Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra experimentální fyziky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Fyzika granulátů

Autor: František Hodinka

Studijní program: N1701 Fyzika

Studijní obor: 7504T055 Učitelství fyziky pro střední školy

Forma studia: Prezenční

Vedoucí práce: RNDr. Renata Holubová Csc.

Termín odevzdání práce: 7.5.2018

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	František Hodinka
Název práce	Fyzika granulátů
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	RNDr. Renata Holubová,Csc..
Rok obhajoby práce	2018
Abstrakt	V práci se zabýváme fyzikálními vlastnostmi granulátů, zejména třením mezi částicemi. Velikost tření mezi částicemi posuzujeme podle úhlu s vodorovnou podložkou, na kterém se stabilizuje sypající se granulát. Experimentálně zkoumáme a popisujeme vlastnosti granulátu ze směsi dvou složek na jevu vytváření Hele-Shawovy buňky. Zabýváme se procesy, které vedou k vzniku Hele-Shawovy buňky. Různé typy Hele-Shawovy buňky rozlišujeme pomocí fraktální dimenze.
Klíčová slova	Granulát, tření v granulátu, Hele – Shawova buňka, fraktální dimenze, úhel stability svahu, píky, zrna, sypání, klouzání
Počet stran	64
Počet příloh	1
Jazyk	Český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	František Hodinka
Title	Physics of the granular material.
Type of thesis	Master
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	RNDr. Renata Holubová, Csc.
The year of presentation	2018
Abstract	Thesis is deal with physical features of granular materials, mainly intergranular friction. We research a magnitude of the intergranular friction by measurements of angles of granular piles. We examine properties of two-component granular material by measurements of Hele-Shaw cell. We explore processes leading to creating of Hele-Shaw cells. We distinguish different types of Hele-Shaw cell using fractal dimension. Fractal dimension is used for describing morphological features of Hele-Shaw cell.
Keywords	Granular material, friction, Hele – Shaw cell, fractal dimension
Number of pages	64
Number of appendices	1
Language	Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval(a) samostatně pod vedením ..... a že jsem použil(a) zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů

V Olomouci ……..…….....

podpis

Obsah

ÚVOD 1
1 GRANULÁTY 2
1.1 Působící síly 2
1.2 Podmínky rovnováhy granulátu 8
2 HELE SHAWOVA BUŇKA 10
2.1.1 Uspořádání pokusu 12
2.1.2 Vytvoření HS buňky 14
2.2 Vlastnosti HS buňky 16
2.2.1 Výsledky měření a jejich interpretace 16
2.2.2 Stabilita jednosložkového granulátu 19
3 FRAKTÁLY 21
3.1.1 Vlastnosti fraktálů 21
3.1.2 Fraktální dimenze 22
3.1.3 Fraktální dimenze z pokrytí 24
3.1.4 Pokrytí 26
3.1.5 Sčítání obsazených bodů v mřížce 27
4 ANALÝZA HS BUŇKY 30
4.1 Analýza HS buněk v programu *Fractalyse* 30
4.1.1 Metoda sčítání 30
4.1.2 Přibližný model 31
4.1.3 Typy sčítacích metod 31
4.2 Analýza fraktální dimenzí 32
4.2.1 HS buňka 1 36
4.2.2 HS buňka 2 44
4.2.3 HS buňka 3 52
4.2.4 Porovnání fraktálních dimenzí HS buněk 59
ZÁVĚR 62
REFERENCE 62

Seznam tabulek

Tabulka 1: Kombinace veličin, ovlivňující výsledný vzhled HS buňky 10
Tabulka 2: Použité složky granulátu pro vytvoření kombinací z Tabulky 1. 11
Tabulka 3: Úhel stability svahu látek 11
Tabulka 4: Úhel různých složek granulátu s vodorovnou podložkou 17
Tabulka 5: Měření HS buňky 1.0..... 34
Tabulka 6: Náhodná permutace pozic píků. Měření HS buňky 1.0..... 35
Tabulka 7: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace..... 37
Tabulka 8: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace..... 39
Tabulka 9: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace..... 40
Tabulka 10: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace..... 42
Tabulka 11: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace..... 43
Tabulka 12: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace..... 45
Tabulka 13: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace..... 46
Tabulka 14: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace..... 48
Tabulka 15: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace..... 50
Tabulka 16: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace..... 51
Tabulka 17: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace..... 53
Tabulka 18: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace..... 54
Tabulka 19: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace..... 56
Tabulka 20: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace..... 57
Tabulka 21: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace..... 59
Tabulka 22: Fraktální dimenze HS buňky 1 60
Tabulka 23: Fraktální dimenze HS buňky 2 60
Tabulka 24: Fraktální dimenze HS buňky 3 60

Seznam obrázků

Obrázek 1: Tvar částice a jeho efekt v souboru zrn. Parametr d je průměr zrna. Dostupné z: https://egel.kaust.edu.sa/Documents/Papers/Santamarina_2009ttt.pdf ... 4
Obrázek 2: Velikost částic a jejich tvar. Směs je tvořená z mouky (nejdrobnější bílé částice s velkým rozptylem průměru), cukru (průhledné krystaly) a máku (světle modrá elipsoidní zrna). Stupnice délky je rozdělená po milimetrech. ... 4
Obrázek 3: Balotina. Stupnice délky je rozdělená po milimetrech. ... 5
Obrázek 4: Rovnováha sil na nakloněné rovině. ... 7
Obrázek 5: Rovnováha sil působících při dotyku tří ideálně kulatých zrn. Normálové síly vytváří dvojice vzájemně opačně orientovaných stejně velkých sil s působištěm v bodech dotyku. ... 7
Obrázek 6: Přechod z jedné konfigurace do druhé, kdy se mění hustota obsazení zrn v prostoru. ... 9
Obrázek 7: Změna silové sítě vyjmutím j-tého zrna z původního souboru 13 zrn. Při pohybu zrn dojde k posunutí působišť sil mezi částicemi, a tím ke změně tvaru silové sítě. ... 9
Obrázek 8: Před nasypáním. ... 13
Obrázek 9: Po nasypání. ... 13
Obrázek 10: HS buňka ze zrn máku a hrubozrnné mouky (dále HS buňka 1.0). Za řídící parametr úhlu stability je zde považován rozdílný průměr zrn. ... 14
Obrázek 11: HS buňka z balotiny a hrubozrnné mouky (dále HS buňka 2.0). Za řídící parametr tření je zde podle Tabulky 1 považována rozdílná hustota zrn. Ohyb píků je způsobený přechodem na těsnější uspořádání zrn (viz video vidHS2sesuv). ... 15
Obrázek 12: HS buňka z máku a krystalického cukru (dále HS buňka 3.0). Za řídící parametr tření je zde podle Tabulky 1 považován rozdílný tvar zrn. ... 16
Obrázek 13: Rozdělení HS buňky podle procesů, které ji vytváří. Patrný je i důvod, proč se střídají píky podobné velikosti, ale v bílém píku předpokládáme více zrn, protože musela „přetlačit“ stabilnější zrna v tmavém píku. ... 18
Obrázek 14: Simulace programu Step – uspořádání jednosložkového granulátu z 91 zrn. Lze stanovit přibližný sklon svahu, ve kterém je granulát stabilní. Úhel přímky q s vodorovnou podložkou je 26,5 °. ... 19
Obrázek 15: Soběpodobnost útvarů v různých měřítkách (původní délka (modrá) je dvojnásobná oproti délce při "přiblížení" (fialová)). ... 22

Obrázek 16: $M = 12M0, l = 12l0; M0 > M, l0 > l$ 23
Obrázek 17: $M = 122M0, l = 12l0; M0 > M, l0 > l$ 23
Obrázek 18: $M = 123M0, l = 12l0; M0 > M, l0 > l$ 23
Obrázek 19: $M = 13dM0, l = 12l0; M0 > M, l0 > l$ 23
Obrázek 22: Určení fraktální dimenze metodou pokrytí, původní obrázek. 26
Obrázek 23: Určení fraktální dimenze metodou pokrytí, první pokrytí při zmenšeném měřítku. 27
Obrázek 24: Určení fraktální dimenze metodou pokrytí, druhé pokrytí při zmenšeném měřítku. 27
Obrázek 25: První pokrytí obrazce mřížkou o dané velikosti rámečku. Dostupné z: https://imagej.nih.gov/ij/plugins/fraclac/FLHelp/BoxCounting.htm#gridimage (upraveno). 28
Obrázek 26: Druhé pokrytí obrazce mřížkou o dané velikosti rámečku. Dostupné z: https://imagej.nih.gov/ij/plugins/fraclac/FLHelp/BoxCounting.htm#gridimage (upraveno). 28
Obrázek 27: Třetí pokrytí obrazce mřížkou o dané velikosti rámečku. Dostupné z: https://imagej.nih.gov/ij/plugins/fraclac/FLHelp/BoxCounting.htm#gridimage (upraveno). 29
Obrázek 28: Měření délky jednotlivých píků HS buňky 1.0. Počátky píků rozdělují svislou a vodorovnou stěnu HS buňky 1.0 na setiny jejich původní normované délky. 33
Obrázek 29: Náhodná konfigurace z měření HS buňky 1.0. 33
Obrázek 30: Měření fraktální dimenze. 35
Obrázek 31: Určení fraktální dimenze z logaritmické křivky. 36
Obrázek 32: Měření HS buňky 1.1 37
Obrázek 33: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze. 38
Obrázek 34: Měření HS buňky 1.2 38
Obrázek 35: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze. 39
Obrázek 36: Měření HS buňky 1.3 40
Obrázek 37: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze. 41
Obrázek 38: Měření HS buňky 1.4 41
Obrázek 39: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze. 42
Obrázek 40: Měření HS buňky 1.5 43
Obrázek 41: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze. 44

Obrázek 42: Měření HS buňky 2.1 44
Obrázek 43: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze. 45
Obrázek 44: Měření HS buňky 2.2 46
Obrázek 45: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze. 47
Obrázek 46: Měření HS buňky 2.3 48
Obrázek 47: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze. 49
Obrázek 48: Měření HS buňky 2.4 49
Obrázek 49: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze. 50
Obrázek 50: Měření HS buňky 2.5 51
Obrázek 51: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze. 52
Obrázek 52: Měření HS buňky 3.1 52
Obrázek 53: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze. 53
Obrázek 54: Měření HS buňky 3.2 54
Obrázek 55: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze. 55
Obrázek 56: Měření HS buňky 3.3 55
Obrázek 57: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze. 56
Obrázek 58: Měření HS buňky 3.4 57
Obrázek 59: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze. 58
Obrázek 60: Měření HS buňky 3.5 58
Obrázek 61: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze. 59

Úvod

Zkoumání granulátů je užitečné nejen z toho hlediska, že nám poskytuje analogie pro jiné obory z fyziky pevných látek a fázových přechodů, ale má i své uplatnění v technické praxi.

Proto doufáme, že čtenáře některé oblasti zaujmou a inspirují i v jiných oborech. Pokusíme se popsat dynamiku granulátů méně tradičním způsobem. Začneme ale klasicky.

Práce se zabývá fyzikálními vlastnostmi granulátů, zejména třením mezi částicemi.

V teoretické části se zabýváme třením a jeho vlivem na stabilitu uspořádání zrn.

V experimentální části provádíme měření úhlů stability svahu pro jednosložkové granuláty, a poté pro dvousložkové granuláty v polouzavřené skleněné buňce. Zkoumáme vznik HS buňky v závislosti na typu granulátů, které ji tvoří.

Výsledky měření HS buňky interpretujeme různou stabilitou granulátů a procesem sypání smíšeného granulátu. Zavádíme fraktální dimenzi k srovnání různých typů HS buněk.

Přikládáme i videa, na kterých je zachyceno sypání granulátu a vytváření svahu.

1 Granuláty

Materiály složené ze souboru mnoha zrn jsou běžně známé z denního života. Často se s nimi setkáváme a využíváme je – jako potraviny – cukr, sůl, nebo jako stavební materiál – písek, štěrk. Nicméně, popis jejich vlastností pomocí dynamiky a statiky není z fundamentálního hlediska triviální. Nasypávání hromady písku můžeme považovat za fázový přechod souboru mnoha zrn z tekutého stavu (nasypávání) na pevný. Jak takový „fázový přechod“ popsat? Můžeme použít rovnovážnou termodynamiku? Běžná zrna granulátu jsou však příliš velká na to, aby jejich pohyb mohl být ovlivňován tepelnými fluktuacemi za normální teploty. Vnější síly působící na granulát rychle disipují v důsledku tření a dalších silových interakcí mezi částicemi. Nicméně, existují i analogie z termodynamiky, které se hodí k popisu granulátů. Může jít např. o amorfní látky za pokojové teploty: Granuláty i amorfní látky jsou do určité míry odolné k smykovému napětí, fázový přechod amorfní látky z tekutého do pevného stavu se podobá vytváření blokovaného stavu při sypání písku [2]. Granuláty i amorfní látky jsou popsatelné pomocí několika makroskopických parametrů, jejichž důsledky lze snadno pozorovat. V případě granulátu to může být měrný sypný objem, jehož změny jsme opakovaně zaznamenali při přesypávání směsi balotiny a mouky.

Zkoumání granulátů je užitečné nejen z toho hlediska, že nám poskytuje analogie pro jiné obory z fyziky pevných látek a fázových přechodů, ale má i své uplatnění v technické praxi.

Proto doufáme, že čtenáře některé oblasti zaujmou a inspirují i v jiných oborech. Pokusíme se popsat dynamiku granulátů méně tradičním způsobem. Začneme ale klasicky.

1.1 Působící síly

Budeme uvažovat ideální materiál složený z mnoha zrn, při kterém se neuplatňují kohézní síly tzn. materiál je ideálně suchý. Silová interakce mezi zrny probíhá na základě tření a zákonu akce a reakce.

Sílu působící kolmo k dotykové ploše a zároveň k třecí síle nazveme normálovou silou.

Mechanické podmínky rovnováhy můžeme shrnout do rovnic:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0 \tag{2}$$

Kde N je počet zrn v souboru. Další podmínky silového působení mezi částicemi zahrnují rovnice

$$\vec{F}_i = -\vec{F}_j, \tag{3}$$

Kde i je i-tá částice působící normálovou silou na j-tou sousední částici. Třecí síly mezi sousedními částicemi jsou popsány vztahem

$$\mathrm{F}_{\tau_i} \leq \mu \mathrm{F}_j \tag{4}$$

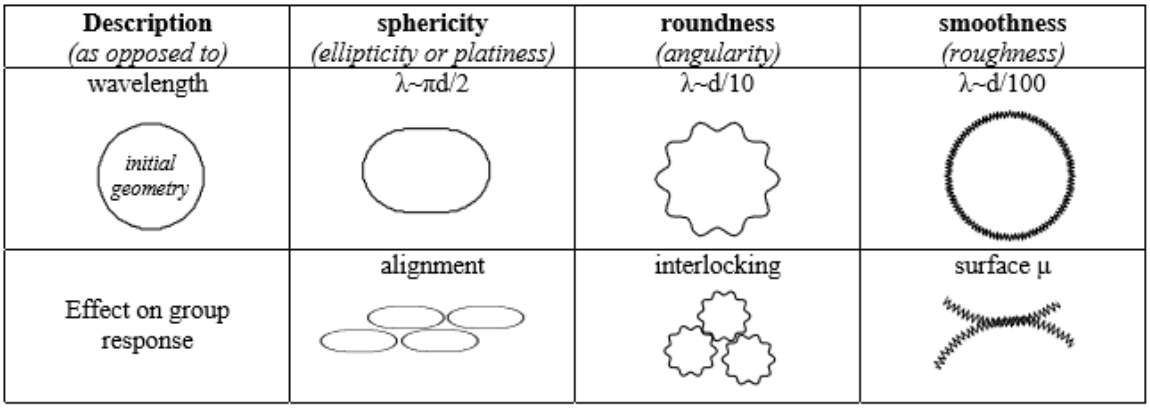
Kde F_{τ_i} je tečná složka normálové síly vyvolávající třecí sílu na j-tou částici. Vztah (4) je dán jako nerovnice a figurují v něm pouze velikosti sil, protože ve vztahu (4) jde o maximální velikost třecí síly, které nemusí být nutně dosaženo. Záleží i na pohybovém stavu zrn.

U popisu třecích sil na chvíli zůstaneme.

Velikost tření závisí makroskopicky na velikosti normálové síly, která působí kolmo na podložku, a na koeficientu smykového tření. Normálová síla je určena velikostí částic a hustotou látky, z kterých jsou částice tvořeny.

Na mikroskopické úrovni třecí síly vznikají v důsledku geometrie částic a mezimolekulárního působení elektrických sil na styčných plochách [14]. Mezimolekulární působení elektrických sil na styčných plochách ale nebudeme v našem měření uvažovat.

Podmínky, na kterých tření závisí, navzájem porovnáme, protože ovlivňují stabilitu svahu zrn při sypání, a tím i vzhled Hele – Shawovy buňky, kterou se budeme později podrobněji zabývat.



