

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Integrální počet a jeho využití v ekonomii

Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.
Rok odevzdání: 2011

Vypracovala:
Hana Králová
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vytvořila samostatně za vedení paní RNDr. Martiny Pavlačkové, Ph.D., a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje, ze kterých jsem při psaní práce čerpala.

V Července dne 15. dubna 2011

Poděkování

Ráda bych tímto poděkovala své vedoucí bakalářské práce, paní RNDr. Martině Pavlačkové, Ph.D., za odbornou spolupráci, neustálou ochotu a za čas, který mi věnovala. Poděkování si rovněž zaslouží má rodina, která mne ve studiu podporovala.

Obsah

Úvod	4
1 Neurčitý integrál	5
1.1 Primitivní funkce a neurčitý integrál	5
1.2 Výpočet neurčitého integrálu	8
2 Určitý integrál	13
2.1 Definice Riemannova určitého integrálu	13
2.2 Vlastnosti Riemannova určitého integrálu	16
2.3 Výpočet Riemannova určitého integrálu	18
3 Nevlastní integrál	21
3.1 Integrál jako funkce horní meze	21
3.2 Nevlastní integrál vlivem meze	22
3.3 Výpočet nevlastního integrálu vlivem meze	24
3.4 Nevlastní integrál vlivem funkce	25
3.5 Výpočet nevlastního integrálu vlivem funkce	26
4 Aplikace integrálního počtu v ekonomii	29
4.1 Aplikace neurčitého integrálu	29
4.1.1 Celkové náklady a celkové příjmy	29
4.1.2 Tvorba kapitálu a toky investic	32
4.2 Aplikace určitého integrálu	34
4.2.1 Celkové náklady a celkové příjmy v časovém intervalu . . .	34
4.2.2 Přebytek spotřebitele a přebytek výrobce	35
4.2.3 Tvorba kapitálu a toky investic v časovém intervalu	38
4.2.4 Spojité úročení	39
4.2.5 Současná a budoucí hodnota příjmů	40
4.2.6 Lorenzova křivka a Giniho koeficient	41
4.3 Aplikace nevlastního integrálu	44
4.3.1 Věčný důchod	44
4.3.2 Neomezený kapitálový příjem	45
Závěr	46
Seznam literatury	47

Úvod

Téma mé bakalářské práce "Integrální počet a jeho využití v ekonomii" každému jistě napoví, čím se zabývá a co je jejím obsahem. Práce se věnuje teorii integrálního počtu a jeho ekonomickým aplikacím, jakými jsou například sledování nákladů a příjmů v organizacích, tvorba kapitálu, investiční toky a mnoho dalších. Široké spektrum praktického uplatnění integrálního počtu mne rovněž vedlo k výběru daného tématu.

Hlavním cílem práce je ukázat užití integrálního počtu v ekonomii a ilustrování jednotlivých ekonomických problémů na názorných příkladech.

Práce je rozdělena na matematickou a ekonomickou (aplikační) část. Matematická část čtenáři připomíná základní pojmy, vlastnosti a vztahy týkající se integrálního počtu. Ekonomická část již ukazuje jednotlivé aplikace integrálů v ekonomii.

První kapitola matematické části nás uvede do problematiky integrálního počtu, seznámí nás s pojmy primitivní funkce a neurčitý integrál a představí základní vztahy pro počítání neurčitého integrálu. Druhá kapitola nás obeznámí s určitým integrálem, jeho základními vlastnostmi a vztahy pro jeho výpočet. Třetí, a zároveň poslední, kapitola matematické části se zabývá nevlastním integrálem vlivem meze i vlivem funkce a jejich výpočty.

První podkapitola ekonomické části, která se věnuje aplikacím neurčitého integrálu v ekonomii, nastíní jednak teorii celkových a mezních veličin, a také investic a kapitálu. Druhá podkapitola, jež se zabývá aplikacemi určitého integrálu v ekonomii, přímo navazuje na aplikace neurčitého integrálu z předchozí části a navíc jsou v ní ilustrovány nové aplikace, jako je přebytek spotřebitele a výrobce, spojitě úročení, současná a budoucí hodnota příjmů nebo Lorenzova křivka a Giniho koeficient. Poslední podkapitola ekonomické části práce pojednává o aplikacích nevlastního integrálu, díky jehož vlastnostem lze rozšířit některé z aplikací integrálu určitého.

1 Neurčitý integrál

Vznik a rozvoj teorie neurčitého integrálu a integrálního počtu obecně datujeme od 17. a 18. století. Na vzniku diferenciálního a integrálního počtu se podíleli zejména Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz a bratři Jakob a Johann Bernoulli. Rozvíjeli již známá fakta týkající se integrálního počtu a podíleli se na vzniku symboliky, pojmů a vzorců. V 18. století se tyto vědomosti začaly aplikovat v dalších sférách, jako je např. fyzika, statistika a ekonomie.

Při zpracování kapitoly o neurčitém integrálu byly využity především zdroje [3], [7], [10], [12], [13], [14], [15] a [17].

1.1 Primitivní funkce a neurčitý integrál

Integrální počet úzce souvisí s počtem diferenciálním. Při derivování hledáme k funkci f funkci F tak, aby $f' = F$. Integrovaní je pak proces, při kterém naopak hledáme k funkci f funkci F tak, aby $F' = f$.

Definice 1.1. Nechť f a F jsou funkce definované na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu I , jestliže

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Poznámka 1.1. Je-li I interval uzavřený, uvažujeme v koncových bodech příslušné jednostranné derivace.

Příklad 1.1. Primitivní funkcí k funkci $f(x) = \sin x$ na $\mathbb{R}$ je funkce $F(x) = -\cos x$, neboť $(-\cos x)' = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Primitivní funkce nemusí na určitém intervalu existovat pro každou funkci, lze ale dokázat následující tvrzení.

Věta 1.1. Pro každou funkci f spojitou na intervalu I existuje její primitivní funkce na intervalu I .

Důkaz této věty lze nalézt např. v [10].

Pro tvrzení z Věty 1.1 ovšem neplatí obrácená implikace. Spojitost funkce f na intervalu I totiž není nezbytnou podmínkou pro existenci primitivní funkce. Existují tedy i funkce, které nejsou na intervalu I spojité, ale mají na intervalu I primitivní funkci, což si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 1.2. Uvažujme funkci

$$F(x) = \begin{cases} (x - \frac{\pi}{2})^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{(x - \frac{\pi}{2})^2}\right), & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{pro } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Pro $x \neq \frac{\pi}{2}$ bude

$$F'(x) = \left((x - \frac{\pi}{2})^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{(x - \frac{\pi}{2})^2}\right) \right)' = 2(x - \frac{\pi}{2}) \cdot \cos\left(\frac{1}{(x - \frac{\pi}{2})^2}\right) + \frac{2}{x - \frac{\pi}{2}} \cdot \sin\left(\frac{1}{(x - \frac{\pi}{2})^2}\right).$$

Pro $x = \frac{\pi}{2}$ bude

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{F(x) - F(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{(x - \frac{\pi}{2})^2}\right) - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = 0.$$

Při výpočtu limity jsme využili tvrzení o limitě součinu funkce s nulovou limitou a funkce omezené.

