

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO V OLOMOUCI  
KATEDRA OPTIKY

**HERMITEOVY-GAUSSOVY  
A LAGUERREOVY-GAUSSOVY SVAZKY  
V KLASICKÉ OPTICE**

Bakalářská práce

VYPRACOVAL:

Ondřej Martinec

obor B1701 Obecná fyzika a matematická fyzika

studijní rok 2009/2010

VEDOUCÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE:

RNDr. Antonín Lukš, CSc.

### **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Antonína Lukše, CSc., za použití literatury uvedené v závěru práce.

V Olomouci 4.1.2010

*Děkuji RNDr. Antonínu Lukšovi, CSc., za cenné rady a konzultace.*

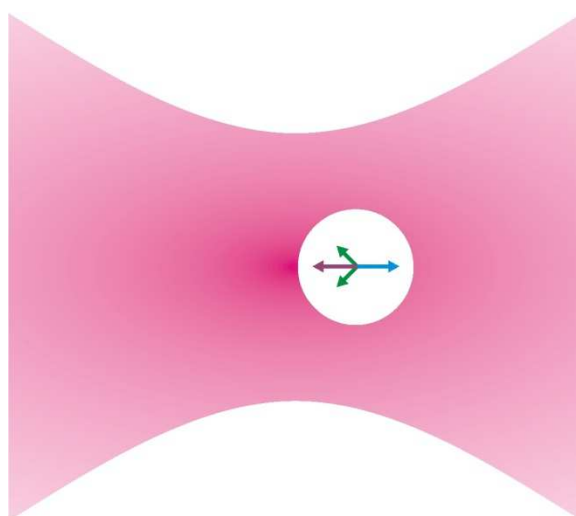
## Obsah

Úvod	1
1. Odvození paraxiální vlnové rovnice	3
2. Gaussův svazek a jeho vlastnosti	8
3. Hermiteovy-Gaussovy svazky v homogenním prostředí	13
4. Laguerreovy-Gaussovy svazky	16
5. Vliv běžných optických prvků a prostředí	18
6. Analogie s kvantovou mechanikou	20
7. Závěr	22

## Úvod

Cílem mé bakalářské práce je seznámit čtenáře s Hermiteovými-Gaussovými a Laguerreovými-Gaussovými svazky. Jedná se o poměrně novou, ale poslední dobou rychle se rozvíjející oblast optiky.

Tyto svazky byly původně jenom obecnější formou popisu laserových svazků. V technické praxi se spíše používá gaussovských svazků, ovšem s postupujícím pokrokem v laserových technologiích se uvažuje o přístrojích a aplikacích laserů tvořených obecnějšími svazky, které mají unikátní vlastnosti. Jedná se např. o tzv. „světlené pinzety“, které umožňují „uchopit“ jednotlivé mikročástice. Zjednodušené schéma této pinzety uvádím na obrázku 1.



Obrázek 1. Schematické znázornění světelné pinzety. Laserový svazek fokusován čočkou vytváří dva druhy sil. První, naznačena modrou šipkou, je síla vyvolaná pohlceným světlem, druhá, zelené šipky, je vyvolaná lomem světla na zachycené částice, přičemž celková síla pocházející z lomu světla je naznačena fialovou šipkou. Částička je zachycena kousek za místem největšího zúžení, kde jsou oba výše zmíněné druhy sil v rovnováze.

Využití těchto pinzet se nabízí třeba v biologii při výzkumu jevů na úrovni buněk, nebo třeba při výzkumu dynamiky tekutin, kdy je možné jednotlivé částičky označit světélkujícím proteinem a jednodušeji poté detekovat jejich pohyb. Laguerreovy-Gaussovy svazky dokáží uchycené částice roztočit, což by mohlo nalézt uplatnění v nanotechnologiích.

Hermiteovy-Gaussovy svazky se používají jako model laserů, jejichž záření nemá rotační symetrii vůči ose svazku ve směru šíření, ale je rozdělené vodorovně nebo svisle do oblastí. To je hlavní rozdíl od Laguerreových-Gaussových svazků, které mají intenzitu záření opět rotačně symetrickou podél osy ve směru šíření záření.

Má bakalářská práce si klade za cíl stát se úvodem do problematiky těchto obecnějších svazků. Zaměřuje se především na jejich odvození, ukázání několika základních vlastností a

nakonec uvádím některé zajímavé analogie s kvantovou mechanikou. Jelikož se jedná o úvod do problematiky, snažím se vést svůj výklad názorně a srozumitelně, s připomenutím základních matematických operátorů.

Vycházím především z literatury, z článků publikovaných ve vědeckých časopisech a na internetu. Vzhledem k většímu počtu zdrojů jsem zvolil jeden druh značení fyzikálních veličin. Proto při zpětném studiu materiálů uvedených v seznamu použité literatury je nutné mít na zřeteli moje značení fyzikálních veličin, aby nedošlo k nejasnostem.

## 1. Odvození paraxiální vlnové rovnice

V této části uvedu základy teorie elektromagnetického pole, odvození vlnové a Helmholtzovy rovnice a jejich paraxiální aproximace.

Elektromagnetické pole v prostoru se popisuje pomocí dvou vektorů, vektoru elektrické intenzity  $\mathbf{E}$  a vektoru magnetické intenzity  $\mathbf{H}$ . Abychom mohli vyjádřit šíření tohoto pole v látce, je nutné zavést vektory elektrické indukce  $\mathbf{D}$  a magnetické indukce  $\mathbf{B}$ . Vztahy mezi těmito vektory udávají Maxwellovy rovnice

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J}, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_e, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{1.1-1.4}$$

kde  $\mathbf{J}$  je hustota vodivého proudu a  $\rho_e$  je hustota volného náboje.

Rovnice (1.1) je diferenciální tvar obecného Ampérova zákona a popisuje indukci magnetického pole způsobenou tokem náboje. Rovnice (1.2) je diferenciální formou Faradayova indukčního zákona. Popisuje indukci elektrického pole jako působení časově proměnného magnetického pole. Rovnice (1.3) je diferenciální formou Coulombova zákona a popisuje vztah mezi rozložením náboje a elektrickým polem. Rovnice (1.4) nám říká, že neexistují žádné volné magnetické monopóly.

Zopakuji pro zdůraznění význam jednotlivých operátorů. Výraz  $\nabla \times \mathbf{E}$  znamená rotaci vektoru elektrické intenzity, která je definována výrazem

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{x} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{y} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{z},\tag{1.5}$$

kde  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  jsou jednotkové vektory popořadě ve směru os  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Výraz  $\nabla \cdot \mathbf{D}$  znamená divergenci elektrické indukce a je definován výrazem

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.\tag{1.6}$$

K popisu působení elektromagnetického pole na prostředí je třeba doplnit Maxwellovy rovnice tzv. materiálovými vztahy

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},\tag{1.7}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M},\tag{1.8}$$

kde  $\mu$ , resp.  $\varepsilon$  jsou tenzory druhého stupně, tedy tenzor permeability, resp. tenzor permitivity,  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{M}$  jsou vektory elektrické a magnetické polarizace a  $\mu_0$  a  $\varepsilon_0$  je permeabilita a permitivita vakua.