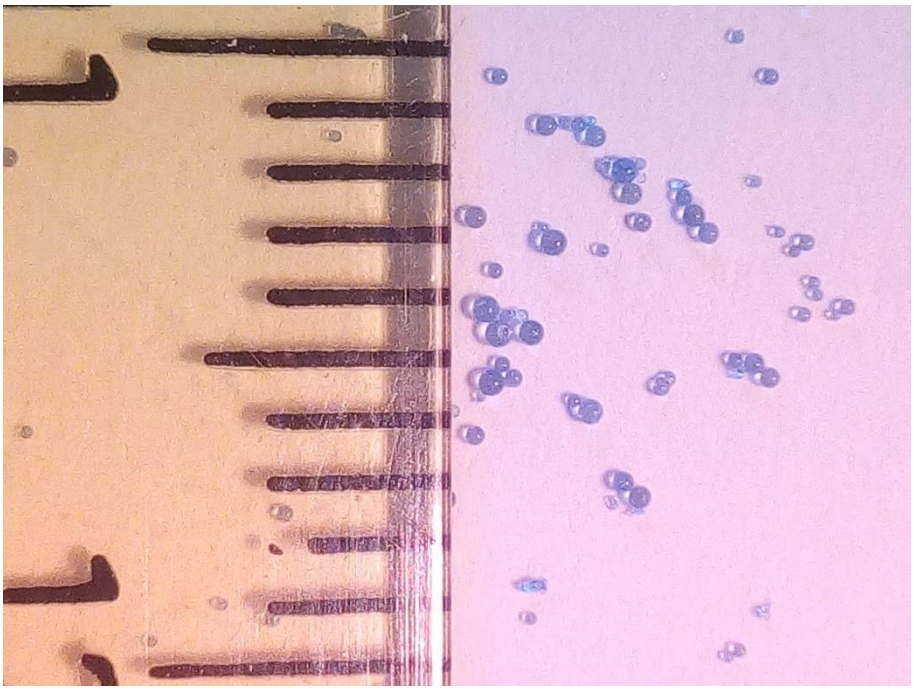
Obrázek 1: Tvar částice a jeho efekt v souboru zrn. Parametr d je průměr zrna. Dostupné z: https://egel.kaust.edu.sa/Documents/Papers/Santamarina_2009ttt.pdf

Zdroj: vlastní zpracování

V našich pokusech použijeme zrna mouky, máku, cukru a balotiny.

Obrázek 2: Velikost částic a jejich tvar. Směs je tvořená z mouky (nejdrobnější bílé částice s velkým rozptylem průměru), cukru (průhledné krystaly) a máku (světle modrá elipsoidní zrna). Stupnice délky je rozdělená po milimetrech.

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 3: Balotina. Stupnice délky je rozdělená po milimetrech.

Zdroj: vlastní zpracování

Tvar zrn pro jednotlivé druhy granulátu podle tabulky na Obrázku 1 je definován:

- Balotina: původní tvar kulový, skupinový efekt neuveden;
- Mák: elipsoidní tvar, zvlněný kulový, skupinový efekt – klouzání vrstev, zarovnávání do řad, ztráta stupňů volnosti rotace;
- Mouka: Nepravidelný elipsoidní tvar, skupinový efekt – klouzání vrstev, zarovnávání do řad;
- Cukr: krystal, vlastnosti nejblíže elipsoidnímu tvaru, skupinový efekt – klouzání vrstev, zarovnávání do řad.

Balotina má průměr kuliček 0,315-0,400 mm (ze 70 % v souboru) a měrný sypný objem 2360 kg/m^3. Data jsou uvedeny výrobcem [6], z porovnání se stupnicí na Obrázku 3 vidíme, že uvedená data odpovídají našemu vzorku. Pro potřeby našeho měření se spokojíme s tím, že průměr zrn jsou řádově desetiny milimetru.

Mák má podle stupnice průměr zrn řádově milimetry a měrný sypný objem leží v intervalu 560 kg/m^3 až 620 kg/m^3 [10]. Pro podrobnější informace, např. získání rozdělení, lze použít analýzu většího vzorku v programu ImageJ. Pro potřeby našeho měření podrobnější analýza není nutná.

Mouka má podle stupnice průměr zrn řádově desetinu milimetru, měrný sypný objem je 600 kg/m^3 [10].

Cukr má podle stupnice průměr zrn řádově milimetry, měrný sypný objem je 900 kg/m3 [10].

Porovnání tření mezi jednotlivými složkami granulátu provedeme podle Tabulky 1 a 2 níže.

Efekt tření [15] ukážeme na fenomenologickém modelu hranolu na nakloněné rovině na mikroskopické úrovni mezi zrny granulátu.

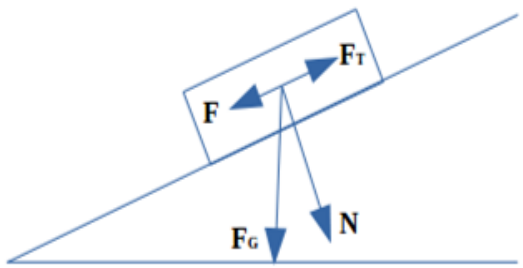
V případě, že třecí síly budou v rovnováze s pohybovou složkou tíhové síly, hranol zůstává v klidu.

V tomto modelu označíme normálovou sílu $\vec{N}$.

Třecí síly představují tangenciální složku síly $\vec{N}$ působící kolmo na podložku, která se tak přenáší do směru pohybu.

Stanovit rovnováhu systému není složité.

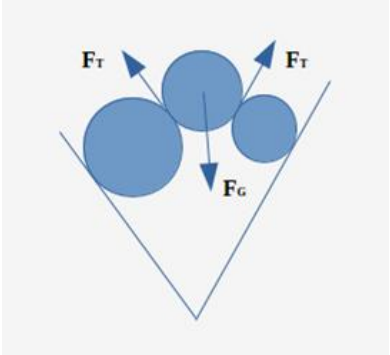
Vezměme nakloněnou rovinu, která svírá s vodorovnou rovinou úhel α. Na nakloněné rovině leží hranol o hmotnosti m, na který působí tíhová síla $\overrightarrow{F_G} = m \cdot \vec{g}$. Pohybovou složku tíhové síly vyjádříme jako $\vec{F} = m \cdot \vec{g} \cdot \sin(\alpha)$. Odporová síla působící proti směru pohybové složky tíhové síly je rovna $\overrightarrow{F_T} = f \cdot \vec{N} = f \cdot m \cdot \vec{g} \cdot \cos(\alpha)$. Změníme-li úhel α nakloněné roviny, změní se směr síly $\vec{F}$ přímo úměrně úhlu α. Stanovit nejistotu ve směru působení pohybové složky síly $\vec{F}$ je jednoduché – ta je rovna nejistotě ve stanovení úhlu α. Úloha rozkladu sil na nakloněné rovině má jeden stupeň volnosti.



Obrázek 4: Rovnováha sil na nakloněné rovině.

Zdroj: vlastní zpracování

Nyní si vezměme mikroskopický systém. Představme si tři ideálně kulatá zrna, která se vzájemně dotýkají. Necháme-li působit síly, které nebudou samotná zrna nijak deformovat, můžeme sledovat směr jejich působení. Na systém, stejně jako v případě hranolu, necháme působit síly. Síly v tomto případě mohou nabývat různých hodnot po povrchu koulí, a v případě působení vnější síly se změní vzájemná poloha těžišť jednotlivých koulí, aby se ustavila rovnováha.



Obrázek 5: Rovnováha sil působících při dotyku tří ideálně kulatých zrn. Normálové síly vytváří dvojice vzájemně opačně orientovaných stejně velkých sil s působištěm v bodech dotyku.

Zdroj: vlastní zpracování

Při přenosu síly si můžeme povšimnout značné nejistoty ohledně směru, ve kterém můžou být působící síly orientovány. V reálném granulátu nejsou nakloněné roviny jako na obrázku 4, ale sousední zrna, která jsou různě stabilní a jejichž pozice se může měnit. Je to tedy „zobecněná“ nakloněná rovina, která se může pohybovat i vzhledem k částicím, jejichž stupně volnosti v našem příkladu zamyká, ale může je i vytvářet. To představuje další stupně volnosti v souboru a další konfigurace uspořádání zrn.

Třecí síly působí proti pohybové síle a zpomalují jakýkoliv pohyb. Představují tedy stabilizační faktor granulátu. V souboru zrn je obtížné stanovit průběh síly.

1.2 Podmínky rovnováhy granulátu

Granulát je tvořen ze souboru mnoha zrn. Dynamika tohoto systému je dána Newtonovými pohybovými zákony. K popisu systému je používána statistika. Soubor zrn můžeme popsat i z hlediska jeho uspořádání (*konfigurace*) daného geometrií zrn a omezeními v prostoru.

Existuje konfigurace, při které soubor částic zaujímá minimální objem částic, daný vztahem

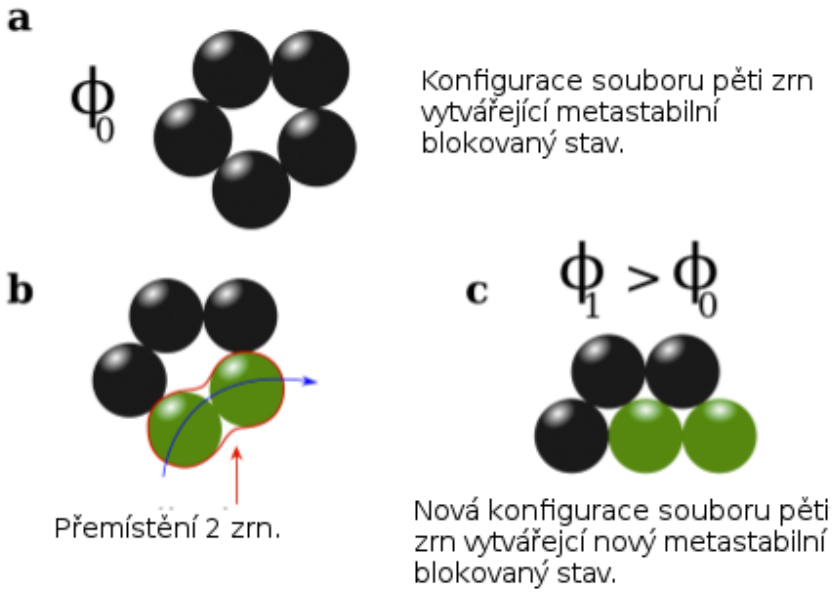
$$\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right| = 2R \tag{5}$$

Kde $\vec{r}_i$, $\vec{r}_j$ jsou polohové vektory sousedních zrn a R jejich poloměr [2].

Ze vztahů (1) až (4) vyplývá konfigurace zrn, ve které jsou částice vzájemně v klidu a nepohybují se – stav souboru v takové konfiguraci označíme za *stabilní blokovaný stav*.

Stabilní blokovaný stav označujeme za metastabilní, pokud je stacionární a je různý od optimálního uspořádání. Stav (konfiguraci zrn) nazveme optimální, pokud je jeho (její) zobrazení ve fázovém prostoru optimální.

Metastabilní blokovaný stav granulátů vzniká v důsledku geometrických a mechanických omezení souboru [2].

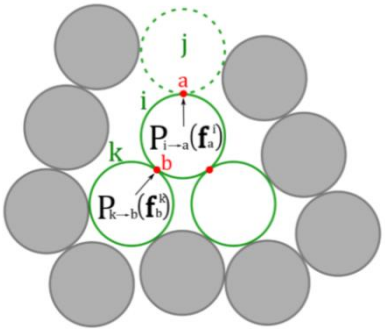


Obrázek 6: Přechod z jedné konfigurace do druhé, kdy se mění hustota obsazení zrn v prostoru Φ (packing density). Hustota obsazení zrn v prostoru je vyjádřena podílem objemu zrn(a) a minimálního objemu krychle, která může zrna (zrno) pojmout.

Zdroj: https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.015006 (upraveno).

Soubor zrn se může nacházet v některé z možných konfigurací, které vytváří metastabilní (obecně stabilní) blokovaný stav. Daná konfigurace závisí na počtu různých pozic částic, které dohromady tvoří daný objem, závislý na uspořádání zrn. Přenos síly v granulátu se mění podle uspořádání souboru zrn, které se mění v důsledku sil vyvolaných částicemi měnícími svůj pohybový stav.

Změna silové sítě a konfigurace zrn je znázorněna na Obrázku 7.



Obrázek 7: Změna silové sítě vyjmutím j-tého zrna z původního souboru 13 zrn. Při pohybu zrn dojde k posunutí působišť sil mezi částicemi, a tím ke změně tvaru silové sítě.

Zdroj: https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.015006

Pohyb *j*-té částice na Obrázku vyvolává změnu uspořádání částic.

2 Hele Shawova buňka

Hele Shawova buňka (dále *HS buňka*) je jev, známý z mechaniky kapalin. Její obdobu však nalezneme i ve fyzice granulátů. HS buňka může vzniknout při mísení dvou granulátů sypáním do úzkého prostoru mezi dvě pevné desky.

Pro jednodušší označení zavedeme termín HS buněk podle složek granulátů:

- HS buňku složenou ze směsi máku a mouky označíme jako *HS buňka 1*;
- HS buňku složenou ze směsi mouky a balotiny označíme jako *HS buňka 2*;
- HS buňku složenou ze směsi máku a cukru označíme jako *HS buňka 3*.

Uvažujme dva granuláty smíchané do stejnorodé směsi v přibližně stejném poměru. Granuláty vybíráme podle veličin v Tabulce 1.

Tabulka 1: Kombinace veličin, ovlivňující výsledný vzhled HS buňky

Pořadí	Veličiny, kterými se liší granuláty HS buňky		
1	Průměr zrna	Hustota	Tvar zrna (kulaté hladké nebo jiné)
2	Průměr zrna	Hustota	Tvar zrna (kulaté hladké nebo jiné)
3	Hustota	Průměr zrna	Tvar zrna (kulaté hladké nebo jiné)

Zdroj: vlastní zpracování

Bíle zabarvené pole znamená, že danou veličinu považujeme za řídící parametr pro tření pro danou kombinaci látek v Tabulce 2. To znamená, že látka s větší hodnotou veličiny v Tabulce 1 bude při vytváření HS buňky stabilnější a má tedy vyšší hodnotu tření. Náš odhad potvrdí (nebo vyvrátí) srovnání s Tabulkou 3, ve které jsou uvedeny úhly svahu (přepony) s vodorovnou podložkou (nebo také úhly stability) pro jednotlivé složky zvlášť i jejich vybrané kombinace po dvou v HS buňce.

V tabulce 2 jsou uvedeny odpovídající kombinace granulátů vytvářející směs. Každá kombinace látek zastupuje veličinu v bílém poli tabulky 1.

Tabulka 2: Použité složky granulátu pro vytvoření kombinací z Tabulky 1.

HS buňka	Použité složky granulátu		
1	Mák, mouka		
2		Mouka, balotina	
3			Mák, cukr

Zdroj: vlastní zpracování

Mezi dvě skleněné desky postupně nasypeme jednotlivé látky a pro každou zvlášť změříme její úhel stability. Výsledky ukazuje tabulka 3.

Tabulka 3: Úhel stability svahu látek

Granulát	**Úhel**
Mák	41 °
Mouka	32 °
Balotina	31 °
Cukr	39 °

Zdroj: vlastní zpracování

Poněkud překvapivě vidíme, že balotina je o něco méně stabilní než mouka. Ostatní kombinace splňují naše očekávání.

Jak bude vypadat stejnorodě zamíchaná směs z kombinací podle Tabulky 2 při přesypávání? Jaký bude její úhel stability? Na tyto otázky najdeme odpověď experimentálně. Vytvoříme HS buňku.

Buňku vytvoříme tak, že necháme sypat smíchaný granulát mezi dvě průhledné desky umístěné vedle sebe. Při klouzání dojde k částečnému prostorovému oddělení smíšeného granulátu mezi jeho dvě původní složky. Vytvoří se tak zajímavý obrazec tvořený pruhy skloněné pod úhlem stability.

Samotný proces vzniku HS buňky můžeme rozdělit na dvě části – sypání a sklouzání. Ve fázi sypání zrna padají volným pádem po nejdelší trajektorii a nevytváří žádný svah. Tato fáze trvá krátce, brzy dojde ke vzniku svahu. Sypání můžeme u granulátů rozlišovat podle rychlosti toku a spojitosti.

Srovnejte video vzniku HS buňky 3 (vidHS3) a video vzniku HS buňky 2 (vidHS2).

Další fázi můžeme nazvat sypání a sklouzání. Zrna padají volným pádem na vrchol svahu, ze svahu strhávají jiná zrna a vytváří lavinu. Úpatí svahu se však posouvá směrem od vrcholu a vrchol se přibližuje k násypce. Sklouzání laviny po svahu

má charakter šířící se vlny, která se zastaví na úpatí svahu o spodní nebo boční stěnu buňky.

Srovnejte video vzniku HS buňky 2 (vidHS2 nebo vidHS2sesuv) *se sypáním a sklouzáním samotné balotiny* (vidBAL). *V případě vzniku HS buňky 2 jsou vlny složené s proměnnou amplitudou. V případě balotiny je vlna jednoduchá.*

Další vlny se zastaví v důlu předcházející vlny blíž vrcholu. V této fázi je pro strukturu vznikající HS buňky důležitý rozdíl úhlů stability jednotlivých složek.

Shlédněte video vzniku HS buňky 1 (vidHS1).

Proces přibližování se svahu s přibližujícími se důly vln k násypce pokračuje. Zkracuje se trajektorie, po které zrna padají volným pádem.

V konečné fázi je dominantní sklouzávání. Po svahu sklouzávají malé skupiny zrn. Nakonec některá z vln zablokuje otvor a sypání granulátu se zastaví, dokud se násypka neposune ve směru klesání svahu.

Sypání se může zastavit i samovolně kvůli vytvoření blokovaného stavu v násypce (viz vidHS3).

Přesný matematický popis podle této analýzy by byl dost složitý a přesahuje rámec této práce. Omezíme se na morfologický popis vznikajících struktur a jejich kvalifikaci podle fraktální dimenze, kterou zavedeme později.

Nyní přerušíme teoretický výklad a uvedeme technické detaily pokusu.

2.1.1 Uspořádání pokusu

K sestavení pokusu byly použity dvě skleněné desky o rozměru $(25 \times 30 \times 0{,}4)$ cm, 3 listy formátu A4, trychtýř (násypka), izolepa a nahrávací zařízení (v našem případě mobil *Geotel A1* se systémem *Android 7.0*). Některé pomůcky lze obměnit, jiné byly použity ke zlepšení měření, ale k provedení pokusu nebyly nutné.