Funkce $F(x)$ je tedy na $\mathbb{R}$ primitivní k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 2(x - \frac{\pi}{2}) \cdot \cos\left(\frac{1}{(x - \frac{\pi}{2})^2}\right) + \frac{2}{x - \frac{\pi}{2}} \cdot \sin\left(\frac{1}{(x - \frac{\pi}{2})^2}\right), & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{pro } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Funkce $f(x)$ ale není spojitá v bodě $\frac{\pi}{2}$, protože jednostranné limity funkce $f(x)$ v bodě $\frac{\pi}{2}$ neexistují.

Poznámka 1.2. O tom, že existují i funkce, které nemají primitivní funkci, se přesvědčíme na následujícím příkladu. Pro to, abychom v příkladu ukázali, že primitivní funkce neexistuje, využijeme následující tvrzení.

Věta 1.2. *Nechť je dáno $c \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ a funkce $f : \langle c, c + \delta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která je spojitá zprava v bodě c , má vlastní derivaci na $(c, c + \delta)$ a $\lim_{x \rightarrow c_+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom má f derivaci v bodě c zprava a platí*

$$f'_+(c) = A.$$

Důkaz této věty lze nalézt např. v [16].

Příklad 1.3. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{pro } x \in (a, b) \\ 0, & \text{pro } x \notin (a, b), \end{cases}$$

kde $-\infty < a < b < \infty$. Takto definovaná funkce $f(x)$ popisuje hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny s tzv. rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti (viz např. [9]). Rovnoměrné rozdělení nabývají například chyby při zaokrouhlování čísel, chyby při odečítání údajů z lineárních měřicích přístrojů atd.

Funkce $f(x)$ je definována na $\mathbb{R}$, ale nemá na $\mathbb{R}$ primitivní funkci, což lze dokázat např. následovně.

Předpokládejme, že existuje primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$ na $\mathbb{R}$. Pak je F spojitá na $\mathbb{R}$, tj. spojitá zprava v bodě a a zleva v bodě b . Protože je F spojitá zprava v bodě a a protože pro každé $x \in (a, b)$ platí, že $F'(x) = f(x) = \frac{1}{b-a}$, vyplývá z Věty 1.2, že

$$F'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} F'(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

To je ale ve sporu s tím, že $F'_+(a) = F'(a) = f(a) = 0$. Primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$ tedy na $\mathbb{R}$ neexistuje. Poznamenejme, že obdobně bychom se dostali ke sporu také při výpočtu $F'_-(b)$.

Věta 1.3. *Jestliže F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I a $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, pak funkce $G(x) = F(x) + c$ je rovněž primitivní funkcí k funkci f na I .*

Důkaz: Platí $F'(x) = f(x)$ a $(c)' = 0$. Potom tedy $G'(x) = f(x)$.

Z Věty 1.3 plyne následující tvrzení. Má-li funkce f na intervalu I dvě různé primitivní funkce F a G , pak se tyto funkce na celém intervalu liší právě o konstantu c .

Poznámka 1.3. Primitivní funkce F na intervalu I tedy není určena jednoznačně. Pro jednu funkci f buď neexistuje žádná primitivní funkce, nebo jich existuje nekonečně mnoho a liší se o reálnou konstantu c .

Nyní máme již vše podstatné zavedené, a tak můžeme nadefinovat neurčitý integrál funkce f na intervalu I .

Definice 1.2. *Neurčitým integrálem funkce f na intervalu I* nazýváme množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I . Tj.

$$\int f(x) dx = \{F(x) + c; c \in \mathbb{R}, F \text{ je primitivní funkce k } f\}.$$

Říkáme, že f je integrovaná funkce, x je integrační proměnná a dx je symbol, který určuje, podle které proměnné integrujeme.

Poznámka 1.4. Symbol integrálu $\int$ zavedl G. W. Leibnitz. Tento symbol má připomínat první písmeno slova summa. Souvislost mezi integrálem a summou bude ukázána v kapitole Určitý integrál.

1.2 Výpočet neurčitého integrálu

Proces, během kterého hledáme primitivní funkci F k funkci f , resp. neurčitý integrál, se nazývá integrování. Integrování je inverzní operace k derivování. Z této myšlenky vyplývají následující vztahy.

$$\int f'(x) dx = f(x) \qquad \left(\int f(x) dx \right)' = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Při výpočtu neurčitého integrálu se řídíme následujícími pravidly, která vyplývají ze vzorců pro derivování.

$$\int a dx = ax + c, \quad a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x \in \mathbb{R}^+$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\int e^x dx = e^x + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c, \quad f(x) \neq 0$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbb{R}$$

Příklad 1.4. Najděte neurčitý integrál k funkci $\operatorname{tg}^2 x$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$.

Řešení: $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - x + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Při výpočtech neurčitého integrálu se často setkáváme se součtem, resp. rozdělem více integrací schopných funkcí, popřípadě s jejich konstatním násobkem. Následující věta ukazuje, jak je možné v takovém případě postupovat.

Věta 1.4. *Nechť mají funkce f a g své primitivní funkce na I a nechť $c \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $f \pm g$, $c \cdot f$ mají své primitivní funkce na I a platí zde*

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx.$$

Důkaz Věty 1.4 najdeme např. v [12].

Příklad 1.5. Najděte neurčitý integrál k funkci $2 \sin(3x + 1)$ na $\mathbb{R}$.

Řešení: Při hledání neurčitého integrálu využijeme vzorce pro integrování funkce $\sin x$, vzorec $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c$ a pravidla pro integrování součinu konstanty a funkce:

$$\int 2 \sin(3x + 1) dx = 2 \int \sin(3x + 1) dx = -\frac{2}{3} \cos(3x + 1) + c.$$

Příklad 1.6. Najděte neurčitý integrál k funkci $e^x + x^3 + \sin 2x + 5$ na $\mathbb{R}$.

Řešení: Při hledání neurčitého integrálu opět využijeme kromě vzorců pro integrování elementárních funkcí vzorec $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c$ a pravidla pro integrování součtu:

$$\int (e^x + x^3 + \sin 2x + 5) dx = \int e^x dx + \int x^3 dx + \int \sin 2x dx + \int 5 dx = e^x + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + 5x + c.$$

Příklad 1.7. Najděte neurčitý integrál k funkci $(x^2 - 6)^2$ na $\mathbb{R}$.

Řešení: Při hledání neurčitého integrálu využijeme základní vzorce a zároveň pravidla pro integrování součtu:

$$\int (x^2 - 6)^2 dx = \int (x^4 - 12x^2 + 36) dx = \frac{x^5}{5} - 4x^3 + 36x + c.$$

Při většině výpočtů neurčitého integrálu využíváme následující metody. Přitom je samozřejmě nezapomínáme kombinovat se základními vzorci, které již byly zmíněny.

Věta 1.5 (Metoda per partes). *Nechť funkce u a v mají na intervalu I derivace u' a v' . Existuje-li na I primitivní funkce k jedné z funkcí $u'v$, uv' , existuje také k druhé z nich a platí*

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

Důkaz Věty 1.5 najdeme např. v [13].

Poznámka 1.5. Metodu per partes volíme v případech, kdy integrujeme součin dvou funkcí odlišného charakteru. Obvykle se přitom řídíme následujícími pravidly: Za $u(x)$ volíme funkce typu $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$ nebo polynom. Za $v'(x)$ volíme funkce typu $\sin x$, $\cos x$, e^x nebo polynom.

