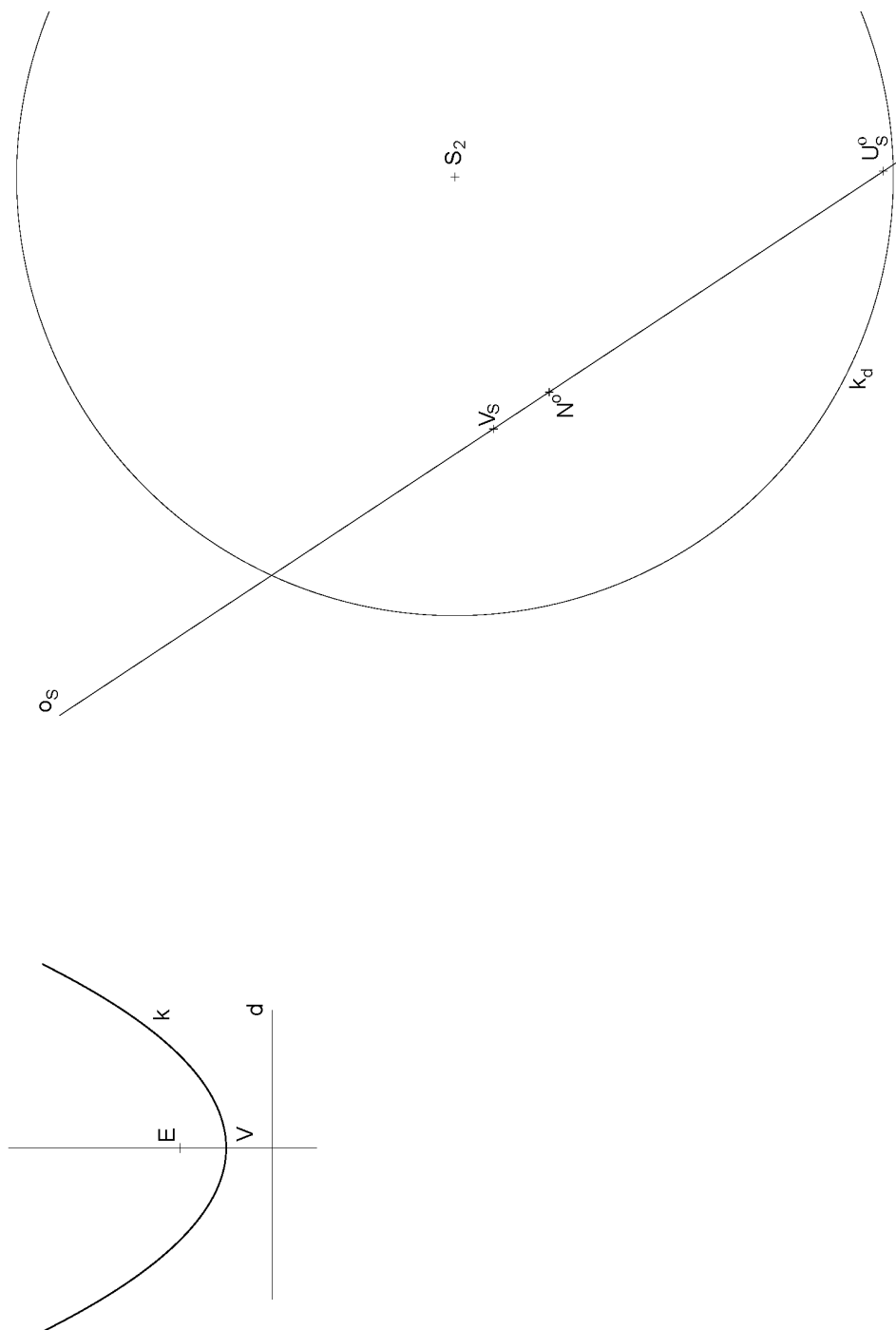
Obr. 58: Zadání rotačního paraboloidu, osa rovnoběžná s průmětnou

Příklad 5.6. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací paraboly k kolem její osy. Je-li dána parabola k , osa rotační plochy $o = (o_S, o_2)$ kolmá k průmětně a bod $V = (V_S, V_2)$ ležící na přímce o , který je vrcholem kvadriky. Zvolte vhodně jednu z možností zobrazení kvadriky. (Obr. 59)