Pro odvození vlnové rovnice pro elektrickou intenzitu  $\mathbf{E}$  vyjdeme z rovnice (1.2), na kterou aplikujeme operátor rotace

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} = 0. \quad (1.9)$$

Předpokládejme, že  $\mathbf{J} = 0$ , tedy, že jsme v oblasti bez proudů. Derivujeme-li rovnici (1.1) podle času, dosadíme-li do předchozí rovnice a použijeme-li materiálový vztah (1.7), dostaneme

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.10)$$

V případě, že materiál je izotropní, redukují se tenzory  $\mu$  a  $\varepsilon$  na skaláry a dají se vytknout před vektorové operace, jelikož se vzhledem k derivacím chovají jako konstanty. Dále platí identita

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (1.11)$$

Z rovnice (1.3) a z materiálového vztahu (1.7) pro homogenní prostředí bez volného náboje plyne, že

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0.$$

Dostáváme tak rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.12)$$

což je tzv. vlnová rovnice pro vektor elektrické intenzity  $\mathbf{E}$ . Obdobným způsobem se získá vlnová rovnice i pro vektor magnetické intenzity  $\mathbf{H}$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.13)$$

Někdy se výraz  $\mu \varepsilon$  nahrazuje výrazem  $1/c^2$ , kde  $c$  označuje rychlost světla v daném prostředí.

Při odvození Helmholtzovy rovnice hledáme řešení vlnové rovnice pro funkci  $u(\mathbf{r}, t)$  pomocí separace proměnných, tedy předpokládáme, že řešení je ve tvaru

$$u(\mathbf{r}, t) = T(t)U(\mathbf{r}). \quad (1.14)$$

Po dosazení této funkce do vlnové rovnice po úpravách obdržíme

$$\frac{\nabla^2 U}{U} = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (1.15)$$



Levá strana této rovnice závisí pouze na  $\mathbf{r}$  a pravá strana pouze na  $t$ . Z toho plyne, že tato rovnice je obecně řešitelná pouze v případě, že obě strany této rovnice se rovnají konstantě, označme si ji pro jednoduchost  $-k^2$ . Po jednoduché úpravě dostaneme tedy

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0. \quad (1.16)$$

Tato rovnice je tzv. Helmholtzova rovnice. Druhá rovnice pro čas bude tvaru

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 c^2 T = 0, \quad (1.17)$$

kde bychom mohli nahradit výraz  $kc$  za úhlovou frekvenci  $\omega$ . Z toho můžeme usoudit, že  $k$  odpovídá vlnovému číslu.

K dalšímu výkladu zavedeme vlnové funkce. Optická vlna se matematicky popisuje pomocí reálné funkce polohy  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  a času  $t$  označované jako vlnová funkce. I tato funkce musí splňovat vlnovou rovnici.

Monochromatická vlna je matematicky popsána pomocí vektorové vlnové funkce, kde závislost na čase je popsána harmonickou funkcí

$$u(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cos[2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})], \quad (1.18)$$

kde  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  je vektorová amplituda. Neboli velikost výchylky,  $\varphi(\mathbf{r})$  je fáze,  $\nu$  je frekvence.

Tuto funkci bývá často vhodné popsat, omezující se na jednu polarizační složku, pomocí komplexní vlnové funkce

$$U(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \exp[i2\pi\nu t + i\varphi(\mathbf{r})]. \quad (1.19)$$

Tato funkce splňuje vlnovou rovnici. Vlnová funkce je jednoduše reálná část komplexní vlnové funkce. Předchozí rovnice může být napsaná ve tvaru

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(i2\pi\nu t), \quad (1.20)$$

kde funkce  $U(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \exp[i\varphi(\mathbf{r})]$  se nazývá komplexní amplituda.

Jednoduchý příkladem vlnové funkce je sférická vlna, pro kterou platí vyjádření

$$U(r) = \frac{A}{r} \exp(-ikr), \quad (1.21)$$

kde  $r$  je vzdálenost od zdroje a  $k$  je vlnové číslo. Komplexní číslo  $A$  v tomto výrazu se označuje jako komplexní obálka.

Můžeme předpokládat, že elektromagnetické pole se šíří jako svazek konečné šířky, který postupuje určitým směrem. K analyzování tohoto šíření můžeme použít tzv. paraxiální aproximace vlnové rovnice, nebo přesněji paraxiální aproximace Helmholtzovy rovnice. Vlna je paraxiální, jestliže normály k vlnoplochám jsou paraxiální paprsky. Jednou z možností je zvolit za komplexní amplitudu funkci

$$U(\mathbf{r}, \omega) = A(\mathbf{r}, \omega) \exp(-ikz), \quad (1.22)$$

popisující šíření vlny podél osy  $z$ , přičemž platí, že změna komplexní obálky  $A(\mathbf{r}, \omega)$  musí být malá vzhledem k vlnové délce  $\lambda$ , takže vlna odpovídá přibližně rovinné vlně.

Dosadíme-li tuto funkci do Helmholtzovy rovnice, obdržíme

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}, \omega) + k^2 U(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (1.23)$$

Jednotlivé diferenciální operátory můžeme rozložit do transversální složky a složky  $z$ . Tedy pro gradient můžeme psát

$$\text{grad} \{ \} = \nabla \{ \} = \nabla_t \{ \} + z \frac{\partial}{\partial z} \{ \}, \quad (1.24)$$

kde

$$\nabla_t \{ \} = \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x} \{ \} + \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial y} \{ \}, \quad (1.25)$$

takže

$$\nabla U(\mathbf{r}, \omega) = \left[ \nabla_t A(\mathbf{r}, \omega) + z \frac{\partial}{\partial z} A(\mathbf{r}, \omega) - ikz A(\mathbf{r}, \omega) \right] \exp(-ikz). \quad (1.26)$$

Pro Laplaceův operátor můžeme psát

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}, \omega) = \nabla_t^2 A(\mathbf{r}, \omega) \exp(-ikz) + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial z} A(\mathbf{r}, \omega) - ik A(\mathbf{r}, \omega) \right] \exp(-ikz) \right\}, \quad (1.27)$$

kde

$$\nabla_t^2 \{ \} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ \}, \quad (1.28)$$

tudíž

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}, \omega) = \left[ \nabla_t^2 A(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A(\mathbf{r}, \omega) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} A(\mathbf{r}, \omega) - k^2 A(\mathbf{r}, \omega) \right] \exp(-ikz). \quad (1.29)$$

Rozložená Helmholtzova rovnice nakonec nabude tvaru

$$\nabla_t^2 A(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A(\mathbf{r}, \omega) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} A(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (1.30)$$

Paraxiální aproximace je definována podmínkou

$$2ik \frac{\partial}{\partial z} A(\mathbf{r}, \omega) \gg \frac{\partial^2}{\partial z^2} A(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.31)$$

kteřá znamená, že podélná odchylka funkce se velmi málo mění vzhledem k vlnové délce svazku. S touto aproximací tedy zanedbáme druhý člen na levé straně rovnice (1.30) a dostaneme rovnici

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 A(\mathbf{r}, \omega) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} A(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (1.32)$$

kteřá se nazývá paraxiální aproximace Helmholtzovy rovnice pro  $A(\mathbf{r}, \omega)$ , nebo též paraxiální aproximace vlnové rovnice pro  $A(\mathbf{r}, \omega)$ . Pokud je vlna monochromatická, tak se nám redukuje závislost funkce  $A$  pouze na  $\mathbf{r}$ .