Věta 1.6 (První věta o substituci). *Nechť je dána funkce f definovaná na intervalu I_1 a funkce φ , která má derivaci na intervalu I_2 . Nechť dále platí, že $\varphi(I_2) \subseteq I_1$. Jestliže funkce f má primitivní funkci F na intervalu I_1 , pak $F \circ \varphi$ je primitivní funkcí funkce $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na intervalu I_2 a platí následující vztah*

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt.$$

Věta 1.7 (Druhá věta o substituci). *Nechť je dána funkce f definovaná na intervalu I_1 a funkce φ , která má nenulovou derivaci na intervalu I_2 . Nechť dále platí, že $\varphi(I_2) \subseteq I_1$. Jestliže funkce $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ má primitivní funkci F na intervalu I_2 , pak $F \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkcí funkce f na intervalu I_1 a platí následující vztah*

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Důkaz Věty 1.6 a Věty 1.7 najdeme např. v [13].

Příklad 1.8. Najděte neurčitý integrál k funkci $\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ na intervalu $(2, 3)$.

Řešení: Neurčitý integrál najdeme použitím První věty o substituci a pomocí Metody per partes:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{array} \right| = 2 \int \ln t dt = \left| \begin{array}{ll} u = \ln t & u' = \frac{1}{t} \\ v' = 1 & v = t \end{array} \right| = 2t \cdot \ln t - \int 2 dt = \\ &= 2t \cdot \ln t - 2t = 2 \cdot \sqrt{x} \ln \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + c, \text{ kde } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 1.9. Najděte neurčitý integrál k funkci $\sqrt{1-4x^2}$ na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Řešení: Neurčitý integrál najdeme použitím Druhé věty o substituci:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-4x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} 2x = \sin t \\ x = \frac{\sin t}{2} \\ dx = \frac{1}{2} \cos t dt \\ t = \arcsin(2x) \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \frac{1}{2} \cos t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos t \cdot \cos t dt = \frac{1}{2} \int \cos^2 t dt = \left| \begin{array}{l} \cos^2 t = \cos(2t) + \sin^2 t \\ \cos^2 t = \cos(2t) + 1 - \cos^2 t \\ \cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos(2t)+1}{2} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} t + c = \frac{1}{8} \cdot 2 \sin t \cdot \cos t + \frac{1}{4} t + c = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2x \cdot \sqrt{1-\sin^2 t} + \frac{1}{4} \arcsin(2x) + c = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{4} \arcsin(2x) + c. \end{aligned}$$

Poznámka 1.6. V praxi se často setkáváme s integrací racionálních funkcí, tj. funkcí ve tvaru podílu dvou polynomů $P_m(x)$ a $Q_n(x)$ proměnné x . Integrovaní racionálních funkcí, u kterých $n > m$, řešíme pomocí metody, která se nazývá *rozklad na parciální zlomky*. Při integraci zadanou racionální funkci vyjádříme jako součet parciálních zlomků, které jednotlivě zintegrujeme. Je-li $m \geq n$, pak nejprve polynomy $P_m(x)$ a $Q_n(x)$ vydělíme a rozklad na parciální zlomky aplikujeme na zbytek získaný po jejich vydělení. Postup použití rozkladu na parciální zlomky v případě, kdy má jmenovatel reálné kořeny, si ukážeme na následujícím příkladu. Vzhledem k omezenému rozsahu práce se případu, kdy jsou kořeny polynomu $Q_n(x)$ komplexní, nebudeme věnovat.

Příklad 1.10. Najděte neurčitý integrál k funkci $\frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x - 2}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{3})$.

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } \int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x - 2} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2+t-2} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} t^2+t-2 = (t-1)(t+2) \\ \frac{1}{t^2+t-2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2} \\ 1 = A(t+2) + B(t-1) \\ 1 = tA + 2A + tB - B \\ A = \frac{1}{3} \text{ a } B = -\frac{1}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \frac{1}{t-1} dt - \frac{1}{3} \int \frac{1}{t+2} dt = \frac{1}{3} \ln |t-1| - \frac{1}{3} \ln |t+2| + c = \\ &= \frac{1}{3} \ln |\sin x - 1| - \frac{1}{3} \ln |\sin x + 2| + c, \text{ kde } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Více informací o neurčitém integrálu lze nalézt např. v [13].

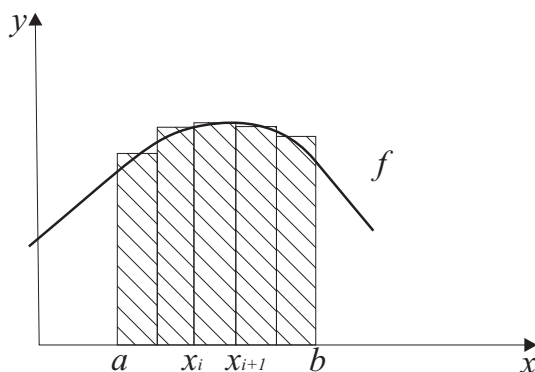
2 Určitý integrál

Teorie určitého integrálu prošla dlouhým vývojem. O jeho definici se zasloužili vědci jako I. Newton, A. L. Cauchy, ale v současnosti se na určitý integrál nejčastěji díváme z pohledu B. Riemanna.¹ Odtud určitý integrál nazýváme jako Riemannův určitý integrál.

Při tvorbě této kapitoly byla využita zejména literatura [3], [7], [10], [12], [13] a [17].

2.1 Definice Riemannova určitého integrálu

Uvažujeme nezápornou funkci f , která je definovaná a omezená na omezeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Naším cílem je určit obsah plochy vymezené grafem funkce f , osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$. Abychom obsah plochy mohli přibližně vypočítat, rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ na n podintervalů a na nich aproximujeme skutečný obsah plochy obsahy obélníků.



Definice 2.1. Konečná množina bodů $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, které leží v intervalu $\langle a, b \rangle$, se nazývá **dělení intervalu** $\langle a, b \rangle$, jestliže platí $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. **Dělicí body** intervalu $\langle a, b \rangle$ jsou body $x_0, x_1, \dots, x_n$, ***i*-tý dělicí interval** je interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a **délka *i*-tého dělicího intervalu** je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

¹Německý matematik 19. století Bernhard Riemann rozšířil definici určitého integrálu i pro nespojitě funkce. Předešlá Newtonova i Cauchyho definice určitého integrálu platila pouze pro funkce spojitě.

Pro každý interval $\langle a, b \rangle$ můžeme nalézt nekonečně mnoho různých dělení a množinu všech dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ značíme $\mathcal{D}(\langle a, b \rangle)$.

Abychom mohli nadefinovat Riemannův určitý integrál, je třeba nejprve zavést následující pojmy.