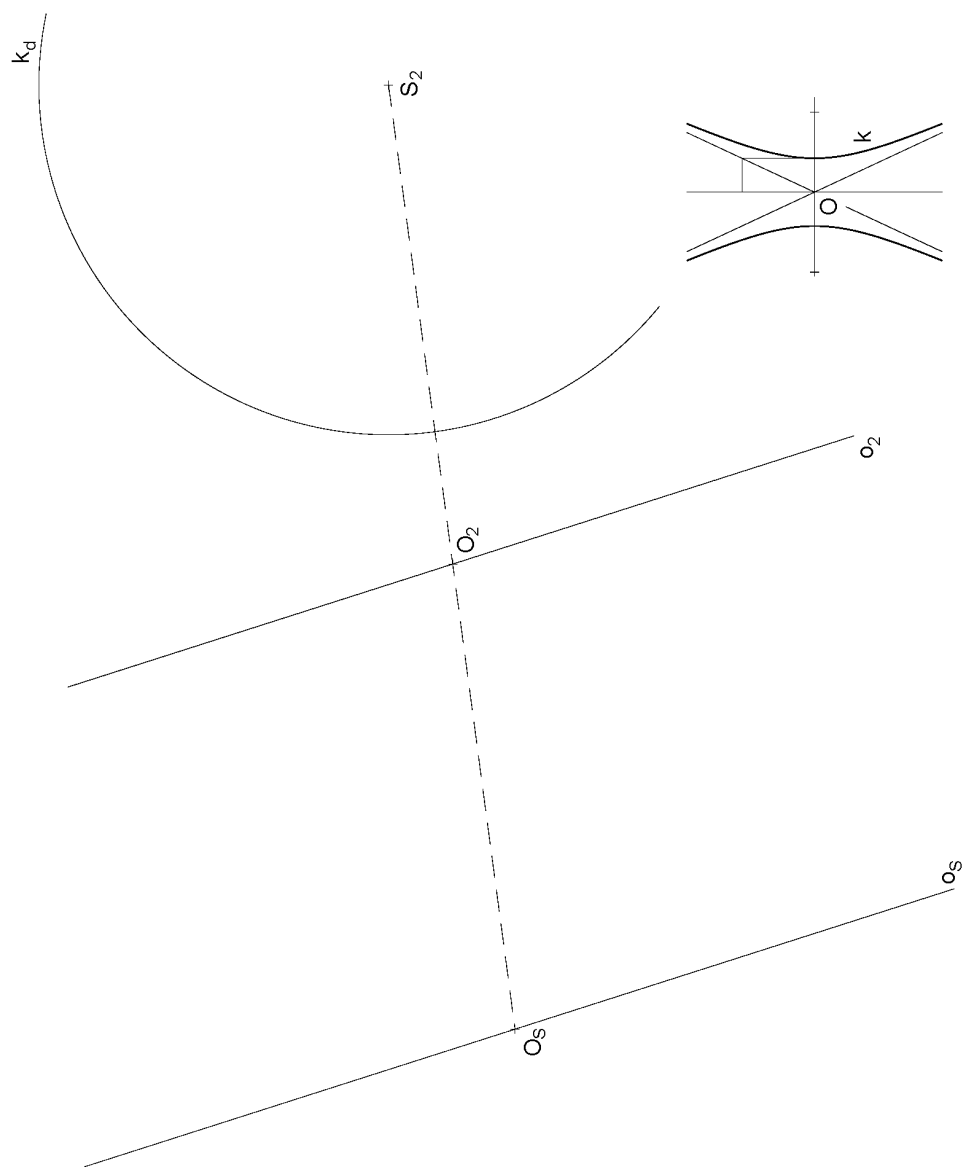
Obr. 59: Zadání rotačního paraboloidu, osa kolmá k průmětně

Příklad 5.7. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací paraboly k kolem její osy. Je-li dána parabola k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $V = (V_S)$ ležící na přímce o , který je vrcholem kvadriky. Zvolte vhodně jednu z možností zobrazení kvadriky. (Obr. 60)



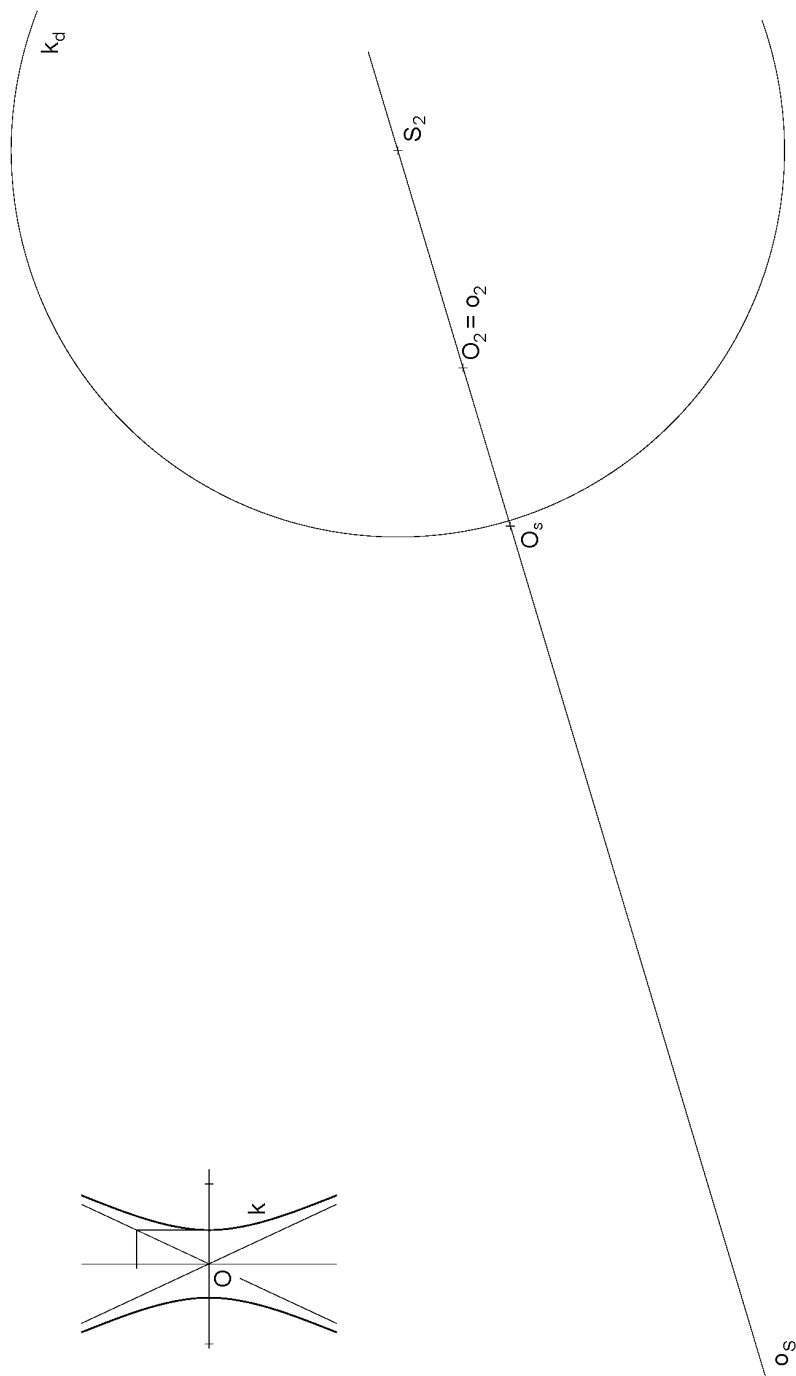
Obr. 60: Zadání rotačního paraboloidu

Příklad 5.8. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací hyperboly k kolem její hlavní, respektive vedlejší osy. Je-li dána hyperbola k , osa rotační plochy $o = (o_S, o_2)$ rovnoběžná s průmětnou a bod $O = (O_S, O_2)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. (Obr. 61)



