

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Konstrukční metody agregačních funkcí



Katedra algebry a geometrie

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Jozef Pócs, Ph.D.**

Vypracoval(a): **Jan Šuta**

Studijní program: B1101 Matematika

Studijní obor: Diskrétní matematika

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2022

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Jan Šuta

Název práce: Konstrukční metody agregačních funkcí

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra algebry a geometrie

Vedoucí práce: RNDr. Jozef Pócs, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2022

Abstrakt: Tématem této bakalářské práce jsou agregační funkce. Práce obsahuje seznámení s agregačními funkcemi a jejich konstrukčními metodami definovanými na reálném intervalu. Dále je uvedena problematika zobecnění pojmu agregační funkce pro práci se svazy a také modifikace konstrukční metody transformace aplikovaná na horizontální sumy svazů.

Klíčová slova: agregační funkce, konstrukční metody, svazy, horizontální sumy

Počet stran: 35

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Jan Šuta

Title: Construction methods of aggregation functions

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of algebra and geometry

Supervisor: RNDr. Jozef Pócs, Ph.D.

The year of presentation: 2022

Abstract: This bachelor's thesis deals with aggregation functions. It contains introduction to the topic of aggregation functions and their construction methods defined on a real interval. Furthermore, the generalization of aggregation function on lattices is mentioned, as well as the modification of the transformation construction method applied on horizontal sums of lattices.

Key words: aggregation functions, construction methods, lattices, horizontal sums

Number of pages: 35

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana RNDr. Jozefa Pócse, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne
.....
podpis

Obsah

Úvod	7
1 Agregací funkce	8
1.1 Definice a příklady	8
1.2 Konstrukce agregací funkcí	10
1.2.1 Transformované agregací funkce	10
1.2.2 Složené agregací funkce	11
1.2.3 Vážené agregací funkce	13
2 Svazy	14
2.1 Uspořádaní a uspořádané množiny	14
2.2 Polosvazy, svazy a dvojí definice svazu	17
2.3 Podsvazy a svazové homomorfismy	20
2.4 Speciální typy svazů	22
3 Agregace na horizontálních sumách svazů	24
3.1 Modifikovaná transformační metoda pro horizontální sumy . .	26
3.2 Zobecnění modifikované transformační metody	32
Závěr	34
Literatura	35

Poděkování

Zde bych velice rád bych poděkoval RNDr. Jozefu Pócsovi, Ph.D., vedoucímu mé práce, za jeho velmi cenné rady a trpělivost při konzultacích.

Úvod

Tématem této práce jsou agregační funkce, konkrétněji jejich konstrukční metody. Termínem agregace obecně rozumíme přiřazení jedné hodnoty dané množině hodnot tak, aby ji co nejlépe reprezentovala. Toho se hojně využívá např. v ekonomii nebo ve výpočetní technice, zejména v databázích. Agregační funkce je pak taková funkce, která provádí toto přiřazení reprezentativní hodnoty. Nejznámějším příkladem agregační funkce je patrně aritmetický průměr. Běžně se agregační funkce definuje na reálném intervalu, ale její definice využívá pouze uspořádaní, je proto přirozené zavést agregační funkce na uspořádané množině.

Cílem této práce je seznámit se s některými konstrukčními metodami agregačních funkcí a následně je modifikovat pro použití na jistých typech svazů. Text je rozčleněn do tří kapitol. V úvodní kapitole se seznámíme s agregačními funkcemi a jejich konstrukčními metodami. Druhá kapitola obsahuje základní poznatky k uspořádaným množinám a úvod to teorie svazů. Ve třetí a poslední kapitole definujeme agregační funkci na svazu a popíšeme modifikaci metody transformace na horizontálních sumách izomorfních svazů.

Kapitola 1

Agregační funkce

V této kapitole definujeme pojem agregační funkce. Seznámíme se s jejich vlastnostmi a uvedeme některé známé příklady agregačních funkcí. Definice a věty v této kapitole jsou převzaty z [1].

1.1. Definice a příklady

Definice 1.1. *Nechť $\mathbb{I}$ je neprázdný reálný interval. Funkci $\mathbf{A}^{(n)}: \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ nazveme n -ární agregační funkcí na $\mathbb{I}^n$, jestliže platí, že*

- i) $\mathbf{A}^{(n)}$ je neklesající v každé proměnné,*
- ii) $\mathbf{A}^{(n)}$ splňuje hraniční podmínky:*

$$\inf_{x_i \in \mathbb{I}} \mathbf{A}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \inf \mathbb{I} \quad \text{a} \quad \sup_{x_i \in \mathbb{I}} \mathbf{A}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sup \mathbb{I}.$$

Arita agregační funkce n určuje počet jejích proměnných. Pokud je z kontextu zřejmé, jakou aritu daná agregační funkce má, můžeme namísto $\mathbf{A}^{(n)}$ psát pouze $\mathbf{A}$.

Definice 1.2. *Diagonální sekci funkce $f: \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ nazveme funkci $\delta_f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^*$, kde $\delta_f(x) = f(x, \dots, x)$ pro každé $x \in \mathbb{I}$.*

Poznámka 1.1. *i) Je zřejmé, že pro každou agregační funkci $\mathbf{A}$ platí $\mathfrak{H}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{I}$, kde symbolem $\mathfrak{H}(\mathbf{A})$ rozumíme obor hodnot funkce $\mathbf{A}$.*

- ii) V literatuře se často pro unární funkci $\mathbf{A}^{(1)}$ pokládá $\mathbf{A}^{(1)}(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{I}$. Pro naše účely však budeme uvažovat jako unární agregační funkci každou funkci, která splňuje podmínky i) a ii) z Definice 1.1.*

Věta 1.1. *Nechť funkce $f: \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ je neklesající. Pak je f agregační funkce na $\mathbb{I}^n$ právě tehdy, když $\mathfrak{H}(\delta_f) \in \mathbb{I}$ a platí*

$$\inf_{x \in \mathbb{I}} \delta_f(x) = \inf \mathbb{I} \quad \text{a} \quad \sup_{x \in \mathbb{I}} \delta_f(x) = \sup \mathbb{I}$$

Důkaz. Nechť f je funkce splňující předpoklady. Pak $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n$

$$\delta_f(\min(x_1, \dots, x_n)) \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq \delta_f(\max(x_1, \dots, x_n)).$$

To implikuje

$$\begin{aligned} \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n} f(x_1, \dots, x_n) &= \inf_{x \in \mathbb{I}} \delta_f(x), \\ \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n} f(x_1, \dots, x_n) &= \sup_{x \in \mathbb{I}} \delta_f(x). \end{aligned}$$

Z toho už plyne tvrzení věty. □

Poznámka 1.2. *Z předchozí věty plyne, že podmínku ii) z Definice 1.1 stačí splnit pro diagonální sekci dané neklesající funkce f . Samozřejmě je také třeba splnit $\mathfrak{H}(f) \subseteq \mathbb{I}$.*

Definice 1.3. *Rozšířením funkce rozumíme zobrazení*

$$f: \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^*.$$

Rozšířením agregační funkce na $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{I}^n$ rozumíme takovou funkci, jejíž restrikce $\mathbf{A}_{\mathbb{I}^n}$ je agregační funkcí na $\mathbb{I}^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 1.1. *Nyní uveďme některé příklady známých agregačních funkcí:*

- Nejznámější skupinou agregačních funkcí jsou patrně průměry. Jako příklad uvedeme aritmetický (značíme μ), geometrický (značíme $\mathbf{G}$) a harmonický (značíme $\mathbf{H}$).

$$\mu(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n},$$

$$\mathbf{G}(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n},$$

$$\mathbf{H}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

- Další často používanou agregační funkcí je medián. Pro $n = 2k$ je definován takto:

$$\text{Med}(x_1, \dots, x_{2k}) = \mu(x_k, x_{k+1}),$$

zatímco pro $n = 2k + 1$ je definován takto:

$$\text{Med}(x_1, \dots, x_{2k+1}) = x_{k+1}.$$

- *Agregační funkcí je i k -tá projekce (značená $\mathbf{P}_k^{(n)}$) a " k -tý nejmenší prvek" (značíme $\mathbf{OS}_k^{(n)}$, z anglického Order Statistic), pro $k \leq n$.*

$$\mathbf{P}_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_k,$$

$$\mathbf{OS}_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_{(k)},$$

kde $x_{(k)}$ je k -tý nejmenší prvek množiny $\{x_1, \dots, x_n\}$.

- *Další agregační funkci můžeme vytvořit jako speciální případ některých předchozích funkcí, např. funkce minima a maxima:*

$$\mathbf{Min}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{OS}_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n),$$

$$\mathbf{Max}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{OS}_n^{(n)}(x_1, \dots, x_n).$$

- *Jestliže $[a, b]$ je uzavřený interval, můžeme definovat nejmenší agregační funkci (značíme $\mathbf{A}_\perp$) a největší agregační funkci (značíme $\mathbf{A}_\top$) na $[a, b]$ takto:*

$$\mathbf{A}_\perp^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} b, & \text{pokud } x_i = b \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, n\} \\ a, & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_\top^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} a, & \text{pokud } x_i = a \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, n\} \\ b, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- *Nakonec jako příklad funkce, která není agregační uveďme např. konstantní funkci.*

1.2. Konstrukce agregačních funkcí

V této kapitole popíšeme vybrané konstrukční metody. Upozorníme na některé podmínky pro jejich použití, např. transformaci lze použít na libovolnou agregační funkci, zatímco k vážení potřebujeme symetrickou rozšířenou agregační funkci. Hlavní motivací pro zkoumání konstrukčních metod je snaha, aby zkonstruovaná agregační funkce měla určité požadované vlastnosti.

1.2.1. Transformované agregační funkce

Transformací agregační funkce rozumíme její přenesení na jiný interval. Toho se docílí použitím jistého zobrazení. V této sekci se podíváme na podmínky, za kterých lze transformaci provést, a uvedeme příklady využití této metody.