Definice 2.2. Nechť je dán interval $\langle a, b \rangle$, na kterém je funkce f omezená a nechť $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je libovolné dělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Označme pro všechna $i = 1, \dots, n$

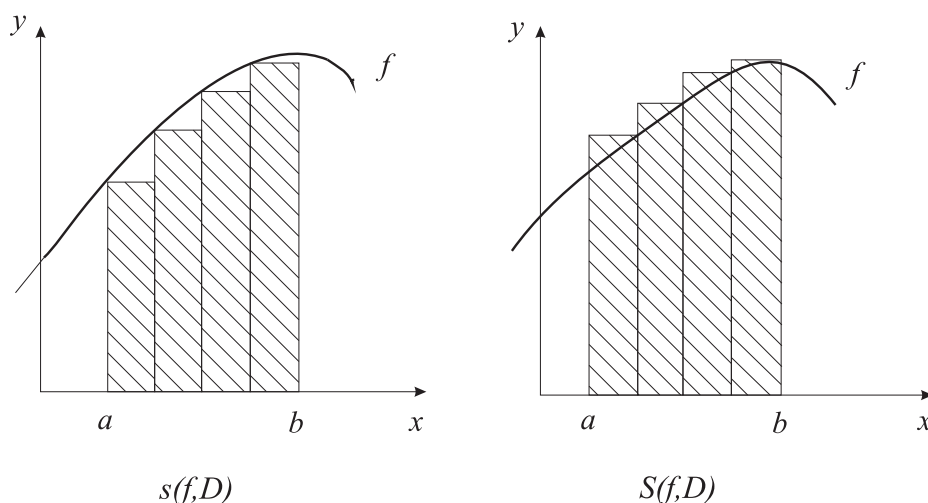
$m_i = \inf \{f(x); x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle\}$, tj. infimum funkčních hodnot $f(x)$ na $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$

$M_i = \sup \{f(x); x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle\}$, tj. supremum funkčních hodnot $f(x)$ na $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

Pak můžeme definovat **dolní**, resp. **horní Riemannův součet funkce f při dělení D** předpisy

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i, \text{ resp.}$$

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i.$$



Věta 2.1. Uvažujeme funkci f omezenou na intervalu $\langle a, b \rangle$, libovolná dělení tohoto intervalu $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(\langle a, b \rangle)$ a infimum, resp. supremum funkčních hodnot

$f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$

$$m = \inf \{f(x); x \in \langle a, b \rangle\}, \text{ resp.}$$

$$M = \sup \{f(x); x \in \langle a, b \rangle\}.$$

Pak bude platit následující vztah

$$m \cdot (b - a) \leq s(f, D_1) \leq S(f, D_2) \leq M \cdot (b - a).$$

Důkaz Věty 2.1 najdeme např. v [13].

Definice 2.3. Nechť je dána funkce f , která je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak **dolním**, resp. **horním** (**Riemannovým**) **integrálem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$** bude číslo

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup \{s(f, D); D \in \mathcal{D}(\langle a, b \rangle)\}, \text{ resp.}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf \{S(f, D); D \in \mathcal{D}(\langle a, b \rangle)\}.$$

Definice 2.4. Nechť je dána funkce f , která je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$. Řekneme, že funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na $\langle a, b \rangle$, jestliže platí následující vztah

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx.$$

Tuto vlastnost funkce f značíme $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ a hodnotu, které se rovná dolní i horní Riemannův integrál, nazýváme **určitým Riemannovým integrálem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$** a značíme jej

$$\int_a^b f(x) dx \quad (\text{nebo } (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx).$$

Před samotným výpočtem určitého integrálu je někdy vhodné ověřit, zda je funkce vůbec schopná integrace. Tedy zda splňuje podmínky integrovatelnosti, z nichž některé jsou blíže popsány v následujících řádcích.

Věta 2.2. *Nechť je dána funkce f omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak bude funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ integrace schopna (neboli $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$) právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D \in \mathcal{D}(\langle a, b \rangle) : S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Věta 2.3. *Nechť je dána funkce f , která je na intervalu $\langle a, b \rangle$ monotónní. Potom $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$.*

Věta 2.4. *Nechť je dána funkce f , která je na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá. Potom $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$.*

Důkazy Vět 2.2, 2.3 a 2.4 najdeme např. v [14].

Poznámka 2.1. Typickým případem funkce, která není Riemannovsky integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$, je tzv. Dirichletova funkce. Blíže bude popsána v následujícím příkladu.

Příklad 2.1. Uvažujme Dirichletovu funkci definovanou na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ předpisem

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro racionální } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0, & \text{pro iracionální } x \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

Funkce $\chi(x)$ není na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ Riemannovsky integrovatelná, neboť horní a dolní Riemannův integrál se sobě nerovnají:

$$\int_0^1 \chi(x) dx = \sup \{s(\chi, D); D \in \mathcal{D}(\langle 0, 1 \rangle)\} = 0,$$

$$\overline{\int_0^1} \chi(x) dx = \inf \{S(\chi, D); D \in \mathcal{D}(\langle 0, 1 \rangle)\} = 1.$$

2.2 Vlastnosti Riemannova určitého integrálu

Dosud jsme uvažovali určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$, v případě, kdy $a < b$. Můžeme se ale setkat i s případy, kde $a = b$. Potom platí

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

V případech, kdy $b < a$ a $f \in \mathcal{R}(\langle b, a \rangle)$, definujeme

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

V následujících větách jsou uvedeny vlastnosti Riemannova určitého integrálu, které je třeba zohledňovat při výpočtech $\mathcal{R}$ -integrálů. Pro základní algebraické operace s určitým integrálem, jako je například sčítání, odčítání a násobení integrálu konstantou, platí podobné vlastnosti jako pro neurčitý integrál.

Věta 2.5. *Nechť jsou dány funkce $f, g \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$. Potom také $f + g \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ a platí*

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Věta 2.6. *Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$, $c \in \mathbb{R}$. Potom také $c \cdot f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ a platí*

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Věta 2.7. *Nechť jsou dány funkce $f, g \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$. Potom také $f \cdot g \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$.*

Věta 2.8. *Nechť jsou dány funkce $f, g \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ a reálné číslo $c > 0$ takové, že $g(x) \geq c$ na $\langle a, b \rangle$. Potom bude platit, že $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$.*

Věta 2.9. *Nechť jsou dány funkce $f, g \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ a nechť platí $f(x) \leq g(x) \forall x \in \langle a, b \rangle$. Potom také*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Věta 2.10. *Nechť je dána funkce $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ a čísla $k, K \in \mathbb{R}$ taková, že $k \leq f(x) \leq K \forall x \in \langle a, b \rangle$. Potom bude platit následující vztah:*

$$k \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq K \cdot (b - a).$$

Důkazy Vět 2.5, 2.6, 2.9, 2.10 najdeme např. v [10] a důkazy Vět 2.7 a 2.8 najdeme např. v [13].

Následující věta nám říká, že určitý integrál funkce na daném intervalu můžeme vyjádřit jako součet integrálů funkce přes jednotlivé subintervaly.

Věta 2.11. *Nechť $a < c < b$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a, c \rangle)$ a $f \in \mathcal{R}(\langle c, b \rangle)$. Potom $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ a platí*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Důkaz Věty 2.11 najdeme např. v [10].

Věta 2.12. *Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ a nechť platí, že $\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle$. Potom také $f \in \mathcal{R}(\langle c, d \rangle)$.*

Důkaz Věty 2.12 lze nalézt např. v [13].

2.3 Výpočet Riemannova určitého integrálu

Při výpočtu Riemannova určitého integrálu používáme stejné metody jako při výpočtu neurčitěho integrálu (tj. substituční metodu a metodu per partes). Je však třeba nejprve zavést Newton-Leibnizův vzorec.

Věta 2.13 (Newton-Leibnizův vzorec). *Nechť je dána funkce $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ a nechť F je její primitivní funkcí na $\langle a, b \rangle$. Potom platí*

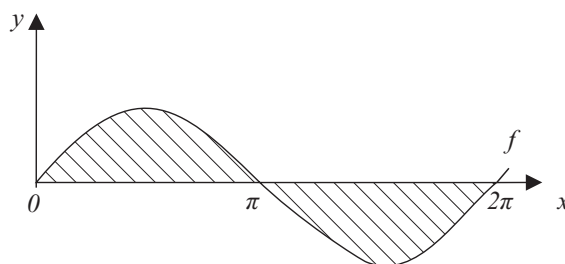
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \equiv [F(x)]_a^b.$$

Důkaz Věty 2.13 najdeme např. v [13].