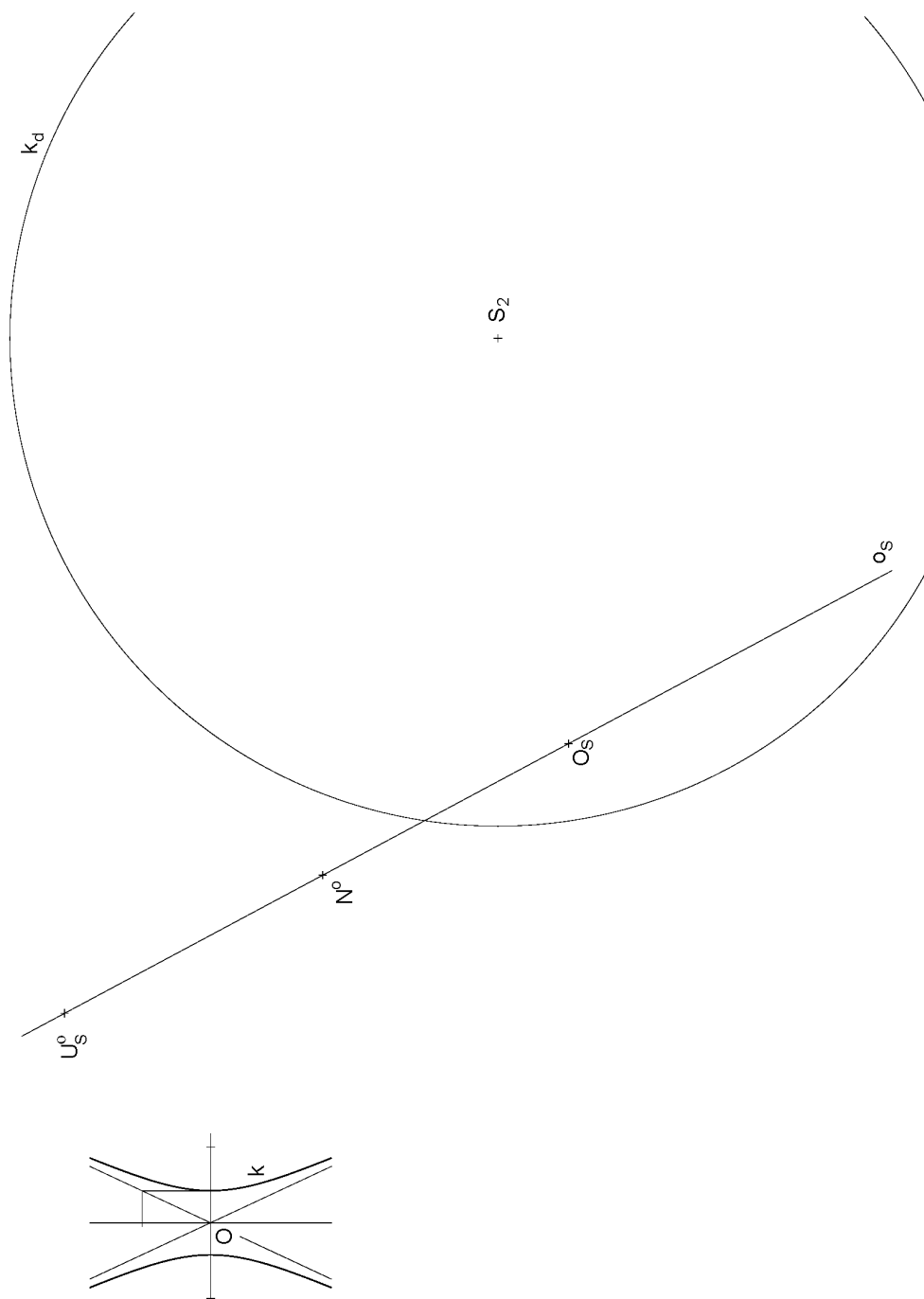
Obr. 61: Zadání rotačního hyperboloidu, osa rovnoběžná s průmětnou

Příklad 5.9. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací hyperboly k kolem její hlavní, respektive vedlejší osy. Je-li dána hyperbola k , osa rotační plochy $o = (o_S, o_2)$ kolmá k průmětně a bod $O = (O_S, O_2)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. (Obr. 62)