Věta 1.2. *Nechť $\mathbb{I}, \mathbb{J}$ jsou reálné intervaly a zobrazení $\psi: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{I}$ je monotonní a bijektivní. Dále nechť $\mathbf{A}: \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ je n -ární agregační funkce na $\mathbb{I}$. Pak funkce $\mathbf{A}_\psi: \mathbb{J}^n \rightarrow \mathbb{J}$ dána předpisem*

$$\mathbf{A}_\psi(x_1, \dots, x_n) = \psi^{-1}(\mathbf{A}(\psi(x_1), \dots, \psi(x_n)))$$

je n -ární agregační funkce na $\mathbb{J}$.

Poznámka 1.3. • *Transformace lze skládat. Pokud máme funkci $\mathbf{A}$ a zobrazení ψ z předchozí věty a k tomu ještě zobrazení $\xi: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{J}$, které je také monotonní a bijektivní, platí, že $(\mathbf{A}_\psi)_\xi$ je agregační funkce na $\mathbb{L}$ a $(\mathbf{A}_\psi)_\xi = \mathbf{A}_{\psi \circ \xi}$.*

- *Transformované agregační funkce zachovávají algebraické vlastnosti původních funkcí (např. asociativita, symetrie, ryzí monotonie), ale nemusí zachovávat jejich analytické vlastnosti (např. multiplikativita, linearity, aditivita).*

Příklad 1.2. *Asi nejznámějším příkladem transformované agregační funkce je geometrický průměr na $[0, 1]$, který je transformací aritmetického průměru na $[0, \infty]$. V tomto případě se za zobrazení $\psi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ vezme $\psi(x) = -\log x$ a platí tedy*

$$\mathbf{G}(x_1, \dots, x_n) = \exp(-\mu(-\log(x_1), \dots, -\log(x_n))).$$

1.2.2. Složené agregační funkce

Složené agregační funkce můžeme definovat dvěma způsoby. Postupně popíšeme oba.

Skládání založené na asociativitě

Tato metoda vychází z vlastnosti asociativity, což obecně znamená

$$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c.$$

Asociativita agregačních funkcí je definována takto

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}(x, y), z) = \mathbf{A}(x, \mathbf{A}(y, z)).$$

Takto je pak definována ternární agregační funkce $\mathbf{A}(x, y, z)$. Následující věta říká, jak lze složit agregační funkce obecněji.

Věta 1.3. *Nechť $\mathbb{I}$ je reálný interval, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{A}: \mathbb{I}^k \rightarrow \mathbb{I}$, $\mathbf{B}_i: \mathbb{I}^{n_i} \rightarrow \mathbb{I}$ (pro $i \in \{1, \dots, k\}$) jsou agregační funkce na $\mathbb{I}$. Pak funkce $\mathbf{C}_{\mathbf{A}; \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k}: \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ definovaná takto:*

$$\mathbf{C}_{\mathbf{A}; \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \mathbf{A}(\mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{B}_k(\mathbf{x}_k)),$$

kde $n = \sum_{i=1}^k n_i$, je n -ární agregační funkce na $\mathbb{I}$. Funkce $\mathbf{A}$ se nazývá vnější funkce a $\mathbf{B}_i$ se nazývají vnitřní funkce.

Příklad 1.3. *Jako příklad uvedme složení aritmetického a geometrického průměru. Funkce $\mathbf{C}_{G; \mu, \mu}: [0, 1]^4 \rightarrow [0, 1]$ je dána předpisem*

$$\mathbf{C}_{G; \mu, \mu}(x_1, \dots, x_4) = \sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_3 + x_4}{2}} = \frac{\sqrt{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)}}{2}$$

a je to agregační funkce na $[0, 1]$.

Skládání reálných funkcí

Tento způsob skládání je založen na standardním skládáním reálných funkcí.

Věta 1.4. *Nechť $\mathbb{I}$ je reálný interval, $k, n \geq 2$ a $\mathbf{A}: \mathbb{I}^k \rightarrow \mathbb{I}$, $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k: \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ jsou agregační funkce na $\mathbb{I}$. Pak funkce $\mathbf{C}: \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$, která je zadána takto*

$$\mathbf{C}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{A}(\mathbf{B}_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \mathbf{B}_k(x_1, \dots, x_n)),$$

je agregační funkce na $\mathbb{I}$.

Poznámka 1.4. *Jako velký rozdíl mezi zmíněnými dvěma metodami se může zdát to, že v prvním případě se každá složka agreguje pouze jednou (a tedy pouze v jedné vnitřní funkci), zatímco v druhém případě je každá složka agregována každou vnitřní funkcí. Můžeme si však všimnout, že konstrukční metoda z Věty 1.3 se dá přepsat na metodu z Věty 1.4 pomocí projekcí takto:*

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{A}; \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) &= \mathbf{A}(\mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{B}_k(\mathbf{x}_k)) = \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{B}_1(\mathbf{P}_1^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k), \dots, \mathbf{P}_{n_1}^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)), \dots, \\ &= \dots, \mathbf{B}_k(\mathbf{P}_{n-n_k+1}^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k), \dots, \mathbf{P}_n^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)) = \\ &= \mathbf{C}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Příklad 1.4. *Jako příklad uvedeme složení aritmetického a geometrického průměru pomocí harmonického průměru. Tedy funkce $\mathbf{C}: \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ je dána takto:*

$$\mathbf{C}(x_1, x_2) = \frac{2}{\frac{2}{x_1 + x_2} + \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}}}$$

1.2.3. Vážené agregační funkce

Smyslem vážených agregačních funkcí je přiřazení určitých hodnot jednotlivým prvkům. Těmto se říká váha prvku a vyjadřuje důležitost daného prvku v rámci agregační funkce. Tyto prvky pak tvoří vektor vah.

Věta 1.5. *Nechť $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ je příslušný vektor vah a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{A}: \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ je rozšířená symetrická agregační funkce na $\mathbb{I}$. Pak funkce*

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{A}(k_1 \bullet x_1, \dots, k_n \bullet x_n),$$

kde výrazem $k_i \bullet x_i$ se rozumí agregace (opakování) proměnné x_i k_i -krát, je agregační funkce na $\mathbb{I}$.

Příklad 1.5. *Výše zmíněný postup se dá dobře využít u aritmetického průměru, získáme tak tzv. vážený průměr. Ne vždy však dostaneme použitím vah novou agregační funkci. Vezměme např. funkci minima, po použití vektoru vah $\mathbf{k}$ dostaneme funkci*

$$\mathbf{Min}_{\mathbf{k}}(x_1, \dots, x_n) = \min\{x_i; i \in \{1, \dots, n\}, k_i > 0\}.$$

Z toho plyne, že pokud $k_i > 0$ pro každé i , platí $\mathbf{Min}_{\mathbf{k}} = \mathbf{Min}$.

Kapitola 2

Svazy

V této kapitole se blíže seznámíme s pojmem svazu. Uvedeme obě jeho definice, tj. jakožto uspořádané množiny i algebraické struktury a vztah mezi nimi. Definice a věty jsou převzaty z [2] a [3], pokud není uvedeno jinak.

2.1. Uspořádání a uspořádané množiny

Definice 2.1. *Nechť $A \neq \emptyset$. Uspořádáním na množině A nazveme takovou binární relaci $R \subseteq A \times A$, která je zároveň*

- *reflexivní, tzn.*

$$\forall a \in A: (a, a) \in R,$$

- *antisymetrická, tzn.*

$$\forall a, b \in A: (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \implies a = b,$$

- *tranzitivní, tzn.*

$$\forall a, b, c \in A: (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R.$$

Poznámka 2.1. *Relaci uspořádání budeme místo obecného označení R značit $\leq$ a místo $(a, b) \in \leq$ budeme zapisovat $a \leq b$. Prvky a, b , pro které platí $a \not\leq b$ a také $b \not\leq a$, nazveme neporovnatelné a budeme zapisovat $a \parallel b$.*

Pokud $\leq$ je uspořádání na množině A , můžeme na A zavést uspořádání $\geq$ takto: $a \geq b \iff b \leq a$.

Jestliže $\leq$ je uspořádání na množině A , nazveme uspořádanou dvojici $(A, \leq)$ uspořádaná množina.

Jestliže $a \leq b$ a zároveň $a \neq b$, zapíšeme to jako $a < b$. Analogicky lze zavést $a > b$.

Pokud na uspořádané množině $(A, \leq)$ platí $\forall a, b \in A: (x \leq y) \vee (y \leq x)$, řekneme, že je úplně uspořádaná (též řetězec). Pokud naopak $\forall a, b \in A: a \parallel b$ nazveme ji antiřetězec.

Příklad 2.1. Uvedme některé příklady uspořádaných množin:

- Množiny $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ a $(\mathbb{N}, \leq)$ jsou řetězce.
- Množinová inkluze $\subseteq$ je uspořádání, tedy např. $(\wp(M), \subseteq)$, kde M je libovolná množina, je uspořádaná množina.
- Relace dělitelnosti na množině přirozených čísel je také uspořádání, takže $(\mathbb{N}, |)$ je uspořádaná množina.

Pro lepší ilustraci uspořádaných množin je možné použití tzv. Hasseova diagramu. Ten se dá použít ke znázornění konečných uspořádaných množin v rovině a využívá relaci pokrývání, které uvedeme v následující definici a lemmatu.

Definice 2.2. Necht $(A, \leq)$ je uspořádaná množina a $a, b \in A$. Řekneme, že prvek b pokrývá prvek a (neboli prvek a je pokrýván prvkem b), jestliže platí $a < b$ a $\forall c \in A: a \leq c \leq b \implies a = c$ nebo $a = b$ a značíme $a \prec b$.