## 2. Gaussův svazek a jeho vlastnosti

Pokračujme dále s monochromatickými paraxiálními vlnami. Jak bylo řečeno výše, paraxiální vlna je rovinná vlna modulovaná komplexní obálkou  $A(\mathbf{r})$ , která je pomalu měnící se funkcí polohy. Aby komplexní amplituda  $U(\mathbf{r})$  byla řešením Helmholtzovi rovnice, musí být komplexní obálka řešením paraxiální Helmholtzovi rovnice, jak jsem ukázal výše.

Jedno z řešení vyhovující paraxiální Helmholtzově rovnici je paraboloidní vlna s komplexní obálkou

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{z} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right), \rho^2 = x^2 + y^2, \quad (2.1)$$

kde  $A_1$  je konstanta a  $k$  je vlnové číslo. Paraboloidní vlna je tzv. Fresnelova aproximace sférické vlny. Ukažme, že vyhovuje paraxiální vlnové rovnici, tedy že pro ni platí

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 A(\mathbf{r}) - 2ik \frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial z} = 0. \quad (2.2)$$

Pro první derivaci podle  $x$  platí

$$\frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial x} = \frac{-ikx}{z} \frac{A_1}{z} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right). \quad (2.3)$$

Pro druhou derivaci podle  $x$  obdržíme

$$\frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial x^2} = \frac{-ik}{z} \frac{A_1}{z} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right) - \left(\frac{kx}{z}\right)^2 \frac{A_1}{z} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right). \quad (2.4)$$

Obdobně pro derivaci podle  $y$

$$\frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial y^2} = \frac{-ik}{z} \frac{A_1}{z} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right) - \left(\frac{ky}{z}\right)^2 \frac{A_1}{z} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right). \quad (2.5)$$

Pro derivaci podle  $z$  obdržíme výraz

$$\frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial z} = -\frac{A_1}{z^2} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right) + \frac{ik \rho^2 A_1}{2z^3} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right). \quad (2.6)$$

Po dosazení do výrazu (2.2) a uvědomění si významu funkce  $\rho$ , zjistíme, že funkce  $A(\mathbf{r})$  opravdu vyhovuje paraxiální vlnové rovnici.

Nahradíme-li  $z$  rozdílem  $z - \xi$ , kde  $\xi$  je komplexní číslo, obdržíme funkci

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2q(z)}\right), q(z) = z - \xi, \quad (2.7)$$

která také řeší paraxiální Helmholtzovu rovnici.

Pokud je  $\zeta$  ryze imaginární číslo, řekněme  $\zeta = -iz_0$ , stane se předchozí funkce komplexní obálkou Gaussova svazku.

Pro  $A_1 = \frac{ik}{2\pi} = \frac{i}{\lambda}$  je paraboloidní vlna (až na činitel  $\theta(z)$ ) fundamentální řešení paraxiální vlnové rovnice, tj. nástroj, pomocí kterého se tvoří řešení počáteční úlohy  $A|_{z=0} = U_0(x, y)$ . (V matematické fyzice  $\theta(z)$  znamená funkci jednotkového skoku.)

Rozdělme funkci  $1/q(z)$  na reálnou a imaginární část pomocí dvou nových funkcí

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi W^2(z)}. \quad (2.8)$$

Zde

$$W(z) = W_0 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.9)$$

$$W_0 = \left( \frac{\lambda z_0}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.10)$$

$$R(z) = z \left( 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right). \quad (2.11)$$

Funkce  $R(z)$  definovaná vztahem (2.11) je poloměr křivosti vlnoploch svazku, funkce  $W(z)$  se pološířkou svazku.

Dosadíme-li do výrazu (2.7) a s použitím výrazu (1.22) a s přihlédnutím k tomu, že  $\text{arctg}(z) = \frac{1}{2}i [\ln(1-iz) - \ln(1+iz)]$ , obdržíme komplexní amplitudu pro gaussovský svazek

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp \left\{ -i[kz - \eta(z)] - i \frac{k\rho^2}{2q(z)} \right\} \\ &= A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp \left\{ -i[kz - \eta(z)] - \rho^2 \left( \frac{1}{W^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

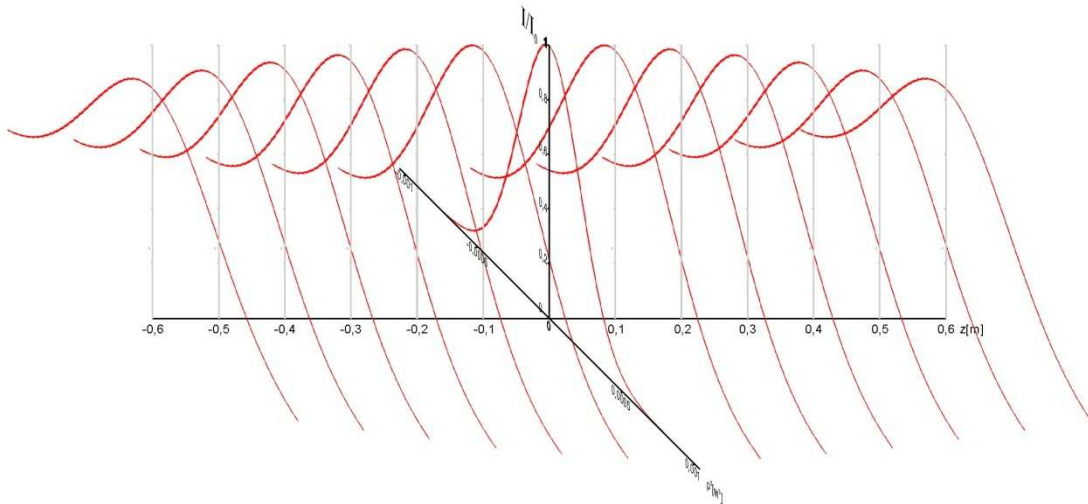
$$\eta(z) = \text{arctg} \left( \frac{z}{z_0} \right). \quad (2.13)$$

Dva parametry,  $A_0 = A_1/iz_0$  a  $z_0$ , se určují z počátečních podmínek. Funkce (2.9) - (2.10), (2.13) jsou parametry svazku. Parametr  $z_0$  se nazývá Reyleighova délka.

Funkce  $\chi(z) = -\eta(z)$  se nazývá Gouyovou fází a určuje zpoždění fáze vlnoplochy Gaussova svazku ve srovnání s rovinnou nebo sférickou vlnou.