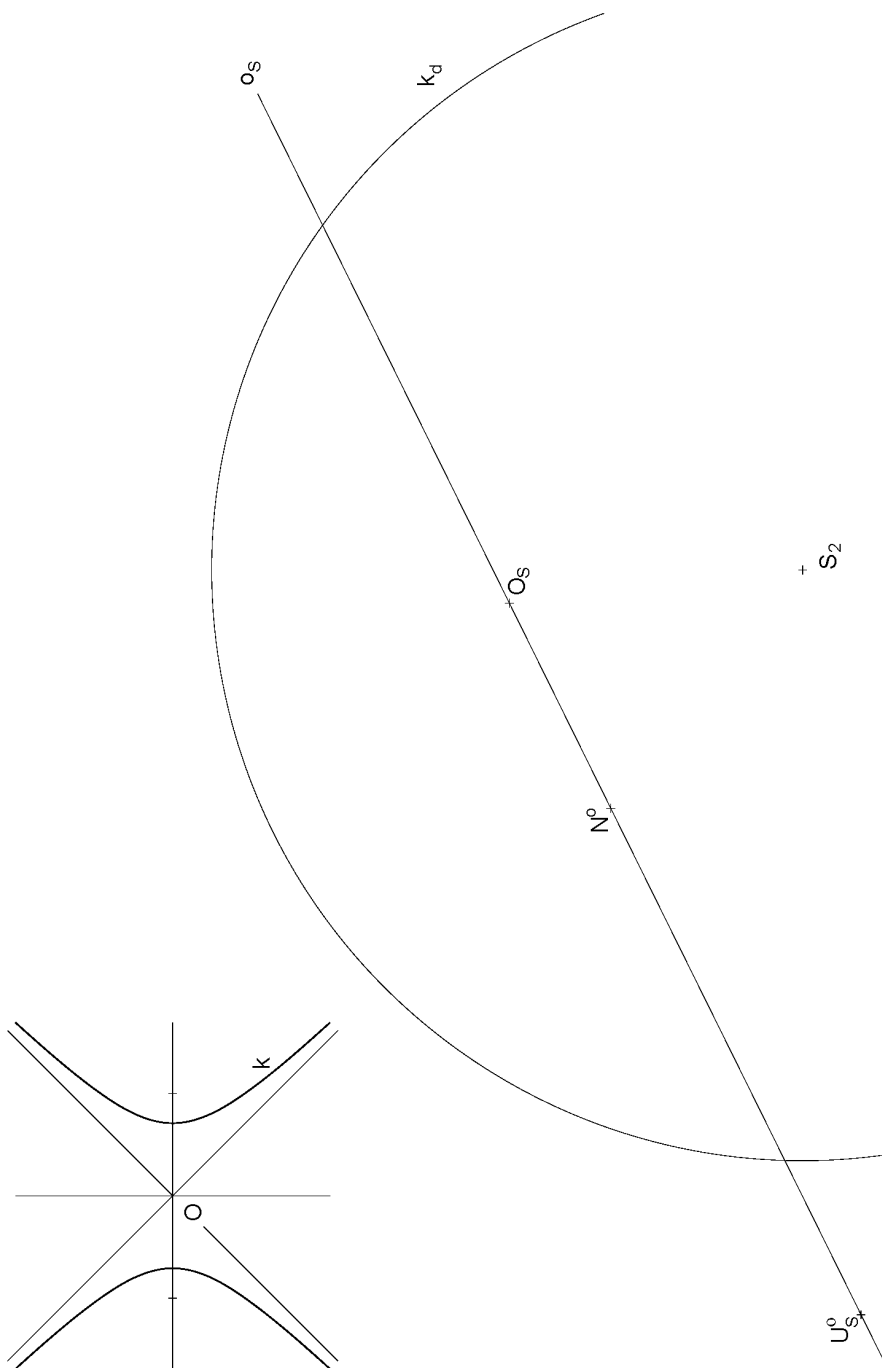
Obr. 62: Zadání rotačního hyperboloidu, osa kolmá k průmětně

Příklad 5.10. Sestrojte rotační kvadriku κ , která vznikne rotací hyperboly k kolem její hlavní, respektive vedlejší osy. Je-li dána hyperbola k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O = (O_S)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. (Obr. 63)



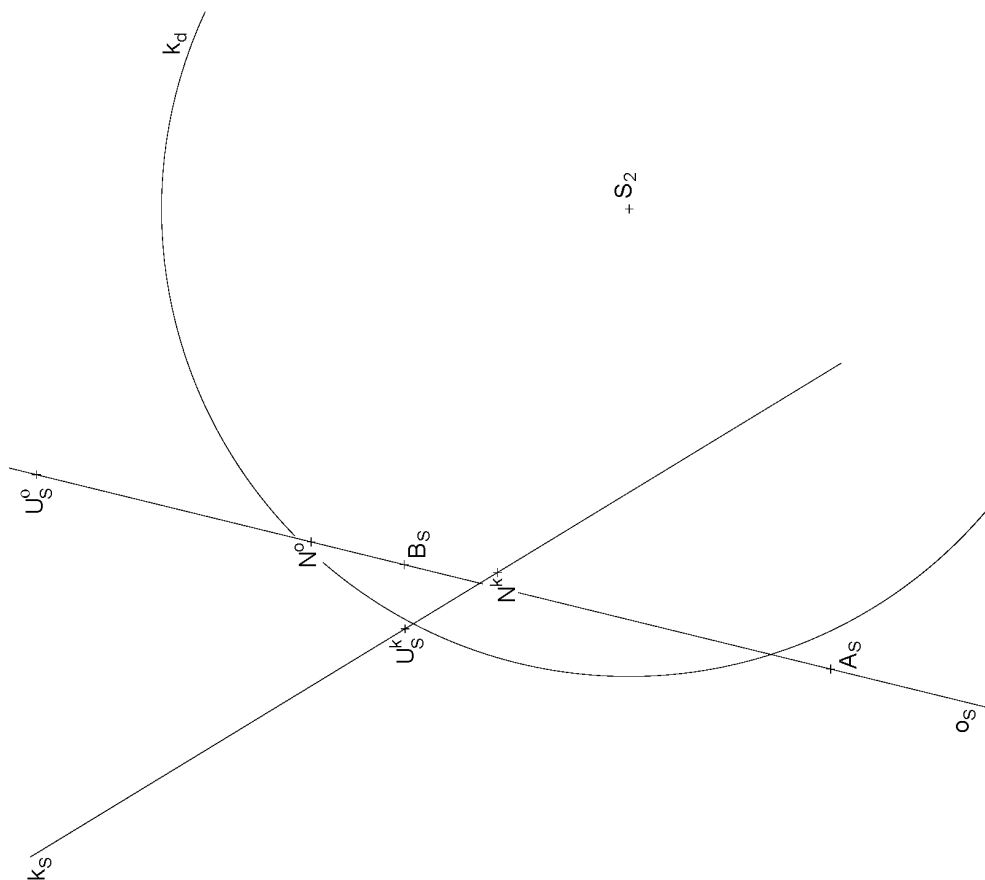
Obr. 63: Zadání rotačního hyperboloidu

Příklad 5.11. Sestrojte dvě rotační kvadriky ${}^1\kappa, {}^2\kappa$, které vzniknou rotací rovnoosé hyperboly k kolem obou jejích os. Je dána rovnoosá hyperbola k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O = (O_S)$ ležící na přímce o , který je středem kvadriky. (Obr. 64)