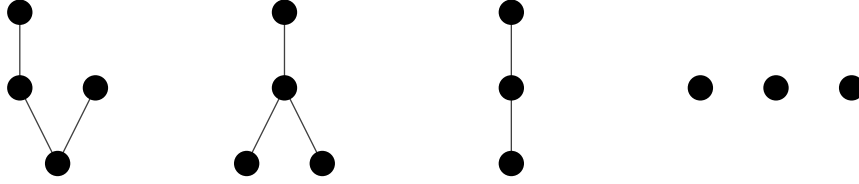
Lemma 2.1. Necht $(A, \leq)$ je konečná uspořádaná množina, $a, b \in A$. Pak $a < b$ právě tehdy, když existují prvky $c_0, \dots, c_n \in A$ takové, že

$$a = c_0 \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_{n-1} \prec c_n = b.$$

Důkaz. Necht $a < b$. Pak buď $a \prec b$ (což znamená, že $n = 1, a = c_0, b = c_1$), nebo existuje prvek x takový, že $a < x < b$. Opět buď $a \prec x \prec b$, v tom případě $n = 2, a = c_0, x = c_1, b = c_2$, nebo existuje y tak, že $x < y < b$. Vzhledem ke konečnosti A dojdeme po konečně mnoha krocích k prvkům, které se pokrývají a, stejně tak i pro $b < y$. Tzn. po konečném počtu kroků dostaneme prvky $c_0, \dots, c_n$, které splňují požadovanou vlastnost. Naopak necht $a = c_0 \prec c_1 \prec \dots \prec c_{n-1} \prec c_n = b$. Pak určitě $a = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_{n-1} \leq c_n = b$ a z tranzitivity už $a \leq b$. $\square$

Definice 2.3. Necht $(A, \leq)$ je konečná uspořádaná množina. Každému prvku A přiřadíme právě jeden bod v rovině takto: Pokud $a < b$, bude bod a v rovině nad bodem b , pokud $a \parallel b$, budou body vedle sebe, a pokud $a \prec b$, spojíme body rovnou čarou. Vzniklý diagram budeme nazývat Hasseův diagram uspořádané množiny $(A, \leq)$.

Na Obr. 2.1 ukážeme některé příklady Hasseových diagramů:



Obrázek 2.1: Uspořádané množiny

Definice 2.4. Necht $(A, \leq)$ je uspořádaná množina, $a \in A$. Pak a se nazývá

- nejmenší prvek v A , jestliže

$$\forall x \in A: a \leq x$$

- největší prvek v A , jestliže

$$\forall x \in A: x \leq a$$

- minimální prvek v A , jestliže

$$\forall x \in A: x \leq a \implies x = a$$

- maximální prvek v A , jestliže

$$\forall x \in A: a \leq x \implies a = x$$

Poznámka 2.2. Pokud v uspořádané množině existuje největší, respektive nejmenší prvek, je nutně právě jeden (to plyne z antisymetrie). V takovém případě se jedná i o jediný maximální, respektive minimální prvek.

V případě alespoň dvouprvkového antiřetězce není žádný prvek největší ani nejmenší, ale každý prvek je maximální i minimální.

Definice 2.5. Necht $(A, \leq)$ je uspořádaná množina a $X \subseteq A$. Definujeme

$$U(X) = \{x \in A; \forall y \in X: y \leq x\},$$

$$L(X) = \{x \in A; \forall y \in X: x \leq y\}.$$

Množinu $L(X)$ nazýváme dolní kužel množiny X a pokud má $L(X)$ největší prvek, nazýváme jej infimum množiny X a značíme $\inf X$. Množinu $U(X)$ nazýváme horní kužel množiny X a pokud má $U(X)$ nejmenší prvek, nazýváme jej supremum množiny X a značíme $\sup X$.

2.2. Polosvazy, svazy a dvojí definice svazu

Definice 2.6. *Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina. Jestliže pro každou její dvouprvkovou podmnožinu existuje*

- *supremum, nazýváme ji horní polosvaz,*
- *infimum, nazýváme ji dolní polosvaz.*

Jestliže $(A, \leq)$ splňuje obojí, nazýváme ji svaz.

Poznámka 2.3. *Z Definice 2.6 vyplývá, že pokud A je svaz, existuje supremum a infimum pro každou konečnou podmnožinu, nikoliv pouze pro dvouprvkovou. Buď $a, b, c \in A$. Pak $\inf\{a, b\}$ existuje, tedy existuje i $\inf\{\{a, b\}, c\} = u$. Z toho plyne, že $u \leq a$ a také $u \leq \inf\{b, c\}$, tzn. $u \leq \{a, b, c\}$. Dále nechť $u' \leq \{a, b, c\}$ pro některé $u' \in A$. Potom $u' \leq \inf\{a, b\}$ a $u' \leq c$. Z toho už $u' \leq \inf\{\{a, b\}, c\} = u$ a tedy $u = \inf\{a, b, c\}$. Dále můžeme označit $v = \inf\{a, \{b, c\}\} = \inf\{a, b, c\}$. Ale protože množina může mít pouze jedno infimum, platí $u = v$.*

Tento postup lze dále použít k nalezení infima libovolné konečné podmnožiny svazu. Pro suprema bychom použili analogickou formulaci. V případě nekonečné podmnožiny svazu nelze předpokládat existenci infima nebo suprema. Také si můžeme všimnout, že v konečném svazu A určitě existují prvky $\inf A = 0$ a $\sup A = 1$, kde 0 rozumíme nejmenší prvek svazu A a 1 naopak jeho největší prvek.

Definice 2.7. *Nechť $(A, \leq)$ je svaz, $a, b \in A$. Definujme následující operace*

- $a \wedge b = \inf\{a, b\}$,
- $a \vee b = \sup\{a, b\}$.

Vzhledem k tomu, že $(A, \leq)$ je svaz, supremum a infimum dvouprvkové množiny vždy existuje a je dáno jednoznačně, tzn. tyto operace jsou definovány korektně. Operaci " $\wedge$ " budeme nazývat průsek a operaci " $\vee$ " budeme nazývat spojení.

Věta 2.2. *Nechť $(A, \leq)$ je svaz. Pak $\forall a, b, c \in A$ platí*

- i) $a \wedge b = b \wedge a$
- ii) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
- iii) $a \wedge (a \vee b) = a$
- iv) $a \vee b = b \vee a$

$$v) a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$vi) a \vee (a \wedge b) = a$$

Důkaz. a) Důkaz vlastností i) a iv) je zřejmý již z definice operací průsek a spojení.

b) Podle Pozn. 2.3 platí

$$\inf\{a, \inf\{b, c\}\} = \inf\{a, b, c\} = \inf\{\inf\{a, b\}, c\},$$

což dokazuje vlastnost ii). Vlastnost v) bychom ukázali duálně.

c) Pro každé $a, b \in A$ platí, že $a \leq a \vee b$, z toho už plyne vlastnost iii). Vlastnost vi) bychom opět ukázali duálně.

□

Poznámka 2.4. Vlastnosti iii) a vi) z Věty 2.2 nazýváme zákony absorpce. Všimněme si, že $(A, \wedge)$ a $(A, \vee)$ jsou komutativní pologrupy, které jsou spojeny právě těmito zákony absorpce. Tzn. z libovolného svazu jsme vytvořili algebraickou strukturu s dvěma binárními operacemi. Zbývá otázka, zda to lze provést naopak. Tedy pokud bychom měli algebraickou strukturu s dvěma binárními operacemi splňující i)-vi), jedná se také o svaz? V následující části ukážeme, že to tak opravdu je.

Věta 2.3. Nechť (L, Δ, ∇) je algebraická struktura, Δ a ∇ jsou binární operace, které pro každé $x, y, z \in L$ splňují následující:

$$i) x \Delta y = y \Delta x$$

$$ii) x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z$$

$$iii) x \Delta (x \nabla y) = x$$

$$iv) x \nabla y = y \nabla x$$

$$v) x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z$$

$$vi) x \nabla (x \Delta y) = x$$

Pak můžeme na L zavést relaci $\leq$ následovně:

$$\forall x, y \in L: x \leq y \iff x \Delta y = x \text{ a také } x \nabla y = y.$$

Tato relace je poté uspořádáním na L a $(L, \leq)$ je svaz. Přitom operace Δ je operací průseku a ∇ je operací spojení.

Důkaz. Nejprve ověříme, že $\leq$ je uspořádání na L . Nechť $x, y, z \in L$.

1. Reflexivita: Podle iii) a vi) platí:

$$x \triangle x = x \triangle (x \nabla (x \triangle x)) = x \text{ a tedy } x \leq x.$$

2. Antisymetrie: Nechť $x \leq y$ a $y \leq x$. Pak platí: $x \triangle y = x$ a $y \triangle x = y$. Což podle bodu i) vede k $x = x \triangle y = y \triangle x = y$ a z toho už $x = y$.

3. Tranzitivita: Nechť $x \leq y$ a $y \leq z$. Z toho plyne $x \triangle y = x$ a $y \triangle z = y$. Pak z vlastnosti ii):

$$x \triangle z = (x \triangle y) \triangle z = x \triangle (y \triangle z) = x \triangle y = x \text{ a z toho } x \leq z.$$

$(L, \leq)$ je tedy uspořádaná množina. Dále podle i), ii) a bodu 1. tohoto důkazu máme

$$(x \triangle y) \triangle x = (y \triangle x) \triangle x = y \triangle (x \triangle x) = y \triangle x = x \triangle y,$$

tedy $x \triangle y \leq x$. Podobně také dojdeme k tomu, že $x \triangle y \leq y$, takže $x \triangle y$ je dolní hranice $\{x, y\}$. Dále nechť $d \in L$ je také dolní hranice $\{x, y\}$, tedy $d \triangle x = d$ a také $d \triangle y = d$. Z toho už

$$d \triangle (x \triangle y) = (d \triangle x) \triangle y = d \triangle y = d \text{ a pak } d \leq x \triangle y.$$

$x \triangle y$ je tedy infimem množiny $\{x, y\}$. Pro operaci ∇ bychom duálně dokázali, že $x \nabla y$ je supremem množiny $\{x, y\}$ a z toho už plyne tvrzení věty. $\square$

Poznámka 2.5. Nechť $(A, \leq)$ je svaz. Označme A^s jako strukturu $(A, \wedge, \vee)$, pro jejíž operace platí $\forall a, b \in A: a \wedge b = \inf\{a, b\}$ a $a \vee b = \sup\{a, b\}$.

