

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATIKY

Lucie Mozgová

Afinní prostory

Bakalářská práce

Olomouc 2016

Vedoucí práce: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jen prameny uvedené v seznamu literatury.

V Olomouci dne

.....

Lucie Mozgová

Poděkování

Děkuji Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D. za odborné vedení bakalářské práce, konzultace a poskytování cenných rad k práci.

Obsah

Úvod	5
1. Afinní prostory	6
1.1 Definice afinního prostoru	6
1.2 Aritmetický a geometrický model afinního prostoru	11
1.3 Souřadnicový systém afinního prostoru	12
2. Podprostory afinního prostoru	13
2.1 Definice podprostoru afinního prostoru	13
2.2 Parametrické vyjádření podprostoru	14
2.3 Neparametrické vyjádření podprostoru	15
2.4 Příklady	16
3. Vzájemná poloha podprostorů afinního prostoru	22
3.1 Vlastnosti vzájemné polohy podprostorů afinního prostoru	22
3.2 Průnik a spojení podprostorů afinního prostoru	23
3.3 Příklady	32
4. Dělicí poměr	37
4.1 Definování dělicího poměru	37
4.2 Příklady	38
5. Afinní zobrazení	41
5.1 Definování afinního zobrazení	41
5.2 Rovnice afinního zobrazení	42
5.3 Příklady	44
Závěr	47
Seznam použité literatury	48
Seznam obrázků	49

Úvod

V této bakalářské práci se budu zabývat afinním prostorem. S tímto tématem jsem se setkala v rámci předmětu geometrie na vysoké škole, které se mi líbilo.

Bakalářská práce je rozdělena do pěti kapitol.

V první kapitole bakalářské práce popíšeme afinní prostor, jeho vlastnosti a souřadnicový systém afinního prostoru.

Ve druhé kapitole pak budou popsány podprostory afinního prostoru spolu s jejich parametrickým a neparametrickým vyjádřením.

Ve třetí kapitole se podíváme na vzájemnou polohu podprostorů afinního prostoru a průniku a spojení podprostorů afinního prostoru.

Další kapitola se zabývá dělicím poměr, který je důležitý pro definování afinního zobrazení.

V páté a zároveň poslední kapitole bude rozebíráno afinní zobrazení a následně také analytické vyjádření afinního zobrazení.

Cílem mé bakalářské práce však není jen osvětlení problematiky za pomoci teorie, ale také její vysvětlení na některých mnou vybraných příkladech.

V každé kapitole se také setkáme s příklady, které mají pomoci k procvičení dané tematiky.

Bakalářská práce je doplněna mimo jiné obrázky, které byly vytvořeny v programu GeoGebra. Tento program je volně dostupný pro nekomerční využití.

1. Afinní prostory

V afinním prostoru se setkáváme s body, vektory a se zobrazením, které přiřazuje každým dvěma bodům jednoznačně vektor. Platí zde dvě vlastnosti:

I. Jsou-li X, Y, Z libovolné body, pak sečteme-li vektor určený dvojicí (X, Y) s vektorem určeným dvojicí (Y, Z) , dostáváme vektor určený dvojicí (X, Z) .

II. Zvolíme-li pevně počátek P , pak přiřadíme-li každému bodu X vektor s počátkem P a koncovým bodem X , dostáváme vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech bodů na množinu všech vektorů. (srov. Sekanina a kol., 1986, str. 18)

1.1 Definice afinního prostoru

Definice afinního prostoru podle Jukla:

Definice 1.1

Mějme danu neprázdnou množinu $\mathbf{A}$, n -rozměrný vektorový prostor $\mathbf{V}$ nad tělesem T a zobrazení $f: \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{V}$ s následujícími vlastnostmi:

$$1. \forall X, Y, Z \in \mathbf{A}: \quad f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z),$$

$$2. \exists P \in \mathbf{A} \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V} \exists ! X \in \mathbf{A}: \quad f(P, X) = \mathbf{x}.$$

Pak se uspořádaná trojice $A_n = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$ nazývá *n -rozměrný afinní prostor nad tělesem T* .

Množina $\mathbf{A}$ se nazývá *nosič afinního prostoru A_n* a její prvky se nazývají *body afinního prostoru A_n* . Vektorový prostor $\mathbf{V}$ se nazývá *zaměření afinního prostoru A_n* a jeho prvky *vektory afinního prostoru A_n* .

Uspořádaná dvojice bodů, která je vzorem jistého vektoru $\mathbf{v}$ zobrazení f se nazývá *umístěním tohoto vektoru*. (srov. Jukl, str. 13)

Definice afinního prostoru podle Kopeckého a Dofkové:

Definice 1.2

Mějme danu neprázdnou množinu A , vektorový prostor $\mathbf{V}_n$ nad tělesem reálných čísel $\mathbf{R}$ a zobrazení množiny $A \times \mathbf{V}_n$ do množiny A , které každé uspořádané dvojici $\langle M, \mathbf{u} \rangle \in A \times \mathbf{V}_n$ jednoznačně přiřazuje prvek $M + \mathbf{u} \in A$ a má tyto vlastnosti:

(AP1) $M + \mathbf{o} = M$ pro každý prvek $M \in A$,

(AP2) $M + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (M + \mathbf{u}) + \mathbf{v}$ pro každý prvek $M \in A$ a pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$.

(AP3) Ke každým dvěma prvkům $M, N \in A$ existuje jediný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ tak, že $M + \mathbf{u} = N$.

Za těchto podmínek nazveme uspořádanou dvojici $A_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$ (reálným) afinním n -dimenzionálním prostorem, množina A je jeho nositelka a její prvky nazveme body. $\mathbf{V}_n$ je zaměřením prostoru A_n . Podmínka (AP3) definuje zobrazení $A \times A \rightarrow \mathbf{V}_n$, které každé uspořádané dvojici bodů $\langle M, N \rangle$ jednoznačně přiřazuje vektor $\mathbf{u} = N - M$ (popř. $\mathbf{u} = \overrightarrow{MN}$). Bod M nazveme počátečním bodem vektoru $\mathbf{u}$, bod N jeho koncovým bodem.

(Kopecký, Dofková, str. 52)

Označení 1.1

Body afinního prostoru budeme značit velkými latinskými písmeny $B, C, X, Z, \dots$, vektory afinního prostoru pak malými tučnými písmeny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{e}, \dots$, skaláry z tělesa T pouze obyčejnými latinskými písmeny $g, t, a, \dots$ (srov. Jukl, str. 13)

Definice 1.3

Buď $A_n = (A, \mathbf{V}, f)$ afinní prostor.

1. Pro libovolnou uspořádanou dvojici bodů $X, Y \in A$ nazýváme vektor $f(X, Y)$ rozdílem bodů X a Y a značíme jej $Y - X$.

Afinní prostor A_n budeme také značit $A_n = (A, \mathbf{V}, -)$.

2. Pro libovolný bod $X \in A$ a libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ nazýváme bod Y , pro nějž platí $\mathbf{u} = f(X, Y)$, *součtem bodu X a vektoru $\mathbf{u}$* a značíme jej $X + \mathbf{u}$.

(srov. Jukl, str. 17)

Definice 1.4

Afinní prostor dimenze 1 budeme nazývat afinní přímka, afinní prostor dimenze 2 budeme nazývat afinní rovina. (Kubát, Trkovská, str. 21)

Pravidla v afinním prostoru A_n :

Věta 1.1

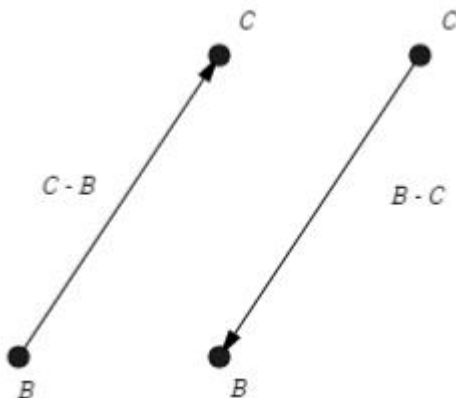
Nechť je dán afinní prostor A_n s operacemi „+“ (přičítání vektorů k bodům) a „-“ (rozdíl bodů). Potom pro každé body B, C, D, E prostoru A_n a každý vektor u z jeho zaměření platí:

1. $B + \mathbf{o} = B$ (zde značí nulový vektor ze zaměření prostoru A_n),
2. $C - B = -(B - C)$,
3. $(B + \mathbf{u}) - C = (B - C) + \mathbf{u}$,
4. $B - (C + \mathbf{u}) = (B - C) - \mathbf{u}$,
5. $(B - C) + (C - D) = B - D$,
6. $B + (C - D) = C + (B - D)$,
7. $(B - C) + (D - E) = (B - E) + (D - C)$,
8. $B - C = D - E \Leftrightarrow B - D = C - E$.

Důkaz.

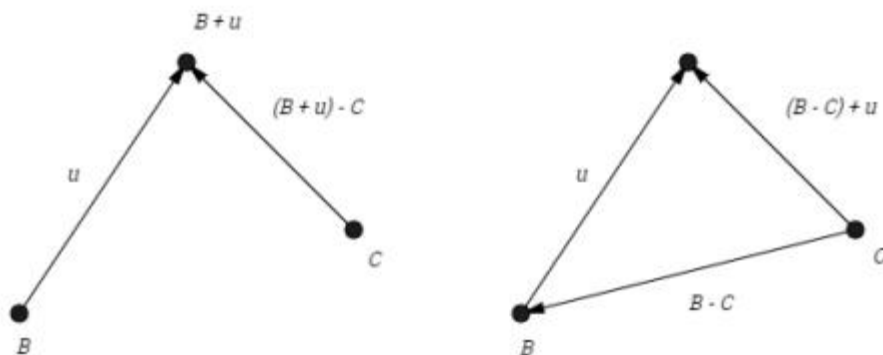
ad 1. Zvolme pevně bod B . Potom existuje jediný vektor $\mathbf{v}$ tak, že $B = B + \mathbf{v}$. Proto $B + \mathbf{o} = (B + \mathbf{v}) + \mathbf{o} = B + (\mathbf{v} + \mathbf{o}) = B + \mathbf{v} = B$.

ad. 2. Označme $C - B = \mathbf{u}$. Platí tedy $C = B + \mathbf{u}$. K oběma stranám rovnosti přičteme vektor $(-\mathbf{u})$. Dostaneme $C + (-\mathbf{u}) = (B + \mathbf{u}) + (-\mathbf{u})$. Po úpravě vyjde $B = C - \mathbf{u}$, odečtením vektoru $\mathbf{u}$ je zde zkráceným zápisem pro přičtení opačného vektoru. Tedy $B - C = -\mathbf{u}$.