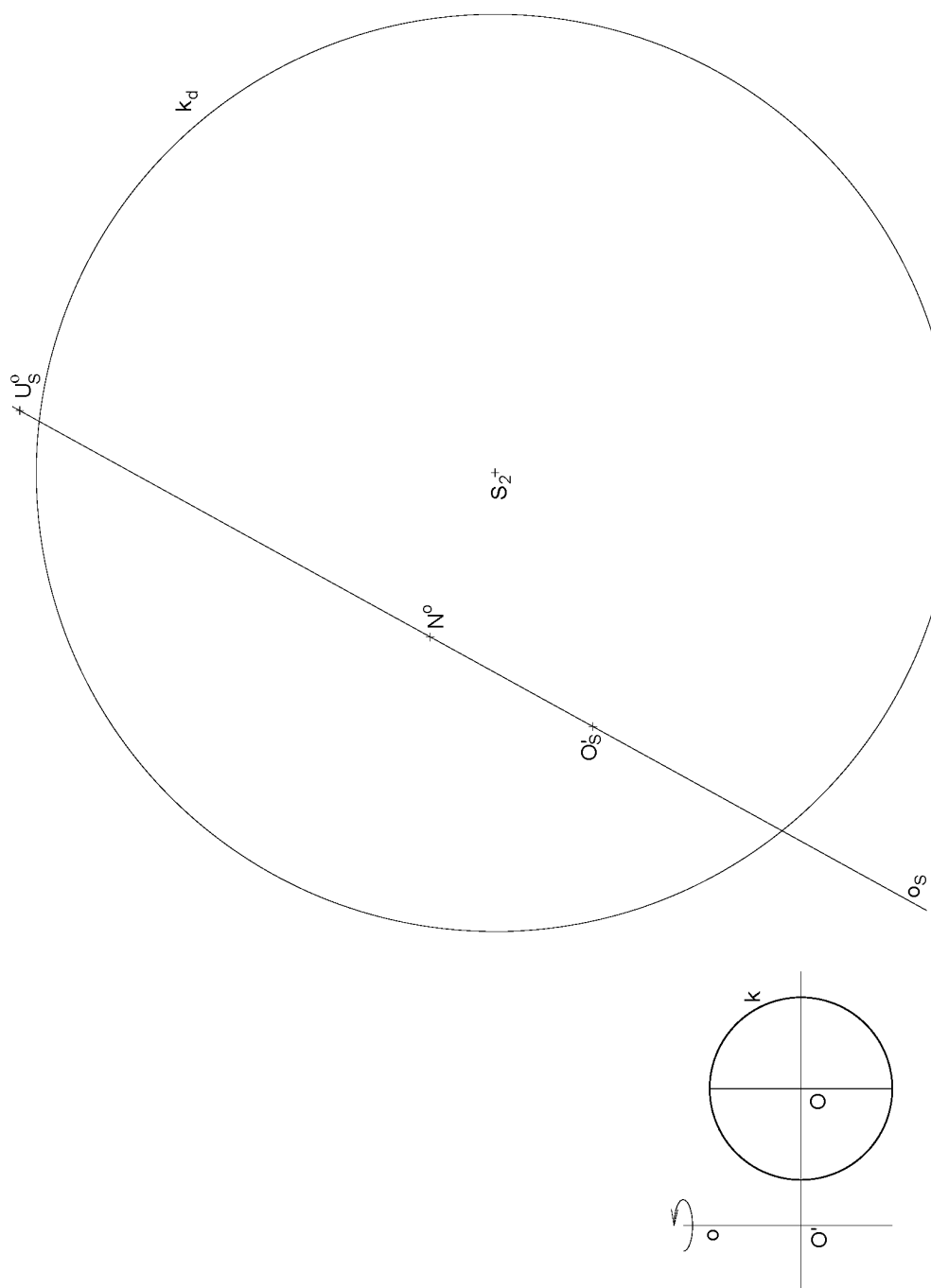
Obr. 64: Zadání dvou rotačních hyperboloidů

Příklad 5.12. Sestrojte přímkovou plochu κ , která vznikne rotací přímky k kolem osy o . Je-li dána tvořící přímka $k = (N^k, U_S^k)$ a osa rotační plochy $o, o = (N^o, U_S^o)$. (Obr. 65)