Naopak, nechť $(L, \wedge, \vee)$ je struktura splňující podmínky i)-vi) z Věty 2.3. Označme L^u svaz $(L, \leq)$ pro který platí $\forall x, y \in L$ platí $x \leq y \iff x \wedge y = x$.

Věta 2.4. Nechť $(A, \leq)$ je svaz. Pak platí $(A^s)^u = A$.

Důkaz. 1. Nechť $a, b \in A; a \leq b$ v $(A, \leq)$. Pak tedy $a \wedge b = a$ v A^s a tudíž $a \leq b$ v $(A^s)^u$.

2. Naopak, nechť $a \leq b$ v $(A^s)^u$. Pak $a \wedge b = a$ v A^s a tedy $a \leq b$ v A . $\square$

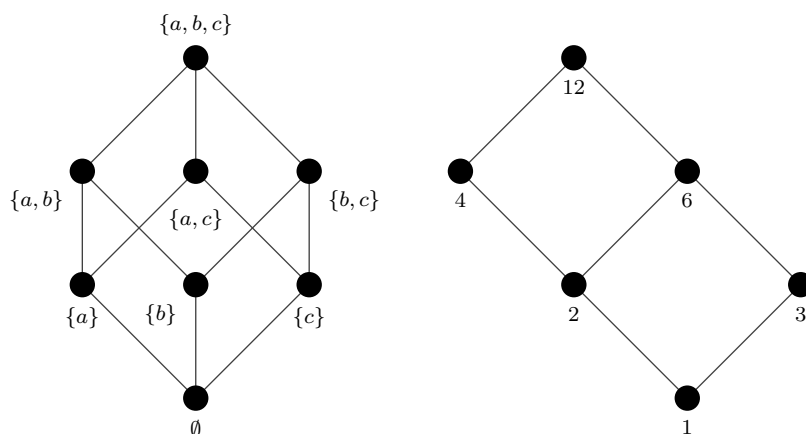
Věta 2.5. Nechť $(L, \wedge, \vee)$ je struktura splňující i)-vi) z Věty 2.3. Pak platí $(L^u)^s = L$.

Důkaz. Důkaz se provede analogicky jako v předchozí větě. $\square$

Poznámka 2.6. Z předchozích dvou vět je vidět, že definice svazu jako uspořádané množiny a jako algebraické struktury jsou ekvivalentní. Dále budeme svaz značit $\mathbf{L}$ a budeme tím myslet jak uspořádanou množinu $(L, \leq)$, tak algebraickou strukturu $(L, \wedge, \vee)$.

Příklad 2.2. Uvedme některé příklady svazů:

- i) Každý řetězec je svaz. Stačí položit $a \wedge b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$.
- ii) Potenční množina neprázdné množiny je svaz, tzn. $(\wp(M), \cap, \cup)$ je svaz. Na Obr. 2.2 vidíme Hasseův diagram $\wp(\{a, b, c\})$.
- iii) Množina přirozených čísel spolu s operacemi největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku je svaz.
- iv) Necht $n \in \mathbb{N}$. Označme $D(n)$ jako množinu všech dělitelů čísla n . Pak $(D(n), NSN, NSD)$ je svaz. Na Obr. 2.2 vidíme Hasseův diagram pro $n = 12$.
- v) Necht $(G, \cdot)$ je grupa. Pak množina všech normálních podgrup tvoří svaz, kde $A \wedge B = A \cap B$, $A \vee B = A \cdot B = \{a \cdot b; a \in A, b \in B\}$ pro A, B normální podgrupy.



Obrázek 2.2: Svazy $(\wp(\{a, b, c\}), \cap, \cup)$ a $(D(12), NSN, NSD)$

2.3. Podsvazy a svazové homomorfismy

Definice 2.8. Necht $\mathbf{L}$ je svaz a $A \subseteq L; A \neq \emptyset$. Řekneme, že A je podsvaz svazu $\mathbf{L}$, jestliže platí $\forall x, y \in A: x \wedge y \in A$ a také $x \vee y \in A$.

Definice 2.9. Necht $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee)$ a $\mathbf{M} = (M, \wedge, \vee)$ jsou svazy. Zobrazení $f: L \rightarrow M$ nazveme *homomorfismus $\mathbf{L}$ do $\mathbf{M}$* , jestliže splňuje substituční podmínku pro obě operace, tzn. platí

$$\forall x, y \in L: f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \text{ a také } f(x \vee y) = f(x) \vee f(y).$$

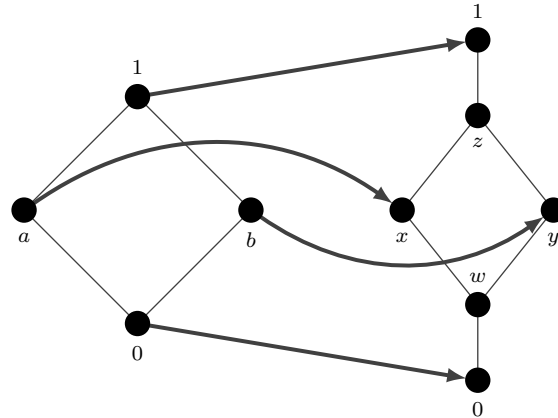
Bijektivní homomorfismus se nazývá izomorfismus.

Definice 2.10. Necht $(A, \leq), (B, \leq)$ jsou uspořádané množiny. Zobrazení $f: A \rightarrow B$ nazveme *o-homomorfismus*, jestliže platí:

$$\forall x, y \in A: x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

Snadno se ověří, že každý svazový homomorfismus je i o-homomorfismus. Přirozeně se nabízí otázka, jestli to platí i naopak. V následujícím příkladu si ukážeme, že to obecně neplatí.

Příklad 2.3. Na obrázku si ukážeme příklad o-homomorfismu:



Obrázek 2.3: o-homomorfismus f

Jak je vidět, tento o-homomorfismus není svazovým homomorfismem, protože platí:

$$f(a \wedge b) = f(0) = 0 \neq w = x \wedge y = f(a) \wedge f(b).$$

Obecně tedy svazové homomorfismy a o-homomorfismy nejsou ekvivalentní pojmy.

2.4. Speciální typy svazů

Definice 2.11. *Nechť $\mathbf{L}$ je svaz. Řekneme, že $\mathbf{L}$ je úplný svaz, jestliže v $(L, \leq)$ existuje infimum i supremum pro každou podmnožinu L .*

Poznámka 2.7. *Nejdůležitější rozdíl mezi obecným a úplným svazem je existence suprema a infima i pro nekonečné podmnožiny. Z toho plynou některé zajímavé vlastnosti úplných svazů, jako je např. existence největšího prvku $\sup L = 1$ a nejmenšího prvku $\inf L = 0$. Z Pozn. 2.3 plyne také, že každý konečný svaz je úplný.*

V následující definici zavedeme důležitý pojem horizontální sumy svazů, který budeme později používat v Kapitole 3.

Definice 2.12 ([4], Definition 4). *Nechť $(\mathbf{L}_i; i \in I) = ((L_i, \wedge_i, \vee_i, 0, 1); 0, 1)$ je neprázdný systém ohraničených svazů takový, že $L_i \cap L_j = \{0, 1\}$ pro každé $i, j \in I; i \neq j$ a položíme $L := \bigcup_{i \in I} L_i$. Definujeme binární operace $\wedge, \vee$ na L takto:*

$$x \vee y := \begin{cases} x \vee_i y, & \text{pokud existuje } i \in I \text{ tak, že } x, y \in L_i, \\ 1, & \text{jinak;} \end{cases}$$

$$x \wedge y := \begin{cases} x \wedge_i y, & \text{pokud existuje } i \in I \text{ tak, že } x, y \in L_i, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Strukturu $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, 0, 1)$ nazýváme horizontální suma svazů $\mathbf{L}_i, i \in I$, značíme $\odot(\{\mathbf{L}_i, i \in I\})$ a pro dva svazy můžeme psát $\mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2$.

Věta 2.6. *Nechť $\mathbf{L}_1$ a $\mathbf{L}_2$ jsou ohraničené svazy. Pak $\mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2$ je svaz a $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ jsou jeho podsvazy.*

Důkaz. V rámci jednotlivých svazů $\mathbf{L}_1$ a $\mathbf{L}_2$ problém není, protože si strukturu zachovávají podle definice. Stačí tedy pouze ověřit komutativitu, idempotenci, asociativitu a zákony absorpce pro prvky z různých svazů. Komutativita a idempotence je zjevná. Zbývá tedy ověřit asociativitu a zákony absorpce. Nechť $x \in L_1, y \in L_2$. Pak

$$x \wedge (x \vee y) = x \wedge 1 = x,$$

$$x \vee (x \wedge y) = x \vee 0 = x.$$

Tedy zákony absorpce platí. Zbývá ověřit asociativitu. Nechť $x, y \in L_1, z \in L_2$. Pak

$$(x \wedge y) \wedge z = 0 = x \wedge 0 = x \wedge (y \wedge z),$$

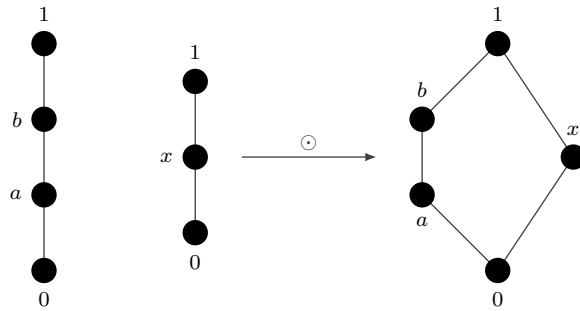
$$(x \vee y) \vee z = 1 = x \vee 1 = x \vee (y \vee z).$$

Případ pro $x \in L_1, y, z \in L_2$ se ukáže analogicky. Nechť $x, y \in \mathbf{L}_1$. Pak platí:

$$x \wedge y = x \wedge_1 y \in \mathbf{L}_1 \text{ a } x \vee y = x \vee_1 y \in \mathbf{L}_1.$$

Tedy $\mathbf{L}_1$ je podsvazem $\mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2$. Pro $\mathbf{L}_2$ se to ukáže analogicky. $\square$

Příklad 2.4. Na obrázku ukážeme, jak vypadá $\mathbf{C}_4 \odot \mathbf{C}_3$. Symbolem $\mathbf{C}_k$ rozumíme k -prvkový řetězec.