Levý a pravý okraj buňky je vytvořený z několikrát ohnutého papíru A4. Papíry jsou ke sklu přilepeny izolepou. Skla jsou od sebe vzdálena 4 mm. Spodní okraj buňky je otevřený, pod ním je volně umístěný další papír formátu A4, který usnadňuje manipulaci s buňkou a zabraňuje rozsypávání granulátu mimo HS buňku.

Obrázek 8: Před nasypáním.

Zdroj: vlastní zpracování

Vytvoření HS buňky provedeme nasypáním smíchaného granulátu přes trychtýř do skleněné buňky. Průměr menšího otvoru trychtýře se blíží 4 mm zprava.

Obrázek 9: Po nasypání.

Zdroj: vlastní zpracování

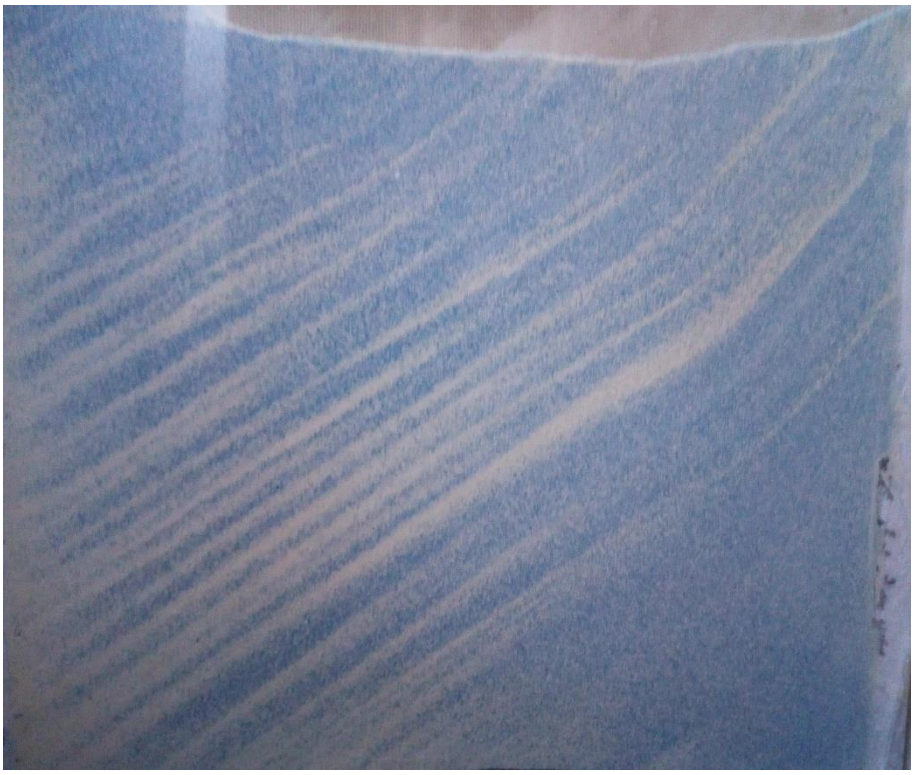
Na obrázku výše si můžeme všimnout rozsypaného granulátu tvořeného směsí máku, mouky, balotiny a cukru. Objem rozsypaného granulátu je 5,2 cm^3 po vytvoření 15 HS buněk.

2.1.2 Vytvoření HS buňky

Buňku vytvoříme tak, že mezi dvě skleněné desky sypeme granulát ze dvou složek (viz Tabulka 1) rozmíchaný ve stejnorodou směs. Při sypání násypku postupně posouváme tak, aby se granulát nesypal vně skleněných desek. Podle tabulky 1 vytvoříme HS buňky z různých materiálů.

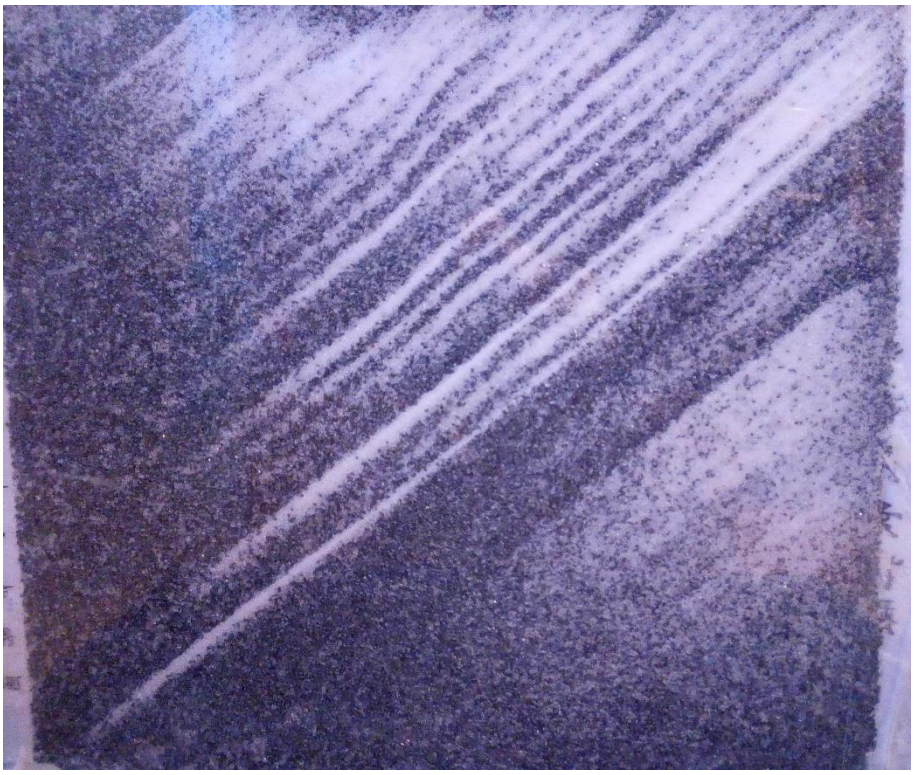
Obrázek 10: HS buňka ze zrn máku a hrubozrnné mouky (dále HS buňka 1.0). Za řídící parametr úhlu stability je zde považován rozdílný průměr zrn.

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 11: HS buňka z balotiny a hrubozrnné mouky (dále HS buňka 2.0). Za řídící parametr tření je zde podle Tabulky 1 považována rozdílná hustota zrn. Ohyb píků je způsobený přechodem na těsnější uspořádání zrn (viz video vidHS2sesuv).

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 12: HS buňka z máku a krystalického cukru (dále HS buňka 3.0). Za řídící parametr tření je zde podle Tabulky 1 považován rozdílný tvar zrn.

Zdroj: vlastní zpracování

2.2 Vlastnosti HS buňky

Na obrázcích 10 až 12 vidíme ukázku granulátů tvořených kombinací různých dvojic složek. Na obrázku tak vzniká charakteristický obrazec.

2.2.1 Výsledky měření a jejich interpretace

Nejvýraznější charakteristika při vzniku HS buňky sypáním granulátu, která má vliv na její vzhled, je úhel složek s vodorovnou podložkou.

Úhel s vodorovnou podložkou charakterizuje tření mezi zrny v granulátu. Čím je svah strmější, tím jsou zrna stabilnější, a tím je vyšší tření.

Tabulka 3 zachycuje naměřené hodnoty úhlů stability (úhly granulátu s vodorovnou podložkou) pro jednotlivé složky měřené samostatně a jejich vybrané kombinace po dvou.

Tabulka 4: Úhel různých složek granulátu s vodorovnou podložkou

Granulát	**Úhel**
Mák, mouka	42 °
Mouka, balotina	35 °
Mák, cukr	39 °

Zdroj: vlastní zpracování

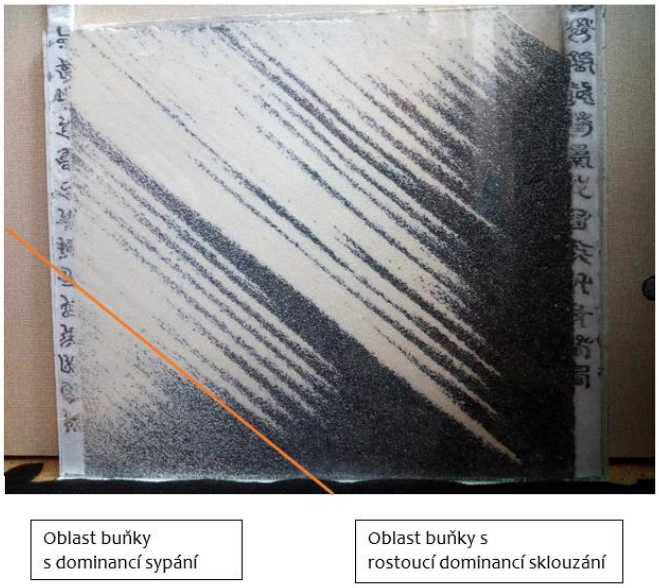
Tabulka 3 nám ukazuje výsledky měření úhlů stability pro kombinace dvou složek v HS buňce, jak jsme si je zvolili v Tabulce 2.

Výsledky pro HS buňku 1 a 3 jsou předpokládané a nepřekvapivé. V HS buňce 1 je stabilnější složka mák, který má úhel stability 41°. Zrna máku jsou větší a těžší. V HS buňce 3 je opět stabilnější složkou mák, který má zvrásněnější povrch, a proto méně sklouzává jako cukr s hladkými stěnami.

Překvapivý je výsledek HS buňky 2, kde je stabilnější prvek mouka, I když zrna balotiny mají větší hmotnost než zrna mouky. Usuzujeme, že v tomto případě byl rozhodujícím parametr tření tvar zrna.

Další překvapivý výsledek je, že kombinace dvou složek může mít v HS buňce větší úhel stability, než je úhel stability samotné stabilnější složky. To znamená, že mák je stabilnější na méně stabilní vrstvě mouky než na vrstvě máku. Výsledek s ještě větším rozdílem jsme zaznamenali i pro HS buňku 2.

Poněkud neintuitivní je pozorování, že stabilnější složka s vyšším třením vyplňuje nižší část HS buňky. Vysvětlení nabízíme z pozorování HS buňky 1 (viz video vidHS1). Stabilnější zrna se zastavují na svahu blíže k vrcholu. Jakmile na ně narazí větší počet méně stabilních zrn, strhne je při sklouzávání pod sebe a rozprostře je po svahu. Méně stabilní zrna tím ztrácí část své kinetické energie, proto se můžou stabilizovat pod strmějším úhlem stability. Shrnutí provedeme na obrázku níže pro HS buňku 1.2.



Obrázek 13: Rozdělení HS buňky podle procesů, které ji vytváří. Patrný je i důvod, proč se střídají píky podobné velikosti, ale v bílém píku předpokládáme více zrn, protože musela „přetlačit“ stabilnější zrna v tmavém píku.

Zdroj: vlastní zpracování

Srovnáním velikostí úhlů jednotlivých složek a granulátu s dvěma složkami zjistíme, že větší rozdíly úhlů mezi jednotlivými složkami znamenají méně nejasných přechodů mezi postupně nasypanými vrstvami v HS buňce. To znamená, že HS buňka je spíš rozdělená na píky, kde jsou obě složky odděleny a střídají se. Naopak, jsou-li rozdíly úhlů podobné, HS buňka je tvořena z více oblastí, kde jsou obě složky smíseny.

Podle rozdílu úhlu stability svahu jednotlivých složek vznikají střídající se píky nebo oblasti, kde jsou obě složky rovnoměrně smíchány.

Můžeme si všimnout, že čím je daný pík blíž úhlopříčce HS buňky, tím je větší pravděpodobnost, že bude delší.

Pozorováním obrázků HS buněk vytvořených pokusem můžeme usoudit, že délka píku je závislá na počátku píku. Pozice píku je dána jeho počátkem na vodorovné podložce HS buňky a její levé svislé stěny ve směru sypání.

Proces sypání můžeme simulovat. Simulaci provedeme pro jednosložkový granulát, Budeme se zabývat uspořádáním zrn a stabilitou systému.

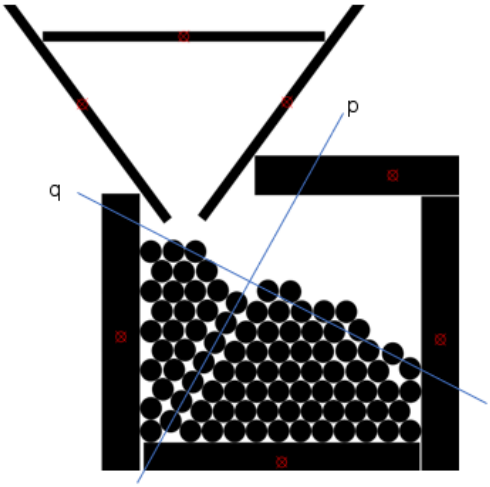
2.2.2 Stabilita jednosložkového granulátu

K simulaci sypání jednosložkového granulátu bylo použito 91 kulatých zrn o jednotkové hmotnosti a jednotkovém průměru.

Nepružné srážky byly vytvořeny tak, že průběh simulace byl přerušen a byla minimalizována kinetická energie částic po srážce. Program [7] nesimuluje disipaci energie při srážkách. Disipaci je možné „simulovat“ ručně snižováním parametrů v modelu po srážce částic. Bylo by vhodné odpovídající rovnice do programu implementovat.

Simulace dobře popisuje vytváření svahu v granulátu. Byly patrné i sesuvy celých řad kvůli konfiguraci zrn a nárazům dalších zrn z násypky na hromadu. Docházelo i k přechodům konfigurace zrn znázorněné na Obrázku 6.

Rozdílná konfigurace je vidět i v různých částech simulované HS buňky na Obrázku 14. Při dostatečně pomalém sypání za nepružných srážek došlo k vytvoření nejtěsnějšího možného uspořádání zrn ve dvourozměrném prostoru. HS buňka je tvořena také přechodnou vrstvou s volnějším uspořádáním kolem přímky *p*. Přímka *q* znázorňuje přibližný sklon svahu granulátu. Jeho minimální stabilita v průběhu simulace je dána absencí tření a kulatým tvarem zrn.



Obrázek 14: Simulace programu Step – uspořádání jednosložkového granulátu z 91 zrn. Lze stanovit přibližný sklon svahu, ve kterém je granulát stabilní. Úhel přímky q s vodorovnou podložkou je 26,5 °.

Zdroj: vlastní zpracování

K simulaci stability souboru a některé z možných konfigurací podle rovnic (5) až (8) byl použit program *Step* [7].

Program *Step* je vzdělávací program vyvinutý k fyzikálním simulacím Vladimírem Kuznetsovem. Je tvořený jednoduchým grafickým rozhraním. Simulace probíhá

tak, že umístíme vybrané fyzikální objekty na „scénu“ (může se jednat o plyn, nabité částice, pružná tělesa, pevná tělesa o daném tvaru). Dále vybereme působící síly a spustíme simulaci. Pohybový stav fyzikálních objektů v simulaci je řešený metodami knihovny *StepCore*, která zahrnuje i *GSL library*.

Fyzikální simulace jsou řešeny pro klasickou fyziku. Nejsou zahrnuty nepružné srážky ani působení třecích sil.

Klasický pohled fyziky na vytvoření struktur v různých dvousložkových systémech je omezený, protože se jedná o soubory tvořené řádově 10^8 zrn. Proto i simulace programu *Step* zahrnující desítky částic nám sice pomůže vytvořit představu o stabilitě systému, znázornění některých konfigurací, a z toho vyplývající šíření síly v granulátu, ale nebude už dostatečná k znázornění různých struktur, vznikající díky různým kombinacím jednotlivých složek v granulátu.

Proto se pokusíme popsat struktury vznikající v HS buňce pomocí nového přístupu. Ve dvacátém století se z algebry komplexních čísel zásluhou B. Mandelbrota stal nástroj pro znázorňování a modelování široké škály jevů v přírodě. Jde o fraktální geometrii.

3 Fraktály

Ve své knize „The fractal geometry of Nature“ B. B. Mandelbrot [8] poukázal na skutečnost, že fraktální vzory se v přírodě často opakují. Proto jsou vhodným nástrojem k znázornění struktur v přírodě.

Fraktály představují opačný přístup ke zkoumání tvarů, než na jaký jsme zvyklý z klasické geometrie.

V klasické geometrii, když chceme vytvořit nějaký tvar, vezmeme jednoduché tvary, které pomocí složitých pravidel poskládáme do nějakého útvaru.

Vytváříme-li nějaký tvar z fraktálu, vezmeme složitý tvar a pomocí jednoduchých pravidel jej „přetvoříme“ na jiný tvar.

Ideální fraktál má nekonečnou složitost, fraktály v přírodě mají samozřejmě konečnou složitost, protože jakýkoliv tvar v přírodě je z konečných částí.

Fraktály nám mohou pomoci také při zkoumání dynamických systémů. My se omezíme pouze na pozorování a klasifikaci struktur z pohledu fraktální geometrie.

Odkud se vlastně vzaly fraktály? Jako odpověď uvedeme slavný výrok zakladatele fraktální geometrie Benoita B. Mandelbrota z neméně slavného díla „The Fractal Geometry of Nature“ [8]:

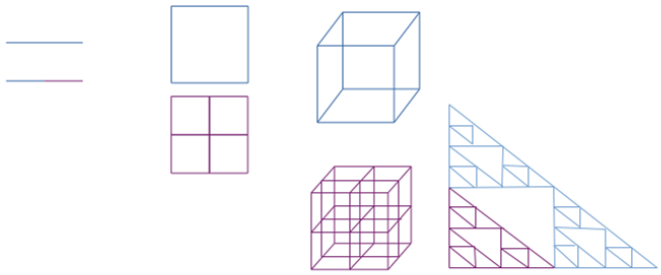
“Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.”

A právě fraktály nám pomáhají popsat tvary, jaké mají oblaka, hory, pobřeží, kůra stromů nebo blesk. Popis takovýchto tvarů pomocí klasické geometrie je příliš složitý a idealizovaný.