Obr. č. 1: $C - B = -(B - C)$

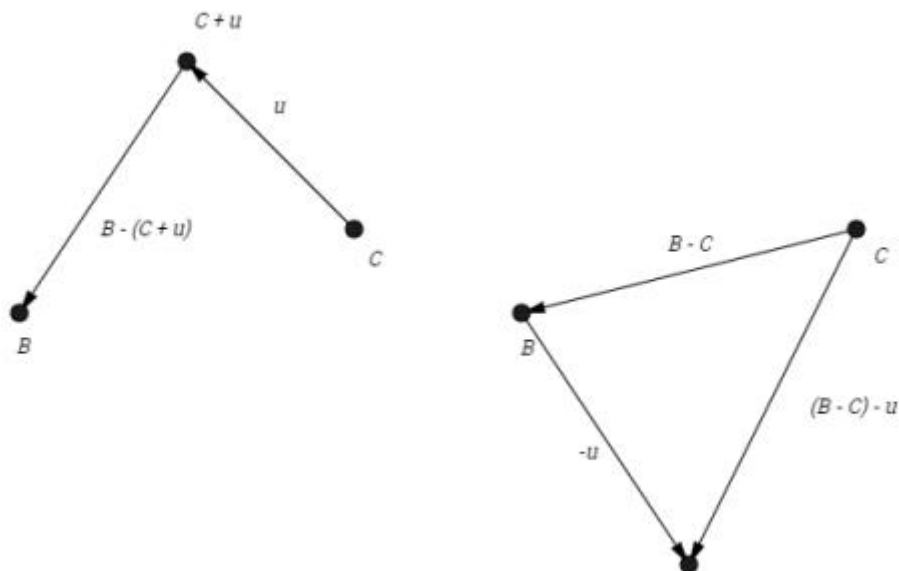
ad.3. Označme $(B + \mathbf{u}) - C = \mathbf{v}$. Potom $B + \mathbf{u} = C + \mathbf{v}$, přičtením vektoru $(-\mathbf{u})$ (tj. odečtením vektoru $\mathbf{u}$) získáme $B = C + (\mathbf{v} - \mathbf{u})$, tj. $B - C = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, $\mathbf{v} = (B - C) + \mathbf{u}$.



Obr. č. 2: $(B + \mathbf{u}) - C = (B - C) + \mathbf{u}$

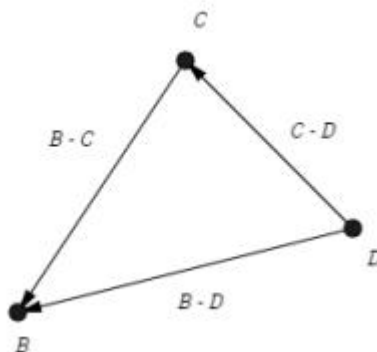
ad.4. Využijme platnost výše uvedených bodů 2. a 3. Zřejmě platí následující rovnosti:

$$B - (C + \mathbf{u}) = -[(C + \mathbf{u}) - B] = -[(C - B) + \mathbf{u}] = (B - C) - \mathbf{u}.$$



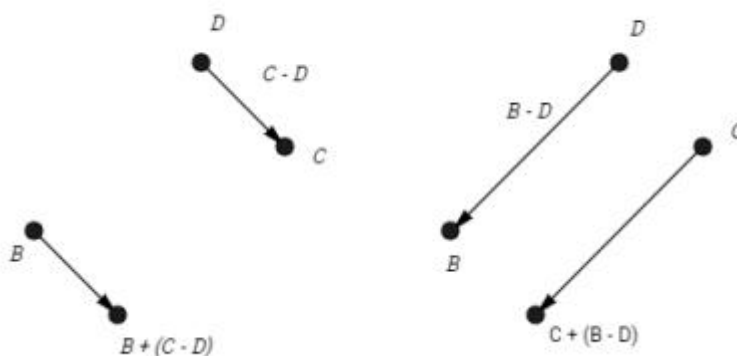
Obr. č. 3: $B - (C + \mathbf{u}) = (B - C) - \mathbf{u}$

ad.5. Označíme $B - C = \mathbf{u}$, $C - D = \mathbf{v}$. Potom $B = C + \mathbf{u}$, $C = D + \mathbf{v}$. Tedy $B = (D + \mathbf{v}) + \mathbf{u} = D + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$, odkud $B - D = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.



Obr. č. 4: $(B - C) + (C - D) = B - D$

ad.6. Využijeme platnost výše uvedeného bodu 5. Postupně získáme rovnosti:
 $[B + (C - D)] + (D - B) = B + [(C - D) + (D - B)] = B + (C - B) = C$.
 Tedy $B + (C - D) = C - (D - B) = C + (B - D)$.



Obr. č. 5: $B + (C - D) = C + (B - D)$

ad.7. S využitím bodu 5. a 2. a vlastností sčítání vektorů získáme
 $(B - C) + (D - E) = (B - C) + [(C - E) + (E - C)] + (D - E) = (B - E) + (D - C)$.

ad.8. Zřejmě $(B - C) + (E - D) = \mathbf{0}$. K oběma stranám přičteme vektor $C - E$. Po zřejmých úpravách s využitím bodu 5. získáme rovnost $B - D = C - E$.

(srov. Kubát, Trkovská, str. 22-23)

Příklad 1.1

Nechť je dán $A_n = \langle \mathbf{A}, \mathbf{V}_n \rangle$ a v něm body B, C, D a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Rozhodněte, zda výsledkem výrazu je bod nebo vektor:

a) $A + (B - C)$

b) $(A + \mathbf{u}) - (B + \mathbf{v})$

Řešení

a) Upravíme závorku, kde rozdíl dvou bodů je vektor. Výsledkem $A + (B - C)$ je bod.

b) Upravíme závorky, kde výsledkem je bod. Následným upravením rozdílem dvou bodů je výsledek vektor.

1.2 Aritmetický a geometrický model afinního prostoru

a) Geometrický model A_3

Jde o trojrozměrný prostor založený na pojmech bod, přímka, rovina,.... $\mathbf{A}$ je množina bodů v trojrozměrném prostoru, $\mathbf{V}_3$ je množina volných vektorů, tj. množina rovnoběžných, souhlasně orientovaných a stejně velikých orientovaných úseček. Zobrazení f přiřazuje uspořádané dvojici bodů (X, Y) orientovanou úsečku $\overrightarrow{XY}$, určující vázaný vektor.

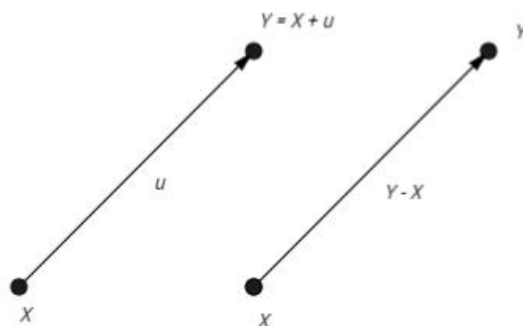
b) Aritmetický model $A_n^R = (\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n, -)$ afinního prostoru

Prvky množiny $\mathbf{A}$ (aritmetické body) jsou uspořádané n -tice reálných čísel $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, aritmetické vektory z $\mathbf{V}_n$ jsou uspořádané n -tice reálných čísel $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{R}^n$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}^n$. Zobrazení “-“ přiřazuje bodům $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbf{A}$, $[y_1, y_2, \dots, y_n] \in \mathbf{A}$, vektor $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$.

Je-li $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ bod, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ vektor aritmetického modelu, potom sčítání bodu a vektoru je $P + \mathbf{u} = [p_1 + u_1, p_2 + u_2, \dots, p_n + u_n]$

(srov. Pecina, Přívratská, str. 17)

Na následujícím obrázku můžeme vidět model. Na prvním jsme umístili vektor do daného bodu a dostali jsme jednoznačně určený bod. Na druhém příkladu dvou bodům je jednoznačně určen vektor.



Obr. č. 6: model

1.3 Souřadnicový systém afinního prostoru

Definice 1.5

Je-li $A_n = \langle \mathbf{A}, \mathbf{V}_n \rangle$ afinní prostor, $P \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbf{V}_n$ lineárně nezávislý systém vektorů, nazveme uspořádanou $(n+1)$ -tici $\langle P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ souřadnicovým systémem v prostoru A_n . Je-li $X \in \mathbf{A}$, nazveme vektor $X - P$ polohovým vektorem bodu X v daném souřadnicovém systému. Je-li

$$X - P = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i, \quad \text{čili} \quad X = P + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i,$$

nazveme uspořádanou n -tici reálných čísel $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ souřadnicemi bodu X v daném souřadnicovém systému. (Kopecký, Dofková, str. 63)

2. Podprostory afinního prostoru

2.1 Definice podprostoru afinního prostoru

Definice 2.1

Budiž $A_n = \langle \mathbf{A}, \mathbf{V}_n \rangle$ afinní prostor, $\mathbf{B}$ neprázdná podmnožina množiny $\mathbf{A}$, $\mathbf{V}_k$ podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$. Je-li $B_k = \langle \mathbf{B}, \mathbf{V}_k \rangle$ afinním prostorem, řekneme, že B_k je podprostorem prostoru A_n .

B_k je zřejmě právě tehdy podprostorem prostoru A_n , patří-li vektor $N - M$ pro každé dva body $M, N \in \mathbf{B}$ do $\mathbf{V}_k$, nebo, patří-li bod $M + \mathbf{u}$ pro každý bod $M \in \mathbf{B}$ a každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_k$ do množiny $\mathbf{B}$. (Kopecký, Dofková, str. 69)

Definice 2.2

Podprostor afinního prostoru A_n dimenze 1, resp. 2, resp. $n - 1$, nazýváme *přímka*, resp. *rovina*, resp. *nadrovina* prostoru A_n . (Sekanina a kol., 1986, str. 29)

Definice 2.3

Jestliže $B_k = \{B + \mathbf{v}; \mathbf{v} \in \mathbf{V}_k\}$, budeme říkat, že podprostor B_k je určen svým bodem B a zaměřením $\mathbf{V}_k$. V tomto případě podprostor B_k budeme stručněji značit $B_k = \{B, \mathbf{V}_k\}$.