Obrázek 2.4: Horizontální suma řetězců $\mathbf{C}_4$ a $\mathbf{C}_3$

Poznámka 2.8. Pro potřeby této práce ve svazu $\mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2$ nazýváme podsvaz $\mathbf{L}_1$ jeho levou částí. Podsvaz $\mathbf{L}_2$ nazýváme jeho pravou částí. Předpisem $\mathbf{L} \odot \mathbf{L}$ budeme rozumět $\mathbf{L} \odot \mathbf{L}^*$, kde $\mathbf{L}^*$ je svaz izomorfní se svazem $\mathbf{L}$ takový, že $\mathbf{L} \cap \mathbf{L}^* = \{0, 1\}$.

Kapitola 3

Agregace na horizontálních sumách svazů

V Kapitole 1 jsme se seznámili s agregačními funkcemi a některými jejich konstrukčními metodami, které však byly definovány na reálném intervalu. Cílem této kapitoly je pokusit se modifikovat tyto metody pro práci se svazy. Nejprve uveďme formální definici agregační funkce na svazu, kterou je možné najít v literatuře, např. v [5].

Definice 3.1. *Nechť $\mathbf{L}$ je ohraničený svaz. Agregační funkcí na $\mathbf{L}$ rozumíme funkci $\mathbf{A}: \mathbf{L}^n \rightarrow \mathbf{L}$, pro kterou platí*

i) je neklesající v každé proměnné, tzn.

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}^n: \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \implies \mathbf{A}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{A}(\mathbf{y}),$$

ii) splňuje hraniční podmínky, tzn.

$$\mathbf{A}(0, \dots, 0) = 0 \text{ a } \mathbf{A}(1, \dots, 1) = 1.$$

Množina všech n -árních agregačních funkcí na svazu $\mathbf{L}$ se značí $\text{Agg}_n(\mathbf{L})$.

Je dobré si uvědomit, že $\text{Agg}_n(\mathbf{L})$ tvoří ohraničený svaz (samozřejmě pokud $\mathbf{L}$ je ohraničený). Formálněji to uvedeme v následující definici a větě.

Definice 3.2. *Nechť $\mathbf{L} = (L, \wedge, \vee, 0, 1)$ je ohraničený svaz. Definujme na množině $\text{Agg}_n(\mathbf{L})$ operace $\wedge, \vee$ takto:*

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Agg}_n(\mathbf{L}), \mathbf{x} \in \mathbf{L}^n: (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{x}),$$

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Agg}_n(\mathbf{L}), \mathbf{x} \in \mathbf{L}^n: (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}).$$

Dále definujeme nejmenší a největší agregační funkci (na reálném intervalu zmíněná v Příkladu 1.1) takto:

$$\mathbf{A}_{\perp}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x_i = 1 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, n\} \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_{\top}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x_i = 0 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, n\} \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta 3.1. *Nechť $\mathbf{L}$ je ohraničený svaz. Pak $(\text{Agg}_n(\mathbf{L}), \wedge, \vee, \mathbf{A}_{\perp}^{(n)}, \mathbf{A}_{\top}^{(n)})$ je ohraničený svaz.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \text{Agg}_n(\mathbf{L})$. Označme $(0, \dots, 0) = \mathbf{0}$ a $(1, \dots, 1) = \mathbf{1}$. Nejprve ověříme uzavřenost množiny $\text{Agg}_n(\mathbf{L})$ na svazové operace:

$$(\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2)(\mathbf{1}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{1}) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{1}) = 1 \wedge 1 = 1,$$

$$(\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2)(\mathbf{0}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{0}) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{0}) = 0 \wedge 0 = 0.$$

Dále nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}^n$, $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$. Pak platí:

$$(\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2)(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \text{ a } (\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2)(\mathbf{y}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{y}),$$

$$(\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) \leq \mathbf{A}_1(\mathbf{y}) \text{ a zároveň } \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \leq \mathbf{A}_2(\mathbf{y})) \implies$$

$$\implies \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) \leq \mathbf{A}_1(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{A}_2(\mathbf{y}).$$

Pro operaci spojení se to ukáže analogicky. Vidíme tedy, že $\text{Agg}_n(\mathbf{L})$ je uzavřena na obě oprace. Vlastnosti komutativity, idempotence, asociativity a zákony absorpce jsou zřejmé vzhledem k tomu, že obě operace jsou definovány pomocí svazových operací na $\mathbf{L}$, které zmíněné vlastnosti splňují, tedy $(\text{Agg}_n(\mathbf{L}), \wedge, \vee)$ je svaz.

Zbývá ověřit, že $\mathbf{A}_{\perp}^{(n)}, \mathbf{A}_{\top}^{(n)}$ jsou nejmenší a největší prvky. Nechť $\mathbf{x} \in \mathbf{L}^n$. Pak platí:

$$(\mathbf{A}_{\perp}^{(n)} \vee \mathbf{A}_1)(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_{\perp}^{(n)}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \vee 1, & \text{pro } \mathbf{x} = \mathbf{1}, \\ 0 \vee \mathbf{A}_1(\mathbf{x}), & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$(\mathbf{A}_{\top}^{(n)} \wedge \mathbf{A}_1)(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_{\top}^{(n)}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 \wedge 0, & \text{pro } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \\ 1 \wedge \mathbf{A}_1(\mathbf{x}), & \text{jinak.} \end{cases}$$

V obou případech se výrazy rovnají $\mathbf{A}_1(\mathbf{x})$. Tedy vidíme, že $\mathbf{A}_{\top}^{(n)}$ je neutrálním prvkem pro operaci průsek a $\mathbf{A}_{\perp}^{(n)}$ je neutrálním prvkem pro operaci spojení, tedy $\mathbf{A}_{\perp}^{(n)}, \mathbf{A}_{\top}^{(n)}$ jsou nejmenší a největší prvky. Z toho plyne, že $(\text{Agg}_n(\mathbf{L}), \wedge, \vee, \mathbf{A}_{\perp}^{(n)}, \mathbf{A}_{\top}^{(n)})$ je ohraničený svaz. $\square$

3.1. Modifikovaná transformační metoda pro horizontální sumy

Tato metoda se zabývá horizontálními sumami dvou izomorfních svazů. Uvedeme její definici a podíváme se na některé její vlastnosti. Formálně se omezíme pouze na unární agregační funkce (kvůli velkému množství možností ve vyšších aritách), ale bude zmíněno i možné zobecnění na vyšší arity.

Definice 3.3. *Nechť L a L_1, L_2 jsou izomorfní ohraničené svazy, které splňují $L_1 \cap L_2 = \{0, 1\}$. Dále nechť $B_1, B_2 \in \text{Agg}_1(L)$ a $\psi: L_1 \odot L_2 \rightarrow L$, $\phi_1, \phi_2: L \rightarrow L_1 \odot L_2$, jsou monotónní zobrazení, které splňují hraniční podmínky a platí, že*

$$\forall x \in L: \phi_1(x) \in L_1 \text{ a } \phi_2(x) \in L_2.$$

Nechť $i, j \in \{1, 2\}$, definujme funkci $A_{i,j}^{B_1, B_2}: L_1 \odot L_2 \rightarrow L_1 \odot L_2$ takto

$$A_{i,j}^{B_1, B_2}(x) = \begin{cases} \phi_i(B_1(\psi(x))), & \text{pokud } x \in L_1 \\ \phi_j(B_2(\psi(x))), & \text{pokud } x \in L_2. \end{cases}$$

Pokud bude z kontextu jasné, o které B_1, B_2 se jedná, budeme ji značit jen $A_{i,j}$.

Poznámka 3.1. *Upozorněme na to, že $A_{i,j}$ je opravdu definována korektně, protože*

$$x \in L_1 \cap L_2 \iff x \in \{0, 1\}.$$

Nechť tedy $x = 0$. Pak platí:

$$A_{i,j}(0) = \phi_i(B_1(\psi(0))) = \phi_i(B_1(0)) = \phi_i(0) = 0,$$

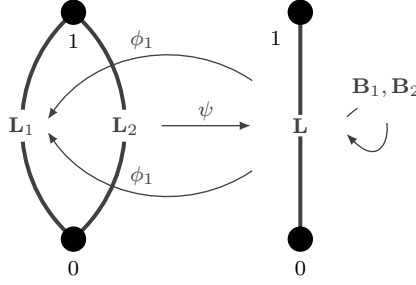
$$A_{i,j}(0) = \phi_i(B_2(\psi(0))) = \phi_i(B_2(0)) = \phi_i(0) = 0.$$

Vidíme tedy, že nedochází k žádné nejednoznačnosti. Pro 1 se ověření provede analogicky.