Příklad 2.2. Vypočítejte obsah plochy vymezené grafem funkce $\sin x$, osou x a přímkami $x = 0$ a $x = 2\pi$.

Řešení: $\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2$.

Obsah plochy vymezené grafem funkce $\sin x$, osou x a přímkami $x = 0$ a $x = 2\pi$ bude tedy roven 4.



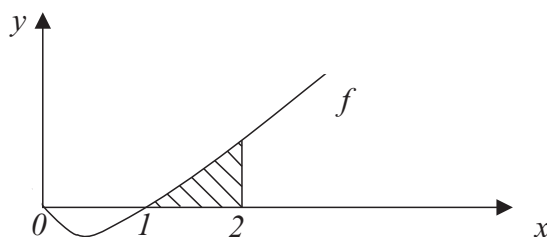
Věta 2.14 (Metoda per partes). *Nechť funkce u a v mají derivace na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť $u', v' \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$. Potom*

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = \underbrace{[u(x)v(x)]_a^b}_{u(b)v(b)-u(a)v(a)} - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

Důkaz Věty 2.14 najdeme např. v [13].

Příklad 2.3. Najděte určitý integrál k funkci $x \cdot \ln x$ na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$.

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } \int_1^2 x \cdot \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = 2 \ln 2 - \\ &- \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$



Věta 2.15 (První věta o substituci). *Nechť je dána spojitá funkce f definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a funkce φ , která má derivaci na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a platí, že φ' je na tomto intervalu integrovatelná. Nechť dále platí, že $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle) \subseteq \langle a, b \rangle$. Potom*

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt.$$

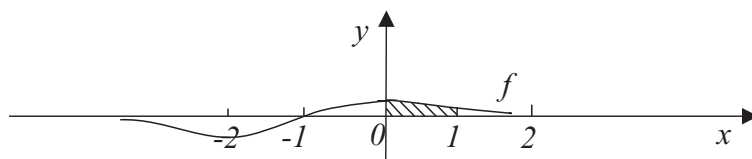
Věta 2.16 (Druhá věta o substituci). *Nechť je dána spojitá funkce f definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a funkce φ , která má nenulovou derivaci na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a nechť φ' je na tomto intervalu integrovatelná. Nechť dále platí, že $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle) = \langle a, b \rangle$. Potom*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) dt.$$

Důkaz Vět 2.15 a 2.16 najdeme např. v [13].

Příklad 2.4. Najděte určitý integrál k funkci $\frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } \int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 2x + 3 \\ dt = (2x + 2) dx \\ x = 0 : t = 3 \\ x = 1 : t = 6 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_3^6 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} [-t^{-1}]_3^6 = \\ &= -\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$



Poznámka 2.2. Významným aplikacím určitého integrálu v ekonomii bude věnována zvláštní kapitola.

3 Nevlastní integrál

Na nevlastní integrál funkce jedné proměnné se lze dívat jako na zobecnění Riemannova určitého integrálu. Riemannův určitý integrál, kterému byla věnována předchozí kapitola, zjednodušeně splňuje dvě kritéria. První kritérium říká, že interval, na kterém funkci integrujeme, musí být omezený. Druhé kritérium zase znamená, že integrovaná funkce musí být na daném intervalu omezená. V praxi se můžeme setkat s případy, kdy je některé z těchto kritérií porušeno. V takovém případě hovoříme o nevlastním integrálu.

Tato kapitola byla sepsána za pomoci literatur [12], [13] a [18].

3.1 Integrál jako funkce horní meze

Pro správné pochopení pojmu nevlastní integrál je vhodné nejprve nadefinovat integrál jako funkce horní meze.

Definice 3.1. Nechť je dána funkce f Riemannovsky integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom pro všechna $t \in \langle a, b \rangle$ existuje funkce

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

kterou nazýváme *integrál jako funkce horní meze*.²

Pro výše zmíněnou funkci horní meze platí řada vlastností. Některé z nich jsou zmíněny v následujících větách.

Věta 3.1. Nechť je dána Riemannovsky integrovatelná funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom bude funkce $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá.

Věta 3.2. Nechť je dána funkce f Riemannovsky integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a funkce $F(t) = \int_a^t f(x) dx$, kde $t \in \langle a, b \rangle$. Pak platí, že v každém bodě $t_0 \in \langle a, b \rangle$, v němž je funkce f spojitá, má funkce F vlastní derivaci a platí

$$F'(t_0) = f(t_0).$$

²Obdobně bychom mohli nadefinovat i integrál jako funkci dolní meze $G(t) = \int_t^b f(x) dx$ pro $t \in \langle a, b \rangle$.

Je-li $t_0 = a$ nebo $t_0 = b$, jedná se o *jednostranné derivace*.

Důkazy Vět 3.1 a 3.2 najdeme např. v [13].

Jak již bylo naznačeno v úvodu kapitoly, rozlišujeme dva typy nevlastního integrálu v závislosti na porušení jednoho z kritérií Riemannova určitého integrálu.

- V případě, že interval, na kterém integrujeme danou funkci, není omezený, mluvíme o **nevlastním integrálu vlivem meze**.
- V případě, že integrovaná funkce není na daném intervalu omezená, mluvíme o **nevlastním integrálu vlivem funkce**.

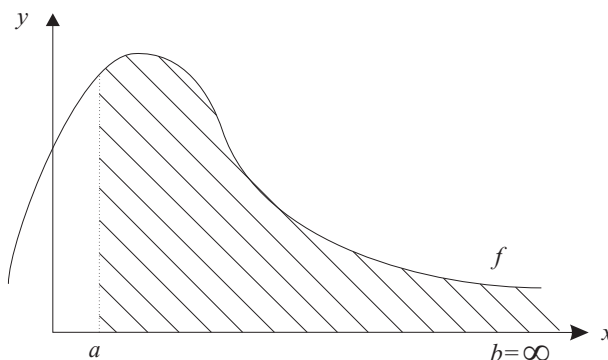
Body, v jejichž okolí není integrovaná funkce omezená nebo nevlastní body $-\infty$ a ∞ , nazýváme *singulární body*. Takových singulárních bodů uvažujeme pouze konečný počet.

Definice 3.2. Nechť je dán bod $c \in \mathbb{R}^*$, kde $a \leq c \leq b$. Jestliže $c = -\infty$ nebo $c = \infty$ nebo je-li funkce f na okolí bodu c neomezená, nazveme bod c **singulárním bodem integrace funkce f na intervalu (a, b)** .

Výpočet nevlastních integrálů provádíme pomocí limit. Jedná-li se o vlastní limitu, tvrdíme, že nevlastní integrál konverguje. Naopak, jedná-li se o nevlastní limitu (nebo limita neexistuje), tvrdíme, že nevlastní integrál diverguje. Tento zjednodušený pohled na výpočet nevlastních integrálů bude následně zpřesněn.

3.2 Nevlastní integrál vlivem meze

Nevlastním integrálem vlivem meze obecně rozumíme integrál, u kterého je alespoň jedna z mezí nevlastní.



Definice 3.3. Nechť je dána funkce f definovaná na intervalu $\langle a, \infty \rangle$ a nechť pro každé $t \in (a, \infty)$ existuje integrál $\int_a^t f(x) dx$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx,$$

říkáme, že **nevlastní integrál** $\int_a^\infty f(x) dx$ **konverguje**³ (**existuje**). Existuje-li tento nevlastní integrál, definujeme jej vztahem

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Je-li limita nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál **diverguje**.