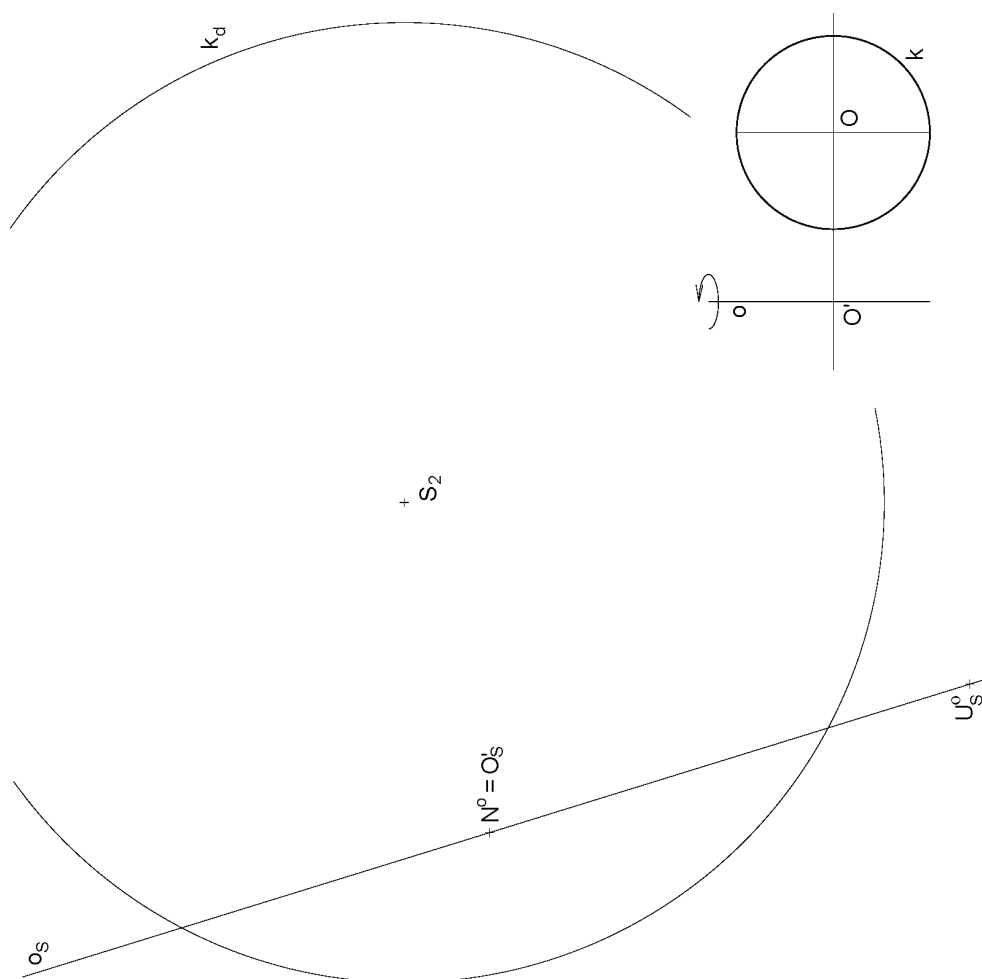
Obr. 65: Zadání přímkové plochy

Příklad 6.1. Sestrojte rotační plochu κ , která vznikne rotací kružnice k kolem osy o . Je-li dána kružnice k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O' = (O'_S)$ ležící na přímce o , který je nejbližším bodem kružnice k . (Obr. 66)



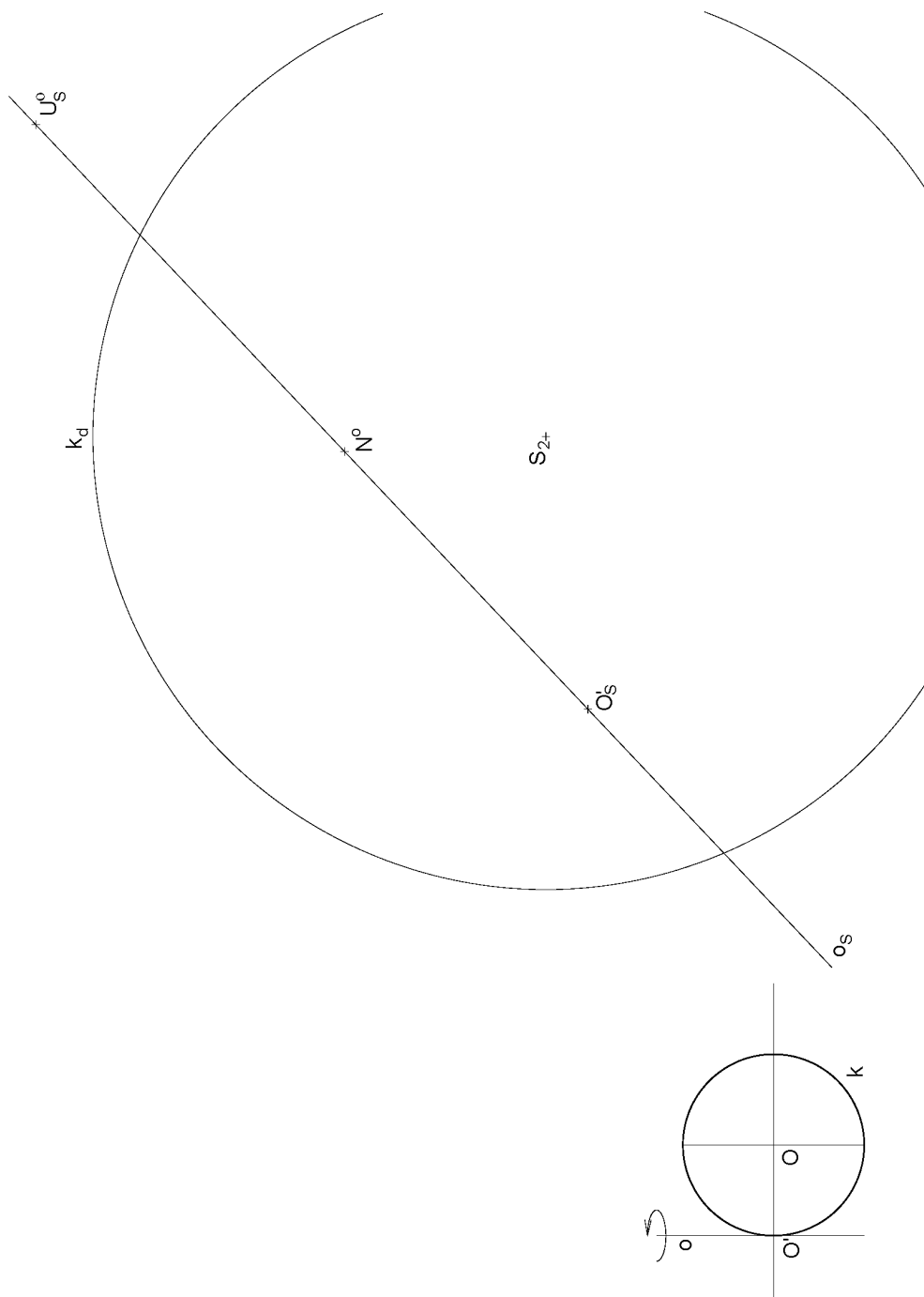
Obr. 66: Zadání anuloidu 1

Příklad 6.2. Sestrojte rotační plochu κ , která vznikne rotací kružnice k kolem osy o . Je-li dána kružnice k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O' = (O'_S)$ ležící na přímce o , který je nejbližším bodem kružnice k . (Obr. 67)