3.1.1 Vlastnosti fraktálů

První vlastnost fraktálů, o které se zmíníme, je soběpodobnost, neboli invariance objektu ke změně měřítka. Jinými slovy, soběpodobnost znamená, že pokud změníme měřítko tělesa, jeho vzhled se nezmění.

Soběpodobnost je významná vlastnost fraktálu, k definování fraktálu ale nestačí (viz obrázek).



Obrázek 15: Soběpodobnost útvarů v různých měřítkách (původní délka (modrá) je dvojnásobná oproti délce při "přiblížení" (fialová)).

Zdroj: vlastní zpracování

O fraktálu (respektive o jeho konečném zobrazení) bychom mluvili až v případě posledního útvaru zleva. Zbylé objekty jsou soběpodobné, ale jedná se o obyčejné tvary v klasické geometrii.

Úsečka po rozdělení na poloviny je zase úsečka (s poloviční délkou), čtverec o poloviční délce strany je zase čtverec (s čtvrtinovým obsahem jak čtverec původní), krychle o poloviční délce strany je zase krychle (s osminovým objemem původní krychle), trojúhelník s poloviční délkou původních stran (fialový) je zase trojúhelník (s třetinovým obvodem původního trojúhelníku (fialová a modrá)).

Při definici fraktálu musíme použít jemnější vymezení. Vymezení fraktálu provedeme pomocí dimenze.

3.1.2 Fraktální dimenze

V běžném slova smyslu chápeme pod pojmem dimenze něco, co popisuje prostor. Takže těleso má tři rozměry – výšku, délku, hloubku, plocha má dva rozměry – výšku a délku, úsečka jeden rozměr – délku a bod nemá žádný rozměr.

Dimenze v běžném pojetí nabývá celočíselných hodnot, fraktální dimenze může nabývat hodnot z celého oboru kladných reálných čísel.

Co tedy mají spolu dimenze a fraktální dimenze společného?

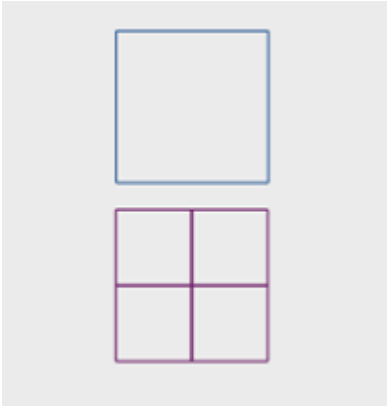
Na tuto otázku se pokusíme zodpovědět porovnáním klasických geometrických tvarů s fraktálem [13].

U každého tvaru budeme předpokládat nějakou hmotnost (takže po řadě půjde o drát, desku, blok, fraktál). Při zkoumání soběpodobnosti zvolíme nějaké měřítko, které bude představovat konstantu stupnice při pomyslném „přibližování“. Potom vypočí-

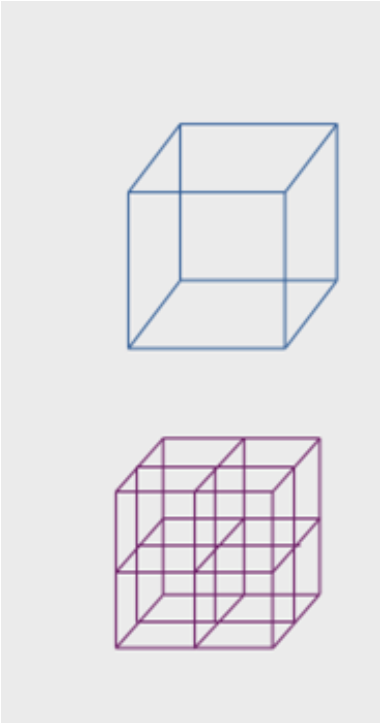
táme měřítko pro hmotnost. Půjde o stejný postup, kdy jsme zkoumali soběpodobnost různých útvarů na obrázku 15.

Hmotnost před vynásobením hmotnostním měřítkem označíme M_0, hmotnost po vynásobení hmotnostním měřítkem označíme M. Původní délku označíme l_0, délku po vynásobení délkovým měřítkem označíme l.

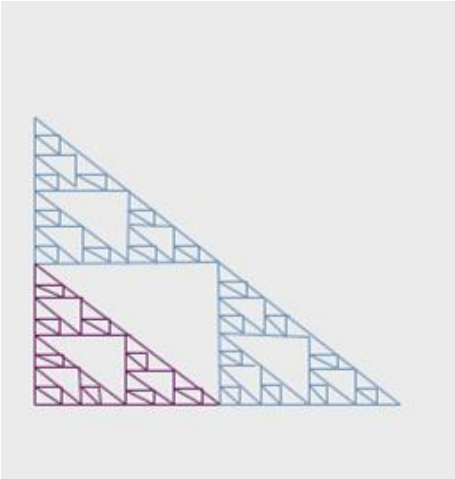
Obrázek 16: $M = \frac{1}{2}M_0, l = \frac{1}{2}l_0; M_0 > M, l_0 > l$



Obrázek 17: $M = \left(\frac{1}{2}\right)^2 M_0, l = \frac{1}{2}l_0; M_0 > M, l_0 > l$



Obrázek 18: $M = \left(\frac{1}{2}\right)^3 M_0, l = \frac{1}{2}l_0; M_0 > M, l_0 > l$



Obrázek 19: $M = \left(\frac{1}{3}\right)^d M_0, l = \frac{1}{2}l_0; M_0 > M, l_0 > l$

Z obrázků 15-18 jde snadno vidět závislost mezi délkovým měřítkem l/l_0 a hmotnostním měřítkem M/M_0. Abychom získali hmotnostní měřítko, stačí umocnit délkové měřítko na nějaké číslo. Toto „nějaké číslo“ je právě dimenze.

Nechť d je dimenze. Ze zobecnění postupu výše budeme požadovat

$$M_0 = \left(\frac{l}{l_0}\right)^{-d} M \tag{6}$$

Rovnici (6) zlogaritmujeme a vyjádříme d, položíme $d = d_F$, získáme tak rovnici

$$d_F = \log_{\frac{l_0}{l}}\left(\frac{M_0}{M}\right) \tag{7}$$

Na fraktální dimenzi d_F se můžeme dívat jako na zobecnění celočíselné dimenze. Podle rovnice (7) si už snadno poradíme i s fraktálem (resp. jeho konečným zobrazením) na Obrázku 15:

$$d = \log_{\frac{l_0}{l}}\left(\frac{M_0}{M}\right) = \log_2(3) \approx 1{,}585 \tag{8}$$

Získali jsme vyjádření dimenze d_F fraktálu z Obrázku 18 – fraktální dimenzi. Znázorněný fraktál se nazývá Sierpinského trojúhelník.

Existuje více definicí zobecněných dimenzí. Některé jsou výhodnější, protože jejich výpočet lze algoritmizovat.

3.1.3 Fraktální dimenze z pokrytí

Metoda pokrytí [4] usnadňuje výpočet fraktální dimenze a umožňuje její algoritmizaci. Tímto způsobem analyzuje tvary i program *Fractalyse*, který slouží k analýze složitějších tvarů. Obecnější pohled nám usnadní výpočty snadnou analýzou tvaru.

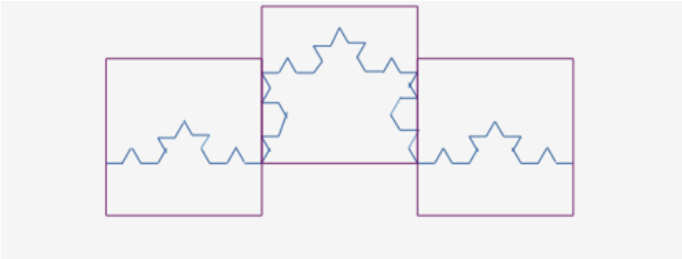
Začneme příkladem. Vypočtěme fraktální dimenzi Kochovy křivky.

Obrázek 20: Jak určit fraktální dimenzi Kochovy křivky?

Zdroj: vlastní zpracování

V příkladu určení fraktální dimenze Sierpinského trojúhelníku bylo „půlení stran“ i odebrání „třetiny hmotnosti“ zřejmé z obrázku. U Kochovy křivky nám půlení stran nepomůže. Máme tedy hledat jiný násobek?

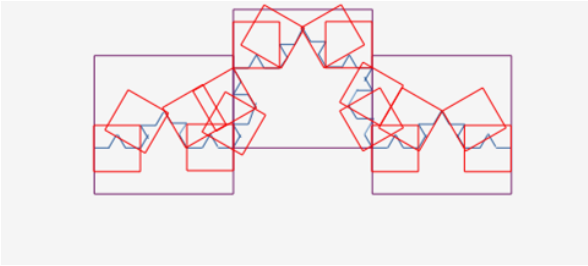
Můžeme si pomoci počítáním dimenze pokrytím. Fraktál rozdělíme na rámečky, které mají obě strany shodné. Pokrytím určíme fraktální dimenzi.



Obrázek 21: V každém rámečku je část Kochovy vločky. Rámečky se mohou překrýva

Zdroj: vlastní zpracování

Udělali jsme první krok. Z délky rámečků můžeme už usuzovat, že vhodné délkové měřítko je $\frac{l}{l_0} = \frac{1}{3}$. Z rámečků můžeme určit i hmotnostní měřítko vločky. Všimněme si, že i když máme správně délkové měřítko (usuzujeme z toho, že každý rámeček neponechává žádnou část fraktálu nepokrytou), nepokrývají rámečky celý fraktál rovnoměrně. Abychom zjistili měřítko hmotnosti, měly by rámečky při nezměněném délkovém měřítku pokrývat celý fraktál rovnoměrně. Na obrázku 22 jsme zmenšili fialové rámečky o 1/3, a současně je pootočili tak, že pokrývají fraktál rovnoměrně. I když se rámečky překrývají, žádný rámeček nepokrývá část fraktálu ze sousedního rámečku.



Obrázek 22: Určení fraktální dimenze z pokrytí.

Zdroj: vlastní zpracování

Fraktální dimenzi získáme po dosazení do vztahu (7) pro měřítka $\frac{l}{l_0} = \frac{1}{3}$ a $\frac{M}{M_0} = \frac{1}{4}$:

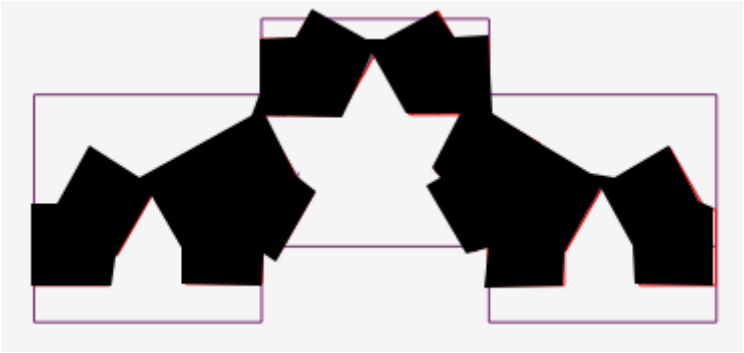
$$d_F = \log_{\frac{l_0}{l}}\left(\frac{M_0}{M}\right) = \log_3(4) \approx 1{,}262 \tag{9}$$

3.1.4 Pokrytí

Pokud popsaný postup obrátíme, získáme fraktální dimenzi z pokrytí. Analýza spočívá v tom, že máme nějakou strukturu se známými detaily a snažíme se získat méně detailnější strukturu. Získáváme zjednodušený vzor s méně detaily.

Obrázek 20: Určení fraktální dimenze metodou pokrytí, původní obrázek.

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 21: Určení fraktální dimenze metodou pokrytí, první pokrytí při zmenšeném měřítku.

Zdroj: vlastní zpracování

Obrázek 22: Určení fraktální dimenze metodou pokrytí, druhé pokrytí při zmenšeném měřítku.

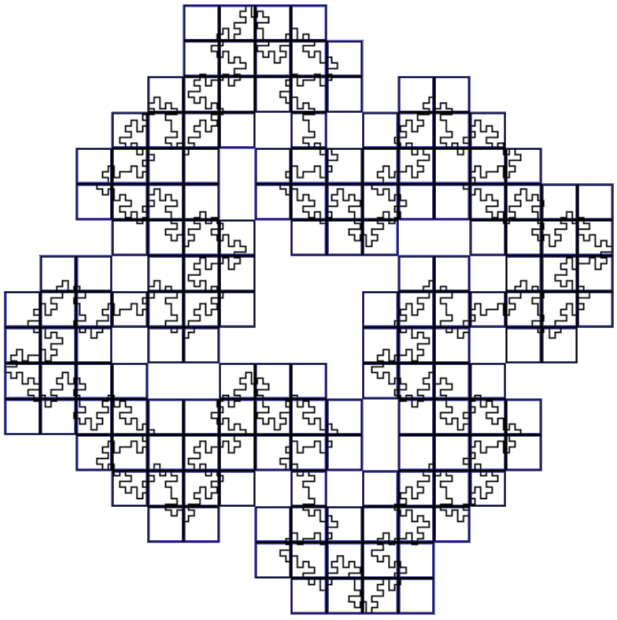
Zdroj: vlastní zpracování

Každý obsazený bod je obklopený čtvercem o délce strany x, celý útvar tak má jistou velikost povrchu. Délka strany čtverce x se postupně zvětšuje, v každém kroku měříme celkový povrch útvaru. S každým zvětšením pokrývajícího čtverce zanedbáváme detaily menší než délka strany x a postupně obdržíme aproximaci původního tvaru. S narůstajícím počtem kroků, následující čtverce překrývají předchozí. Podělením celkového povrchu povrchem x^2 testovacího čtverce i-tého kroku iterace získáme přibližný počet čtverců N nutných k pokrytí útvaru.

3.1.5 Sčítání obsazených bodů v mřížce

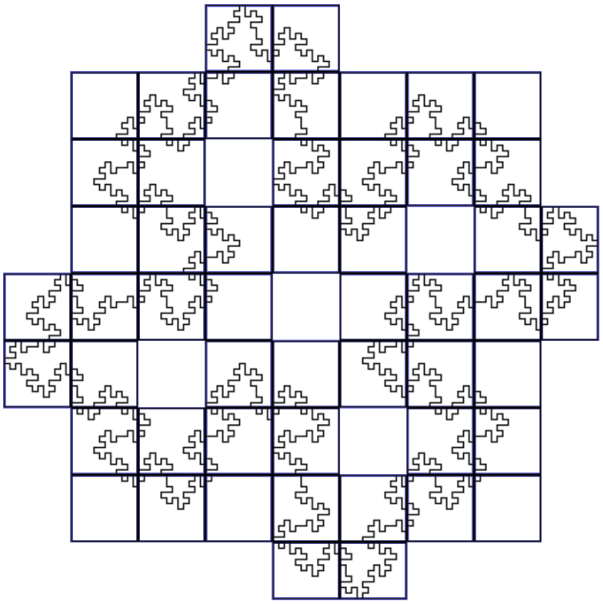
Další metodou, kterou lze stanovit fraktální dimenzi, je *sčítání obsazených bodů v mřížce*. Touto metodou budeme provádět stanovení fraktální dimenze kvůli její výpočetní úspornosti. Jedná se v podstatě o zjednodušenou metodu *pokrytí.*

Obrázky 25-27 ilustrují její použití.



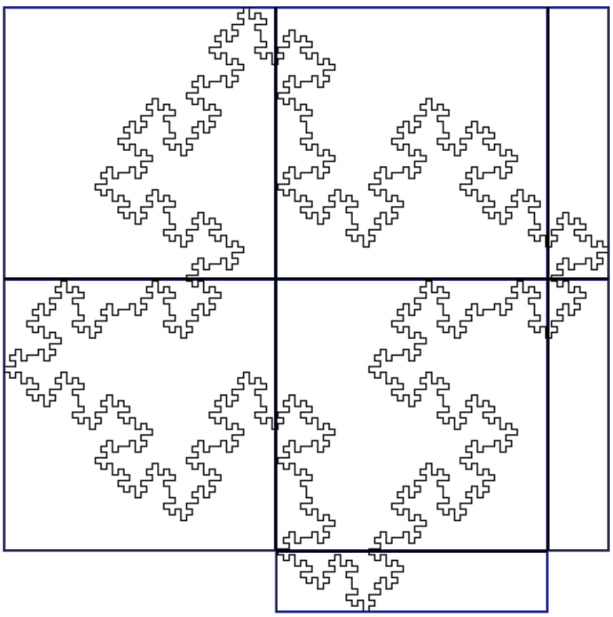
Obrázek 23: První pokrytí obrazce mřížkou o dané velikosti rámečku. Dostupné z: https://imagej.nih.gov/ij/plugins/fraclac/FLHelp/BoxCounting.htm#gridimage (upraveno).

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 24: Druhé pokrytí obrazce mřížkou o dané velikosti rámečku. Dostupné z: https://imagej.nih.gov/ij/plugins/fraclac/FLHelp/BoxCounting.htm#gridimage (upraveno).

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 25: Třetí pokrytí obrazce mřížkou o dané velikosti rámečku. Dostupné z: https://imagej.nih.gov/ij/plugins/fraclac/FLHelp/BoxCounting.htm#gridimage (upraveno).

Zdroj: vlastní zpracování

Sčítání obsazených bodů v mřížce je nejpoužívanější metoda k odhadu fraktální dimenze. Obrázek je pokrytý dvourozměrnou mřížkou a mění se velikost jednotkové buňky *x*. Pro každou hodnotu *x* sečteme množství čtverců *N* obsahující nějaký *obsazený bod* (černý pixel).

Obvykle množina velikostí *x* roste s druhou mocninou.

Velikost čtverce (rámečku) definuje také množinu hodnot *x*, například velikost 16 odpovídá množině (1, 2, 4, 8), velikost 72 odpovídá množině (1, 3, 9, 18, 36) a velikost 216 odpovídá množině (1, 3, 9, 27, 54, 108). Množiny hodnot jsou z míšených hodnot druhých a třetích mocnin.