Definice 3.4. Nechť je dána funkce f definovaná na intervalu $(-\infty, b)$ a nechť pro každé $t \in (-\infty, b)$ existuje integrál $\int_t^b f(x) dx$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx,$$

říkáme, že **nevlastní integrál** $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ **konverguje** (**existuje**). Existuje-li tento nevlastní integrál, definujeme jej vztahem

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx.$$

Je-li limita nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál **diverguje**.

Definice 3.5. Nechť je funkce f definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$ a nechť konvergují oba nevlastní integrály

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx \quad (1) \quad \text{a} \quad \int_c^\infty f(x) dx \quad (2),$$

kde $c \in \mathbb{R}$. Pak říkáme, že **nevlastní integrál** $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ **konverguje** (**existuje**) a definujeme jej vztahem

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Diverguje-li aspoň jeden z integrálů (1) a (2), pak říkáme, že nevlastní integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ **diverguje**.

Přesný postup výpočtu nevlastního integrálu vlivem meze bude popsán v následující podkapitole a aplikován na konkrétním příkladě.

³Kritéria konvergence pro nevlastní integrály lze najít např. v [13].

3.3 Výpočet nevlastního integrálu vlivem meze

Známe-li primitivní funkci F k funkci f na uzavřeném intervalu, který neobsahuje singulární body integrace, můžeme nevlastní integrál $\int_a^b f(x) dx$ počítat pomocí modifikovaného Newton-Leibnizova vzorce.

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_a^t f(x) dx \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} ([F(x)]_a^t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (F(t) - F(a))$$

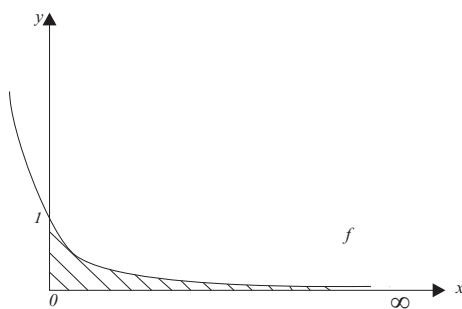
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\int_t^b f(x) dx \right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} ([F(x)]_t^b) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (F(b) - F(t))$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^c f(x) dx + \lim_{u \rightarrow \infty} \int_c^u f(x) dx = \\ &= \left(F(c) - \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) \right) + \left(\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) - F(c) \right) = \lim_{u \rightarrow \infty} F(u) - \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) \end{aligned}$$

Příklad 3.1. Vypočítejte nevlastní integrál k funkci e^{-2x} na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ a rozhodněte o jeho konvergenci.

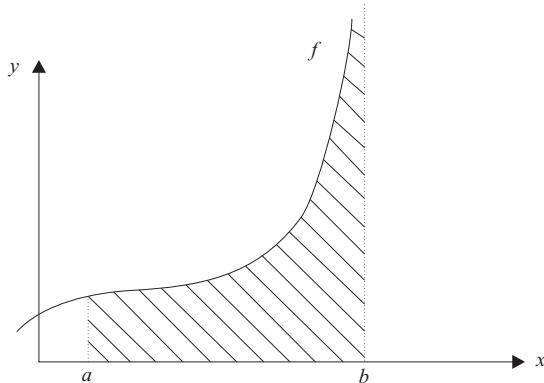
$$\begin{aligned} \text{Řešení: } \int_0^\infty e^{-2x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-2x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^t \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2} e^0 \right) = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nevlastní integrál je roven $\frac{1}{2}$ a konverguje.



3.4 Nevlastní integrál vlivem funkce

Nevlastním integrálem vlivem funkce obecně rozumíme integrál funkce, která není na daném intervalu $\langle a, b \rangle$ omezená.



Definice 3.6. Nechť je dána funkce f definovaná na omezeném intervalu $\langle a, b \rangle$, která není omezená na žádném levém okolí bodu b a nechť pro každé $t \in \langle a, b \rangle$ existuje integrál $\int_a^t f(x) dx$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx,$$

říkáme, že **nevlastní integrál** $\int_a^b f(x) dx$ **konverguje (existuje)**. Existuje-li nevlastní integrál, pak jej definujeme vztahem

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx.$$

Je-li limita nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál **diverguje**.

Definice 3.7. Nechť je dána funkce f definovaná na omezeném intervalu $(a, b]$, která není omezená na žádném pravém okolí bodu a a nechť pro každé $t \in (a, b]$ existuje integrál $\int_t^b f(x) dx$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx,$$

říkáme, že **nevlastní integrál** $\int_a^b f(x) dx$ **konverguje (existuje)**. Existuje-li nevlastní integrál, definujeme jej vztahem

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx.$$

Je-li limita nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál **diverguje**.

Definice 3.8. Nechť je dána funkce f definovaná na $\langle a, c \rangle \cup (c, b \rangle$, která není omezená na žádném okolí bodu c a nechť konvergují oba nevlastní integrály

$$\int_a^c f(x) dx \quad (3) \quad \text{a} \quad \int_c^b f(x) dx \quad (4).$$

Pak říkáme, že **nevlastní integrál** $\int_a^b f(x) dx$ **konverguje (existuje)** a definujeme jej vztahem

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Diverguje-li alespoň jeden z integrálů (3) a (4), říkáme, že nevlastní integrál $\int_a^b f(x) dx$ **diverguje**.

3.5 Výpočet nevlastního integrálu vlivem funkce

Nevlastní integrál vlivem funkce lze obdobně jako nevlastní integrál vlivem meze počítat pomocí modifikovaného Newton-Leibnizova vzorce opět za podmínky, že je známa primitivní funkce F k funkci f na uzavřeném intervalu neobsahujícím singulární body integrace.

Nechť f není omezená na žádném okolí bodu b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} ([F(x)]_a^t) = \lim_{t \rightarrow b^-} (F(t) - F(a))$$

Nechť f není omezená na žádném okolí bodu a :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} ([F(x)]_t^b) = \lim_{t \rightarrow a^+} (F(b) - F(t))$$

Nechť f není omezená na žádném okolí bodu $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{u \rightarrow c^+} \int_u^b f(x) dx =$$

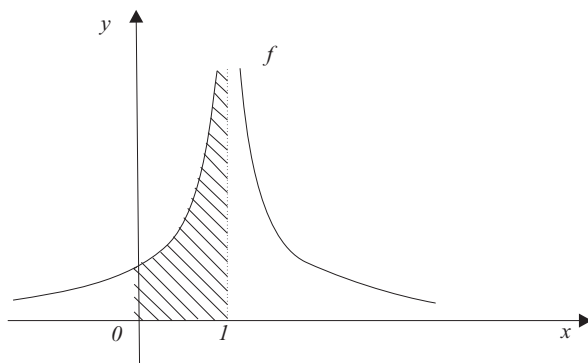
$$= \left(\lim_{t \rightarrow c^-} F(t) - F(a) \right) + \left(F(b) - \lim_{u \rightarrow c^+} F(u) \right)$$

Příklad 3.2. Vypočítejte nevlastní integrál k funkci $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a rozhodněte o jeho konvergenci.