Uvedená komplexní amplituda se dá odvodit metodou fundamentálního řešení pro počáteční údaj

$$U_0(x, y) = A_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{W_0^2}\right). \quad (2.14)$$



Obrázek 2. Vývoj intenzity Gaussova svazku během šíření v prostoru. Svazek je tvořen světlem o vlnové délce 550 nm a šíří se vakuem. Na vodorovné ose je znázorněna vzdálenost v metrech, přičemž bod 0 je umístěn v místě maximálního zúžení svazku. Na svislé ose je znázorněna intenzita svazku, normovaná podle  $I_0$  – intenzity na ose svazku v místě maximálního zúžení. Na příčné ose je radiální vzdálenost od osy svazku, která je v metrech. Ve větších vzdálenostech za místem maximálního zúžení svazku lze pozorovat, jak vrchol intenzity klesá a zároveň se rozšiřuje pološířka Gaussova rozdělení intenzity svazku, což odpovídá tomu, že se svazek rozostřuje.

Gaussův vlnový svazek je jednoznačně popsán třemi parametry: intenzitou záření, výkonem svazku a poloměrem svazku. Intenzita záření je funkcí osové vzdálenosti  $z$  a radiální vzdálenosti  $r$ ,

$$I(r, z) = I_0 \left(\frac{W_0}{W(z)}\right)^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2(z)}\right). \quad (2.15)$$

Na ose svazku má intenzita maximální hodnotu  $I_0$  a s rostoucím  $z$  spojitě klesá.

Hodnotu  $I_0$  určíme ze vztahu pro intenzitu

$$I(r, z) = \frac{|U(r, z)|^2}{2Z} = \frac{A_0 A_0^*}{2Z} \left(\frac{W_0}{W(z)}\right)^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2(z)}\right), \quad (2.16)$$

kde  $Z = (c_0 \epsilon n)^{-1}$  je impedance prostředí, kde  $n$  znamená index lomu prostředí,  $c_0$  rychlost světla ve vakuu, pro vakuum má hodnotu přibližně  $377 \Omega$ . Tedy pro hodnotu  $I_0$  platí

$$I_0 = \frac{A_0 A_0^*}{2Z}. \quad (2.17)$$

Rozložení intenzity svazku v různých bodech šíření ukazují na obrázku 2.

Celkový výkon přenášený svazkem je dán integrálem součinu intenzity svazku a plochy jeho příčného průřezu

$$P = \int_0^{\infty} I(r, z) 2\pi r dr = I_0 \left( \frac{W_0}{W(z)} \right)^2 2\pi \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2(z)}\right) r dr = \frac{1}{2} I_0 \pi W_0^2. \quad (2.18)$$

Na ose svazku tedy podle (2.17) platí

$$P = \frac{1}{2} I(0, z) \pi W^2(z). \quad (2.19)$$

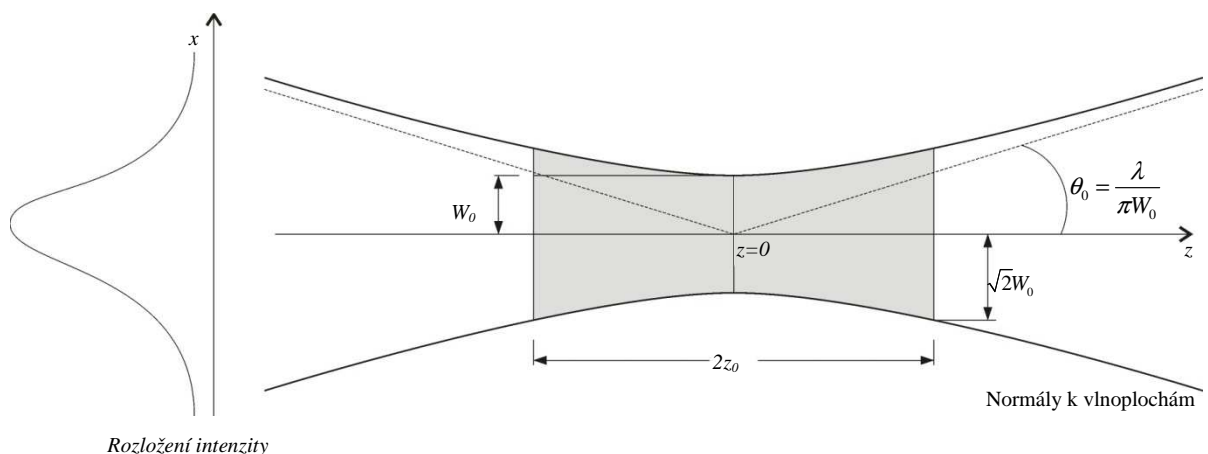
Uvnitř kružnice o poloměru  $W$  je přibližně přenášeno 86% energie, o poloměru  $1,5 W$  je to asi 99% výkonu. Jelikož se gaussovské svazky často charakterizují přenášeným výkonem  $P$ , je vhodné vyjádřit  $I$  jako funkci  $P$

$$I(r, z) = \frac{2P}{\pi W^2(z)} \exp\left(-\frac{2r^2}{W^2(z)}\right). \quad (2.20)$$

Protože se většina energie šíří v oblasti o poloměru  $W$ , nazývá se  $W$  pološířka svazku. Závislost pološířky svazku na souřadnici  $z$  je dána vztahem (2.9).

V rovině  $z = 0$  nabývá minimální hodnoty  $W_0$ . Toto místo se nazývá místem maximálního zúžení svazku.

Některé parametry svazku zobrazují na obrázku 3.



Obrázek 3. Šíření a některé parametry Gaussova svazku.

Ve skutečném světě je Gaussův svazek pouhým přiblížením. Míru přesnosti tohoto přiblížení, či jinými slovy míru toho, jak je např. laser vzdálen od ideálního Gaussova svazku, je tzv. propagační konstanta  $M^2$ .

Je totiž velmi obtížné přesně určit místo maximálního zúžení svazku. Měření pološířky v jednom bodě je velmi nepřesné. Proto se zavedla propagační konstanta, která je založená na faktu, že součin pološířky svazku a divergence je při průchodu optickým systémem konstantní.  $M^2$  je tedy dán vzorcem

$$M^2 = \frac{W_{0R} \cdot \theta_R}{W_0 \cdot \theta}, \quad (2.21)$$

kde veličiny s indexem  $R$  jsou pološířka skutečného svazku a divergence skutečného svazku a složky bez indexu jsou tytéž veličiny pro Gaussův svazek. Kdyby byl měřený svazek skutečně přesně Gaussův, bylo by  $M^2 = 1$ . Pro typický helium-neonový laser fungující v módu Gaussova svazku (zvaném někdy jako TEM<sub>00</sub>) je  $M^2 < 1,1$ , pro iontové lasery je  $M^2$  mezi 1,1 až 1,7 [4].

Toto je koncept tzv. „vnořeného“ Gaussova svazku. Skutečný paprsek, který nemusí být v základním, tedy v Gaussově módu, pak bude mít minimální pološířku  $M$  krát větší a stejně tak i divergenci.