(srov. Kubát, Trkovská, str. 29)

Definice 2.5

Nechť B_k, C_l jsou dva podprostory v A_n . Je-li $B_k \cap C_l \neq \emptyset$ (respektive $B_k \cap C_l = \emptyset$), pak říkáme, že podrostory B_k a C_l se protínají (respektive neprotínají).

Je-li bod $A \in B_k$, pak říkáme, že podrostor B_k prochází bodem A .

(srov. Horák, Janyška, str. 7)

2.2 Parametrické vyjádření podprostoru

Definice 2.5

Bud' B_k podprostor afinního prostoru A_n a V_k zaměření podprostoru B_k . Necht' $P \in B$ a necht' $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ je báze prostoru V_k . Zobrazení množiny $\mathbf{R}^k$ na podprostor B_k , které každé k -tici $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbf{R}^k$ přiřadí bod X daný vztahem

$$B_k = \{X \in A: X = P + t_1\mathbf{u}_1 + \dots + t_k\mathbf{u}_k, t_1, \dots, t_k \in \mathbf{R}^k\}$$

$$X = P + t_1\mathbf{u}_1 + \dots + t_k\mathbf{u}_k,$$

nazýváme *parametrické vyjádření* podprostoru B_k .

Máme-li danu přímku B_1 bodem P a nenulovým vektorem $\mathbf{u}$ ze zaměření přímky B_1 , dostáváme parametrické vyjádření přímky B_1 ve tvaru

$$X = P + t\mathbf{u}, t \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Pro rovinu B_2 obsahující bod P , pro niž vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ tvoří bázi jejího zaměření, dostáváme parametrické vyjádření:

$$X = P + t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{v}, t_1, t_2 \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Jestliže vyšetřujeme přímky a roviny v afinním prostoru A_3 (tj. $n = 3$) a máme-li v tomto prostoru zvolenou nějakou lineární soustavu souřadnic, můžeme vztahy (1) a (2) rozepsat pomocí souřadnic. Je-li $X = [x_1, x_2, x_3]$, $P = [p_1, p_2, p_3]$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, můžeme psát vztah (1) ve tvaru:

$$x_1 = p_1 + tu_1$$

$$x_2 = p_2 + tu_2$$

$$x_3 = p_3 + tu_3, t \in \mathbf{R}$$

a vztah (2) ve tvaru:

$$x_1 = p_1 + t_1u_1 + t_2v_1$$

$$x_2 = p_2 + t_1u_2 + t_2v_2$$

$$x_3 = p_3 + t_1u_3 + t_2v_3, t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$

(srov. Sekanina a kol., 1986, str. 30)

2.3 Neparametrické vyjádření podprostoru

Budiž dána soustava k nehomogenních lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem reálných čísel:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k, \end{aligned} \quad (3)$$

jehož matice i rozšířená matice mají hodnot h . Z lineární algebry je známo, že pro $k \leq n$ je množina všech řešení soustavy (3) afinní prostor dimenze $n - h$. Je-li totiž $M = [m_1, m_2, \dots, m_n]$ jedno řešení soustavy (3), $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ libovolné řešení soustavy

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

je $M + u$ další řešení soustavy (3). Pokud je systém rovnic (4) nezávislý, je množina všech řešení soustavy (3) afinní prostor B_{n-k} dimenze $n - k$. Systém rovnic (3) je tedy neparametrické vyjádření podprostoru B_{n-k} afinního prostoru A_n .

(Kopecký, Dofková, str. 71)

Platí:

Přímka p je v rovině A_2 vyjádřena tzv. obecnou rovnicí:

$$p: ax + by + c = 0,$$

v A_3 je vyjádřena soustavou dvou rovnic

$$\begin{aligned} p: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

rovina je v A_3 vyjádřena jednou obecnou rovnicí

$$\rho: ax + by + cz + d = 0,$$

nadrovina α je v A_n vyjádřena obecnou rovnicí

$$\alpha: a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a = 0.$$

Obecně platí. Je-li p počet lineárně nezávislých rovnic soustavy o n neznámých, k dimenze podprostoru, který je tou soustavou určen, pak platí $p = n - k$.

Je-li přímka p vyjádřena v A_3 rovnicemi (5), má její směrový vektor souřadnice

$$\mathbf{u} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right). \quad (\text{srov. Kopecký, Dofková, str.73})$$

2.4 Příklady

Příklad 2.1

V $A_2 = \langle \mathbb{R}^2, V_2 \rangle$ najděte parametrickou vyjádření přímky p určenou bodem $A = [3, 1]$ a směrovým vektorem $\mathbf{u} = (-1, 2)$.

Řešení

Dané hodnoty dosadíme do vztahu $X = P + t\mathbf{u}$.

$$[x, y] = [3, 1] + (-1, 2)$$

Vzniknou 2 rovnice s parametrem $t \in \mathbb{R}$, které jsou parametrickým vyjádřením přímky

$$x = 3 - t$$

$$y = 1 + 2t$$

Příklad 2.2

V $A_2 = \langle \mathbb{R}^2, V_2 \rangle$ najděte parametrické vyjádření přímky p určenou body $A = [4, 1]$ a $B = [1, 2]$.

Řešení

K vyjádření parametrické rovnice přímky p potřebujeme bod a směrový vektor. Směrový vektor vyjádříme pomocí rozdílu bodů $B - A$.

$$\mathbf{u} = B - A$$

$$\mathbf{u} = (1-4, 2-1)$$

$$\mathbf{u} = (-3, 1)$$

Dané hodnoty dosadíme do vztahu $X = P + t\mathbf{u}$.

$$x = 4 - 3t$$

$$y = 1 + t$$

Příklad 2.3

V $A_3 = \langle \mathbb{R}^3, V_3 \rangle$ najděte parametrické vyjádření přímky p určené bodem $A = [3, 1, -1]$ a směrovým vektorem $\mathbf{u} = (-1, 2, 0)$.

Řešení

Dané hodnoty dosadíme do vztahu $X = P + tu$.

$$[x, y, z] = [3, 1, -1] + (-1, 2, 0)$$

Vzniknou 3 rovnice s parametrem $t \in \mathbb{R}$, které jsou parametrickým vyjádřením přímky

$$x = 3 - t$$

$$y = 1 + 2t$$

$$z = -1$$

Příklad 2.4

V $A_3 = \langle \mathbb{R}^3, V_3 \rangle$ najděte parametrické vyjádření přímky p dané rovnicemi

$$x + y - z + 5 = 0$$

$$2x - y + 2z - 2 = 0$$

Řešení:

a)

$$x + y - z + 5 = 0$$

$$2x - y + 2z - 2 = 0$$

Soustavu rovnic sečteme.

$$3x + z + 3 = 0$$

$$3x = -z - 3$$

Dosadíme $z = t$; $t \in \mathbb{R}$

$$3x = -t - 3$$

$$x = -1 - \frac{t}{3}$$

Z první rovnice vyjádříme y . Dosadíme $z = t$ a $x = -1 - \frac{t}{3}$.

$$y = -x + z - 5$$

$$y = -(-1 - \frac{t}{3}) + t - 5$$

$$y = -4 + \frac{4t}{3}$$

Parametrické vyjádření přímky p má tvar:

$$x = -1 - \frac{t}{3}$$

$$y = -4 + \frac{4t}{3}$$

$$z = t$$

b) směrový vektor

$$\mathbf{u} = \left(\left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array} \right| \right)$$

$$\mathbf{u} = (1, -4, -3)$$

Bod $P = [p_1, p_2, p_3]$ dosadíme za x, y, z :

$$p_1 + p_2 - p_3 + 5 = 0$$

$$2p_1 - p_2 + 2p_3 - 2 = 0$$

Zvolíme $p_1 = 0$.

$$p_2 - p_3 + 5 = 0$$

$$(-p_2) + 2p_3 - 2 = 0$$

Soustavu rovnic sečteme.

$$p_3 = -3$$

$$p_2 - (-3) + 5 = 0$$

$$p_2 = -8$$

Parametrické vyjádření přímky p má tvar:

$$x = t$$

$$y = -8 - 4t$$

$$z = -3 - 3t$$

Směrový vektor $\mathbf{u} = (1, -4, -3)$ je lineárně závislý se směrovým vektorem $\mathbf{u} = (-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1)$ z řešení za a).

Příklad 2.5

V $A_3 = \langle \mathbb{R}^3, V_3 \rangle$ najděte neparametrické vyjádření přímky p určené bodem $A = [3, -1, 2]$ a směrovým vektorem $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$.

Řešení

Vyjádříme si parametrické vyjádření přímky dosazením do vztahu $X = P + t\mathbf{u}$.

$$x = 3 + t$$

$$y = -1$$

$$z = 2 + t$$

Z první rovnice vyjádříme t .

$$t = x - 3$$

Dosadíme do 3 rovnice.

$$z = 2 + x - 3$$

$$z = -1 + x$$

Obecné vyjádření přímky p má tvar:

$$y + 1 = 0$$

$$x - z - 1 = 0$$

Příklad 2.6

V $A_3 = \langle \mathbb{R}^3, V_3 \rangle$ napište parametrické vyjádření roviny α určené body $A = [2, 0, 1]$, $B = [2, 3, 1]$ a $C = [1, -2, -1]$.

Řešení

Parametrické vyjádření roviny α je vyjádřeno vztahem $X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$.

Vyjádríme si vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} = (B - A)$$

$$\mathbf{u} = (2 - 2, 3 - 0, 1 - 1)$$

$$\mathbf{u} = (0, 3, 0)$$

$$\mathbf{v} = (C - A)$$

$$\mathbf{v} = (1 - 2, -2 - 0, -1 - 1)$$

$$\mathbf{v} = (-1, -2, -2)$$

Parametrické vyjádření roviny α má tvar:

$$x = 2 - s$$

$$y = 3t - 2s$$

$$z = 1 - 2s$$

Příklad 2.7

V $A_3 = \langle \mathbb{R}^3, V_3 \rangle$ napište neparametrické vyjádření roviny α určené body $A = [-1, 0, 2]$, $B = [1, 1, -1]$ a $C = [0, 0, 2]$.