Řešení: Při hledání nevlastního integrálu využijeme modifikovaného Newton-Leibnizova vzorce pro výpočet nevlastního integrálu vlivem funkce, neboť interval, na kterém integrujeme funkci, je omezený a přitom $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, kde $1 \in \langle 0, 1 \rangle$ a $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} \left([-3\sqrt[3]{1-x}]_0^t \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} (3\sqrt[3]{1-t} + 3) = 3. \end{aligned}$$

Nevlastní integrál je roven 3 a konverguje.



Dosud jsme uvažovali nevlastní integrály s maximálně dvěma singulárními body. V praxi se však můžeme setkat i s funkcemi, které mají na intervalu $\langle a, b \rangle$ n singulárních bodů, kde $n > 2$. V takovém případě interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme na n podintervalů (c_{i-1}, c_i) tak, že $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1} < c_n = b$. Řekneme, že nevlastní integrál funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ konverguje, konvergují-li všechny integrály $\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x) dx, i = 1, \dots, n$ a definujeme

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x) dx.$$

Diverguje-li alespoň jeden z integrálů $\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x) dx, i = 1, \dots, n$, potom diverguje také nevlastní integrál funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Příklad 3.3. Vypočítejte nevlastní integrál k funkci $\frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}$ na intervalu $\langle -2, \infty \rangle$ a rozhodněte o jeho konvergenci.

Řešení: Protože je funkce definovaná na $D_f = (-2, \infty)$, kde $-2 \in \langle -2, \infty \rangle$ a zároveň $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, jedná se o nevlastní integrál vlivem funkce i meze se dvěma singulárními body -2 a ∞ . Nejprve najdeme primitivní funkci:

$$\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+2} \\ t^2 = x+2 \\ x = t^2 - 2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{(t^2+1)t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \operatorname{arctg} t + c =$$

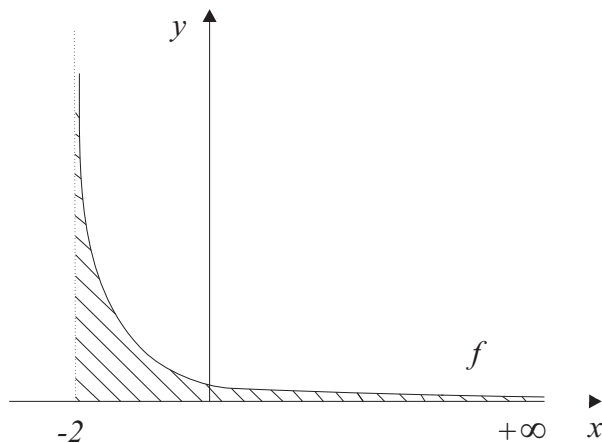
$$= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x+2} + c.$$

Nyní vyřešíme nevlastní integrál:

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}} dx + \int_{-1}^{\infty} \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}} dx = \lim_{t \rightarrow -2^+} [2 \operatorname{arctg} \sqrt{x+2}]_t^{-1} +$$

$$+ \lim_{u \rightarrow \infty} [2 \operatorname{arctg} \sqrt{x+2}]_{-1}^u = \lim_{t \rightarrow -2^+} (2 \operatorname{arctg} 1 - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{t+2}) + \lim_{u \rightarrow \infty} (2 \operatorname{arctg} \sqrt{u+2} - 2 \operatorname{arctg} 1) = \pi.$$

Nevlastní integrál je roven π a konverguje.



Poznámka 3.1. Aplikacím nevlastního integrálu v ekonomii bude věnována zvláštní kapitola.

4 Aplikace integrálního počtu v ekonomii

Integrální počet má velký význam a užití v ekonomii, fyzice, statistice, chemii a v dalších sférách. Jednotlivé aplikace neurčitého, určitého a nevlastního integrálu v ekonomii budou popsány v následujících kapitolách.

4.1 Aplikace neurčitého integrálu

Neurčitý integrál je v ekonomické praxi využíván zejména pro výpočet celkových nákladů, celkových příjmů nebo pro popsání tvorby kapitálu v závislosti na čase. Před samotným popisem těchto aplikací neurčitého integrálu si nejprve zavedeme některé důležité pojmy:

- *Náklady* rozumíme spotřebu výrobních prostředků v peněžních jednotkách.
- *Příjmy* jsou přírůstky peněžních prostředků.
- *Kapitálem* jsou prostředky, které investujeme za účelem zisku.

V následující podkapitole bude popsáno, jak lze neurčitým integrálem získat informace o celkových nákladech a celkových příjmech.

4.1.1 Celkové náklady a celkové příjmy

Celkové náklady značíme TC ⁴ a funkci, která popisuje celkové náklady na vyrobení x výrobků, značíme $TC(x)$ a platí pro ni vztah

$$TC(x) = K + V(x),$$

kde K jsou fixní náklady, které se nemění s objemem produkce, a $V(x)$ jsou variabilní náklady, které se naopak s objemem produkce mění.

Funkci, která popisuje *průměrné náklady* na výrobu jednoho výrobku při vyrobení x výrobků, značíme $AC(x)$ a platí pro ni vztah

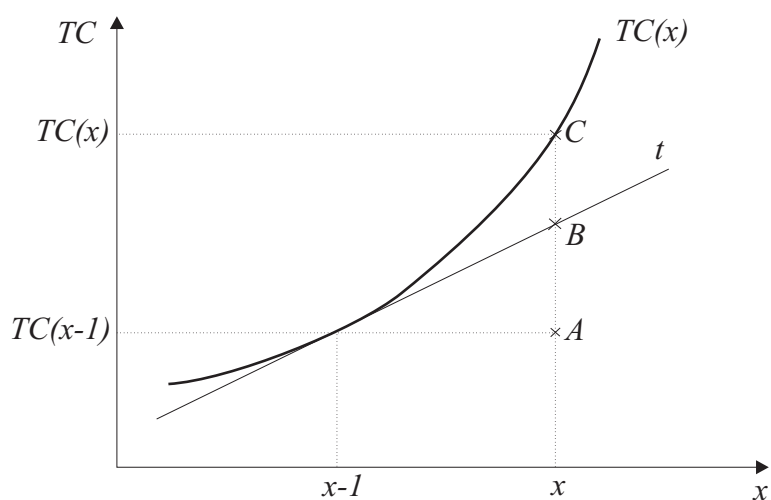
$$AC(x) = \frac{TC(x)}{x}.$$

⁴Označení celkových nákladů TC vychází z anglického názvosloví total cost. Dále zmíněné průměrné náklady AC vychází z average cost a mezní náklady MC z marginal cost. Obdobné značení platí i pro příjmy R (revenue).

Pomocí celkových nákladů lze také zjistit *náklady na výrobu x -tého výrobku*, které značíme $C(x)$ a lze je popsat funkcí

$$C(x) = TC(x) - TC(x-1).$$

Náklady na výrobu x -tého výrobku lze ilustrovat pomocí následujícího motivačního obrázku.



Náklady na výrobu x -tého výrobku $C(x)$ jsou v obrázku určeny úsečkou $|AC|$. Jestliže funkci $TC(x)$ v bodě $x-1$ aproximujeme tečnou t , lze tyto náklady $C(x)$ přibližně nahradit úsečkou $|AB|$, tedy diferenciálem funkce $TC(x)$ v bodě $x-1$ pro přírůstek $\Delta x = x - (x-1)$. To znamená, že

$$C(x) \approx dTC(x-1) = TC'(x-1) \cdot \Delta x = TC'(x-1).$$

Z obrázku vidíme, že hodnota $TC'(x-1)$ určuje mezní hodnoty funkce $C(x)$. V tomto případě (u funkce s konvexním průběhem) $TC'(x-1)$ určuje dolní krajní možnou hodnotu funkce $C(x)$. Proto zavádíme funkci *mezních nákladů*, pro kterou platí

$$MC(x) = TC'(x).$$

Mezní (neboli marginální) náklady $MC(x)$ v bodě $x-1$ tedy přibližně udávají náklady na výrobu x -tého výrobku.