4 Analýza HS buňky

HS buňku můžeme popsat pomocí grafických útvarů, které vytváří její složky granulátu. Vidíme, že píky jsou různě dlouhé a jejich délka se různě střídá. Dochází ke vzniku charakteristických útvarů, které můžeme mezi sebou porovnávat. Pro analýzu opakujících se vzorů v různých měřítkách je vhodný popis pomocí fraktální dimenze. K analýze opakujících se vzorů využijeme program *Fractalyse.* Aplikujeme poznatky o matematice fraktálů k analýze jevu z oblasti fyziky sypkých materiálů.

4.1 Analýza HS buněk v programu *Fractalyse*

Fractalyse byl vyvinut za účelem analýzy zastavěných ploch v krajině pomocí fraktální dimenze. Jeho využití je rozsáhlejší, může být použitý k analýze jakéhokoliv obrázku v odpovídajícím formátu (*.bmp, *.tif). Obrázek je v bitovém formátu. Pro uživatele grafického editoru GIMP můžeme přiblížit, že se jedná o obrázek v indexovaném režimu uložený bez alfa kanálu (tj. žádná informace o průhlednosti) exportovaný jako *.tif komprimovaný metodou CCITT Group 3 fax.

Krátce zmíníme možnosti a použitelné metody, které nabízí program *Fractalyse* [4].

Fractalyse zahrnuje různé metody k určení fraktální dimenze podle různých definic (Hausdorffova, Minkowského, korelace, …). Proces měření fraktální dimenze je rozdělen na dvě části:

- metoda sčítání (the counting method);
- vytvoření přibližného modelu (the estimation module).

4.1.1 Metoda sčítání

Metoda sčítání spočívá v iteračním principu. V každém kroku iterace je spočítán počet černých pixelů v rámečku o dané velikosti. Černý pixel obrázku nazveme *obsazeným bodem.*

V dalším kroku je zvětšena velikost rámečku.

Tímto způsobem analyzujeme obrázek.

Při použití této metody figurují dvě proměnné:

- Množství sečtených prvků (odpovídá množství obsazených bodů v aktuálním rámečku o dané velikosti), N;
- Velikost rámečku nebo nějakého referenčního prvku, x.

Tyto dvě proměnné můžeme pokládat za uspořádanou dvojici, kterou můžeme reprezentovat kartézským grafem. Obor hodnot odpovídá množství sčítaných prvků N a definiční obor odpovídá velikosti rámečku nebo nějakého referenčního prvku x. Velikost x roste s počtem kroků iterace.

4.1.2 Přibližný model

Matematicky můžeme řadu bodů proložit (empirickou) křivkou, která prochází všemi danými body. V dalším kroku fitujeme empirickou křivku aproximační křivkou.

Jestliže empirická křivka vyjadřuje soběpodobnost (soběpříbuznost), lze aproximační křivku vyjádřit pomocí mocninného zákona a fraktální dimenzí (d) ve tvaru:

$$N = \mathrm{x}^{d} \tag{10}$$

4.1.3 Typy sčítacích metod

Program *Fractalyse* obsahuje různé metody sčítání k určení fraktální dimenze.

- Sčítání obsazených bodů mřížky (grid);
- Sčítání obsazených bodů soustředných kruhů (radius mass);
- Pokrytí (dilation);
- Korelace (correlation);
- Gaussovská konvoluce (gaussian convolution);
- Sčítání obsazených bodů v překrývajících se rámečcích podle lokální hustoty (box-counting (testing)).

Z výše jmenovaných metod použijeme Sčítání obsazených bodů v mřížce (grid).

4.2 Analýza fraktální dimenzí

Fraktální dimenzi použijeme k analýze *HS buněk 1-3*. Analýza nám poslouží k srovnání jednotlivých buněk.

K analýze *měření HS buněk 1-3* využijeme předpis ve tvaru [4]

$$\log(N) = d\log(x) + c, \tag{11}$$

Kde d je fraktální dimenze a c opravný koeficient (tzv. prefaktor tvaru). N je počet čtverců v mřížce, ve kterých se nachází část analyzovaného útvaru. Velikost strany čtverce (v pixelech) se postupně zvětšuje, obvykle s druhou mocninou, v průběhu výpočtu. Pro ideální soběpodobný fraktál vychází hodnota $\mathrm{c} = 0$.

Ukážeme si, že vztah (11) můžeme považovat za analogii fraktální dimenze d_F zavedenou ve vztahu (7).

Vztah (7) upravíme do stejného tvaru analogicky ke vztahu (10):

$$d_F = \frac{\log\left(\frac{M_0}{M}\right)}{\log\left(\frac{l_0}{l}\right)} \tag{12}$$

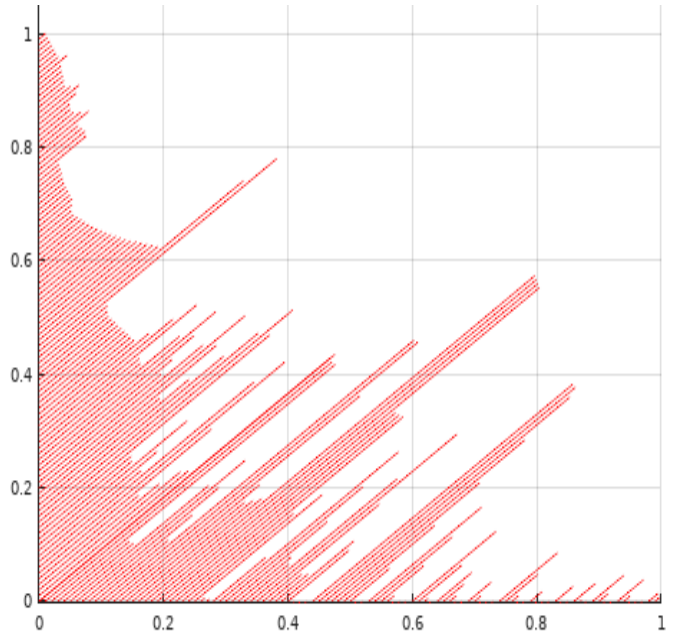
$$\log\left(\frac{M_0}{M}\right) = d_F \log\left(\frac{l_0}{l}\right) \tag{13}$$

Položíme $\frac{M_0}{M} = N$ a $\frac{l_0}{l} = x$. Ke vztahu připočteme opravný koeficient tvaru c a získáme rovnici

$$\log(N) = d_F \log(x) + c, \tag{14}$$

Která je pro $d_F = d$ totožná s rovnicí (11).

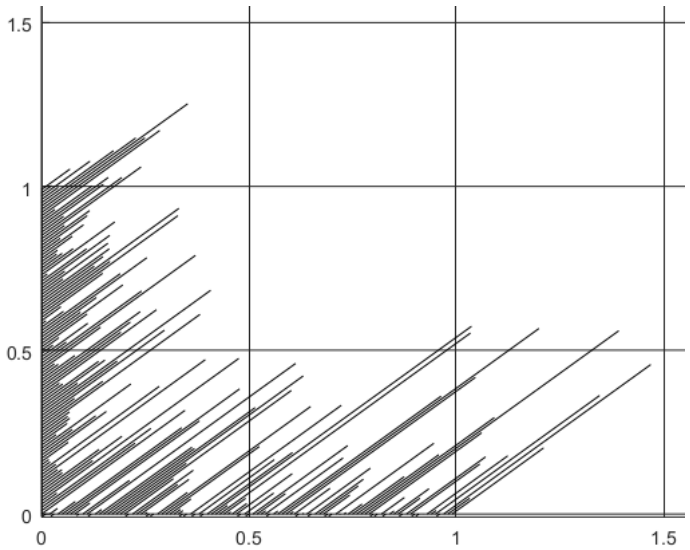
Fraktální dimenze ukazuje na uspořádání složek granulátu HS buňky. Předvedeme to na příkladu *měření HS buňky 1.0*.



Obrázek 26: Měření délky jednotlivých píků HS buňky 1.0. Počátky píků rozdělují svislou a vodorovnou stěnu HS buňky 1.0 na setiny jejich původní normované délky.

Zdroj: vlastní zpracování

Na obrázku 29 je změněné pořadí píků z obrázku 28. Pořadí píků je náhodné. Hodnoty na ose x a y (vodorovné a svislé stěny HS buňky) řadíme zvlášť. Výstup znázorňuje Obrázek 29.



Obrázek 27: Náhodná konfigurace z měření HS buňky 1.0.

Zdroj: vlastní zpracování

Různá pořadí píků představují různé konfigurace HS buňky. Každá konfigurace o daném stálém podílu složky granulátu má však různou fraktální dimenzi. Blízká řazení, tj. řazení o podobné fraktální dimenzi, reprezentují dané *měření HS buňky 1.0*.

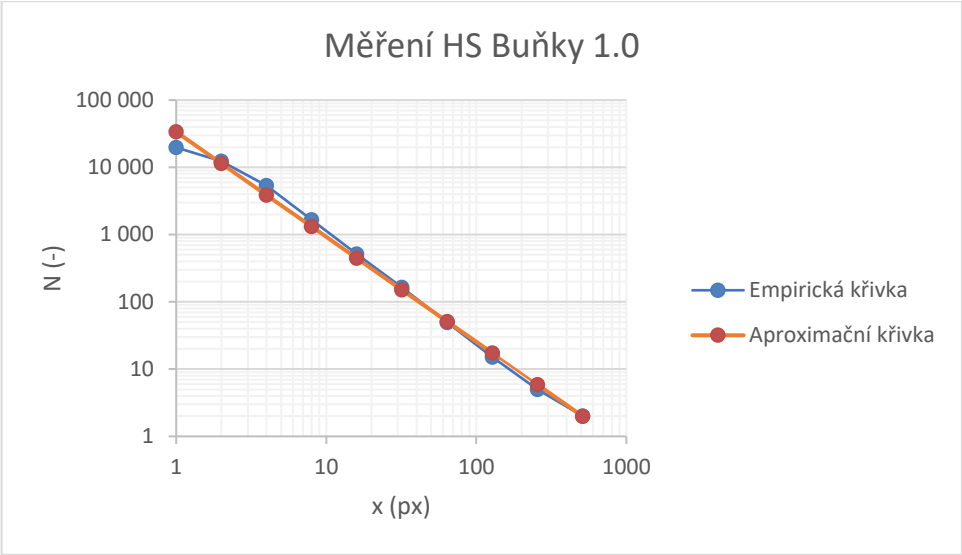
Části píků, které přesahují interval (0,1), nejsou zahrnuty při výpočtu fraktální analýzy. Zmenšení obrázku nebo vyříznutí jeho části nemá na teoretický výpočet fraktální dimenze vliv, protože můžeme uvažovat libovolně jemné rozlišení. Nuance ve tvaru fraktálu by se v takovém případě rychle vytratily a na vypočtenou hodnotu fraktální dimenze by neměly vliv.

V praxi je ovšem rozlišení obrázku limitující, protože fraktální dimenze je stanovena proložením křivky v logaritmickém grafu. Je-li rozlišení obrázku malé, křivka prochází méně body a stanovení fraktální dimenze nebude úplně spolehlivé. V našem případě ale půjde o srovnání dvou fraktálních dimenzí pro obrázky s podobným (limitujícím) rozlišením.

Tabulka 5: Měření HS buňky 1.0

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	19 724	33 702,93	0,682
2	12 293	11 422,23	1,194
4	5 372	3 871,10	1,692
8	1 663	1 311,95	1,694
16	514	444,63	1,639
32	165	150,69	1,752
64	49	51,07	1,708
128	15	17,31	1,585
256	5	5,87	1,322
512	2	1,99	0,000

Zdroj: vlastní zpracování



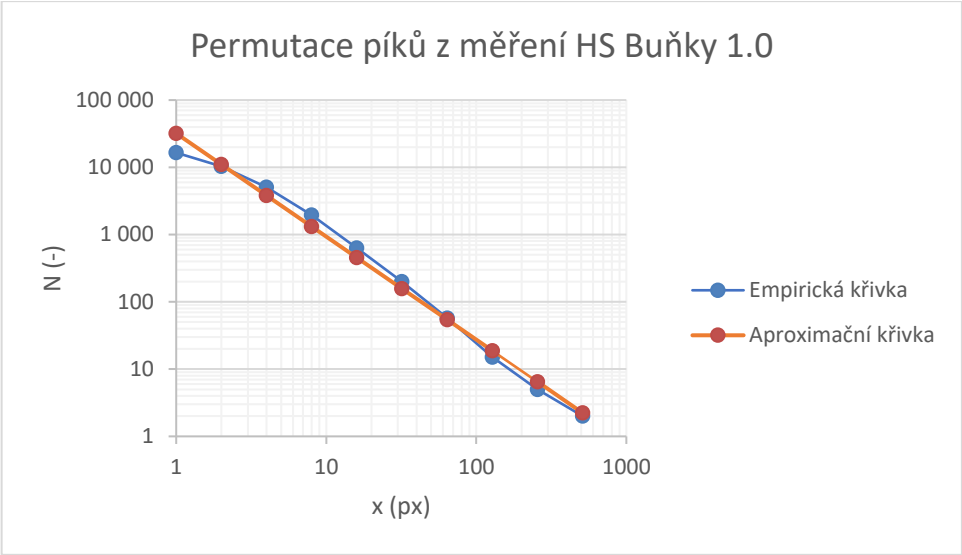
Obrázek 28: Měření fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 6: Náhodná permutace pozic píků. Měření HS buňky 1.0

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	16 505	31 986,85	0,675
2	10 341	11 041,49	1,021
4	5 095	3 811,40	1,383
8	1 953	1 315,65	1,625
16	633	454,15	1,669
32	199	156,77	1,804
64	57	54,11	1,926
128	15	18,68	1,585
256	5	6,448	1,3219
512	2	2,2258	0

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 29: Určení fraktální dimenze z logaritmické křivky.

Zdroj: vlastní zpracování

Jde vidět, že k vytvoření HS buňky nestačí pouze vybírat píky správné velikosti. Vyplývá to i z analýzy pomocí fraktální dimenze.

Fraktální dimenze d_{HSmp} náhodné permutace z *měření HS buňky 1.0* vychází

$$d_{HSmp} = 1{,}535 \tag{17}$$

S koeficientem $c = 0{,}20148$. Fraktální dimenzi srovnáváme s hodnotou *měření HS buňky 1.0*

$$d_{HSm} = 1{,}561 \tag{18}$$

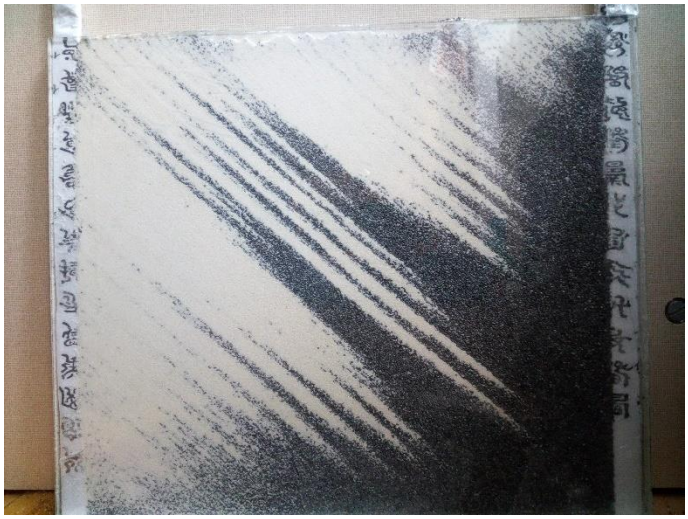
S koeficientem $c = 0{,}23267$.

Nyní provedeme měření pro HS buňky 1-3, stanovíme fraktální dimenze a jejich interval spolehlivosti a porovnáme hodnoty.

4.2.1 HS buňka 1

Pro HS buňku 1 ze zrn máku a mouky jsou typické jasné hranice píků s minimálním šumem v levém dolním rohu. Píky se téměř pravidelně střídají až k úhlopříčc, kde leží maxima zrn máku střídající se s maximy zrn mouky.

HS buňka 1, 1. měření



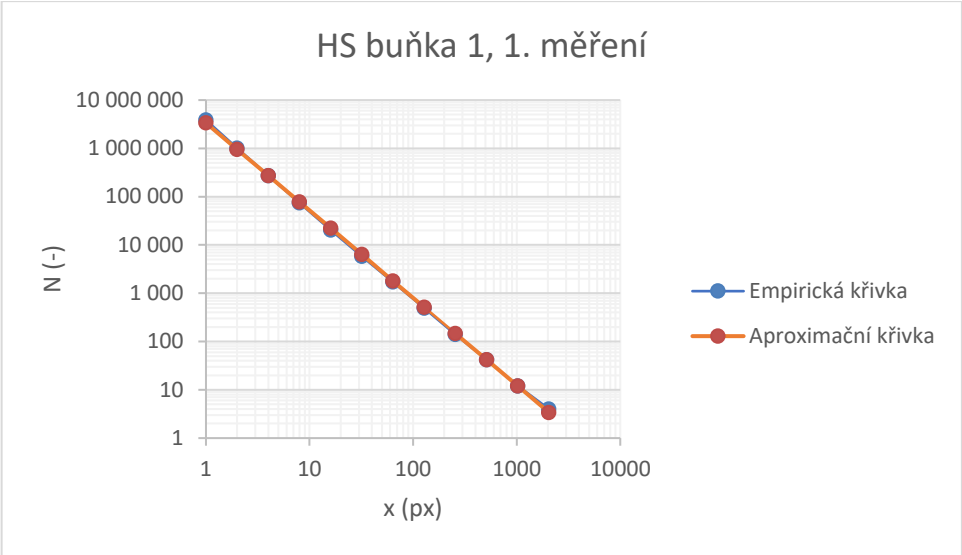
Obrázek 30: Měření HS buňky 1.1

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 7: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace.