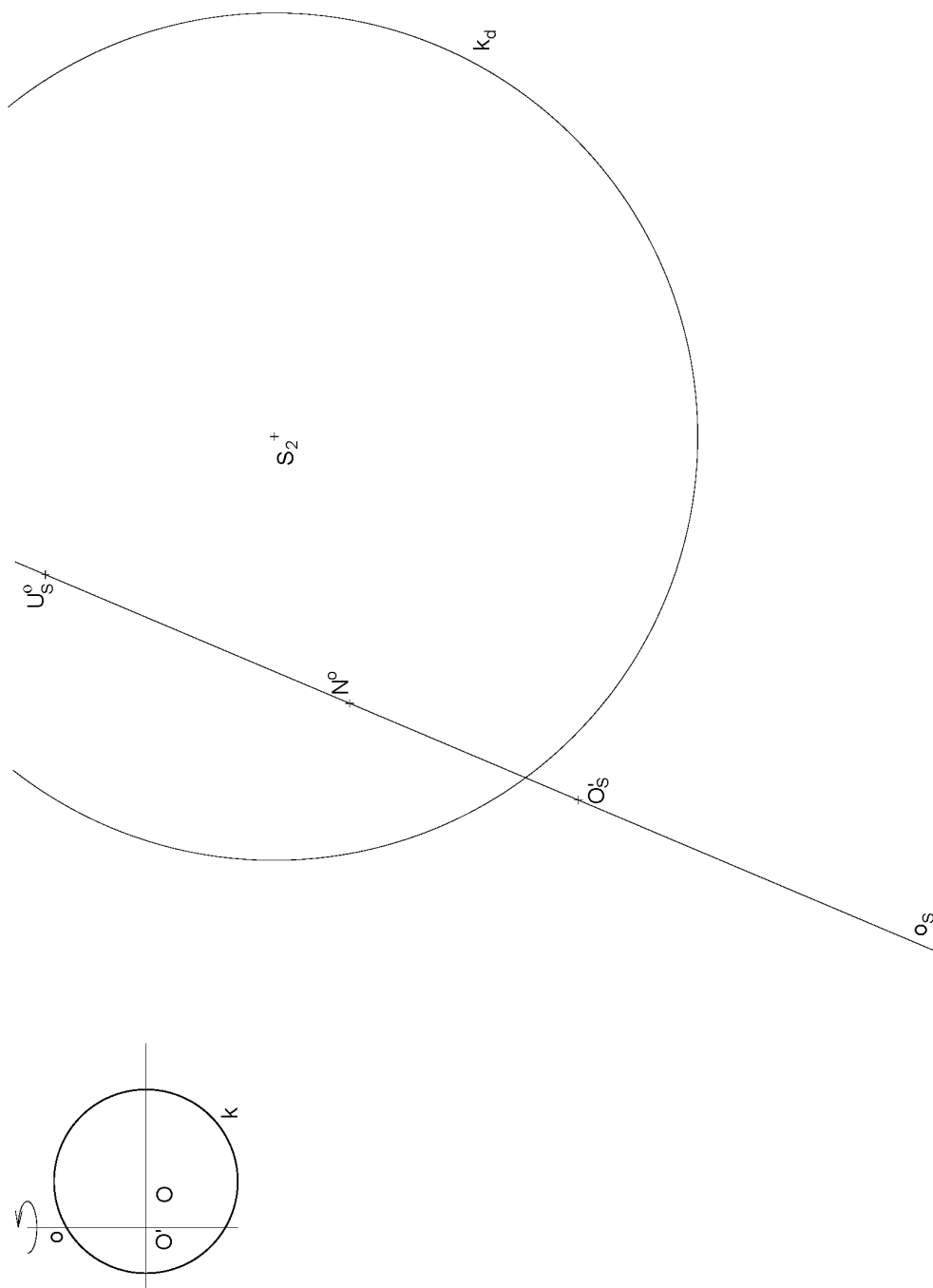
Obr. 67: Zadání anuloidu 2

Příklad 6.3. Sestrojte rotační plochu κ , která vznikne rotací kružnice k kolem osy o . Je-li dána kružnice k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O' = (O'_S)$ ležící na přímce o , který je nejbližším bodem kružnice k . (Obr. 68)