### 3. Hermiteovy-Gaussovy svazky v homogenním prostředí

V [5] se uvádí velmi jednoduchý a zřejmý postup při odvozování Hermiteových-Gaussových svazků. Do paraxiální vlnové rovnice (1.32) dosadíme funkcí  $F(x,y,z)$  násobené řešením

$$\begin{aligned} A_{\text{H-G}}(\rho, z, \omega) &= F(x, y, z)A_G(\rho, z, \omega) \\ &= f\left(\frac{x}{W(z)}\right)g\left(\frac{y}{W(z)}\right)\exp[-i\phi(z)]A_G(\rho, z, \omega), \end{aligned} \quad (3.1)$$

kde  $W(z)$  označuje pološířku Gaussova svazku danou výrazem (2.9) a  $A_G$  je komplexní obálka pro Gaussův svazek. Ukážeme, že tato funkce je řešením rovnice (1.32) pro vhodné funkce  $f$ ,  $g$  a  $\phi$ . Dosadíme

$$\begin{aligned} F(x, y, z)\nabla_{\perp}^2 A_G(\rho, z, \omega) + 2\left[\frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z)\cdot\frac{\partial}{\partial x} A_G(\rho, z, \omega) + \frac{\partial}{\partial y} F(x, y, z)\cdot\frac{\partial}{\partial y} A_G(\rho, z, \omega)\right] \\ + A_G(\rho, z, \omega)\nabla_{\perp}^2 F(x, y, z) - 2ikA_G(\rho, z, \omega)\frac{\partial}{\partial z} F(x, y, z) - 2ikF(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z} A_G(\rho, z, \omega) = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde první a pátý člen nám už řeší rovnici (1.32), což bylo ukázáno na začátku druhé kapitoly. Do rovnice (3.2) dosadíme za  $F(x, y, z)$  z rovnice (3.1), dostaneme po provedení derivací a po vynásobení výrazem  $W^2(z)e^{i\phi(z)}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(\frac{x}{W(z)}\right)\right)g\left(\frac{y}{W(z)}\right)A_G(\rho, z, \omega) + 2\left(W(z)\frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{x}{W(z)}\right)\right)g\left(\frac{y}{W(z)}\right)\frac{\partial}{\partial x} A_G(\rho, z, \omega) \\ + f\left(\frac{x}{W(z)}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} g\left(\frac{y}{W(z)}\right)\right)A_G(\rho, z, \omega) + 2\left(W(z)f\left(\frac{x}{W(z)}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} g\left(\frac{y}{W(z)}\right)\right)\frac{\partial}{\partial y} A_G(\rho, z, \omega) \\ + 2ikA_G(\rho, z, \omega)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{x}{W(z)}\right)\right)g\left(\frac{y}{W(z)}\right)x\frac{dW(z)}{dz} + \left(f\left(\frac{x}{W(z)}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} g\left(\frac{y}{W(z)}\right)\right)y\frac{dW(z)}{dz}\right) \\ - 2kW^2(z)A_G(\rho, z, \omega)f\left(\frac{x}{W(z)}\right)g\left(\frac{y}{W(z)}\right)\frac{d\phi(z)}{dz} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Za  $A_G$  dosadíme komplexní obálku pro Gaussův svazek ve tvaru

$$A_G = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left\{i\eta(z) - i\frac{k\rho^2}{2q(z)}\right\}, \quad (3.4)$$

jednotlivé derivace jsou tedy,

$$\frac{\partial}{\partial x} A_G = -i\frac{kx}{q} A_G, \quad \frac{\partial}{\partial y} A_G = -i\frac{ky}{q} A_G, \quad (3.5)$$

obdržíme po vydělení  $A_G$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} f \left( \frac{x}{W(z)} \right) \right) g \left( \frac{y}{W(z)} \right) - 2 \left( W(z) \left( \frac{\partial}{\partial x} f \left( \frac{x}{W(z)} \right) \right) g \left( \frac{y}{W(z)} \right) \frac{ikx}{q} \right) \\
& + f \left( \frac{x}{W(z)} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} g \left( \frac{y}{W(z)} \right) \right) - 2 \left( W(z) f \left( \frac{x}{W(z)} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} g \left( \frac{y}{W(z)} \right) \right) \frac{iky}{q} \right) \\
& + 2ik \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} f \left( \frac{x}{W(z)} \right) \right) g \left( \frac{y}{W(z)} \right) x \frac{dW(z)}{dz} + \left( f \left( \frac{x}{W(z)} \right) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} g \left( \frac{y}{W(z)} \right) \right) y \frac{dW(z)}{dz} \right) \\
& - 2kW^2(z) f \left( \frac{x}{W(z)} \right) g \left( \frac{y}{W(z)} \right) \frac{d\phi(z)}{dz} = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Z předchozích rovnic (2.8), (2.9), (2.11) odvodíme, že

$$\frac{dW}{dz} - \frac{W}{q} = \frac{W}{R} - \left( \frac{W}{R} + \frac{-i2}{kW} \right) = \frac{i2}{kW}. \tag{3.7}$$

Takže rovnice (3.6) se zjednoduší

$$\begin{aligned}
& \frac{\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} f \left( \frac{x}{W(z)} \right) \right)}{f \left( \frac{x}{W(z)} \right)} - \frac{4x}{W(z)} \frac{\left( \frac{\partial}{\partial x} f \left( \frac{x}{W(z)} \right) \right)}{f \left( \frac{x}{W(z)} \right)} + \frac{\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} g \left( \frac{y}{W(z)} \right) \right)}{g \left( \frac{y}{W(z)} \right)} - \frac{4y}{W(z)} \frac{\left( \frac{\partial}{\partial y} g \left( \frac{y}{W(z)} \right) \right)}{g \left( \frac{y}{W(z)} \right)} \\
& - 2kW^2(z) \frac{d\phi(z)}{dz} = 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Hermiteovy polynomy jsou definovány vztahem

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2). \tag{3.9}$$

Hermiteův polynom stupně  $n$  splňuje následující diferenciální rovnici:

$$\frac{d^2}{dx^2} H_n(x) - 2x \frac{d}{dx} H_n(x) + 2n H_n(x) = 0. \tag{3.10}$$

Provedeme-li substituci  $\tau = \sqrt{2} \frac{x}{W(z)}$  a  $\sigma = \sqrt{2} \frac{y}{W(z)}$ ,  $f \left( \frac{x}{W} \right) = \bar{f} \left( \sqrt{2} \frac{x}{W} \right)$  a

$g \left( \frac{y}{W} \right) = \bar{g} \left( \sqrt{2} \frac{y}{W} \right)$ , můžeme psát rovnici (3.8) ve tvaru

$$\frac{1}{\bar{f}} \left[ \frac{d^2 \bar{f}}{d\tau^2} - 2\tau \frac{d\bar{f}}{d\tau} \right] + \frac{1}{\bar{g}} \left[ \frac{d^2 \bar{g}}{d\sigma^2} - 2\sigma \frac{d\bar{g}}{d\sigma} \right] - kW^2 \frac{d\phi}{dz} = 0, \tag{3.11}$$

kde požadujeme, aby funkce proměnné  $z$  byla součtem funkcí proměnné  $\tau$  a funkce proměnné  $\sigma$ . To může nastat, pokud jsou všechny tři funkce konstanty. Za tyto konstanty volíme popořadě  $-2(m+n)$ ,  $-2m$  a  $-2n$ . Máme tedy

$$\frac{1}{\bar{f}} \left[ \frac{d^2 \bar{f}}{d\tau^2} - 2\tau \frac{d\bar{f}}{d\tau} \right] = -2m, \quad \frac{1}{\bar{g}} \left[ \frac{d^2 \bar{g}}{d\sigma^2} - 2\sigma \frac{d\bar{g}}{d\sigma} \right] = -2n, \quad (3.12)$$

neboli

$$\frac{d^2 \bar{f}}{d\tau^2} - 2\tau \frac{d\bar{f}}{d\tau} - 2m\bar{f} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{g}}{d\sigma^2} - 2\sigma \frac{d\bar{g}}{d\sigma} - 2n\bar{g} = 0. \quad (3.13)$$