Příklad 3.1. *Pro unární případ z Definice 3.3 je tedy možné získat čtyři různé agregační funkce $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}$, a to volbou kombinací zobrazení ϕ_1, ϕ_2 . Uvedme explicitně alespoň jednu z nich:*

$$A_{1,1}(x) = \begin{cases} \phi_1(B_1(\psi(x))), & \text{pokud } x \in L_1 \\ \phi_1(B_2(\psi(x))), & \text{pokud } x \in L_2. \end{cases}$$

Jak je vidět, tato funkce zobrazí každý prvek z $L_1 \odot L_2$ na jeho levou část. Její konstrukce je vidět na Obrázku 3.1).



Obrázek 3.1: Schéma funkce $\mathbf{A}_{1,1}$

Věta 3.2. *Nechť $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ jsou izomorfní ohraničené svazy, pro které platí $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \{0, 1\}$. Pak platí, že $\mathbf{A}_{i,j}$ z Definice 3.3 je unární agregační funkce na $\mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2$, tzn. $\mathbf{A}_{i,j} \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2)$ pro každé $i, j \in \{1, 2\}$.*

Důkaz. Vzhledem k tomu, že všechna zmíněná zobrazení splňují hraniční podmínky, platí pro libovolné $i, j \in \{1, 2\}$ i následující:

$$\mathbf{A}_{i,j}(0) = \phi_i(\mathbf{B}_j(\psi(0))) = \phi_i(\mathbf{B}_j(0)) = \phi_i(0) = 0.$$

Pro prvek 1 se to ukáže analogicky.

Dále necht $x, y \in \mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2$, $x \leq y$, tedy dá se předpokládat, že $x, y \in \mathbf{L}_j$, pro nějaké $j \in \{1, 2\}$. Pak pro libovolné $i \in \{1, 2\}$ platí

$$\begin{aligned} x \leq y &\implies \psi(x) \leq \psi(y) \implies \mathbf{B}_j(\psi(x)) \leq \mathbf{B}_j(\psi(y)) \implies \\ &\implies \phi_i(\mathbf{B}_j(\psi(x))) \leq \phi_i(\mathbf{B}_j(\psi(y))) \implies \mathbf{A}_{i,j}(x) \leq \mathbf{A}_{i,j}(y). \end{aligned}$$

□

Vidíme tedy, že $\mathbf{A}_{i,j}$ je opravdu unární agregační funkce na $\mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2$. Nabízí se přirozená otázka, zda touto metodou získáme všechny unární agregační funkce na $\mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2$. Ukážeme, že pokud má $\mathbf{L}_1$ (a tedy i $\mathbf{L}_2$) neporovnatelné prvky, dostaneme zápornou odpověď.

Věta 3.3. *Nechť $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ jsou izomorfní ohraničené svazy s neporovnatelnými prvky, pro které platí $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \{0, 1\}$. Pak existuje funkce $\mathbf{A} \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2)$ taková, že není stejného typu jako funkce $\mathbf{A}_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2\}$, z Věty 3.3.*

Důkaz. Necht $a, b \in \mathbf{L}_1$ takové, že $a \parallel b$. Dále necht $f: \mathbf{L}_1 \rightarrow \mathbf{L}_2$ je izomorfismus. Uvažujme funkci $\mathbf{A}: \mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2 \rightarrow \mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2$ definovanou takto:

$$\mathbf{A}(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x > a \text{ nebo } x > b, \\ 0, & \text{pro } x < a \text{ nebo } x < b, \\ f(b), & \text{pro } x = b, \\ x, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zřejmě $\mathbf{A}$ splňuje $\mathbf{A}(0) = 0$ a $\mathbf{A}(1) = 1$, protože $0 < a$ a $1 > a$. Dále nechť $x, y \in \mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2, x \leq y$. Pak platí následující:

- $x \leq a$ nebo $x \leq b \implies f(x) = 0$ a tedy $f(x) \leq f(y)$,
- $x \geq a$ nebo $x \geq b \implies y \geq a$ nebo $y \geq b \implies f(x) = f(y) = 1$ a tedy $f(x) \leq f(y)$,
- $x \in \mathbf{L}_1, x \parallel a, x \parallel b \implies f(x) = x$ a $f(y) \in \{y, 1\}$ a tedy $f(x) \leq f(y)$,
- $x, y \in \mathbf{L}_2 \implies f(x) = x$ a $f(y) = y$ a tedy $f(x) \leq f(y)$.

Z toho plyne, že $\mathbf{A} \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2)$.

Předpokládejme, že tato funkce se dá zapsat ve tvaru z Definice 3.3. Potom, protože $\mathbf{A}(b) = f(b) \in \mathbf{L}_2$ a pro každé $x \in \mathbf{L}_2$ platí $\mathbf{A}(x) = x$, by musela funkce $\mathbf{A}$ vypadat takto:

$$\mathbf{A}(x) = \begin{cases} \phi_2(\mathbf{B}_1(\psi(x))), & \text{pokud } x \in \mathbf{L}_1, \\ \phi_2(\mathbf{B}_2(\psi(x))), & \text{pokud } x \in \mathbf{L}_2, \end{cases}$$

pro nějaké $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \text{Agg}_1(\mathbf{L})$ a ψ, ϕ_2 mající vlastnosti z Definice 3.3. Zároveň platí $\mathbf{A}(a) = a \in \mathbf{L}_1$, ale $\mathfrak{H}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{L}_2$, což je spor. $\square$

Zbývá ověřit případ bez neporovnatelných prvků, tedy řetězec. V následující větě ukážeme, že vzhledem k tomu, že pro každé dva prvky x, y v řetězci platí $x \leq y$ nebo $x \geq y$, nemůže nastat stejný problém, jako v důkazu předchozí věty a získáme tedy všechny unární agregační funkce na $\mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2$.

Věta 3.4. *Nechť $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ jsou izomorfní řetězce, pro které platí $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \{0, 1\}$. Pak každá funkce $\mathbf{A} \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2)$ je stejného typu jako funkce $\mathbf{A}_{i,j}$ z Def. 3.3, tzn. existují funkce $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ a zobrazení ψ, ϕ_1 a ϕ_2 tak, že*

$$\mathbf{A}(x) = \begin{cases} \phi_i(\mathbf{B}_1(\psi(x))), & \text{pokud } x \in \mathbf{L}_1, \\ \phi_j(\mathbf{B}_2(\psi(x))), & \text{pokud } x \in \mathbf{L}_2, \end{cases}$$

pro některé $i, j \in \{1, 2\}$.

Důkaz. Nechť $\mathbf{L}$ a $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ jsou izomorfní řetězce a $\phi_1: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}_1, \phi_2: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}_2$ jsou příslušné izomorfismy. Definujme zobrazení $\psi: \mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2 \rightarrow \mathbf{L}$ takto:

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi_1^{-1}(x), & \text{pro } x \in \mathbf{L}_1, \\ \phi_2^{-1}(x), & \text{pro } x \in \mathbf{L}_2. \end{cases}$$

Všimněme si, že zobrazení ψ je definováno korektně, protože nejednoznačnost by mohla vzniknout pouze v případě $x \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2 = \{0, 1\}$.

Nechť $\mathbf{A} \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2)$ je libovolná unární agregační funkce. Dále definujeme funkce $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \text{Agg}_1(\mathbf{L})$ pro $x \in \mathbf{L}$ takto:

$$\mathbf{B}_1(x) = \psi(\mathbf{A}(\phi_1(x))) \quad \text{a} \quad \mathbf{B}_2(x) = \psi(\mathbf{A}(\phi_2(x))). \quad (3.1)$$

Platí, že $\mathbf{A}(\mathbf{L}_1) \subseteq \mathbf{L}_i$ a $\mathbf{A}(\mathbf{L}_2) \subseteq \mathbf{L}_j$ pro nějaká $i, j \in \{1, 2\}$. Nechť $x \in \mathbf{L}_1$, kde $\mathbf{A}(x) \in \mathbf{L}_i$ pro nějaké $i \in \{1, 2\}$. Pak pro každé $y \in \mathbf{L}_1$ platí $y \leq x$ nebo $y \geq x$. Tedy dostaneme:

$$y \leq x \implies \mathbf{A}(y) \leq \mathbf{A}(x) \implies \mathbf{A}(y) \in \mathbf{L}_i,$$

$$y \geq x \implies \mathbf{A}(y) \geq \mathbf{A}(x) \implies \mathbf{A}(y) \in \mathbf{L}_i.$$

Z toho plyne, že $\mathbf{A}(\mathbf{L}_1) \subseteq \mathbf{L}_i$ a analogicky se ukáže, že $\mathbf{A}(\mathbf{L}_2) \subseteq \mathbf{L}_j$ pro nějaké $j \in \{1, 2\}$.

Předpokládejme, že existuje $z_1 \in \mathbf{L}_1$ takové, že $\mathbf{A}(z_1) \in \mathbf{L}_i \setminus \{0, 1\}$ pro nějaké $i \in \{1, 2\}$. V tom případě položíme $k = i$. Pokud $\mathbf{A}(z_1) \in \{0, 1\}$ pro všechny $z_1 \in \mathbf{L}_1$, položíme $k = 1$. Pokud existuje $z_2 \in \mathbf{L}_2$ takové, že $\mathbf{A}(z_2) \in \mathbf{L}_j \setminus \{0, 1\}$ pro nějaké $j \in \{1, 2\}$, pak položíme $l = j$. Pokud $\mathbf{A}(z_2) \in \{0, 1\}$ pro všechny $z_2 \in \mathbf{L}_2$, položíme $l = 2$.