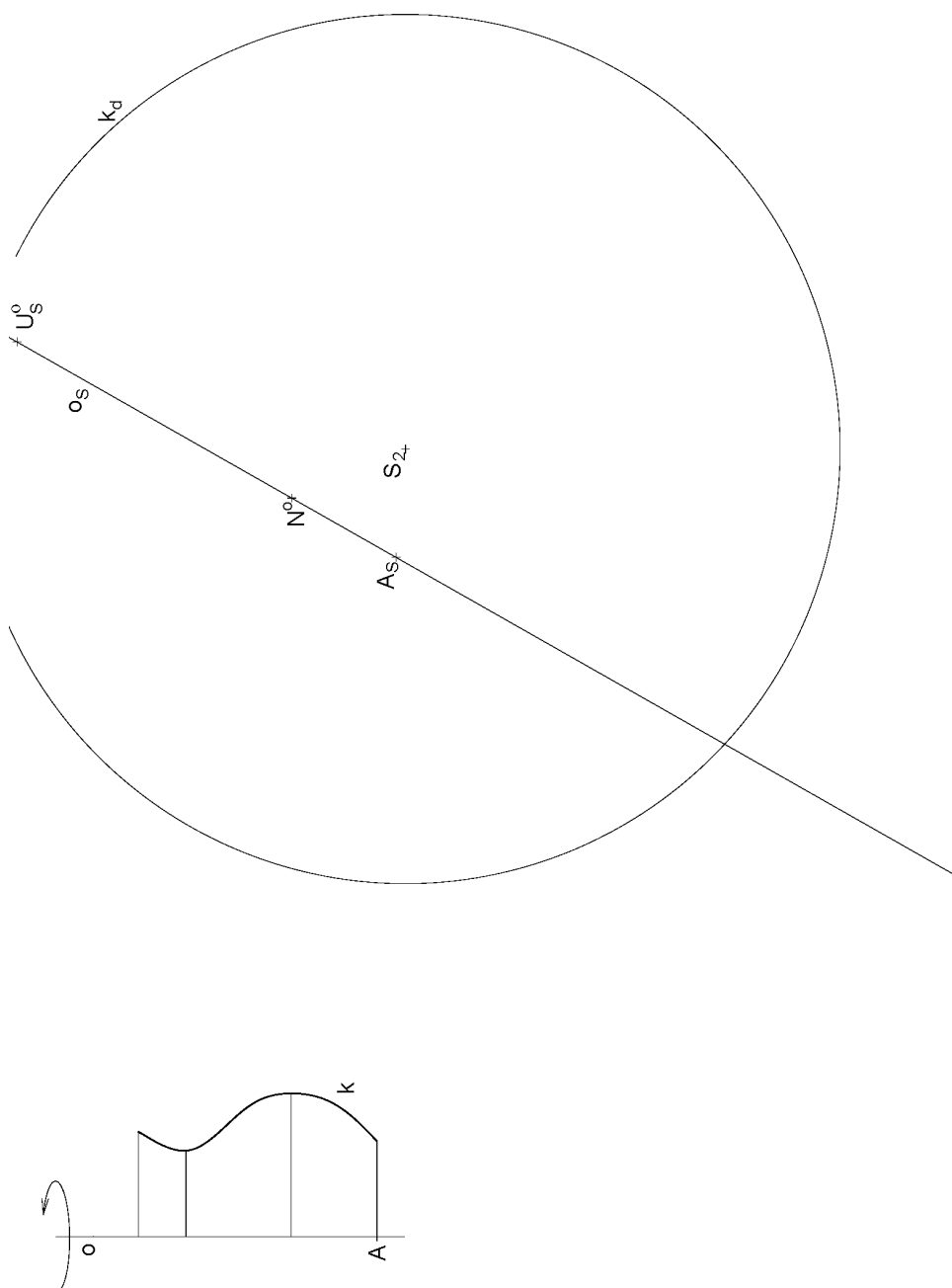
Obr. 68: Zadání axoidu

Příklad 6.4. Sestrojte rotační plochu κ , která vznikne rotací kružnice k kolem osy o . Je-li dána kružnice k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $O' = (O'_S)$, který je průsečíkem osy o a kolmice k ose o vedené středem kružnice k . (Obr. 69)



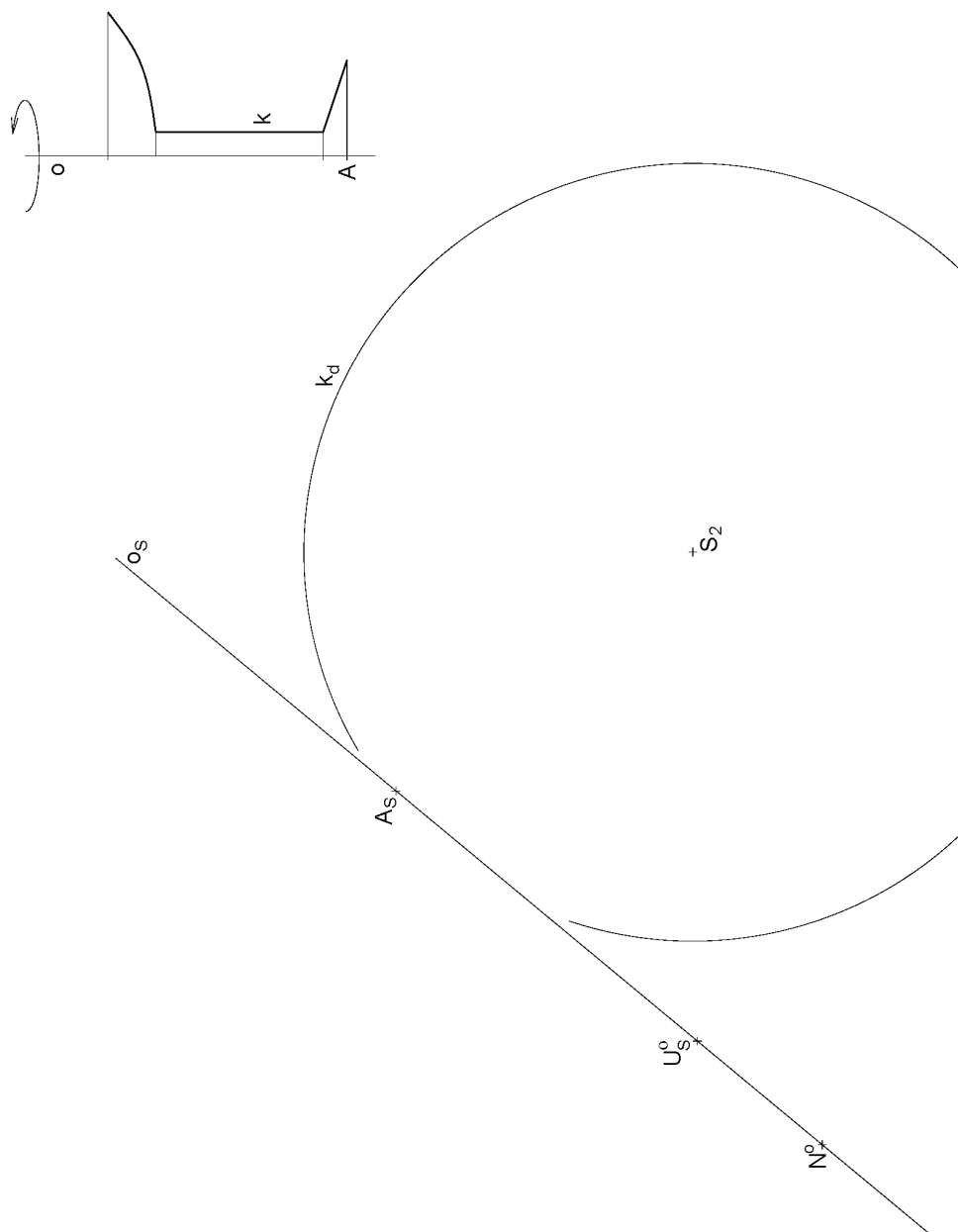
Obr. 69: Zadání menoidu

Příklad 6.5. Sestrojte rotační plochu κ , která vznikne rotací křivky k kolem osy o . Je-li dána křivka k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $A = (A_S)$ ležící na přímce o , dle zadání. (Obr. 70)



Obr. 70: Zadání oblé plochy 1

Příklad 6.6. Sestrojte rotační plochu κ , která vznikne rotací křivky k kolem osy o . Je-li dána křivka k , osa rotační plochy $o = (N^o, U_S^o)$ a bod $A = (A_S)$ ležící na přímce o , dle zadání. (Obr. 71)



Obr. 71: Zadání oblé plochy 2