Funkce  $f\left(\frac{x}{W}\right)$  a  $g\left(\frac{y}{W}\right)$  bychom mohli psát jako Hermiteovy polynomy, tedy

$$f\left(\frac{x}{W}\right) = \bar{f}\left(\sqrt{2} \frac{x}{W}\right) = H_m\left(\sqrt{2} \frac{x}{W}\right) \text{ a } g\left(\frac{y}{W}\right) = \bar{g}\left(\sqrt{2} \frac{y}{W}\right) = H_n\left(\sqrt{2} \frac{y}{W}\right) \quad (3.14)$$

Dosadíme-li tyto funkce do rovnice (3.10), obdržíme

$$kW^2 \frac{d\phi}{dz} = -2(m+n), \quad (3.15)$$

$$\frac{d\phi}{dz} = -\frac{2(n+m)}{kW^2} = -\frac{(n+m)z_0}{(z_0^2 + z^2)}, \quad (3.16)$$

tedy

$$\phi(z) = -(n+m) \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (3.17)$$

kde  $z_0$  je tzv. Rayleighova délka.

Nakonec tedy můžeme obecné dosadit obdržené výsledky do výrazu (3.1)

$$A_{\text{H-G}}(\rho, z, \omega) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} H_m\left(\sqrt{2} \frac{x}{W}\right) H_n\left(\sqrt{2} \frac{y}{W}\right) \exp\left\{i(n+m+1) \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{z_0}\right) - i \frac{k\rho^2}{2q(z)}\right\}. \quad (3.18)$$

#### 4. Laguerreovy-Gaussovy svazky

V [8] se uvádí, že Laguerreovy-Gaussovy svazky se získají jako řešení paraxiální Helmholtzovy rovnice s tím rozdílem, že se řeší tato rovnice cylindrických souřadnicích  $(\rho, \varphi, z)$  a používá se separace proměnných podle  $\rho$  a  $\varphi$ .

V [11] autor postupuje vhodnou modulací komplexní amplitudy. Zároveň ovšem uvádí, že tyto svazky souvisí s Hermiteovými-Gaussovými svazky díky tomu, že mezi sebou souvisí dvourozměrné Hermiteovy a Laguerreovy polynomy

$$L_{m,n}(U; x+iy, x-iy) = e^{-i(m+n)\frac{\pi}{4}} H_{m,n}(UZ; x, y), \quad (4.1)$$

$$H_{m,n}(U; x, y) = e^{i(m+n)\frac{\pi}{4}} L_{m,n}(UZ^{-1}; x+iy, x-iy),$$

kde  $Z$  je unitární matice, která převádí reálné souřadnice  $(x, y)$  v komplexní souřadnice  $(z, z^*)$  na ploše

$$\begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix} = (1-i)Z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, Z \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}, Z^{-1} = Z^\dagger, |Z| = 1. \quad (4.2)$$

V [7] odvozují Laguerreovy-Gaussovy svazky vhodnou modulací komplexní amplitudy, resp. přímo modulací amplitudy jakožto funkce závisující na vlnovém vektoru  $\mathbf{k}$  tentokrát pomocí periodické funkce úhlové proměnné

$$\alpha = \arctg\left(\frac{k_y}{k_x}\right). \quad (4.3)$$

Po řadě úprav, které nejsou nepodobné úpravám, které tamtéž použili při odvození Hermiteových-Gaussových svazků, obdrží nakonec vyjádření pro Laguerreovy-Gaussovy svazky

$$E_{m,n}^L = \frac{e^{-i\alpha\phi}}{W(\zeta)} \left(\frac{r}{W(\zeta)}\right)^n L_m^n\left(\frac{2r^2}{W^2(\zeta)}\right) \exp\left[ikz - \frac{r^2}{W_0^2(1+i\zeta)} - i\psi_{n,m}^L\right], \quad (4.4)$$

kde  $\phi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  $\zeta = \frac{z}{z_0}$  a  $\psi_{n,m}^L = (n+2m+1)\arctg(\zeta)$ , přičemž Laguerreovy polynomy

jsou definovány

$$L_m^n(r) = \frac{e^r r^{-n}}{m!} \frac{d^m}{dr^m} (e^{-r} r^{n+m}). \quad (4.5)$$

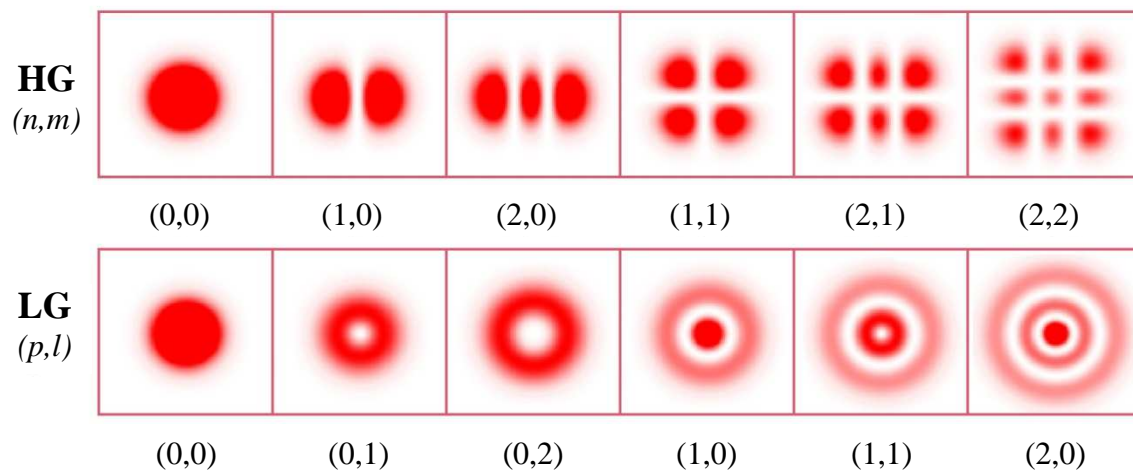
Významnými vlastnostmi Laguerreova-Gaussova svazku je, že mají rotační symetrii podél směru šíření a že přenáší točivý moment hybnosti. To znamená, že objekt umístěný

v tomto svazku, se bude roztáčet, což by mohlo být v budoucnosti použito jako jistý druh „motoru“ pro mikroskopické přístroje.