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	3 850 514	3 355 402,62	1,927
2	1 012 338	956 903,63	1,892
4	272 798	272 892,61	1,879
8	74 163	77 824,32	1,863
16	20 384	22 194,17	1,808
32	5 820	6 329,40	1,773
64	1 703	1 805,04	1,794
128	491	514,77	1,800
256	141	146,80	1,747
512	42	41,87	1,807
1024	12	11,94	1,585
2048	4	3,40	0,000

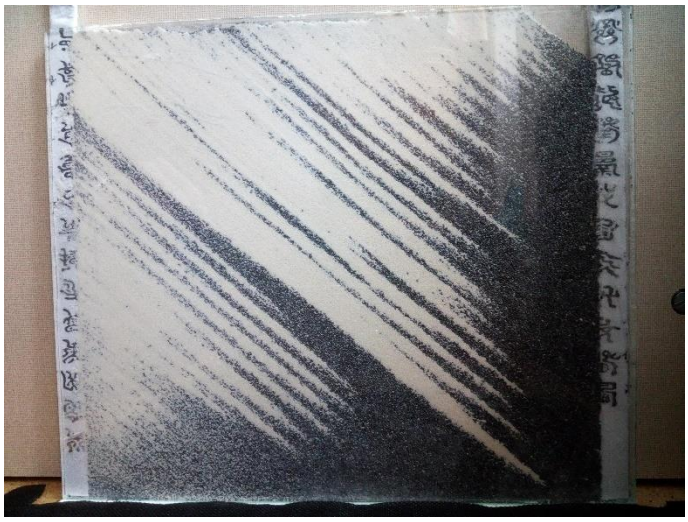
Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 31: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

HS buňka 1, 2. měření



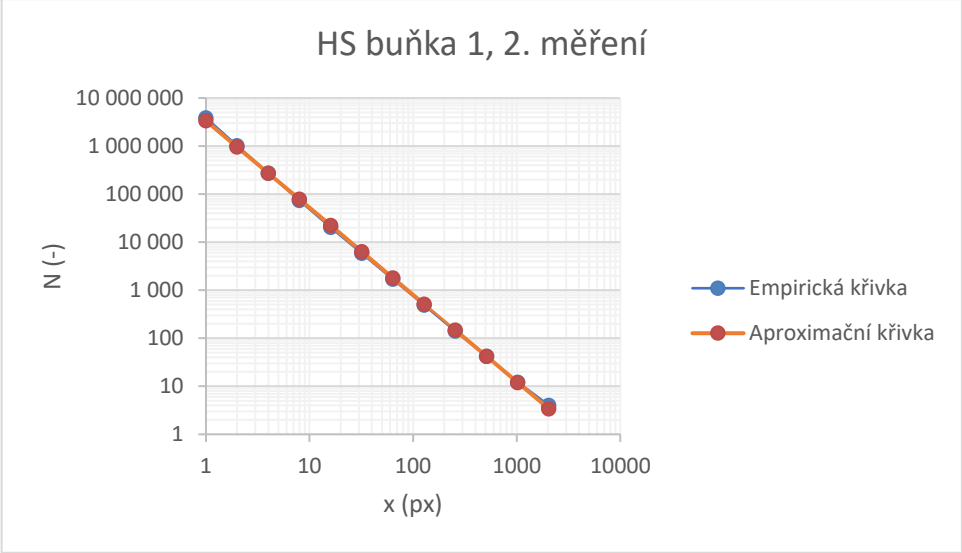
Obrázek 32: Měření HS buňky 1.2

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 8: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace.

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	3 732 681	3 339 843,14	1,914
2	990 843	956 206,96	1,874
4	270 344	273 764,88	1,863
8	74 318	78 379,69	1,842
16	20 730	22 440,34	1,777
32	6 050	6 424,74	1,731
64	1 822	1 839,42	1,790
128	527	526,63	1,803
256	151	150,78	1,846
512	42	43,17	1,807
1024	12	12,36	1,585
2048	4	3,54	0,000

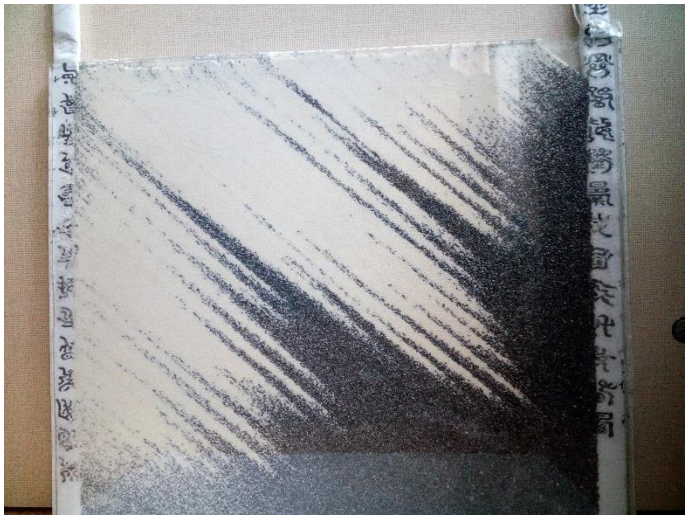
Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 33: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

HS buňka 1, 3. měření



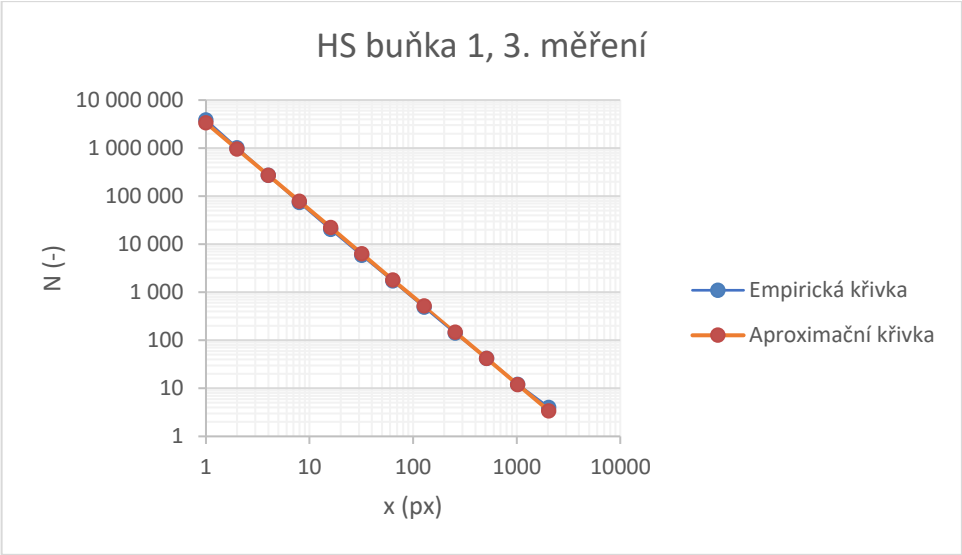
Obrázek 34: Měření HS buňky 1.3

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 9: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace.

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	3 233 777	2 797 239,61	1,916
2	856 828	813 434,29	1,876
4	233 425	236 545,82	1,854
8	64 587	68 787,27	1,821
16	18 280	20 003,27	1,776
32	5 339	5 816,93	1,712
64	1 630	1 691,56	1,813
128	464	491,90	1,668
256	146	143,04	1,798
512	42	41,60	1,807
1024	12	12,10	1,585
2048	4	3,52	0,000

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 35: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

HS buňka 1, 4. měření

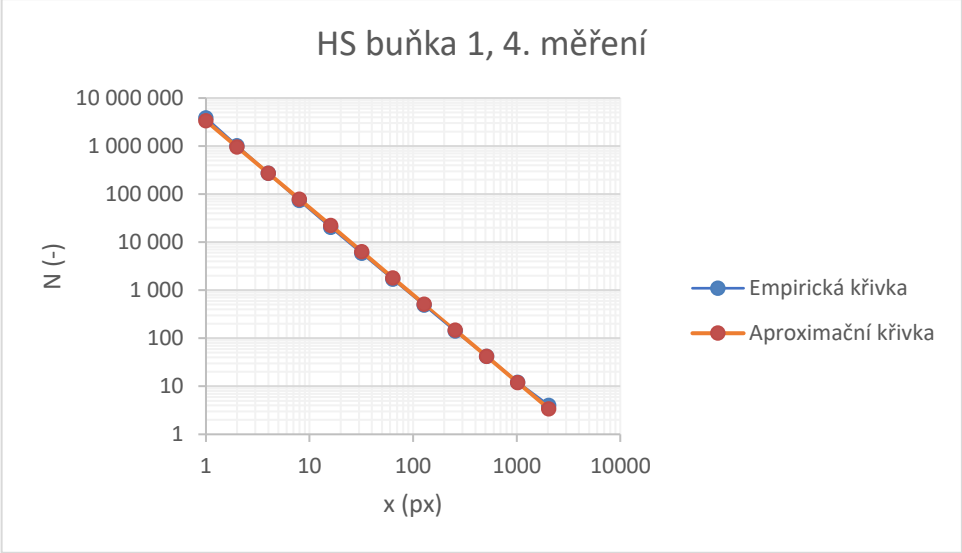
Obrázek 36: Měření HS buňky 1.4

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 10: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace.

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	3 700 023	3 136 328,99	1,936
2	967 232	897 027,16	1,901
4	258 974	256 560,37	1,881
8	70 290	73 379,30	1,870
16	19 227	20 987,35	1,846
32	5 347	6 002,63	1,785
64	1 552	1 716,82	1,796
128	447	491,03	1,771
256	131	140,44	1,676
512	41	40,17	1,773
1024	12	11,49	1,585
2048	4	3,29	0,000

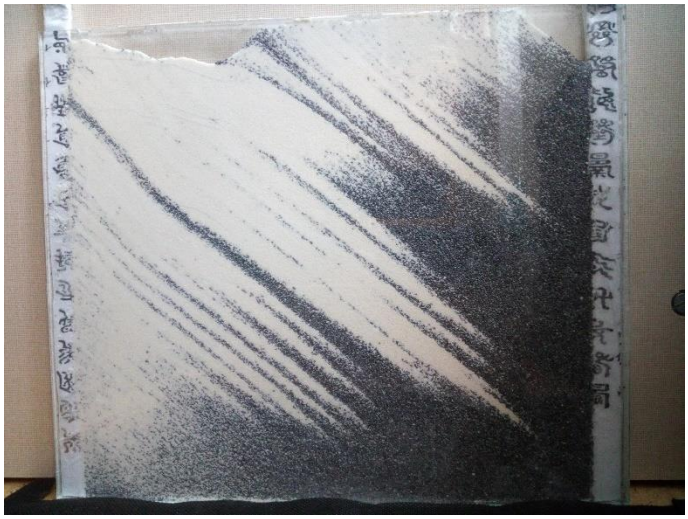
Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 37: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

HS buňka 1, 5. měření



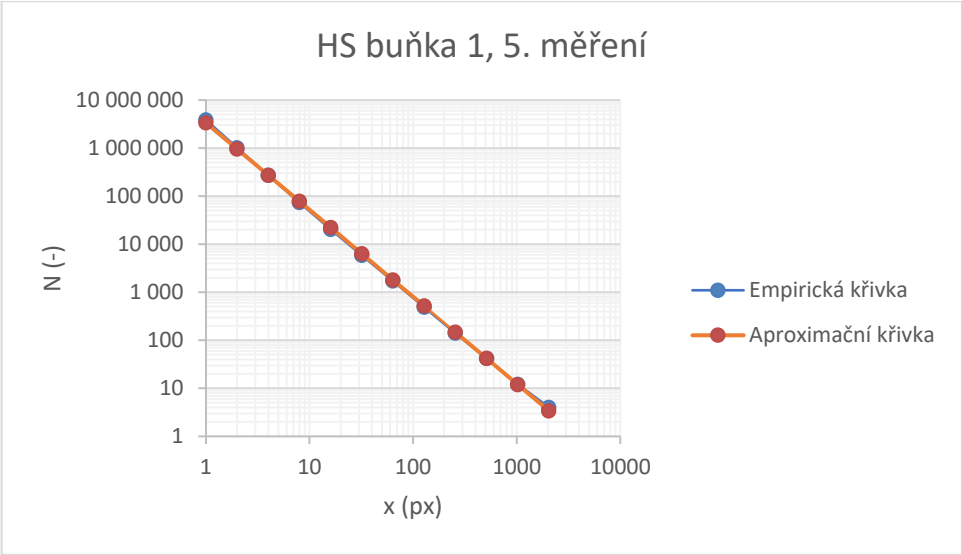
Obrázek 38: Měření HS buňky 1.5

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 11: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace.

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	3 333 897	2 819 948,28	1,931
2	874 518	815 476,47	1,892
4	235 630	235 820,59	1,872
8	64 362	68 194,92	1,843
16	17 944	19 720,70	1,822
32	5 077	5 702,86	1,730
64	1 530	1 649,16	1,762
128	451	476,91	1,762
256	133	137,91	1,770
512	39	39,88	1,700
1024	12	11,53	1,585
2048	4	3,34	0,000

Zdroj: vlastní zpracování



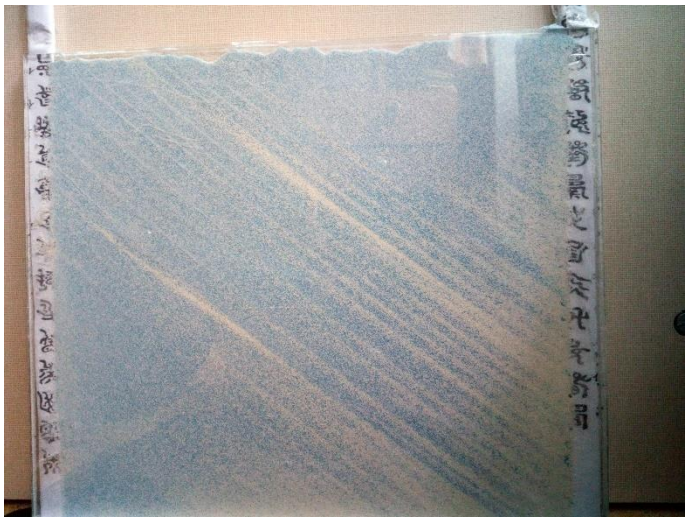
Obrázek 39: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

4.2.2 HS buňka 2

Pro HS buňku 2 ze zrn balotiny a mouky jsou typické úzké píky s nejasnými hranicemi. Píky se oproti případu HS buňky 1 tvoří později. Při nasypávání dochází k sesuvu granulátu, jak prozrazuje prohlubeň v horní části buňky a zakřivení píků. HS buňka 2.1 představuje výjimku, naproti tomu je HS buňka 2.2 typický příklad.

HS buňka 2, 1. měření



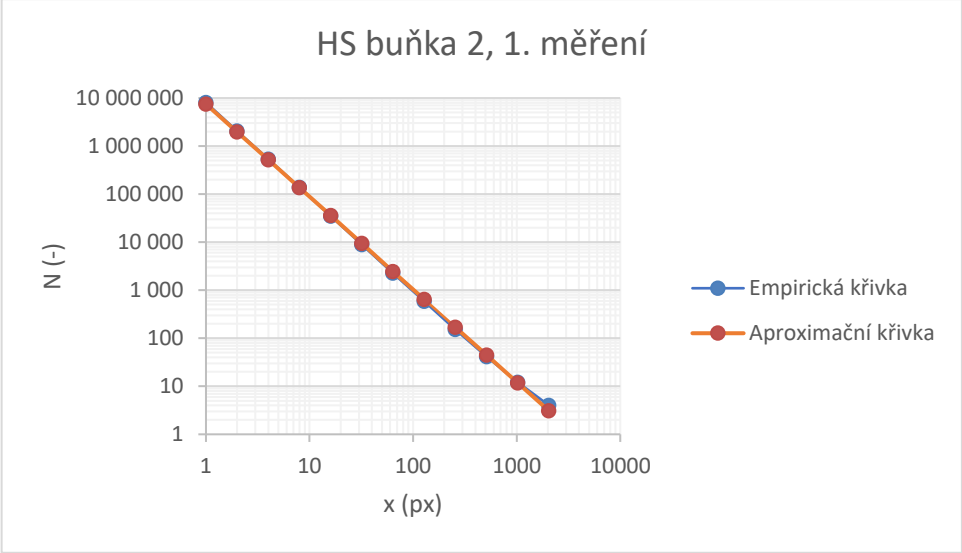
Obrázek 40: Měření HS buňky 2.1

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 12: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace.