Ukážeme, že funkce

$$\mathbf{A}_{k,l} = \begin{cases} \phi_k(\mathbf{B}_1(\psi(x))), & \text{pokud } x \in \mathbf{L}_1 \\ \phi_l(\mathbf{B}_2(\psi(x))), & \text{pokud } x \in \mathbf{L}_2. \end{cases}$$

získaná konstrukcí z Definice 3.3 je totožná s funkcí $\mathbf{A}$. Nechť $x_1 \in \mathbf{L}_1$ je libovolný prvek. Pak pro $\mathbf{B}_1$ definované pomocí vztahu (3.1) a podle definice zobrazení ψ dostáváme:

$$\mathbf{A}_{k,l}(x_1) = \phi_k(\psi(\mathbf{A}(\phi_1(\psi(x_1))))) = \phi_k(\psi(\mathbf{A}(\phi_1(\phi_1^{-1}(x_1))))) = \phi_k(\psi(\mathbf{A}(x_1))).$$

Víme ale, že $\mathbf{A}(x_1) \in \mathbf{L}_k$, tedy $\psi(\mathbf{A}(x_1)) = \phi_k^{-1}(\mathbf{A}(x_1))$, z čehož dostáváme $\mathbf{A}_{k,l}(x_1) = \mathbf{A}(x_1)$. Podobně dostaneme $\mathbf{A}_{k,l}(x_2) = \mathbf{A}(x_2)$ pro každé $x_2 \in \mathbf{L}_2$. $\square$

Nyní tedy víme, za jakých podmínek můžeme touto metodou zkonstruovat všechny unární agregační funkce na ohraničeném svazu. Za povšimnutí jistě stojí, že tuto metodu lze použít pro nalezení vnoření svazu $\text{Agg}_1(\mathbf{L}) \odot \text{Agg}_1(\mathbf{L})$ do $\text{Agg}_1(\mathbf{L} \odot \mathbf{L})$. Její použití demonstrujeme na následujícím příkladu.

Příklad 3.2. Nechť $\mathbf{C}_3$ je tříprvkový řetězec. Najděte všechny agregační funkce na $\text{Agg}_1(\mathbf{C}_3)$ a na $\text{Agg}_1(\mathbf{C}_3 \odot \mathbf{C}_3)$.

Řešení: Strukturu $\text{Agg}_1(\mathbf{C}_3)$ je vcelku jednoduché popsat. Pro každou agregační funkci platí, že $\mathbf{A}(0) = 0$ a $\mathbf{A}(1) = 1$. Pro $\mathbf{A}(a)$ zbývají 3 možnosti, tzn. $\text{Agg}_1(\mathbf{C}_3)$ je izomorfní s $\mathbf{C}_3$. Z toho plyne, že $\text{Agg}_1(\mathbf{C}_3) \odot \text{Agg}_1(\mathbf{C}_3)$ je izomorfní se čtyřprvkovým svazem, jehož dva prostřední prvky jsou neporovnatelné, označme jej $\mathbf{M}_2$.

Struktura svazu $\text{Agg}_1(\mathbf{C}_3 \odot \mathbf{C}_3)$ je už o poznání složitější. Vzhledem k tomu, že pro každou $\mathbf{A} \in \text{Agg}_1(\mathbf{C}_3 \odot \mathbf{C}_3)$ platí $\mathbf{A}(0) = 0$ a $\mathbf{A}(1) = 1$, dá se každá agregační funkce popsat tím, kam zobrazuje prvky a, b , tzn. přiřadíme jí uspořádanou dvojici $(\mathbf{A}(a), \mathbf{A}(b))$. Pak z toho, že $a \parallel b$, je libovolná kombinace přípustná, tzn. $\text{Agg}_1(\mathbf{C}_3 \odot \mathbf{C}_3)$ je izomorfní se svazem $\mathbf{M}_2 \times \mathbf{M}_2$.

Z Věty 3.4 víme, že lze všechny agregační funkce na horizontální sumě řetězců získat modifikovanou transformační metodou. Označme prvky $\mathbf{C}_3$ $0, a, 1$, kde $0 \prec a \prec 1$. Nechť $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \text{Agg}_1(\mathbf{C}_3)$. Označme $\mathbf{B}_1(a) = x$ a $\mathbf{B}_2(a) = y$, tzn. funkcím mohou přiřadit právě ten prvek, na který zobrazí a . Pak unární agregační funkce odpovídající těmto dvěma funkcím na $\mathbf{C}_3 \odot \mathbf{C}_3$ vypadá takto:

$$\mathbf{A}_{i,j}^{x,y} = \begin{cases} \phi_i(\mathbf{B}_1(\psi(x))), & \text{pokud } x \in \mathbf{L}_1, \\ \phi_j(\mathbf{B}_2(\psi(x))), & \text{pokud } x \in \mathbf{L}_2. \end{cases}$$

Takto můžeme získat množinu všech těchto funkcí. Samozřejmě některé funkce tohoto typu se rovnají (např. $\mathbf{A}_{1,2}^{0,0} = \mathbf{A}_{1,1}^{0,0} = \mathbf{A}_{2,1}^{0,0} = \mathbf{A}_{2,2}^{0,0}$). V našem případě dostáváme jako jednu z možných reprezentací dostáváme:

$$\begin{aligned} \text{Agg}_1(\mathbf{C}_3 \odot \mathbf{C}_3) = \{ & \mathbf{A}_{1,1}^{0,0}, \mathbf{A}_{1,1}^{a,0}, \mathbf{A}_{2,1}^{a,0}, \mathbf{A}_{1,1}^{1,0}, \mathbf{A}_{1,1}^{0,a}, \mathbf{A}_{1,2}^{0,a}, \mathbf{A}_{1,1}^{a,a}, \mathbf{A}_{1,2}^{a,a}, \\ & \mathbf{A}_{2,1}^{a,a}, \mathbf{A}_{2,2}^{a,a}, \mathbf{A}_{1,1}^{0,1}, \mathbf{A}_{1,1}^{a,1}, \mathbf{A}_{2,1}^{a,1}, \mathbf{A}_{2,2}^{1,a}, \mathbf{A}_{2,2}^{1,a}, \mathbf{A}_{1,1}^{1,1} \}. \end{aligned}$$

Dále si všimněme, že $\text{Agg}_1(\mathbf{C}_3) \odot \text{Agg}_1(\mathbf{C}_3)$ se dá vnořit do $\text{Agg}_1(\mathbf{C}_3 \odot \mathbf{C}_3)$ pomocí prostého přiřazení prvků svazu $\text{Agg}_1(\mathbf{C}_3) \odot \text{Agg}_1(\mathbf{C}_3)$ k agregačním funkcím z množiny všech agregačních funkcí na $\text{Agg}_1(\mathbf{C}_3 \odot \mathbf{C}_3)$. Nechť $\mathbf{B} \in \text{Agg}_1(\mathbf{C}_3)$ prvkům. Zmíněné vnoření h je pak definováno následovně:

$$h(\mathbf{B}) = \begin{cases} \mathbf{A}_{1,1}^{0,0}, & \text{pro } \mathbf{B} = \mathbf{A}_{\perp}^{(1)}, \\ \mathbf{A}_{1,1}^{a,a}, & \text{pro } \mathbf{B} = \text{id}_1, \\ \mathbf{A}_{2,2}^{a,a}, & \text{pro } \mathbf{B} = \text{id}_2, \\ \mathbf{A}_{1,1}^{1,1}, & \text{pro } \mathbf{B} = \mathbf{A}_{\top}^{(1)}. \end{cases}$$

Zřejmě tyto čtyři agregační funkce tvoří podsvaz svazu $\text{Agg}_1(\mathbf{C}_3 \odot \mathbf{C}_3)$, který je izomorfní s $\text{Agg}_1(\mathbf{C}_3) \odot \text{Agg}_1(\mathbf{C}_3)$.

Vyvstává otázka, jestli takové svazové vnoření najdeme obecně. Jak zjistíme, tuto metodu nalezení vnoření $\text{Agg}_1(\mathbf{L}) \odot \text{Agg}_1(\mathbf{L})$ do $\text{Agg}_1(\mathbf{L} \odot \mathbf{L})$ lze použít pouze pro nalezení vnoření, které zachovává uspořádání, ne však svazové vnoření. V následující větě to formálně ukážeme.

Věta 3.5. *Nechť $\mathbf{L}$ je ohraničený svaz. Potom svaz $\text{Agg}_1(\mathbf{L}) \odot \text{Agg}_1(\mathbf{L})$ lze pomocí o -homomorfismu vnořit do svazu $\text{Agg}_1(\mathbf{L} \odot \mathbf{L})$.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{L}$ a $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ jsou izomorfní ohraničené svazy a $\phi_1: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}_1$, $\phi_2: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}_2$ jsou příslušné izomorfismy.

Definujme $h: \text{Agg}_1(\mathbf{L}_1) \odot \text{Agg}_1(\mathbf{L}_2) \rightarrow \text{Agg}_1(\mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2)$. Pro všechny $\mathbf{B} \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_1)$ položme:

$$h(\mathbf{B})(x) = \begin{cases} \mathbf{B}(x), & \text{pokud } x \in \mathbf{L}_1, \\ \mathbf{B}(\phi_1(\phi_2^{-1}(x))), & \text{pokud } x \in \mathbf{L}_2, \end{cases} \quad (3.2)$$

a pro všechny $\mathbf{B} \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_2)$

$$h(\mathbf{B})(x) = \begin{cases} \mathbf{B}(\phi_2(\phi_1^{-1}(x))), & \text{pokud } x \in \mathbf{L}_1, \\ \mathbf{B}(x), & \text{pokud } x \in \mathbf{L}_2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Všimněme si, že tato definice kopíruje myšlenku z Definice 3.3. Tzn. také pro obor hodnot platí, že $\mathfrak{H}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbf{L}_1$, pokud $\mathbf{B} \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_1)$, taktéž pro $\mathbf{L}_2$. Dále poznamenejme, že zobrazení h je definované korektně, protože

$$\mathbf{B} \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_1) \cap \text{Agg}_1(\mathbf{L}_2) \iff \mathbf{B} \in \{\mathbf{A}_\perp^{(1)}, \mathbf{A}_\top^{(1)}\},$$

a v takovém případě problém s nejednoznačností zřejmě nenastává.