Ještě bych rád zmínil jednu třídu svazků a to sice Besselovy svazky. Všechny svazky, které jsem doposud popsal, měly tu vlastnost, že z místa maximálního zúžení divergovaly pod úhlem  $\arctg(\lambda/\pi W_0)$ . Ovšem v roce 1987 uvedl Durnin [3] třídu svazků, které nepodléhají difrakci. Rozložení intenzity už totiž nezávisí na  $z$ . Odvodí se tak, že komplexní amplituda se moduluje  $\delta$ -funkcí.

Bohužel, celková energie Besselových svazků velmi rychle diverguje, tudíž jich není možné dosáhnout. Ale je ovšem možné vytvořit alespoň jejich aproximaci. Výhodou těchto svazků je, že mohou zachytit i více částic. Využití těchto svazků se nadále studuje.

Na obrázku 4 ukazují některé módy obecnějších svazků.



Obrázek 4. Srovnání několika nejnižších módů Hermiteových-Gaussových (HG) a Laguerreových-Gaussových (LG) svazků. Stojí za povšimnutí, že v nejnižším módu jsou oba druhy svazků shodné s Gaussovým svazkem. Obrázek převzat a upraven z [6].

## 5. Vliv běžných optických prvků a prostředí

V této kapitole se budu věnovat průchodu gaussovského svazku různými prostředími a ukážeme si, že Gaussův svazek při průchodu prostředí podobného čočce za předpokladu zachování paraxiální aproximace zůstává stále gaussovským.

Nejprve se budu věnovat čočce. Komplexní amplitudová propustnost tenké čočky o ohniskové vzdálenosti  $f$  je úměrná  $\exp(ik\rho^2/2f)$  a tedy komplexní amplitudu gaussovského svazku danou vztahem (2.12), je nutné vynásobit tímto faktorem.

Uvažme situaci, kdy Gaussův svazek se středem v počátku o pološířce  $W_0$  prochází tenkou čočkou ve vzdálenosti  $z$  na jeho ose. Fáze vlny v rovině čočky je  $kz + k\rho^2/2R - \eta$ , kde  $W(z)$ , resp.  $R(z)$  jsou dány vztahem (2.9), resp. (2.11).

Fáze vlny prošlé čočkou se změní na

$$kz + \frac{k\rho^2}{2R} - \eta - \frac{k\rho^2}{2f} = kz + \frac{k\rho^2}{2R'} - \eta, \quad (5.1)$$

kde

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f}. \quad (5.2)$$

Tedy prošlá vlna je také gaussovským svazkem s pološířkou  $W = W'$ , přičemž se změní poloměry křivosti. Pro středovou pološířku transformovaného svazku dostáváme tedy

$$W_0' = \frac{W}{\left[1 + (\pi W^2 / \lambda R')^2\right]^{1/2}}, \quad (5.3)$$

přičemž střed se nachází ve vzdálenosti

$$-z' = \frac{R'}{1 + (\lambda R' / \pi W^2)^2} \quad (5.4)$$

od čočky. Parametry čočky jdou popsat i pomocí příčného zvětšení, pro které platí

$$M = \frac{\left|\frac{f}{z-f}\right|}{(1+r^2)^{1/2}}, r = \frac{z_0}{z-f}, \quad (5.5)$$

Použitím vztahů (2.9)-(2.11) a (5.3) až (5.5) dostaneme pro středovou pološířku

$$W_0' = MW_0, \quad (5.6)$$

pro polohu středu

$$(z' - f) = M^2(z - f), \quad (5.7)$$

pro ohniskovou hloubku

$$2z_0' = M^2(2z_0), \quad (5.8)$$

a pro úhlovou divergenci

$$2\theta_0' = \frac{2\theta_0}{M}. \quad (5.9)$$

Průchodu gaussovského svazku tenkou čočkou se využívá v mnoha aplikacích, například při laserovém tavení či v laserových tiskárnách. Při tom se požaduje svazek s co možná nejmenší stopou [8]. Toho se dosahuje tak, že umístíme čočku do středu gaussovského svazku a prošlý svazek má pak vlastnosti

$$W_0' = \frac{W_0}{\left[1 + (z_0/f)^2\right]^{1/2}}, z' = \frac{f}{1 + (f/z_0)^2}. \quad (5.10)$$

Vzhledem k průchodu svazku čočkou musí být její průměr  $D$  alespoň  $2W_0$ . Je-li  $D = W_0$ , pak průměr fokusované stopy bude

$$2W_0' \approx \frac{4}{\pi} \lambda F_{\#}, \quad (5.11)$$

kde  $F_{\#} = f/D$  je clonové číslo čočky.

V nyní se budu věnovat průchodu Gaussova svazku běžnými optickými prvky. Ale nejprve si budeme muset zavést, jak se dá Gaussův svazek charakterizovat. Gaussův svazek je určen pomocí komplexního čísla  $q(z) = z + iz_0$ , označovaného jako  $q$ -parametr, kde  $z$  je vzdálenost od maximálního zúžení svazku a  $z_0$  je Rayleighova délka. Všechny ostatní parametry popisující svazek, např. pološířka, mohou být určeny jen pomocí tohoto čísla. Je-li  $q(z)$  určeno v jednom bodě, je určeno všude díky linearitě tohoto čísla vůči  $z$ .

V paraxiální aproximaci můžeme optický prvek popsat pomocí  $2 \times 2$  matice, která přemění polohu a směr dopadajícího paprsku na polohu a směr prošlého paprsku (viz např. [8]). Ovšem podobný princip platí i pro Gaussovy svazky. Označíme-li  $q_1$  parametr vstupující vlny a  $q_2$  parametr vystupující vlny, pak platí

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}, \quad (5.12)$$

což je tzv. ABCD zákon. Jednoduchý důkaz lze nalézt třeba v [8].

Tento zákon lze však dále ještě zobecnit. Nejenom, že platí při libovolné kombinaci homogenních prostředí a tenkých členů. Ale i na spojitě proměnné homogenní prostředí se lze dívat jako na řadu nekonečně tenkých prostředí a proto tento zákon lze použít, pokud tedy všechny normály k vlnoplochám zůstávají paraxiální.

## 6. Analogie s kvantovou mechanikou

V této kapitole uvedu několik analogií mezi paraxiálními světelnými svazky a některými jevy studovanými v kvantové mechanice. Nejjednodušším případem je analogie mezi Gaussovým svazkem a volnou částicí. Částice o hmotnosti  $m$  je volná, pokud na nic nepůsobí žádná síla, pak Schrödingerova rovnice nabude tvaru

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi. \quad (6.1)$$

Jednorozměrné řešení má tvar

$$\Psi(x, t) = A e^{ikx - i\omega t}, \quad (6.2)$$

kde  $\omega = \hbar k^2 / 2m$ ,  $p = \hbar k$ , kde  $p$  je hybnost částice.

Obecné řešení můžeme napsat ve tvaru

$$\Psi(x, t) = \int \psi(k) e^{ikx - i\omega t} dk, \quad (6.3)$$

což naznačuje způsob, jak najít vlnovou funkci v nějakém čase – Fourierovsky transformovat výchozí stav, vynásobit fází a transformovat zpět.

Částice v klidu se dá popsat pomocí Gaussova vlnového balíku

$$\psi(x, 0) = (\pi a)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2a}}, \quad (6.4)$$

kde  $a$  je kladné reálné číslo, odchylna polohy od  $x=0$ .