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	8 046 813	7 474 403,19	1,959
2	2 069 762	1 964 332,56	1,953
4	534 751	516 242,21	1,960
8	137 464	135 672,56	1,974
16	35 001	35 655,83	1,980
32	8 872	9 370,63	1,964
64	2 274	2 462,68	1,961
128	584	647,21	1,942
256	152	170,09	1,890
512	41	44,70	1,773
1024	12	11,75	1,585
2048	4	3,09	0,000

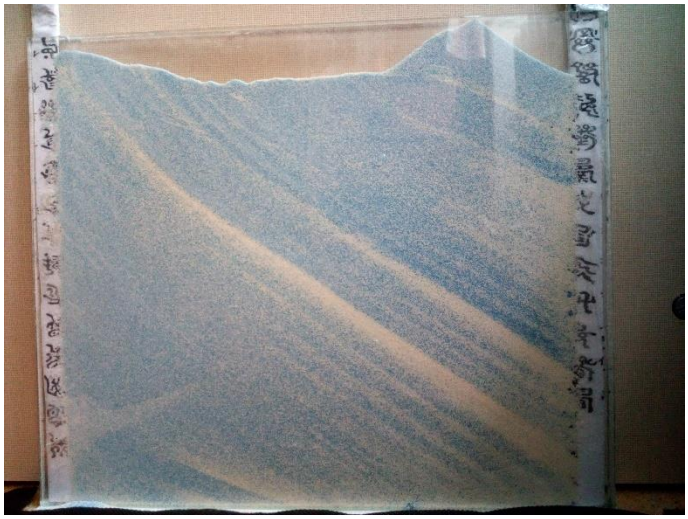
Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 41: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

HS buňka 2, 2. měření



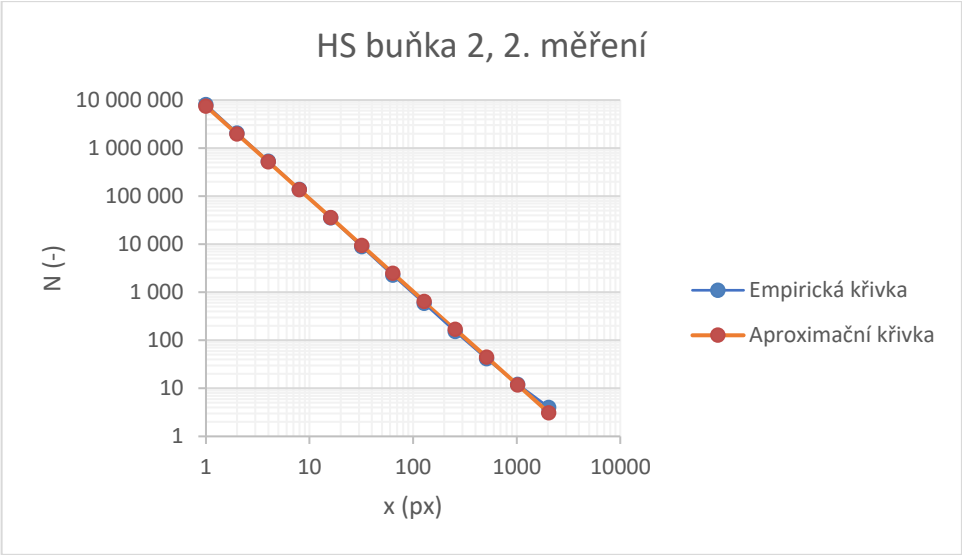
Obrázek 42: Měření HS buňky 2.2

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 13: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace.

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	6 581 408	6 078 146,30	1,944
2	1 710 773	1 624 644,74	1,928
4	449 672	434 255,84	1,937
8	117 451	116 073,46	1,955
16	30 300	31 025,60	1,968
32	7 746	8 292,92	1,938
64	2 021	2 216,64	1,888
128	546	592,49	1,903
256	146	158,37	1,904
512	39	42,33	1,826
1024	11	11,31	1,459
2048	4	3,02	0,000

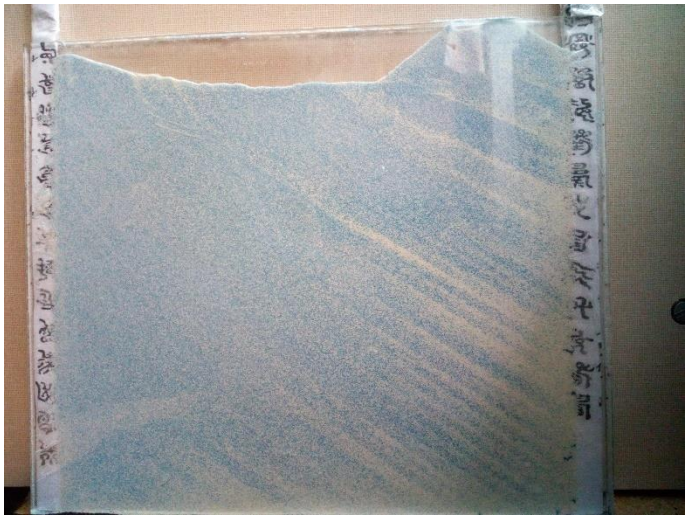
Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 43: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

HS buňka 2, 3. měření



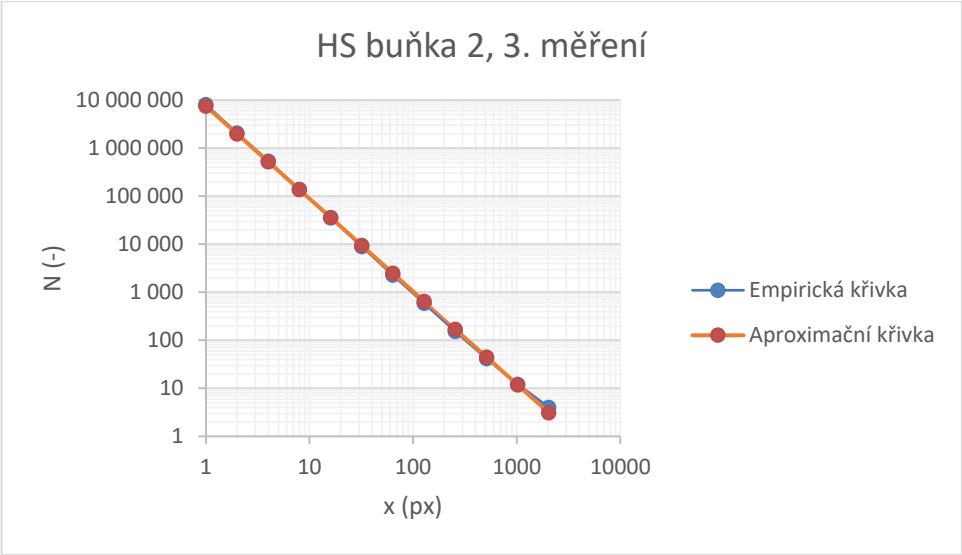
Obrázek 44: Měření HS buňky 2.3

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 14: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace.

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	7 614 744	6 862 440,04	1,968
2	1 946 864	1 817 318,07	1,966
4	498 299	481 263,95	1,974
8	126 827	127 448,79	1,972
16	32 334	33 751,11	1,970
32	8 253	8 938,00	1,949
64	2 137	2 366,97	1,930
128	561	626,82	1,884
256	152	166,00	1,890
512	41	43,96	1,773
1024	12	11,64	1,585
2048	4	3,08	0,000

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 45: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

HS buňka 2, 4. měření

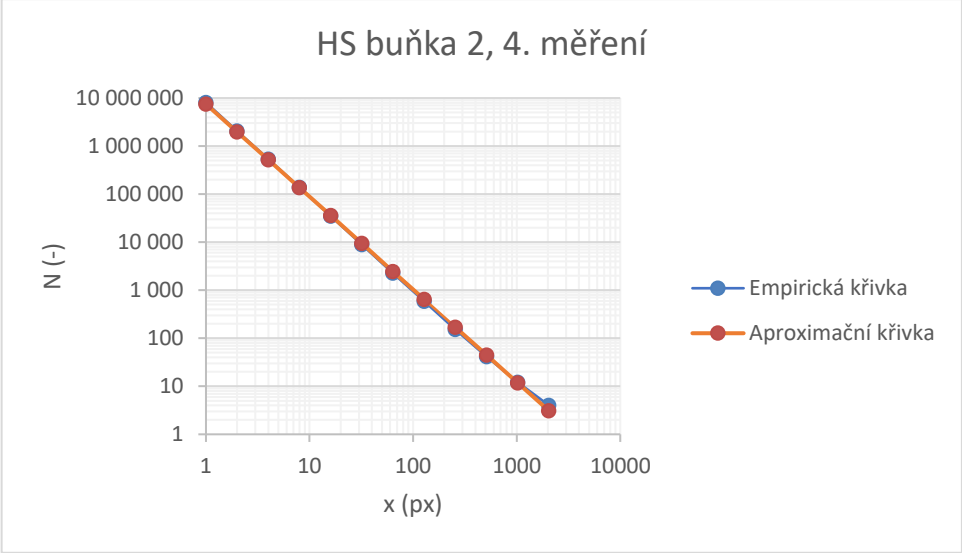
Obrázek 46: Měření HS buňky 2.4

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 15: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace.

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	7 165 742	6 392 729,85	1,966
2	1 834 497	1 702 744,37	1,964
4	470 371	453 536,82	1,971
8	120 015	120 802,42	1,968
16	30 681	32 176,50	1,970
32	7 834	8 570,42	1,942
64	2 039	2 282,78	1,920
128	539	608,03	1,855
256	149	161,95	1,897
512	40	43,14	1,737
1024	12	11,49	1,585
2048	4	3,06	0,000

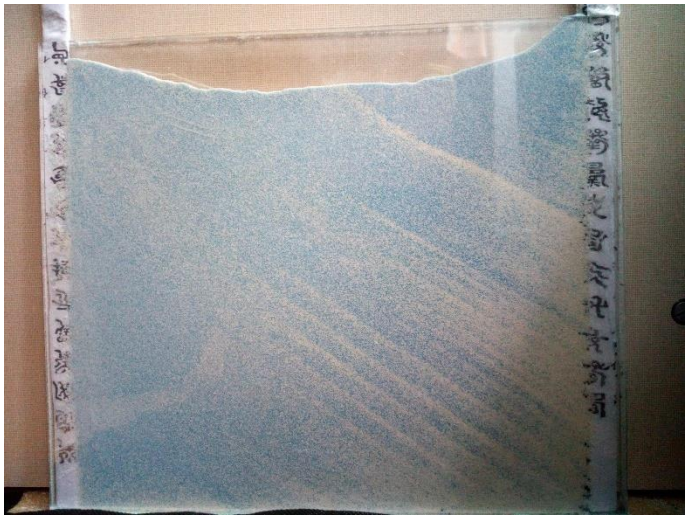
Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 47: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

HS buňka 2, 5. měření



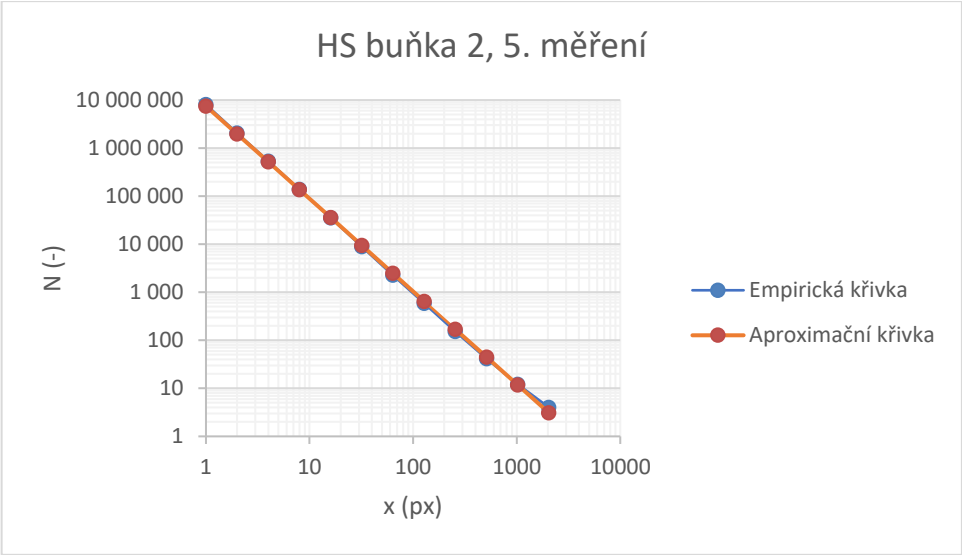
Obrázek 48: Měření HS buňky 2.5

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 16: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace.

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	6 826 129	6 223 779,82	1,949
2	1 768 537	1 659 338,89	1,939
4	461 121	442 400,86	1,957
8	118 738	117 949,70	1,972
16	30 271	31 446,89	1,972
32	7 716	8 384,14	1,949
64	1 999	2 235,32	1,891
128	539	595,96	1,865
256	148	158,89	1,888
512	40	42,36	1,863
1024	11	11,29	1,459
2048	4	3,01	0,000

Zdroj: vlastní zpracování



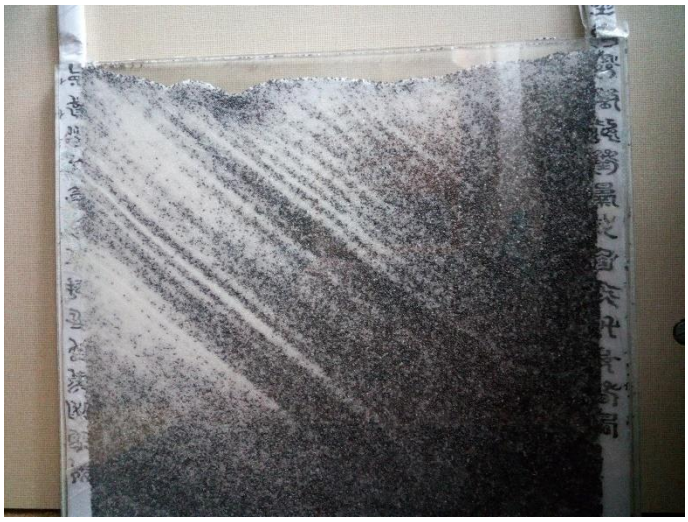
Obrázek 49: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

4.2.3 HS buňka 3

HS buňka 3 představuje stabilní konfiguraci, u které při sypání nedochází k dodatečným sesuvům v důsledku změny konfigurace zrn do stabilnějšího blokovaného stavu. Ve velké oblasti jsou rovnoměrně smíšeny obě složky granulátu. Tok zrn násypkou byl v tomto případě nejméně spojitý, granulát se často zablokoval v násypce.

HS buňka 3, 1. měření



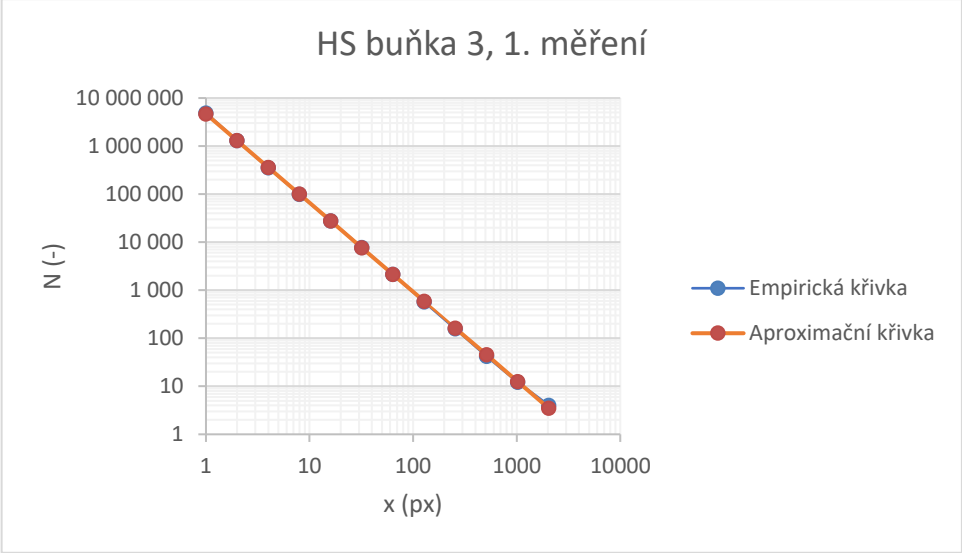
Obrázek 50: Měření HS buňky 3.1

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 17: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace.

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	4 850 281	4 435 003,55	1,937
2	1 266 914	1 233 563,60	1,902
4	339 053	343 106,64	1,875
8	92 445	95 432,59	1,846
16	25 721	26 543,87	1,837
32	7 200	7 382,98	1,846
64	2 003	2 053,52	1,881
128	544	571,17	1,811
256	155	158,87	1,884
512	42	44,19	1,807
1024	12	12,29	1,585
2048	4	3,42	0,000

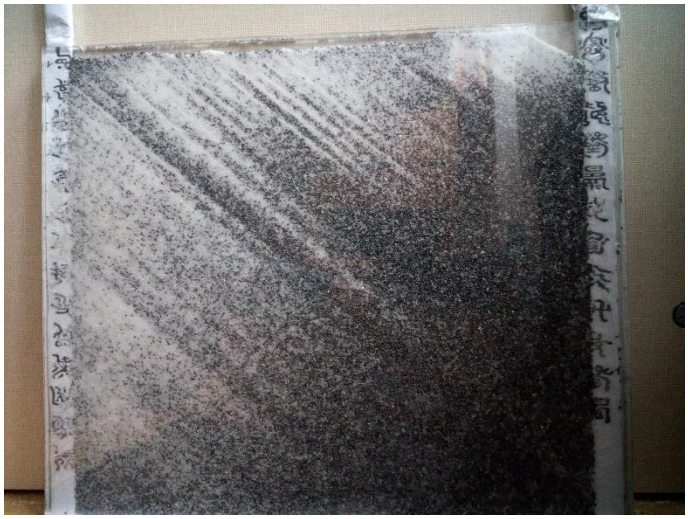
Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 51: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

HS buňka 3, 2. měření



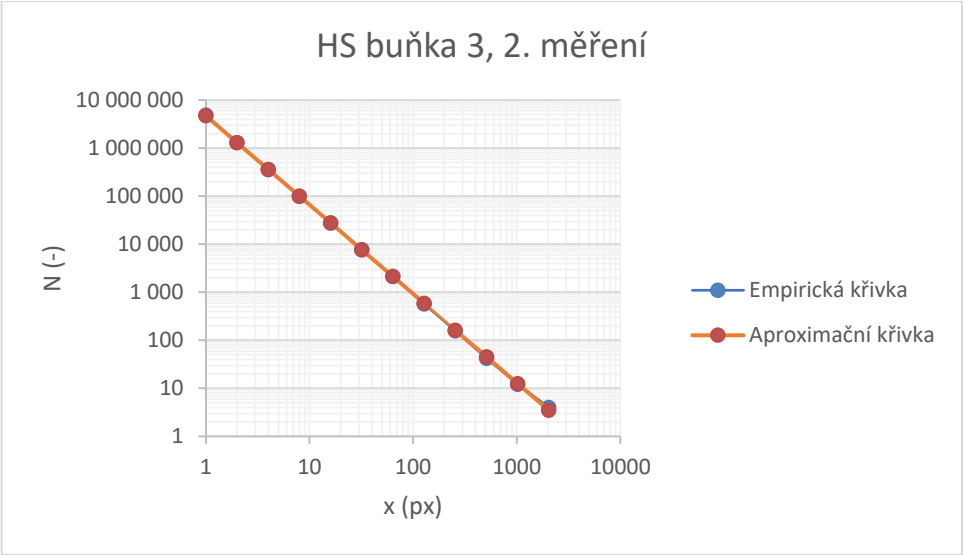
Obrázek 52: Měření HS buňky 3.2

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 18: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace.