Řešení

a)

Dané hodnoty dosadíme do rovnice tvaru $ax + by + cz + d = 0$.

$$A \in \alpha: -a + 2c + d = 0$$

$$B \in \alpha: a + b - c + d = 0$$

$$C \in \alpha: 2c + d = 0$$

Vyřešíme soustavu lineárních rovnic pro a, b, c, d :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{zvolíme } d = t$$

$$2c + t = 0$$

$$b + c + 2t = 0$$

$$-a + 2c + t = 0$$

$$d = t$$

$$c = \frac{-t}{2}$$

$$b + \frac{-t}{2} + 2t = 0$$

$$b = \frac{-3t}{2}$$

$$a = \frac{-2t}{2} + t$$

$$a = 0$$

Pro $t = 2$ má rovina α obecnou rovnici:

$$\alpha: -3y - z + 2 = 0$$

b) nalezení normálového vektoru

$$B - A = (2, 1, -3)$$

$$C - A = (-1, -1, 3)$$

$$\mathbf{n} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$\mathbf{n} = (0, -3, -1)$$

Dané hodnoty dosadíme do rovnice tvaru $ax + by + cz + d = 0$.

$$(-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-3) + (2) \cdot (-1) + d = 0$$

$$d = 2$$

Rovina α má neparametrické vyjádření:

$$\alpha: -3y - z + 2 = 0$$

Příklad 2.8

V A_3 je dána přímka $p = [A; v]$. Rozhodněte, zda na ní leží body B a C , je-li dáno:

$$A = [2, -1, 3], v = (1, 2, -3), B = [3, 1, 0], C = [6, -4, 2]$$

Řešení

Vyjádříme si parametrické vyjádření přímky p ve tvaru $X = A + tu$.

$$x = 2 + t$$

$$y = -1 + 2t$$

$$z = 3 - 3t$$

Dosadíme bod $B = [3, 1, 0]$ do rovnic.

$$3 = 2 + t$$

$$1 = -1 + 2t$$

$$0 = 3 - 3t$$

Z první rovnice je $t = 1$, to vyhovuje i rovnici $1 = -1 + 2t$, $0 = 3 - 3t$.

Bod B leží na přímce p .

Analogicky dosadíme bod $C = [6, -4, 2]$ do rovnic.

$$6 = 2 + t$$

$$-4 = -1 + 2t$$

$$2 = 3 - 3t$$

Z první rovnice je $t = 4$, to nevyhovuje druhé rovnici, kde $t = \frac{-3}{2}$, ani třetí rovnici, kde $t = \frac{1}{3}$.

Bod C neleží na přímce p .

3. Vzájemná poloha podprostorů afinního prostoru

3.1 Vlastnosti vzájemné polohy podprostorů afinního prostoru

Vzájemná poloha podprostorů afinního prostoru může být rovnoběžná, incidentní, mimoběžná, anebo různoběžná.

V následující odstavci předpokládáme, že B_k a C_l jsou dva dané podprostory afinního prostoru A_n a $A \in B_k, B \in C_l$.

Věta 3.1

Podprostory B_k a C_l mají neprázdný průnik, právě když existují vektory $\mathbf{u} \in V_k, \mathbf{v} \in V_l$ tak, že $A - B = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Důkaz

Tvrzení je zřejmé, neboť vztah $A - B = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ můžeme psát ve tvaru $A - \mathbf{u} = B + \mathbf{v}$. Je vidět, že platí-li tento vztah, leží bod $P = A - \mathbf{u} = B + \mathbf{v}$ v obou podprostorech. Leží-li obráceně bod P v obou podprostorech B_k, C_l , pak označíme-li $\mathbf{u} = A - P, \mathbf{v} = P - B$, dostáváme vztah $A - \mathbf{u} = P = B + \mathbf{v}$. (srov. Sekanina a kol., 1986, str. 31-32)

Přímka p je rovnoběžná s přímkou q , mají-li kolineární směrové vektory. V prostoru dimenze 3 je přímka p rovnoběžná s rovinou α , leží-li směrový vektor přímky p v zaměření roviny α . Rovina α je rovnoběžná s rovinou β v prostoru, mají-li roviny α a β totéž zaměření.

Definice 3.1

Buďte B_k, C_l afinní podprostory téhož prostoru A_n . Řekneme, že podprostor B_k je *rovnoběžný s podprostorem* C_l , což budeme značit $B_k \parallel C_l$, jestliže $V_k \subseteq V_l$.

(srov. Jukl, str. 44)

Definice 3.2

Buďte B_k, C_l afinní podprostory téhož prostoru A_n . Řekneme, že *podprostor* B_k *inciduje s podprostorem* C_l , jestliže $B_k \subseteq C_l$. Je-li B_k incidentní s C_l nebo C_l incidentní s B_k , řekneme, že podprostory B_k, C_l jsou *incidentní*.

(srov. Jukl, str. 45)

Definice 3.3

Bud'te B_k, C_l afinní podprostory téhož prostoru A_n . Řekneme, že *podprostory* B_k, C_l jsou *mimoběžné*, jestliže nejsou rovnoběžné a mají prázdný průnik. (srov. Jukl, str. 46)

Definice 3.4

Bud'te B_k, C_l afinní podprostory téhož prostoru A_n . Řekneme, že *podprostory* B_k, C_l jsou *různoběžné*, jestliže nejsou rovnoběžné a mají neprázdný průnik. (srov. Jukl, str. 46)

3.2 Průnik a spojení podprostorů afinního prostoru

Věta 3.3

a) Jsou-li B_k, C_l dva podprostory afinního prostoru A_n s neprázdným průnikem nositelek B, C , je $B_k \cap C_l = \langle B \cap C, \mathbf{V}_k \cap \mathbf{V}_l \rangle$ podprostorem prostoru A_n a platí: $\dim(B_k \cap C_l) = \dim(\mathbf{V}_k \cap \mathbf{V}_l)$.

b) Jsou-li B_k, C_l dva podprostory afinního prostoru A_n s prázdným průnikem nositelek B, C je $\dim(B_k \cap C_l) = 0$.

Důkaz

a) Je-li $X \in B \cap C$, $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_k \cap \mathbf{V}_l$, je zřejmě $X + \mathbf{u} \in B$ i $X + \mathbf{u} \in C$, takže $X + \mathbf{u} \in B \cap C$. Jsou-li $X, Y \in B \cap C$, je zřejmě $X - Y \in \mathbf{V}_k$ i $X - Y \in \mathbf{V}_l$.

b) Protože nositelka je prázdná množina, nemůže být dimenze číslo větší než nula.

(Kopecký, Dofková, str. 80)

Lineární obal množiny v afinním prostoru

Definice 3.5

Budiž M podmnožina množiny A . Lineárním obalem $[M]$ množiny M ($M \neq \emptyset$) v afinním prostoru A_n budeme rozumět podprostor prostoru A_n nejmenší dimenze, jehož nositelka obsahuje množinu M . Lineární obal množiny M v afinním prostoru je průnikem všech podprostorů prostoru A_n , které obsahují množinu M .

(Kopecký, Dofková, str. 81)

Spojení dvou afinních podprostorů

Definice 3.6

Spojení $B_k \vee C_l$ dvou podprostorů B_k, C_l afinního prostoru A_n je podprostor prostoru A_n , jehož nositelkou je nositelka lineárního obalu sjednocení nositelek obou prostorů.

(Kopecký, Dofková, str. 81)

Věta 3.4

Jsou-li $B_k = \langle B, \mathbf{V}_k \rangle$, $C_l = \langle C, \mathbf{V}_l \rangle$ dva podprostory $A_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$, pak:

(a) Je-li $B \cap C \neq \emptyset$, $M \in B \cap C$, je $B_k \vee C_l = \langle D, \mathbf{V} \rangle$, kde $D = M + (\mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_l)$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_l$ a $\dim(B_k \vee C_l) = \dim(\mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_l)$

(b) Je-li $B \cap C = \emptyset$, $M \in B$, $N \in C$, je $B_k \vee C_l = \langle E, \mathbf{W} \rangle$, kde $E = M + [(\mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_l) \cup (N - M)]$, $\mathbf{W} = [(\mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_l) \cup (N - M)]$ a $\dim(B_k \vee C_l) = \dim(\mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_l) + 1$

(Kopecký, Dofková, str. 81)

Věta 3.5

Jsou-li B_k, C_l dva různoběžné podprostory afinního prostoru A_n , platí:

$$\dim B_k + \dim C_l = \dim(B_k \cap C_l) + \dim(B_k \vee C_l). \quad (\text{Kopecký, Dofková, str. 82})$$

Věta 3.6

Dva disjunktní podprostory B_k, C_l afinního prostoru A_n jsou rovnoběžné nebo mimoběžné právě tehdy, je-li

$$\dim(B_k \vee C_l) = \dim(\mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_l) + 1. \quad (\text{Kopecký, Dofková, str. 82})$$

Vzájemná poloha dvou podprostorů afinního prostoru

V následujícím textu budeme používat toto označení:

$$\dim(\mathbf{V}_k \vee \mathbf{V}_l) = s$$

$$\dim(B_k \vee C_l) = s_a$$

$$\dim B_k = \dim \mathbf{V}_k = k$$

$$\dim(\mathbf{V}_k \cap \mathbf{V}_l) = p$$

$$\dim(B_k \cap C_l) = p_a$$

$$\dim C_l = \dim \mathbf{V}_l = l$$

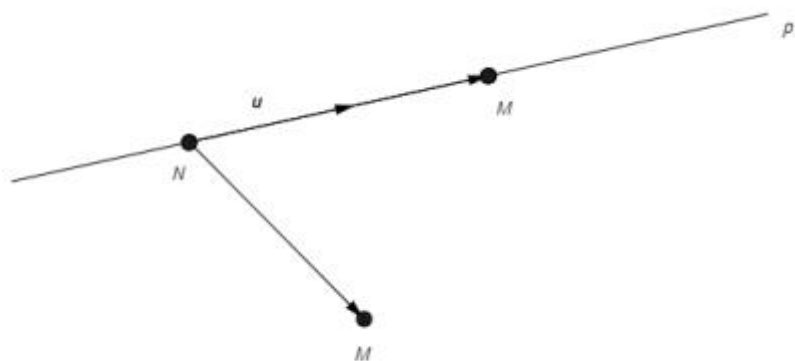
Víme, že:

1. $k + l = p + s$
2. $B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow p_a = p$
3. $B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow s_a = s$
4. $B \cap C = \emptyset \Rightarrow s_a = s + 1$
5. $B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow k + l = p_a + s_a$

Vzájemnou polohu dvou podprostorů afinního prostoru můžeme určit na základě lineární závislosti a nezávislosti bází vektorů a vektoru mezi nimi.

a) Vzájemná poloha bodu M a přímky p : $X = N + t\mathbf{u}$

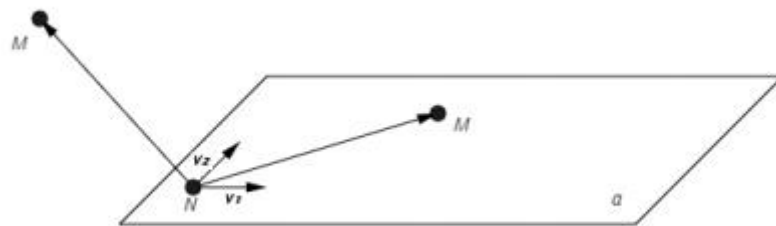
1. Je-li $s_a = 1$, tzn. $\dim[\{\mathbf{u}, M - N\}] = 1$, je $M \in p$
2. Je-li $s_a = 2$, (s je samozřejmě rovno 1), dostáváme $M \notin p$



Obr. č. 7: $M \in p, M \notin p$

b) Vzájemná poloha bodu M a roviny α : $X = N + s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2$

1. Je-li $s_a = 2$ (s je samozřejmě rovno 2), je $M \in \alpha$
2. Je-li $s_a = 3$ (s je samozřejmě rovno 2), je $M \notin \alpha$



Obr. č. 8: $M \in \alpha, M \notin \alpha$

c) Vzájemná poloha dvou přímek $p: X = M + tu, q: X = N + sv$

Označme přímku p jako prostor B_k , přímku q jako prostor C_l . Pak můžeme psát $V_k = [\{\mathbf{u}\}]$, $V_l = [\{\mathbf{v}\}]$, $V = V_k \vee V_l = [\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}]$, $W = [(V_k \vee V_l) \cup (N - M)] = [\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, N - M\}]$.

1. Je-li $s_a = 1 \wedge s = 1$, je podle:

$$\dim V_k + \dim V_l = \dim(V_k \vee V_l) + \dim(V_k \cap V_l): \quad (6)$$

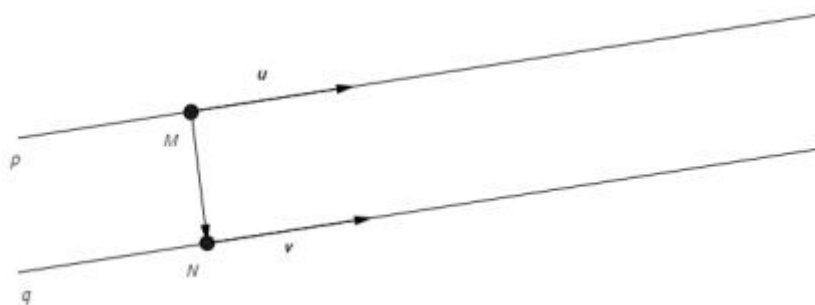
$1 + 1 = p + 1$, tedy $p = 1$; p, q splývají



Obr. č. 9: p, q splývají

$$h\left(\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}\right) = 1 \quad h\left(\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \overrightarrow{MN} \end{pmatrix}\right) = 1$$

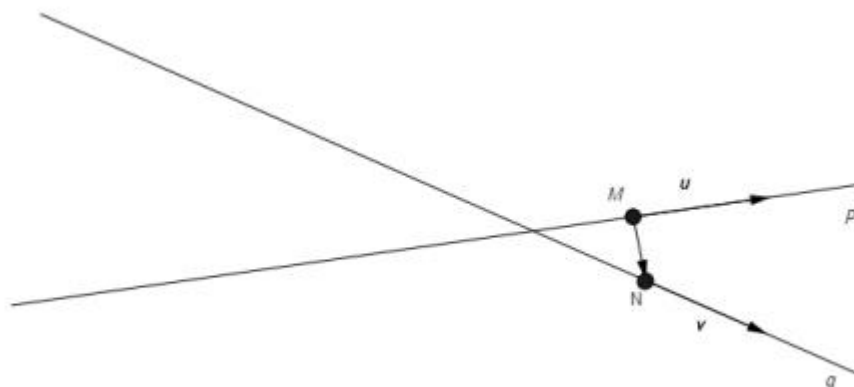
2. Je-li $s_a = 2 \wedge s = 1$, je podle (6): $1 + 1 = p + 1$, tedy $p = 1$, ale $B \cap C = \emptyset$; p, q jsou rovnoběžné, různé



Obr. č. 10: p, q jsou rovnoběžné, různé

$$h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{smallmatrix}\right) = 1 \quad h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \overrightarrow{MN} \end{smallmatrix}\right) = 2$$

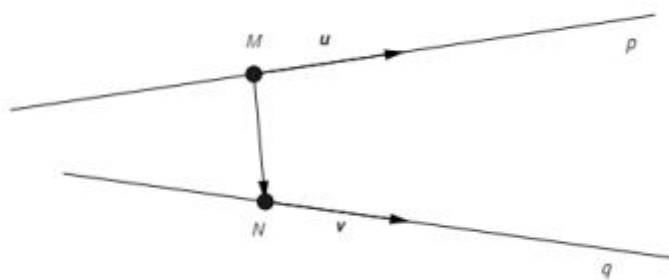
3. Je-li $s_a = 2 \wedge s = 2$, je podle (6): $1 + 1 = p + 2$, tedy $p = 0$; p je různoběžné s q



Obr. č. 11: p je různoběžné s q

$$h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{smallmatrix}\right) = 2 \quad h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \overrightarrow{MN} \end{smallmatrix}\right) = 2$$

4. Je-li $s_a = 3 \wedge s = 2$, je podle (6): $1 + 1 = p + 2$, tedy $p = 0$; p je mimoběžné s q



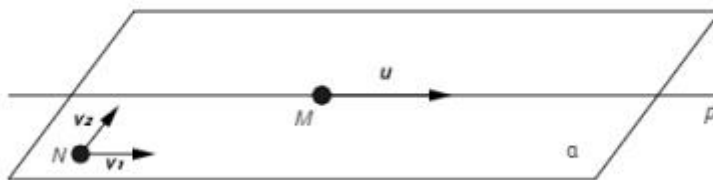
Obr. č. 12: p je mimoběžné s q

$$h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{smallmatrix}\right) = 2 \quad h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \overrightarrow{MN} \end{smallmatrix}\right) = 3$$

d) Vzájemná poloha přímky p : $X = M + t\mathbf{u}$ a roviny α : $X = N + s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2$

Označme $\mathbf{V} = [\{\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}]$, $\mathbf{W} = [\{\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, N - M\}]$.

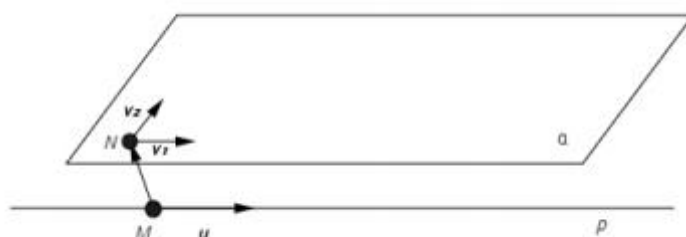
1. Je-li $s_a = 2 \wedge s = 2$, je podle(6): $1 + 2 = p + 2$, tedy $p = 1$; p leží v rovině α



Obr. č. 13: p leží v rovině α

$$h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{smallmatrix}\right) = 2 \quad h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \overrightarrow{MN} \end{smallmatrix}\right) = 2$$

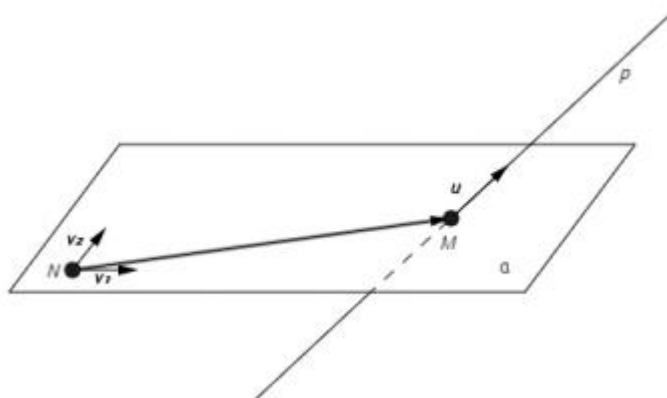
2. Je-li $s_a = 3 \wedge s = 2$, je podle (6): $1 + 2 = p + 2$, tedy $p = 1$; p je rovnoběžná s rovinou α



Obr. č. 14: p je rovnoběžná s rovinou α

$$h\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = 2 \quad h\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \overrightarrow{MN} \end{pmatrix} = 3$$

3. Je-li $s_a = 3 \wedge s = 3$, je podle (6): $1 + 2 = p + 3$, tedy $p = 0$; p protíná rovinu α



Obr. č. 15: p protíná rovinu α

$$h\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = 3 \quad h\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \overrightarrow{MN} \end{pmatrix} = 3$$

4. Je-li $s_a = 4 \wedge s = 3$, je podle (6): $1 + 2 = p + 3$, tedy $p = 0$; p je mimoběžná s rovinou α (tento případ v A_3 nastat nemůže, neboť dimenze žádného vektorového podprostoru zde nemůže být rovna 4. Ve čtyřrozměrném prostoru ten případ nastává, i když si ho nedovedeme představit.)

e) Vzájemná poloha dvou rovin $\alpha: X = N + s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2$, $\beta: X = M + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2$

Zde $\mathbf{V} = [\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}]$, $\mathbf{W} = [\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, N - M\}]$.