Fourierova transformace má tvar

$$\psi(k, 0) = (\pi a)^{-\frac{1}{4}} (2\pi a)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{ak^2}{2}}. \quad (6.5)$$

Po vynásobení fází dostaneme

$$\psi(k, t) = (\pi a)^{-\frac{1}{4}} (2\pi a)^{\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{a + i\hbar t}{m}\right) \frac{k^2}{2}}. \quad (6.6)$$

Při inverzní Fourierově transformaci obdržíme

$$\psi(x, t) = (\pi a)^{-\frac{1}{4}} \left( \frac{a}{a + i\hbar t / m} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2(a + i\hbar t / m)}}. \quad (6.7)$$

Vidíme tedy, že pro časovou evoluci volné částice platí stejné závislosti jako pro šíření Gaussova svazku. Obzvláště vidět je pro šířku jak optického svazku, tak pro částici. Zatímco pro Gaussov svazek platí



$$W(z) = \left( \frac{\lambda z_0}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (6.8)$$

tak pro šířku Guassova vlnového balíku platí

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{a^2 + \left( \frac{i\hbar}{m} \right)^2}{a}}, \quad (6.9)$$

což při záměně  $a$  za  $z_0$ ,  $z$  za  $\frac{i\hbar}{m}$  dává až na násobek ten samý vztah.

O jiné analogii se zmiňuje v článku [9]. Pokud se ve vztahu pro Hermiteovy-Gaussovy svazky

$$\varphi_{mn} = \frac{W_0}{W(z)} H_m \left( \sqrt{2} \frac{x}{W} \right) H_n \left( \sqrt{2} \frac{y}{W} \right) \exp \left\{ -i(n+m+1) \arctg \left( \frac{z}{z_0} \right) - i \frac{k\rho^2}{2R(z)} \right\}, \quad (6.10)$$

nahradí proměnné vztahy

$$x = \xi \frac{W(z)}{\sqrt{2}}, \quad y = \eta \frac{W(z)}{\sqrt{2}}, \quad z = b \operatorname{tg}(\tau), \quad (6.11)$$

kde  $\tau$  zastupuje čas a spolu s výrazem

$$\varphi(x, y, z) = \psi(\xi, \eta; \tau) \frac{1}{W(z)} \exp \left\{ i \frac{k\rho^2}{2R(z)} \right\} \quad (6.12)$$

dosadíme do paraxiální vlnové rovnice, obdržíme po úpravách

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \eta^2 + \xi^2 - 2i \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \psi(\xi, \eta; \tau) = 0, \quad (6.13)$$

což je Schrödingerova rovnice pro harmonický oscilátor v jednotkách  $\hbar = m = \Omega = 1$ , kde  $m$  je hmotnost a  $\Omega = 2\pi/T$  je rezonanční frekvence harmonického oscilátoru.

## 7. Závěr

Odvodil jsem ve své práci několik základních typů svazků, Gaussovy, Hermiteovy-Gaussovy a Laguerreovy-Gaussovy a ukázal vlastnosti Gaussových svazků. Je třeba mít na paměti, že jsem pominul vektorový charakter elektromagnetického vlnění a že jsem pracoval v paraxiální aproximaci.

V závěru [7] uvádějí, jak dále zobecnit tyto svazky. Jejich práce postupuje poněkud odlišně než moje. Zatímco já jsem odvozoval řešení od řešení paraxiální Helmholtzovy rovnice, oni hledali řešení pomocí vhodných úprav amplitudy rovinné vlny. Jejich postup má jednu velkou výhodu. Umožňuje totiž velice jednoduše zobecňovat. Třeba eliptické svazky lze zobecnit pouhou změnou funkce amplitudy, nebo zahrnout vektorový charakter pole jednoduše tím, že funkce amplitudy je nahrazena vhodnou vektorovou funkcí. Předností mého postupu je použití jednodušších matematických metod, které vedou k názorným a srozumitelným řešením.

Už dnes se uvažuje o budoucím možném využití těchto svazků, např. v nanotechnologiích, kde pomocí optických pinzet z bílého světla, lze spektroskopicky zkoumat vlastnosti zachyceného materiálu [10]. Další možnosti jsou třeba v biologii při studiu chování jednotlivých buněk na molekulární úrovni. Proto další studium těchto svazků může být velmi zajímavé a perspektivní. Doufám, že má práce může posloužit jako vhodný úvod k dalšímu studiu těchto svazků.

## Použitá literatura

- [1] ANDREWS, DAVID L. *Structured light and its applications : an introduction to phase-structured beams and nanoscale optical forces*. Amsterdam; Boston: Academic, 2008.
- [2] DHOLAKIA, Kishan - REECE, Peter. *Optical micromanipulation takes hold* [online]. [cit.2009-03-09]. URL: <[http://dx.doi.org/10.1016/S1748-0132\(06\)70019-6](http://dx.doi.org/10.1016/S1748-0132(06)70019-6)>
- [3] DURNIN, J.- MICELI, J.- EBERLY, J.H. *Diffraction-free beams*. Phys. Rev. Lett. 58 (1987), 1499-1501.
- [4] *Gaussian Beam Optics* [online]. [cit.2009-03-09]. URL: <[http://www.mellesgriot.com/products/optics/gb\\_1.htm](http://www.mellesgriot.com/products/optics/gb_1.htm)>
- [5] JONES, Victor. *Beams: The Paraxial Wave Equation in Uniform Media* [online]. [cit.2009-03-09]. URL: <[http://people.seas.harvard.edu/~jones/ap216/lectures/ls\\_1/ls1\\_u3/ls1\\_unit\\_3.pdf](http://people.seas.harvard.edu/~jones/ap216/lectures/ls_1/ls1_u3/ls1_unit_3.pdf)>
- [6] *Light possessing orbital angular momenta* [online]. [cit.2009-03-09]. URL: <<http://www.phys.keio.ac.jp/guidance/labs/sasada/research/orbngmom/theme3-en.html>>
- [7] PAMPALONI, Francesco - ENDERLEIN, Jörg. *Gaussian, Hermite-Gaussian, and Laguerre-Gaussian beams: A primer* [online]. [cit.2009-03-09]. URL: <<http://arxiv.org/ftp/physics/papers/0410/0410021.pdf>>
- [8] SALEH, B. E. A., TEICH, M. C. *Fundamentals of photonics*. John Wiley & Sons, Inc. 1991.
- [9] STEUERNAGEL, Ole. *Equivalence between focussed paraxial beams and the quantum harmonic oscillator* [online]. [cit.2009-20-12]. URL: <[http://arxiv.org/PS\\_cache/physics/pdf/0312/0312116v2.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/physics/pdf/0312/0312116v2.pdf)>
- [10] *White-light Laser Is Basis Of New Optical Tweezers And Microscope* [online]. [cit.2009-03-09]. URL: <<http://www.sciencedaily.com/releases/2005/06/050616055311.htm>>
- [11] WÜNSCHE, A. *Quantization of Gauss-Hermite and Gauss-Laguerre beams in free space*. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 6 (2004) S47-S59.