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	5 242 786	4 940 315,93	1,933
2	1 373 328	1 361 164,83	1,897
4	368 754	375 030,61	1,869
8	100 944	103 329,12	1,842
16	28 151	28 469,43	1,824
32	7 949	7 843,95	1,859
64	2 191	2 161,18	1,922
128	578	595,45	1,899
256	155	164,06	1,884
512	42	45,20	1,807
1024	12	12,45	1,585
2048	4	3,43	0,000

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 53: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

HS buňka 3, 3. měření

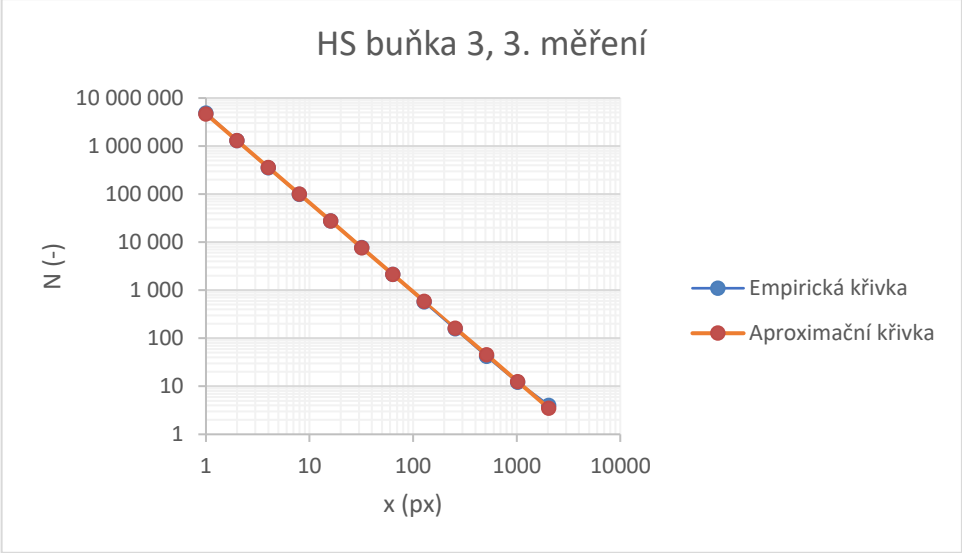
Obrázek 54: Měření HS buňky 3.3

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 19: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace.

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	5 376 636	5 101 374,38	1,925
2	1 416 230	1 399 199,16	1,887
4	382 979	383 770,75	1,865
8	105 115	105 260,21	1,860
16	28 950	28 870,65	1,861
32	7 968	7 918,61	1,907
64	2 124	2 171,91	1,936
128	555	595,71	1,850
256	154	163,39	1,875
512	42	44,81	1,807
1024	12	12,29	1,585
2048	4	3,37	0,000

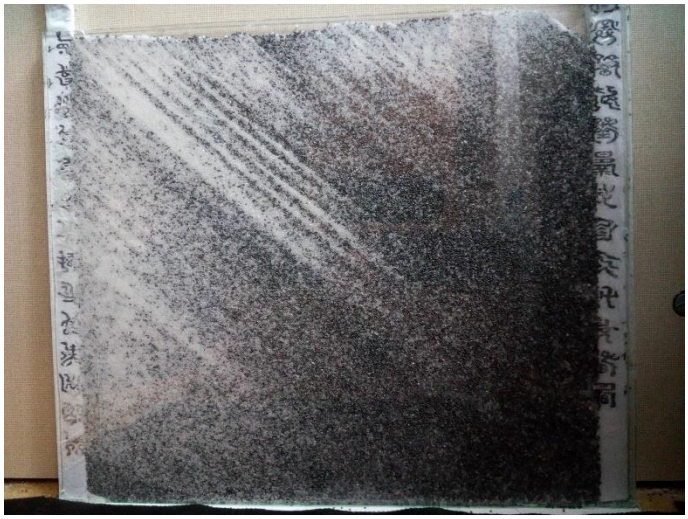
Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 55: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

HS buňka 3, 4. měření



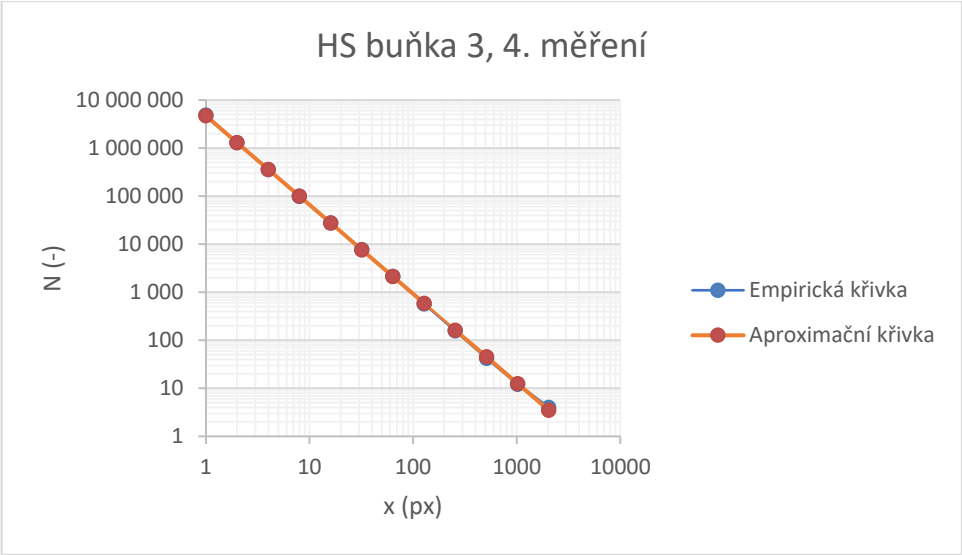
Obrázek 56: Měření HS buňky 3.4

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 20: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace.

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	5 408 654	5 120 368,19	1,932
2	1 417 424	1 405 777,66	1,896
4	380 814	385 950,92	1,872
8	104 052	105 961,36	1,850
16	28 855	29 091,29	1,835
32	8 090	7 986,90	1,873
64	2 208	2 192,77	1,914
128	586	602,02	1,909
256	156	165,28	1,893
512	42	45,38	1,807
1024	12	12,46	1,585
2048	4	3,42	0,000

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 57: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

HS buňka 3, 5. měření

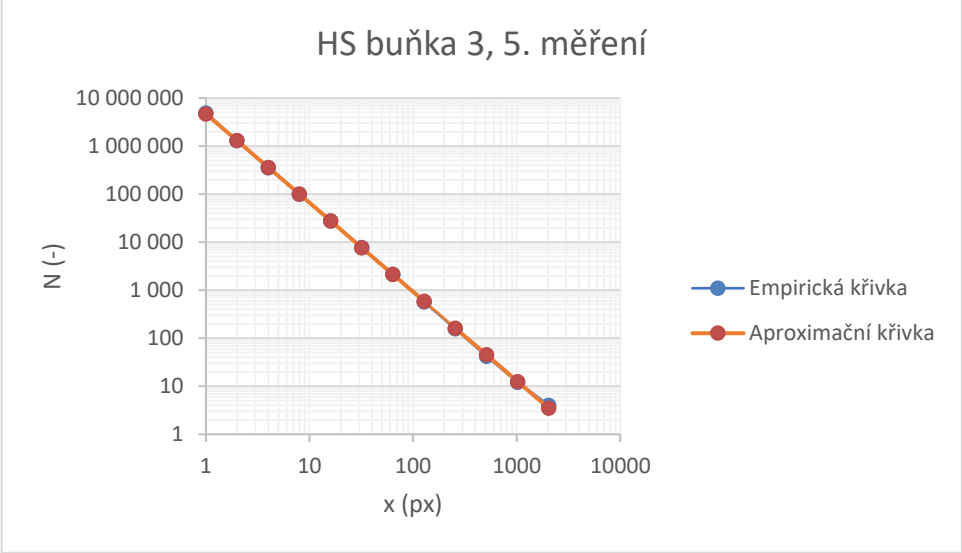
Obrázek 58: Měření HS buňky 3.5

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 21: Hodnoty získané metodou sčítání čtverců a jejich aproximace.

	Empirická křivka	Aproximační křivka	
x (pixel)	*N*	*N*	škálování
1	4 891 571	4 673 011,21	1,914
2	1 298 210	1 295 150,44	1,870
4	355 133	358 957,98	1,849
8	98 580	99 487,15	1,843
16	27 484	27 573,41	1,829
32	7 737	7 642,12	1,854
64	2 141	2 118,05	1,922
128	565	587,03	1,857
256	156	162,70	1,893
512	42	45,09	1,807
1024	12	12,50	1,585
2048	4	3,46	0,000

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 59: Proložení hodnot křivkou, určení fraktální dimenze.

Zdroj: vlastní zpracování

4.2.4 Porovnání fraktálních dimenzí HS buněk

Z měření určíme průměrné hodnoty a směrodatné odchylky fraktální dimenze *d* HS buněk 1-3.

Tabulka 22: Fraktální dimenze HS buňky 1

měření	Fraktální dimenze d	odchylka	kvadrát odchylky
1	1,81	-0,012	0,00013456
2	1,804	-0,006	3,136E-05
3	1,782	0,016	0,00026896
4	1,806	-0,008	5,776E-05
5	1,79	0,008	7,056E-05
průměr	1,798	součet	0,0005632
směrodatná odchylka			0,005

Zdroj: vlastní zpracování

Průměrná hodnota fraktální dimenze HS buňky 1 vychází

$$d_{HS1} = 1{,}798 \pm 0{,}005 \tag{19}$$

Tabulka 23: Fraktální dimenze HS buňky 2

měření	Fraktální dimenze d	odchylka	kvadrát odchylky
1	1,928	-0,015	0,000225
2	1,904	0,009	8,1E-05
3	1,917	-0,004	1,6E-05
4	1,909	0,004	1,6E-05
5	1,907	0,006	3,6E-05
průměr	1,913	součet	0,000374
směrodatná odchylka			0,004

Zdroj: vlastní zpracování

Průměrná hodnota fraktální dimenze HS buňky 2 vychází

$$d_{HS2} = 1{,}913 \pm 0{,}004 \tag{20}$$

Tabulka 24: Fraktální dimenze HS buňky 3

měření	Fraktální dimenze d	odchylka	kvadrát odchylky
1	1,846	0,0116	0,00013456
2	1,86	-0,0024	5,76E-06
3	1,866	-0,0084	7,056E-05
4	1,865	-0,0074	5,476E-05
5	1,851	0,0066	4,356E-05
průměr	1,858	součet	0,0003092
směrodatná odchylka			0,004

Zdroj: vlastní zpracování

Průměrná hodnota fraktální dimenze HS buňky 3 vychází

$$d_{HS3} = 1{,}858 \pm 0{,}004 \tag{21}$$

Pro hodnoty *prefaktoru tvaru c* vychází intervaly spolehlivosti

$$c_{HS1} = -0{,}063 \pm 0{,}004 \tag{22}$$

$$c_{HS2} = -0{,}040 \pm 0{,}003 \tag{23}$$

$$c_{HS3} = -0{,}026 \pm 0{,}003 \tag{24}$$

Kde dolní index označuje příslušnou HS buňku.

Analýza pomocí fraktální dimenze dokáže rozlišit různé výsledky pokusu. Limitující faktor jsou obrázky a jejich požadavky na komprimaci a kvalitu provedení, které omezují interpretaci fraktální dimenze zejména pro jemnější přechody v HS buňce.

Kvalitní analýzu *Fractalyse* provedl pro HS buňku 1 a HS buňku 3. Kvůli komprimaci obrázku HS buňky 2 bylo ztraceno dost dat o jejím vzoru kvůli světlé barvě obou složek a často se střídajícími úzkými pruhy s nejasnou hranicí. Kvalitu zpracování také snižuje odraz světla od skla.

Řešení by představovalo použití jiného programu, např. *Fraclac*. *Fraclac* má menší požadavky na úpravu a komprimaci obrázku, proto je vhodnější k analýze širší třídy HS buněk. Umožňuje také klasickou interpretaci fraktální dimenze jako charakteristiku složitosti útvaru a vyplněnosti prostoru pro širší škálu HS buněk. Další jeho výhodou je kvalitní dokumentace. Na druhou stranu, při jeho použití jsme se museli potýkat se značnými technickými problémy a nestabilitou programu, proto jsme od jeho použití museli upustit.

Pro další zkoumání HS buňky by byla zajímavá videoanalýza. Teoretická výzva (myšleno jako výzva pro teoretiky) by bylo předpovědět vzhled HS buňky nebo ji nasimulovat podle úhlu stability svahu jejích samostatných složek. Zajímavý by byl pokus o vytvoření programu, který by generoval HS buňku pomocí pravděpodobnosti získané z několika měření a šumu (např. Perlin noise).

Závěr

V práci jsme se zabývali vznikem HS buňky sypáním směsi dvousložkového granulátu. Analýzu a předpoklady měření jsme provedli na teoretických základech statické rovnováhy a tření.

Vyslovili jsme předpoklad, že tření zásadně ovlivňuje vznik HS buňky a ze čtyř látek (mák, mouka, balotina, cukr) jsme vytvořili tři typy HS buněk. U každé buňky byla zvolena jiná veličina, o které jsme předpokládali, že bude zásadně odlišovat velikost tření jedné složky granulátu od druhé.

Porovnali jsme tření mezi zrny granulátu ze sklonu svahu každé složky zvlášť a porovnali je se sklonem svahu HS buňky, tvořené z vybrané dvojice granulátů.
Provedli jsme opakované měření s jednoduchými pomůckami. Nastínili jsme vysvětlení vzhledu HS buňky a relativního oddělení obou složek směsi z procesu sypání a sesouvání. Proces sypání a sesouvání jsme zaznamenali. Videa jsou k dispozici na přiloženém CD.

Navrhli a provedli jsme analýzu měření pomocí fraktální dimenze. Ukázali jsme, že fraktální dimenze je vhodná ke kvalifikaci struktury v HS buňce a zhodnotili její limity.

Reference

[1] AHMED, Nafees. *Sand as media of Art: Physical simulation of granular materials* [online]. [cit. 2018-05-15]. Dostupné z: https://www.slideserve.com/chaela/sand-as-media-of-art

[2] BAULE, Adrian, Flaviano MORONE, Hans J. HERRMANN a Hernán A. MAKSE. *Edwards statistical mechanics for jammed granular matter. Reviews of Modern Physics* [online]. 2018, 90(1), - [cit. 2018-05-15]. DOI: 10.1103/RevModPhys.90.015006. ISSN 0034-6861. Dostupné z: https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.015006

[3] *Fraclac for ImageJ* [online]. [cit. 2018-05-15]. Dostupné z: https://imagej.nih.gov/ij/plugins/fraclac/FLHelp/Introduction.htm

[4] *Fractalyse. ThéMA* [online]. [cit. 2018-05-15]. Dostupné z: http://www.fractalyse.org/en-home.html

[5] FRAME, Michael. *Fractal Geometry* [online]. [cit. 2018-05-15]. Dostupné z: https://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/

[6] GINZEL. *Mikrokuličky – balotina*. Ginzel technické sklo [online]. [cit. 2018-05-15]. Dostupné z: ginzel.cz/sklenene-kulicky/technicke-kulicky/mikrokulicky-balotina/

[7] KUZNETSOV, Alexandr. *Step. KDEdu* [online]. [cit. 2018-05-16]. Dostupné z: https://edu.kde.org/step/

[8] MANDELBROT, Benoit B. *The fractal geometry of nature*. San Francisco: W.H. Freeman, c1982. ISBN 07-167-1186-9.

[9] MILLS, *A A. Mechanics of the sandglass. European Journal of Physics* [online]. 1996, 17(3) [cit. 2018-05-15]. DOI: https://doi.org/10.1088/0143-0807/17/3/001. Dostupné z: http://iopscience.iop.org/0143-0807/17/3/001

[10] Morkus Morava. *Objemové hmotnosti skladovaných a přepravovaných komodit v zemědělství a průmyslu* [online]. [cit. 2018-05-15]. Dostupné z: http://www.sila-nadrze.cz/objemove-hmotnosti.html

[11] *Physical Review E* [online]. 1996, 53(3) [cit. 2018-05-15]. ISSN 1063-651X. Dostupné z: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.53.2257

[12] PUTRA, Erwin a Handoko TANIN. *Medco Problem Experiment On Granular Material* [online]. [cit. 2018-05-15]. Dostupné z: http://www.wopho.org/file/upload/wophogranular.pdf

[13] SANDERSON, Grant. *Fractals are typically not self-similar* [online]. 26.1.2017 [cit. 2018-05-16]. Dostupné z: http://www.3blue1brown.com/videos/

[14] SANTAMARINA, J. C. a H. SHIN. *Frictional Phenomena in Granular Media. Batsheva de Rothschild Seminar on Shear Physics at the Mesoscale in Earthquake and Landslide Mechanics* [online]. [cit. 2018-05-15]. Dostupné z: https://egel.kaust.edu.sa/Pages/conf%20-%20Frictional%20Phenomena%20in%20Granular%20Media.aspx

[15] WEBER, Sigrid M. *Granulare Materie I. Schüttgut in Ruhe ein ungewöhnlicher Festkörper* [online]. [cit. 2018-05-15]. Dostupné z: http://www.physikdidaktik.uni-bayreuth.de/projekte/piko/granu1/node1.html