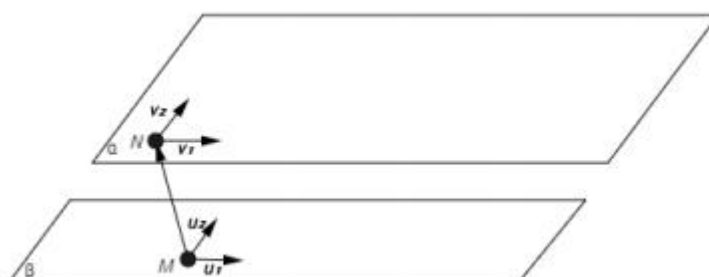
1. Je-li $s_a = 2 \wedge s = 2$, je podle (6): $2 + 2 = p + 2$, tedy $p = 2$; α je totožná s β



Obr. č. 16: α je totožná s β

$$h \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = 2 \quad h \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \overrightarrow{MN} \end{pmatrix} = 2$$

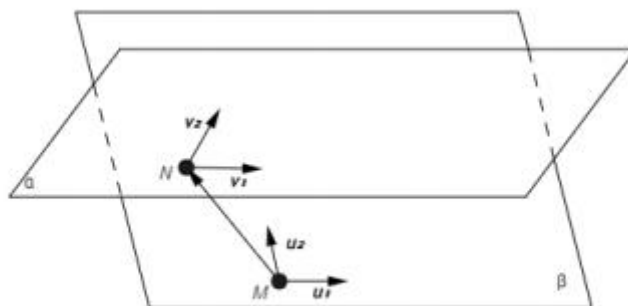
2. Je-li $s_a = 3 \wedge s = 2$, je podle (6): $2 + 2 = p + 2$, tedy $p = 2$; α je rovnoběžná s β



Obr. č. 17: α je rovnoběžná s β

$$h \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = 2 \quad h \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \overrightarrow{MN} \end{pmatrix} = 3$$

3. Je-li $s_a = 3 \wedge s = 3$, je podle (6): $2 + 2 = p + 3$, tedy $p = 1$; α je různoběžná s β



Obr. č. 18: α je různoběžná s β

$$h \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = 3 \quad h \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \overrightarrow{MN} \end{pmatrix} = 3$$

4. Je-li $s_a = 4 \wedge s = 3$, je podle (6): $2 + 2 = p + 3$, tedy $p = 1$; α je mimoběžná s β

5. Je-li $s_a = 4 \wedge s = 4$, je podle (6): $2 + 2 = p + 4$, tedy $p = 0$; α je různoběžná s β , ale protože $B \cap C \neq \emptyset$ a $p = 0$, protínají se obě roviny v jediném bodě

6. Je-li $s_a = 5 \wedge s = 4$, je podle (6): $2 + 2 = p + 4$, tedy $p = 0$; protože $B \cap C = \emptyset$, jsou obě roviny mimoběžné. Jejich zaměření mají (pro $p = 0$) společný vektor $\mathbf{o}$.

f) Vzájemná poloha dvou bodů

Jednobodová množina je nositelkou afinního prostoru dimenze nula. Bod zapíšeme takto: $M = M + t\mathbf{o}$, kde $\mathbf{o}$ je nulový vektor

1. Je-li $s_a = 0 \wedge s = 0$, je podle (6): $0 + 0 = p + 0$, tedy $p = 0$; body M a N jsou totožné

2. Je-li $s_a = 1 \wedge s = 0$, je podle (6): $0 + 0 = p + 0$; bod M je různý od bodu N .

(srov. Kopecký, Dofková, str. 83-85)

3.3 Příklady

Příklad 3.1

V afinním prostoru A_3 rozhodněte o vzájemné poloze přímek $p = \{A, \mathbf{u}\}$ a $q = \{B, \mathbf{v}\}$:

$p: A = [3, 5, -4], \mathbf{u} = (3, 2, -1), q: B = [11, 3, -2], \mathbf{v} = (1, 0, -2).$

Řešení

Příklad můžeme vypočítat pomocí hodnoty matice, anebo pomocí parametrického vyjádření přímky.

a) pomocí hodnoty matice

$$h\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} = 2$$

$$h\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 8 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & -11 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -69 \end{pmatrix} = 3$$

Hodnost matic vyšla 2 a 3 z toho plyne, že jsou mimoběžné.

b) pomocí parametrického vyjádření

Vyjádříme si parametrické vyjádření přímek p a q .

$$p: x = 3 + 3t$$

$$y = 5 + 2t$$

$$z = -4 - t$$

$$q: x = 11 + s$$

$$y = 3$$

$$z = -2 - 2s$$

Položíme $p = q$.

$$3 + 3t = 11 + s$$

$$5 + 2t = 3$$

$$-4 - t = -2 - 2s$$

Z druhé rovnice vypočítáme t a dosadíme do první a třetí rovnice.

$$5 + 2t = 3 \rightarrow t = -1$$

$$3 + 3(-1) = 11 + s \rightarrow s = -11$$

$$-4 - (-1) = -2 - 2s \rightarrow s = \frac{1}{2}$$

Výsledky s jsou odlišné, z toho plyne, že jsou mimoběžné.

Příklad 3.2

V afinním prostoru A_2 rozhodněte o vzájemné poloze přímek p a q , zadané parametrickým vyjádřením:

$$p: x = 1 + t$$

$$y = 2 - 3t$$

$$q: x = 2 - s$$

$$y = -3 + 2s$$

Řešení

$$h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$h\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Hodnost matic je 2 a 2 z toho plyne, že jsou různoběžné.

Najdeme průsečík přímek.

Položíme $p = q$.

$$1 + t = 2 - s$$

$$2 - 3t = -3 + 2s$$

$$2 + 2t = 4 - 2s$$

$$2 - 3t = -3 + 2s$$

$$4 - t = 1$$

$$t = 3$$

Dosadíme t do první rovnice.

$$1 + 3 = 2 - s$$

$$s = 2 - 4$$

$$s = -2$$

Do parametrického vyjádření přímky p dosadíme $t = 3$.

$$p: x = 1 + 3$$

$$y = 2 - 3(3)$$

Průsečík přímek p a q je $X = [4, -7]$.

Další možnost jak najít průsečík přímek je pomocí neparametrického vyjádření přímek.

$$p: x = 1 + t$$

$$y = 2 - 3t$$

Vyjádříme t z první rovnice a dosadíme do druhé rovnice.

$$t = x - 1$$

$$y = 2 - 3(x - 1)$$

$$y = 2 - 3x + 3$$

$$p: 3x + y - 5 = 0$$

$$q: x = 2 + s$$

$$y = -3 - 2s$$

Vyjádříme s z první rovnice a dosadíme do druhé rovnice.

$$s = 2 - x$$

$$y = -3 + 2(2 - x)$$

$$y = -3 + 4 - 2x$$

$$q: 2x + y - 1 = 0$$

Dále řešíme soustavu rovnic.

$$3x + y - 5 = 0$$

$$2x + y - 1 = 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

Dosadíme x do druhé rovnice.

$$2(4) + y - 1 = 0$$

$$y = -7$$

Průsečík přímek p a q je $X = [4, -7]$.

Příklad 3.3

Určete vzájemnou polohu přímky $p = \{A, \mathbf{u}\}$ a roviny $\alpha = \{B, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$: $p : A = [0, -2, 4]$,

$\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, $\alpha : B = [-1, -1, -3]$, $\mathbf{v} = (1, 3, 3)$, $\mathbf{w} = (-2, -2, 0)$.

Řešení

$$h\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 3$$

$$h\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 3$$

Hodnost matice je 3 a 3 z toho plyne, že jsou různoběžné.

Najdeme průsečík přímky a roviny.

Vyjádříme si parametrické vyjádření přímky p a roviny α .

$$p: x = r$$

$$y = -2 - r$$

$$z = 4 + 2r$$

$$\alpha: x = -1 + t - 2s$$

$$y = -1 + 3t - 2s$$

$$z = -3 + 3t$$

Položíme $p = \alpha$

$$r = -1 + t - 2s$$

$$-2 - r = -1 + 3t - 2s$$

$$4 + 2r = -3 + 3t$$

Vyřešíme soustavu tří rovnic.

$$r - t + 2s = -1$$

$$-r - 3t + 2s = 1$$

$$2r - 3t = -7$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \end{array}\right)$$

$$r - t + 2s = -1$$

$$-4t + 4s = 0$$

$$20s = 20$$

$$s = 1$$

$$t = 1$$

$$r = -2$$

Dosadíme do parametrického vyjádření přímky p .

$$x = -2$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

Průsečík přímky p a roviny α je $X = [-2, 0, 0]$.

Příklad 3.4

Určete vzájemnou polohu přímky $p = \{A, \mathbf{u}\}$ a roviny $\alpha = \{B, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$: $p : A = [1, 4, -3]$,

$\mathbf{u} = (-1, 3, -4)$, $\alpha : B = [3, 3, 0]$, $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{w} = (3, 1, 2)$.

Řešení

$$h \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$h \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 10 & -10 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Hodnost matice je 2 a 2 z toho plyne, že jsou incidentní.

Příklad 3.5

Určete vzájemnou polohu přímky $p = \{A, \mathbf{u}\}$ a roviny $\alpha = \{B, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$: $p : A = [1, 1, -2]$,

$\mathbf{u} = (-1, 3, 0)$, $\alpha : B = [2, 3, 1]$, $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{w} = (3, 1, -2)$.

Řešení

$$h \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$h \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 10 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Hodnost matice je 2 a 3 z toho plyne, že jsou rovnoběžné, neincidentní.

Příklad 3.6

Určete vzájemnou polohu rovin $\alpha = \{A, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ a roviny $\beta = \{B, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$: $\alpha : A = [3, 0, -1]$,

$\mathbf{u} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (2, 3, -3)$, $\beta : B = [3, 2, -1]$, $\mathbf{w} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{z} = (0, 1, -1)$.

Řešení

$$h \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$h \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{z} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Hodnost matice je 2 a 3 z toho plyne, že jsou rovnoběžné, neincidentní.

4. Dělicí poměr

Dělicí poměr tří bodů je důležitý pro definování afinního zobrazení, které budu vysvětleno v následující kapitole.

4.1 Definování dělicího poměru

Definice 4.1

Nechť A, B, C jsou tři navzájem různé body ležící na dané přímce p . Reálné číslo k splňující vztah

$$C - A = k(C - B)$$

nazýváme *dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B* .