Nejprve ukážeme, že h je prosté. Nechť $\mathbf{B}_1 \neq \mathbf{B}_2$ jsou dvě různé agregační funkce z $\text{Agg}_1(\mathbf{L}_1) \odot \text{Agg}_1(\mathbf{L}_2)$. Předpokládejme, že $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_1)$. Tzn. existuje $x \in \mathbf{L}_1$ takové, že $\mathbf{B}_1(x) \neq \mathbf{B}_2(x)$. Ale to podle vztahu (3.2) znamená, že $h(\mathbf{B}_1)(x) \neq h(\mathbf{B}_2)(x)$. Analogicky se to ukáže v případě, že $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_2)$. Pokud $\mathbf{B}_1 \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_1)$ a $\mathbf{B}_2 \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_2)$, obrazy mají různé obory hodnot, tedy jsou to různé agregační funkce.

Nakonec ukážeme, že námi definované zobrazení h zachovává uspořádání. Nechť $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_1) \odot \text{Agg}_1(\mathbf{L}_2)$ jsou agregační funkce. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_1)$ a $\mathbf{B}_1 \leq \mathbf{B}_2$. Nechť $x \in \mathbf{L}_1$. Potom podle (3.2) platí:

$$h(\mathbf{B}_1)(x) = \mathbf{B}_1(x) \quad \text{a} \quad h(\mathbf{B}_2)(x) = \mathbf{B}_2(x) \implies h(\mathbf{B}_1) \leq h(\mathbf{B}_2).$$

Dále nechť $x \in \mathbf{L}_2$. Pak platí:

$$h(\mathbf{B}_1)(x) = \mathbf{B}_1(\phi_1(\phi_2^{-1}(x))) \quad \text{a} \quad h(\mathbf{B}_2)(x) = \mathbf{B}_2(\phi_1(\phi_2^{-1}(x))).$$

Pak zřejmě, protože izomorfismy ϕ_1, ϕ_2 zachovávají uspořádání oběma směry, platí, že $h(\mathbf{B}_1) \leq h(\mathbf{B}_2)$. Tzn. vidíme, že pro $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_1)$ je uspořádání zachováno. Pro $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \text{Agg}_1(\mathbf{L}_2)$ se to ukáže analogicky. $\square$

V následujícím příkladu si ukážeme případ, ve kterém se jedná pouze o vnoření s vlastností o-homomorfismu, ale ne svazové.

Příklad 3.3. *Nechť $\mathbf{L} = \mathbf{C}_4$. Označme jeho prvky $0, a, b, 1$ tak, že $0 \prec a \prec b \prec 1$. Podle Věty 3.5 existuje vnoření pomocí o-homomorfismu svazu $\text{Agg}_1(\mathbf{L}) \odot \text{Agg}_1(\mathbf{L})$ do svazu $\text{Agg}_1(\mathbf{L} \odot \mathbf{L})$.*

Nyní uvažujme funkci $\mathbf{B} \in \text{Agg}_1(\mathbf{L})$ definovanou takto:

$$\mathbf{B}(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in \{b, 1\}, \\ x, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Označme $\mathbf{B}_1$ funkci $\mathbf{B}$ v levé části svazu $\text{Agg}_1(\mathbf{L}) \odot \text{Agg}_1(\mathbf{L})$ a $\mathbf{B}_2$ funkci $\mathbf{B}$ v jeho části pravé. Stejně pak označme dolními indexy 1, respektive 2, prvky svazu $\mathbf{L} \odot \mathbf{L}$ z jeho levé, respektive pravé části. Pak určitě platí, že $\mathbf{B}_1 \wedge \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_{\perp}^{(1)}$. Tzn. $h(\mathbf{B}_1 \wedge \mathbf{B}_2) = \mathbf{A}_{\perp}^{(1)} \in \text{Agg}_1(\mathbf{L} \odot \mathbf{L})$. Nyní zbývá vyřešit, čemu se rovná $h(\mathbf{B}_1) \wedge h(\mathbf{B}_2)$. Rozepišme $h(\mathbf{B}_1)$ podle vztahu (3.2), kde ϕ_1, ϕ_2 pokládáme přirozeně jako identické izomorfismy, takto:

$$h(\mathbf{B}_1)(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in \{b_1, b_2, 1\}, \\ a_1, & \text{pro } x \in \{a_1, a_2\}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Analogicky pro $h(\mathbf{B}_2)$ ze vztahu (3.3):

$$h(\mathbf{B}_2)(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in \{b_1, b_2, 1\}, \\ a_2, & \text{pro } x \in \{a_1, a_2\}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak ale $h(\mathbf{B}_1) \wedge h(\mathbf{B}_2) = \mathbf{A}$, kde $\mathbf{A}$ je dáno takto:

$$\mathbf{A}(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in \{b_1, b_2, 1\}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

To ale znamená, že $h(\mathbf{B}_1 \wedge \mathbf{B}_2) \neq h(\mathbf{B}_1) \wedge h(\mathbf{B}_2)$, tedy zobrazení h nezachovává operaci průsek. Analogicky by se ukázalo, že nezachovává ani operaci spojení, určitě tedy není svazovým homomorfismem.

3.2. Zobecnění modifikované transformační metody

Ukažme, jak by vypadala tato metoda pro více-ární agregační funkce. Jak bylo zmíněno, omezili jsme se na unární agregační funkce hlavně kvůli vysokému počtu možností vzniklých funkcí. Uvedme nejprve příklad pro binární

funkci, kde ϕ_1, ϕ_2, ψ jsou zobrazení s vlastnostmi z Definice 3.3:

$$\mathbf{A}_{i,j,k,l}(x, y) = \begin{cases} \phi_i(\mathbf{B}_1(\psi(x), \psi(y))), & \text{pro } x, y \in \mathbf{L}_1, \\ \phi_j(\mathbf{B}_2(\psi(x), \psi(y))), & \text{pro } x \in \mathbf{L}_1, y \in \mathbf{L}_2, \\ \phi_k(\mathbf{B}_3(\psi(x), \psi(y))), & \text{pro } x \in \mathbf{L}_2, y \in \mathbf{L}_1, \\ \phi_l(\mathbf{B}_4(\psi(x), \psi(y))), & \text{pro } x, y \in \mathbf{L}_2, \end{cases}$$

pro $i, j, k, l \in \{1, 2\}$. Dostáváme tedy $2^4 = 16$ možných funkcí, zřejmě tento počet roste exponenciálně se zvyšující se aritou, konkrétně pro n -ární agregační funkci je jejich počet 2^{2^n} .

Další možností, jak by šlo tuto metodu zobecnit, je zvýšit počet svazů v horizontální sumě. Např. vezměme $(\mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2 \odot \mathbf{L}_3)$. Nechť $\phi_1: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}_1, \phi_2: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}_2, \phi_3: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}_3, \psi: \mathbf{L}_1 \odot \mathbf{L}_2 \odot \mathbf{L}_3 \rightarrow \mathbf{L}$ jsou monotonní zobrazení zachovávající hraniční podmínky. Pak by situace vypadala takto:

$$\mathbf{A}_{i,j,k}(x) = \begin{cases} \phi_i(\mathbf{B}_1(\psi(x))), & \text{pro } x \in \mathbf{L}_1, \\ \phi_j(\mathbf{B}_2(\psi(x))), & \text{pro } x \in \mathbf{L}_2, \\ \phi_k(\mathbf{B}_3(\psi(x))), & \text{pro } x \in \mathbf{L}_3, \end{cases}$$

pro $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Ve výsledku tedy $3^3 = 27$ možných funkcí. V tomto případě je počet možných unárních agregačních funkcí na horizontální sumě k svazů roven k^k . Celkově můžeme říct, že počet možných n -árních agregačních funkcí na horizontální sumě k svazů roven k^{k^n} .

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se s konstrukčními metodami agregačních funkcí a následně je modifikovat pro použití na svazech. Výsledky tohoto zkoumání jsou shrnuty ve třetí kapitole. Dokázali jsme, za jakých okolností takto dostaneme všechny agregační funkce a jak tuto metodu využít pro nalezení o -homomorfního vnoření horizontální sumy svazů agregačních funkcí do svazu agregačních funkcí na horizontální sumě.

Na tyto výsledky by se dalo navázat zkoumáním, jestli existuje svazové vnoření horizontální sumy svazů agregačních funkcí do svazu agregačních funkcí na horizontální sumě, které se pomocí naší modifikované transformační metody nalézt nepodařilo. Dá se předpokládat, že takové vnoření existuje, a to i pro vyšší arity agregačních funkcí. Dále by se výzkum mohl ubírat směrem zobecnění naší modifikované transformační metody pro agregační funkce vyšších arit, popřípadě horizontální sumy většího počtu svazů. Nakonec stojí za zmínku možnost modifikace některé z dalších zmíněných metod z první kapitoly (tzn. skládání a vážení) nebo i jiných, např. idempotizace na jiných svazech, než pouze na reálných intervalech.

Literatura

- [1] Grabisch, M., Marichal, J., Mesiar, R., Pap, E.: *Aggregation Functions*. Cambridge University Press, New York, 2009.
- [2] Rachůnek, J.: *Svazy* VUP Olomouc, 2003.
- [3] Chajda, I.: *Teorie svazů a universální algebra*. VUP Olomouc, 2013.
- [4] Chajda, I., Länger, H.: *Horizontal sums of bounded lattices*. Mathematica Pannonica 20/1 (2009), 4.
- [5] Halaš, R., Kurač, Z., Mesiar, R., Pócs, J.: *Binary generating set of the clone of idempotent aggregation functions on bounded lattices*. Information Sciences 462 (2018).
- [6] Olšák, P.: *TeXbook naruby*. Konvoj, Brno, 2001.