

## Posudek k bakalářské práci: Abstraktní derivace (Jakub Baloun)

Předložená práce se zabývá algebraickou abstrakcí operátoru derivace, přičemž prostory funkcí jsou nahrazeny moduly a okruhy a derivací je rozuměno zobrazení, které splňuje rovnici formálně připomínající Leibnizovo pravidlo pro derivaci součinu.

Na bakalářskou práci je text nadstandardně obsáhlý (89 stran). Vrcholem první poloviny je představení aritmetické derivace, která má vztah k teorii čísel, a její zobecnění pro obory integrity s jednoznačným rozkladem. V dalších kapitolách je řešeno zařazení množiny derivací pro fixovaný modul  $M$  v hierarchii různých algebraických struktur. Klademe-li jisté dodatečné požadavky na  $M$ , tvoří derivace modul, okruh lineárních homomorfismů, případně Lieovu algebru, atd. V závěrečné kapitole je popsána logaritmická derivace.

Práce je velmi hezky a čtivě sepsaná. Obsahuje mnoho pečlivých důkazů algebraických axiomů a lze cítit, že autor všem pojmům dobře rozumí. Myslím, že bych práci mohl doporučit jako přínosné čtení i studentům prvního ročníku. Přestože abstraktní derivace není základním pojmem algebry, hezky funguje jako svorník k představení řady základních algebraických pojmů, které jsou v práci hezky popsány: například konstrukce podílového tělesa, teorie dělitelnosti, homomorfismy vektorových prostorů, atd.

Práce obsahuje jen málo překlepů. Z matematické stránky jsem si (až na bod (1) níže) všiml spíše drobností. Například: V Poznámce 1.6 se tvrdí, že na symetrické moduly můžeme nahlížet jako na levé moduly, kde pravé násobení dodefinujeme shodně s levým. To obecně platí jen v případě, kdy daný okruh je komutativní. Lze to vidět na následujícím výpočtu, kde levá a pravá strana pro obecný levý modul nemusí souhlasit:

$$(sr) \cdot m = s \cdot (r \cdot m) = (r \cdot m) \cdot s = (m \cdot r) \cdot s = m \cdot (rs) = (rs) \cdot m.$$

K práci mám následující otázky a připomínky:

- (1) V 7. kapitole se často mluví o asociativní algebře konečného řádu. Přičemž řádem je zamýšlena dimenze nosného modulu. Je dobré si uvědomit, že pro obecný modul je existence báze spíše vzácností. Například okruh modulární aritmetiky  $\mathbb{Z}_n$ , pro  $n \in \mathbb{N}$ , je  $\mathbb{Z}$ -modulem, ale neobsahuje žádnou lineárně nezávislou množinu. Teorie modulů je v práci zpracována v sekci Dodatek, a po přečtení se může zdát, že moduly představují malé zobecnění vektorových prostorů. Ve skutečnosti je teorie modulů mnohonásobně komplikovanější a bohatější.
- (2) Není mi jasné, jak autor pracoval s literaturou. Zatímco první kapitoly se odkazují na konkrétní knihy nebo články, v pozdějších kapitolách už citace chybí. Zajímalo by mně, zda si autor věty z pozdějších kapitol dokazoval sám, nebo se volně inspiroval v existující literatuře.
- (3) Vzhledem k absenci referencí na existující literaturu u pozdějších kapitol si nejsem jistý, zda jsou všechny užívané pojmy standardní. Například zobecněná Lieova algebra (Definice 8.1).
- (4) Velmi často je v práci odkazováno na poznámku pod čarou, přičemž číslo poznámky je uváděno (jako obvykle) v horním indexu. Toto referování je užíváno i u matematických výrazů, kde se čtenáři přítomnost čísla plete s exponentem.

Přes některé výtky uvedené výše považuji práci za velmi zdařilou a doporučuji k ohodnocení nejvyšší známkou.

V Olomouci, 26. 5. 2024

Mgr. Dominik Lachman, Ph.D.