(srov. Horák, Janyška, str. 46)

Definice 4.1 je vyslovena pro přímku jednorozměrného afinního prostoru. Stejným způsobem je dělicí poměr definován i pro tři navzájem různé body jakéhokoliv jednorozměrného podprostoru v afinním n -rozměrném prostoru A_n .

Z definice plyne, že bod C je koncovým bodem obou vektorů.

Vlastnosti dělicího poměru tří bodu na přímce

Vlastnosti vychází z definice 4.1

- a) $(ABC) = 1 \Leftrightarrow A = B$
- b) $(ABC) = 0 \Leftrightarrow A = C$
- c) pro $C = B$ není (ABC) definován
- d) $(ABC) < 0 \Leftrightarrow$ bod C leží na přímce p mezi body A, B
- e) $0 < (ABC) < 1 \Leftrightarrow$ bod A leží na přímce p mezi body B, C
- f) $(ABC) > 1 \Leftrightarrow$ bod B leží na přímce p mezi body A, C
- g) bod S přímky p je středem dvojice bodů A, B právě tehdy, je-li $(ABS) = -1$

(srov. Kopecký, Dofková, str. 93)

Věta 4.1

Nechť A, B, C jsou tři navzájem různé body na přímce a necht' $(ABC) = k$. Pak platí

- 1) $(ABC) = k$
- 2) $(BAC) = 1/k$
- 3) $(ACB) = 1 - k$
- 4) $(CAB) = 1/(1 - k)$
- 5) $(BCA) = (k-1)/k$
- 6) $(CBA) = k/(k-1)$

Důkaz

2) Podle předpokladu $(C - A) = k(C - B)$, odkud $(C - B) = (1/k)(C - A)$, a tedy $(BAC) = 1/k$

3) $(C - A) = (B - A) + (C - B) = k(C - B)$, tzn. $(B - A) = (k - 1)(C - B)$, odkud dostáváme

$(B - A) = (1 - k)(B - C)$, a tedy $(ACB) = 1 - k$.

4., 5., 6. plynou bezprostředně z 2. a 3.

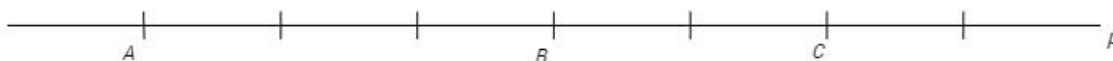
(srov. Horák, Janyška, str. 47)

4.2 Příklady

Příklad 4.1

Mějme dány body A, B, C ležící na přímce p . Na následujících obrázcích určete dělicí poměr:

a) (ABC)



Řešení:

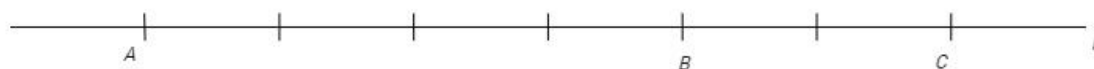
Dělicí poměr bodu C k bodům A, B zjistíme po dosazení:

$$(C - A) = k(C - B)$$

$$(-5) = k(-2)$$

$$k = 5/2$$

b) (ACB)



Řešení:

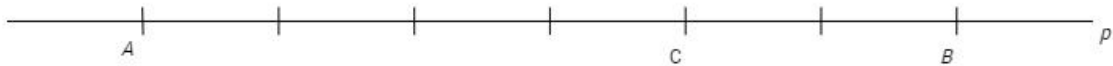
Dělicí poměr bodu B k bodům A, C zjistíme po dosazení:

$$(B - A) = k(B - A)$$

$$(-4) = k(2)$$

$$k = -2$$

c) (ACB)



Řešení:

Dělicí poměr bodu B k bodům A, C zjistíme po dosazení:

$$(B - A) = k(B - C)$$

$$(-6) = k(-2)$$

$$k = 3$$

Příklad 4.2

Mějme dány body A, B ležící na přímce p . Sestrojte bod C , tak aby platilo:

a) $(ABC) = 3$

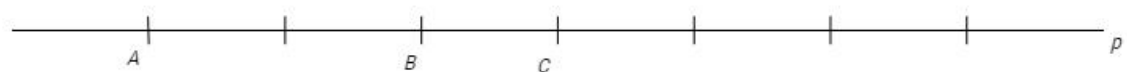
Řešení:

Bod C , zjistíme tak, že dosadíme do vztahu:

$$(C - A) = k(C - B)$$

$$(C - A) = 3(C - B)$$

Víme, že $k = 3$, tzv. je to číslo kladné, $k > 1$, a proto bod B bude ležet na přímce p mezi body A, C .



b) $(ABC) = -2/5$

Řešení:

Bod C , zjistíme tak, že dosadíme do vztahu:

$$(C - A) = k(C - B)$$

$$(C - A) = (-2/5)(C - B)$$

Víme, že $k = -2/5$, tzv. je to číslo záporné $k < 0$, a proto bod C , bude ležet na přímce p mezi body A, B .



5. Afinity zobrazení

5.1 Definování afinity zobrazení

Definice 5.1

Zobrazení f afinity bodového prostoru A do afinity bodového prostoru A' se nazývá afinity, právě když každé tři navzájem různé kolineární body B, C, D prostoru A zobrazuje buď do jediného bodu nebo do tří různých kolineárních bodů $f(B), f(C), f(D)$ prostoru A' tak, že

$$(f(B)f(C)f(D)) = (BCD).$$

Důsledek definice: Obrazem přímky v afinity zobrazení je přímka nebo bod.

(Leischner, str. 26)

Věta 5.1

Každému afinity zobrazení f afinity prostoru A do afinity prostoru A' lze jednoznačně přiřadit zobrazení φ , které zobrazuje zaměření V afinity prostoru A do zaměření V' afinity prostoru A' předpisem

$$\mathbf{u} = D - C \Rightarrow \varphi(\mathbf{u}) = f(D) - f(C),$$

kde D, C jsou body z A , $\mathbf{u} \in V$; $f(D), f(C)$ body z A' , $\varphi(\mathbf{u}) \in V'$. Zobrazení φ se nazývá **asociované** se zobrazením f .

Důkaz

Aby byla definice zavedená větou jednoznačně, je zapotřebí dokázat, že pro obrazy bodů X a Y každého umístění $(Y - X)$ vektoru $\mathbf{u} = D - C$ platí $f(Y) - f(X) = f(D) - f(C)$. Rovnost $Y - X = D - C$ znamená, že je střed S úsečky CY totožný se středem úsečky DX , tedy

$$S = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}Y = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}X.$$

To je dále ekvivalentní se vztahem $(SCY) = (SDX) = \frac{1}{2}$. Pak ale též

$$(f(S)f(C)f(Y)) = (f(S)f(D)f(X)) = \frac{1}{2}. \text{ Odtud}$$

$$f(Y) - f(X) = f(D) - f(C) = \varphi(\mathbf{u}). \quad (\text{srov. Leischner, str. 26})$$

Definice 5.2

Zobrazení φ afinity vektorového prostoru V do afinity vektorového prostoru V' nazýváme **lineární zobrazení** (nebo též **homomorfismus**), má-li tyto vlastnosti:

$$1. \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V: \varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}),$$

$$2. \forall \mathbf{u} \in V, k \in \mathbb{R}: \quad \varphi(k\mathbf{u}) = k\varphi(\mathbf{u}) \quad (\text{srov. Leischner, str. 27})$$

Věta 5.3

Nechť je dáno lineární zobrazení φ vektorového prostoru V do vektorového prostoru V' . Je-li B libovolný bod z afinního bodového prostoru A , jehož zaměření je V a B' libovolný bod z afinního bodového prostoru A' , jehož zaměření je V' , pak existuje jediné afinní zobrazení f prostoru A do A' , které zobrazuje bod B do bodu B' a jehož asociovaným zobrazením je φ . Přitom pro každý bod $X \in A$, a jeho obraz $f(X) \in A'$ platí

$$f(X) = B' + \varphi(X - B) \quad (\text{Leischner, str. 27})$$

Definice 5.3

Nechť jsou dány dva afinní prostory $A_n = \langle A, \mathbf{V}_n \rangle$, $A_m = \langle A', \mathbf{V}'_m \rangle$ a $\varphi: \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}'_m$ asociovaný homomorfismus $\mathbf{V}_n$ do $\mathbf{V}'_m$. Afinní zobrazení $f: A \rightarrow A'$ takové, že pro každý bod $X \in A$ a každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ je

$$f(X + \mathbf{u}) = f(X) + \varphi(\mathbf{u}) \quad (\text{Kopecký, Dofková, str. 101})$$

5.2 Rovnice afinního zobrazení

Nechť je dáno afinní zobrazení f prostoru $A_n = \{P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ do prostoru $A'_m = \{Q; \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_m\}$ s asociovaným zobrazením φ tak, že

$$\varphi(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{d}_i, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Podobně rovnost

$$f(P) = Q + \sum_{i=1}^m b_i \mathbf{d}_i \quad (8)$$

vyjadřuje, že se počátek $P \in A_n$ zobrazí do bodu $f(P) \in A'_m$, který má při počátku Q souřadnice $(b_1, b_2, \dots, b_m)$. Hledáme vztahy mezi souřadnicemi libovolného bodu $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ prostoru A_n a souřadnicemi jeho obrazu $f(X) = [x'_1, x'_2, \dots, x'_m] \in A'_m$. Platí:

$$X = P + \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j \quad \text{a} \quad f(X) = X' = Q + \sum_{i=1}^m x'_i \mathbf{d}_i \quad (9)$$

Obraz $f(X)$ bodu X můžeme vyjádřit také z prvního ze vztahů (9) pomocí (8) a (7). Dostaneme

$$f(X) = f(P) + \sum_{j=1}^n x_j \varphi(\mathbf{e}_j) = Q + \sum_{i=1}^m b_i \mathbf{d}_i + \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{d}_i \right)$$

po úpravě

$$f(X) = Q + \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) \mathbf{d}_i. \quad (10)$$

Porovnáním koeficientů při $\mathbf{d}_i$ ve vyjádření (10) a ve druhém vztahu (9) dostáváme analytické vyjádření afinního zobrazení f ve tvaru

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

po rozepsání

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n$$

Rovnice asociovaného zobrazení φ .

Nechť $\mathbf{V}_n$ a $\mathbf{V}'_m$ jsou zaměřené prostory A_n a A'_m a vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbf{V}_n$ nechť se zobrazí na vektor $\varphi(\mathbf{u}') = (u'_1, u'_2, \dots, u'_m) \in \mathbf{V}'_m$. Platí

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{e}_j \quad \text{a} \quad \varphi(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^m u'_i \mathbf{d}_i \quad (11)$$

Analogicky dostaneme

$$\varphi(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^n u_j \varphi(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n u_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{d}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} u_j \right) \mathbf{d}_i.$$

Srovnáním s druhým ze vztahů (11) dostaneme rovnici asociovaného zobrazení

$$u'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Rovnice afinního zobrazení můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Pro výhodnější počítání, aby bylo pouhé násobení, místo násobení a sčítání, se zavádí tzv. rozšíření lineárních souřadnic, v nichž k původním souřadnicím přidáváme jako další souřadnici buď číslo 1 u souřadnic bodu, nebo číslo 0 u souřadnic vektoru. Pak platí

$$\tilde{\mathbf{X}}' = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{X}},$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{X}}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice $\tilde{\mathbf{A}}$ se nazývá rozšířená matice afinního zobrazení.

(srov. Leischner, str. 28-31)

5.3 Příklady

Příklad 5.1

Určete rovnici afinního zobrazení A_2 do přímky A_1 , při kterém se body $[2, 1]$, $[3, 2]$, $[0, 1]$ zobrazí po řadě na body $[2]$, $[0]$, $[8]$.

Řešení

a)

Dané hodnoty dosadíme do vztahu:

$$x' = ax + by + p$$

Dostaneme soustavu tří rovnic o třech neznámých.

$$2 = 2a + b + p$$

$$0 = 3a + 2b + p$$

$$8 = b + p$$

Z poslední rovnice vyjádříme p a dosadíme do první a druhé rovnice.

$$2 = 2a + b + 8 - b$$

$$0 = 3a + 2b + 8 - b$$

Po upravení:

$$a = -3$$

$$b = 1$$

$$p = 7$$

Rovnice zobrazení má tvar:

$$x' = -3x + y + 7$$

b) pomocí rozšířené matice afinního zobrazení

souřadnice dosadíme do vztahu: $\tilde{X}' = \tilde{A} \cdot \tilde{X}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{X}^{-1}$$

$$\tilde{X}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rovnice zobrazení má tvar:

$$x' = -3x + y + 7$$

Příklad 5.2

V $A_3 = \langle \mathbb{R}^3, V_3 \rangle$ je dáno afinní zobrazení f : $x' = x + z - 3$

$$y' = x + y - z + 2$$

$$z' = -x + y - 2z + 5$$

Určete souřadnice bodu B , je-li dán jeho obraz $B' = [-1, 2, 4]$.

Řešení

Souřadnice obrazu $B' = [-1, 2, 4]$ dosadíme do rovnice afinního zobrazení.

$$-1 = x + z - 3$$

$$2 = x + y - z + 2$$

$$4 = -x + y - 2z + 5$$

Vyřešíme soustavu rovnic.

Z první rovnice vyjádříme x a dosadíme do zbývajících.

$$x = -z + 2$$

$$2 = -z + 2 + y - z + 2$$

$$4 = -(-z + 2) + y - 2z + 5$$

Po upravení:

$$y - 2z + 2 = 0$$

$$y - z - 1 = 0$$

Po upravení:

$$z = 3$$

Hodnotu $z = 3$ dosadíme do rovnice $y - 2z + 2 = 0$

$$y = 4$$

Hodnotu $z = 3$ dosadíme do rovnice $x = -z + 2$

$$x = -1$$

Souřadnice bodu $B = [-1, 4, 3]$.

Příklad 5.3

Určete rovnici afinního zobrazení afinní roviny A_2 do afinní roviny A'_2 , při kterém se body $[-3, 3]$, $[-3, 2]$, $[-1, 1]$ zobrazí po řadě na body $[3, 3]$, $[3, 2]$, $[1, 1]$.

Řešení

Souřadnice dosadíme do vztahu: $\tilde{X}' = \tilde{A} \cdot \tilde{X}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{X}^{-1}$$

$$\tilde{X}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rovnice zobrazení má tvar:

$$x' = -x$$

$$y' = y$$

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo osvětlení problematiky afinního prostoru a aplikování poznatků na příkladech.

V první kapitole jsme definovali afinní prostor, přičemž jsme zjistili, že dvou bodům je jednoznačně přiřazen vektor, anebo naopak bodu a vektoru je jednoznačně přiřazen koncový bod. Následně jsme si ukázali pravidla v afinním prostoru, a to pomocí přičítání vektorů a bodů a rozdílů bodů. V poslední části této kapitole jsme se pak věnovali souřadnicím bodů v daném souřadnicovém systému.

Ve druhé kapitole jsme se zabývali podprostory afinního prostoru a následně parametrickým a neparametrickým vyjádřením podprostorů. Zjistili jsme, že bod můžeme vyjádřit pomocí bodu a báze daného prostoru, a že tento vztah nazýváme parametrické vyjádření podprostoru. Neparametrické vyjádření vyhází ze soustavy nehomogenních lineárních rovnic, kde každá rovnice této soustavy představuje obecnou rovnici nadroviny, tudíž podprostor je vyjádřen jako průnik nadroviny.

Ve třetí kapitole jsme si ukázali vzájemnou polohu podprostorů afinního prostoru. Zjistili jsme, že podprostory jsou rovnoběžné, incidentní, různoběžné a mimoběžné.

Ve čtvrté kapitole jsme se věnovali dělicímu poměru tří bodů na přímce. Ten je důležité pro definování afinního prostoru. Ukázali jsme si také vlastnosti dělicího poměru.

V poslední páté kapitole jsme se věnovali afinnímu zobrazení, kde se tři navzájem různé kolineární body zobrazí buď do jediného bodu, anebo obrazy těchto bodů jsou různé, potom se zachovává dělicí poměr vzorů a obrazů. Popsali jsme zde i takzvané asociované zobrazení. Dále jsme si odvodili rovnici afinního zobrazení, kterou můžeme zapsat v maticovém tvaru.

Každá kapitola pak byla obohacena příklady, které by měli sloužit k procvičování daného tématu.

A jak již bylo řečeno v úvodu, bakalářská práce byla doplněna i o obrázky vytvořenými v programu GeoGebra. V programu, který je volně dostupný pro nekomerční využití a velice dobře se s ním pracuje.

Seznam použité literatury

- [1] HORÁK, Pavel, JANYŠKA, Josef. Analytická geometrie. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2009. 151 s. ISBN 80-210-1623-X.
- [2] JUKL, Marek. Analytická geometrie. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2014. 348s. ISBN 978-80-244-3963-1.
- [3] KADLEČEK, Jiří, TROJÁK, Jan. Geometrie I. Afinní prostor. Přehled látky s řešenými příklady. 1/1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986. 177 s.
- [4] KOPECKÝ, Milan, DOFKOVÁ, Radka. Geometrie 1. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2007. 127s.
- [5] KUBÁT, Václav, TRKOVSKÁ, Dana. Analytická geometrie v afinních a euklidovských prostorech. 1. vyd. Praha: Matfyzpress, 2011. 359 s. ISBN 978-80-7378-144-6.
- [6] LEISCHNER, Pavel. Geometrické zobrazení. 1. vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2010. 120s. ISBN 978-80-7394-243-4.
- [7] PECINA, Václav, PŘÍVRATSKÁ, Jana. Afinní a euklidovské prostory. 2. vyd. Liberec: Technická univerzita, 2001. 112 s. ISBN 80-7083-471-4.
- [8] SEKANINA, Milan a kol. Geometrie I. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986. 197s
- [9] SEKANINA, Milan a kol. Geometrie II. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988. 308s

Seznam obrázků

Obr. č. 1: $C - B = -(B - C)$	8
Obr. č. 2: $(B + \mathbf{u}) - C = (B - C) + \mathbf{u}$	9
Obr. č. 3: $B - (C + \mathbf{u}) = (B - C) - \mathbf{u}$	9
Obr. č. 4: $(B - C) + (C - D) = B - D$	10
Obr. č. 5: $B + (C - D) = C + (B - D)$	10
Obr. č. 6: model	12
Obr. č. 7: $M \in p, M \notin p$	25
Obr. č. 8: $M \in \alpha, M \notin \alpha$	26
Obr. č. 10: p, q jsou rovnoběžné, různé	27
Obr. č. 11: p je různoběžné s q	27
Obr. č. 12: p je mimoběžné s q	28
Obr. č. 14: p je rovnoběžná s rovinou α	29
Obr. č. 15: p protíná rovinu α	29
Obr. č. 16: α je totožná s β	30
Obr. č. 17: α je rovnoběžná s β	30
Obr. č. 18: α je různoběžná s β	31

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Lucie Mozgová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D.
Rok obhajoby:	2016

Název práce:	Afinní prostory
Název v angličtině:	Affine spaces
Anotace práce:	Bakalářská práce se zabývá afinními prostory. Práce je rozdělena na pět kapitol. V první kapitole je popsán afinní prostor, jeho vlastnosti a souřadnicový systém afinního prostoru. Další kapitola se zabývá podprostory afinního prostoru spolu s jejich parametrickým a neparametrickým vyjádřením. Třetí kapitola se zabývá vzájemnou polohou podprostorů afinního prostoru. Poslední dvě kapitoly se věnují dělicí poměru a afinnímu zobrazení.
Klíčová slova:	afinní prostory, podprostory afinního prostoru, vzájemná poloha podprostorů afinního prostoru, dělicí poměr, afinní zobrazení
Anotace v angličtině:	The bachelor thesis is focused on affine spaces. The whole work is divided into five chapters. In the first chapter the author describes an affine space, its properties and the coordinate system of the affine space. The very next chapter deals with the subspaces of the affine space along with their parametric and non-parametric representations. The third chapter deals with the mutual position of the affine space's subspaces. Finally, the last two chapters focus on the splitting

	ratio and the affine transformation.
Klíčová slova v angličtině:	affine spaces, subspaces of the affine space, mutual position of the affine space's subspaces, splitting ratio, affine transformation
Přílohy vázané v práci:	
Rozsah práce:	49 stran
Jazyk práce:	Český jazyk