Nyní se již dostáváme k samotné aplikaci neurčitého integrálu. Jelikož integrování je inverzní operace k derivování, využijeme vztah $MC(x) = TC'(x)$

a je-li známá funkce mezních nákladů $MC(x)$, lze pomocí neurčitého integrálu vypočítat funkci celkových nákladů $TC(x)$ ze vztahu

$$TC(x) = \int MC(x) dx.$$

Příklad 4.1. Jsou dány mezní náklady popsané funkcí $MC(x) = 10^2 \cdot e^{0,3x}$ v Kč. Najděte funkci celkových nákladů $TC(x)$ a zjistěte celkové náklady na výrobu 20 výrobků, jestliže známe fixní náklady $K = 3 \cdot 10^3$ Kč.

Řešení: $TC(x) = \int 10^2 \cdot e^{0,3x} dx = \frac{10^3}{3} \cdot e^{0,3x} + c$.

Abychom určili integrační konstantu c , využijeme vztah $TC(x) = K + VC(x)$, kde fixní náklady nezávisí na objemu produkce, a proto pro $x = 0$ budou celkové náklady rovny fixním nákladům:

$$TC(0) = K$$

$$\frac{10^3}{3} \cdot e^{0,3 \cdot 0} + c = 3 \cdot 10^3$$

$$c = 3 \cdot 10^3 - \frac{10^3}{3} = \frac{8}{3} \cdot 10^3$$

Celkové náklady na výrobu 20 výrobků budou:

$$TC(20) = \frac{10^3}{3} \cdot e^{0,3 \cdot 20} + \frac{8}{3} \cdot 10^3 = 137\,142,93 \text{ Kč.}$$

Nyní si ukážeme, jak lze pomocí neurčitého integrálu vypočítat i celkový příjem. *Celkový příjem* $TR(x)$ je množství peněžních prostředků získaných z prodeje x výrobků a pro jeho výpočet platí vztah

$$TR(x) = P \cdot x,$$

kde P je cena jednoho výrobku a x je množství prodaných výrobků.

Funkce $AR(x)$ udává *průměrný příjem* z jednoho prodaného výrobku při x prodaných výrobcích a platí

$$AR(x) = \frac{TR(x)}{x}.$$

Mezním příjmem rozumíme přibližnou změnu celkových příjmů v důsledku změny prodeje o jednotku a obdobným postupem jako u již zmíněné nákladové funkce bychom dospěli ke vztahu $MR(x) = TR'(x)$, a tedy

$$TR(x) = \int MR(x) dx.$$

Poznámka 4.1. Obecně lze vztahu mezi celkovou a mezní veličinou využít také u jiných veličin (např. u užitku), kdy celkovou veličinu získáme zintegrováním veličiny mezní.

Příklad 4.2. Jsou dány mezní příjmy popsané funkcí $MR(x) = \left(2x - \frac{3}{100}\right) \cdot e^{\frac{x}{2}}$ v Kč. Najděte funkci celkových příjmů $TR(x)$ a zjistěte celkové příjmy z prodeje 10 výrobků.

Řešení: Celkové příjmy získáme zintegrováním mezních příjmů za použití Metody per partes:

$$TR(x) = \int \left(2x - \frac{3}{100}\right) \cdot e^{\frac{x}{2}} dx = \left| \begin{array}{ll} u = 2x - \frac{3}{100} & u' = 2 \\ v' = e^{\frac{x}{2}} & v = 2e^{\frac{x}{2}} \end{array} \right| = \left(2x - \frac{3}{100}\right) \cdot 2e^{\frac{x}{2}} - 4 \cdot \int e^{\frac{x}{2}} = \left(4x - \frac{3}{50}\right) \cdot e^{\frac{x}{2}} - 8e^{\frac{x}{2}} + c = e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(4x - \frac{403}{50}\right) + c.$$

Abychom určili integrační konstantu c , využijeme vztah $TR(x) = P \cdot x$, ve kterém bude pro $x = 0$ platit:

$$TR(0) = 0$$

$$e^{\frac{0}{2}} \cdot \left(4 \cdot 0 - \frac{403}{50}\right) + c = 0$$

$$c = \frac{403}{50}.$$

Celkové příjmy z prodeje 10 výrobků budou:

$$TR(10) = e^{\frac{10}{2}} \cdot \left(4 \cdot 10 - \frac{403}{50}\right) + \frac{403}{50} = 4\,748,38 \text{ Kč.}$$

Další aplikací neurčitého integrálu v ekonomii je teorie tvorby kapitálu.

4.1.2 Tvorba kapitálu a toky investic

Tvorbou kapitálu rozumíme proces hospodářské aktivity, při kterém se tvoří peněžní prostředky, které jsou následně použity k investování. Sledujeme-li tento

proces v čase, lze *základní kapitál* vyjádřit jako funkci času $K(t)$. Pomocí derivace této funkce lze určit *míru tvorby kapitálu* $K'(t)$, kterou lze ztotožnit s *mírou toku čisté investice v čase t* , označovanou $I(t)$, tj.

$$K'(t) = I(t).$$

Z této rovnice lze vyjádřit vztah pro výpočet základního kapitálu v čase t , tj.

$$K(t) = \int I(t)dt.$$

Příklad 4.3. Je dán čistý investiční tok $I(t) = 25\sqrt[3]{t^2}$ v Kč. Základní kapitál v čase $t(0)$ je 1000 Kč. Určete změnu kapitálu v závislosti na čase.

Řešení: $\int 25\sqrt[3]{t^2}dt = 25\frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = 15\sqrt[3]{t^5} + c.$

Integrační konstantu c vypočítáme pro $t = 0$:

$$1000 = 15 \cdot \sqrt[3]{0^5} + c$$

$$c = 1000.$$

Základní kapitál bude tedy v čase t roven $K(t) = 15 \cdot \sqrt[3]{t^5} + 1000$ Kč.

Při tvorbě kapitoly Aplikace neurčitého integrálu byly využity především zdroje [3], [4], [5], [6], [8] a [11].

4.2 Aplikace určitého integrálu

Kromě neurčitěho integrálu nalézá v ekonomii uplatnění také integrál určitý. Díky integračním mezím určitého integrálu můžeme například pozorovat různé ekonomické ukazatele v čase. Široké spektrum aplikací určitého integrálu v ekonomii bude v této kapitole postupně vysvětleno a předvedeno na praktických příkladech.

Při zpracování této kapitoly byly využity zdroje [1], [2], [3], [5], [6], [8] a [11].

4.2.1 Celkové náklady a celkové příjmy v časovém intervalu

První aplikace určitého integrálu v ekonomii navazuje na teorii, které byla věnována předchozí podkapitola, v níž jsme zjišťovali celkové veličiny pomocí známých mezních veličin. Nyní budeme schopni pomocí určitého integrálu sledovat celkové veličiny i v nějakém časovém intervalu.

Obecně platí, že známe-li spojitou funkci $f(t)$, která popisuje náklady nebo příjmy v čase t , kde $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, můžeme za použití určitého integrálu vypočítat celkové náklady nebo celkové příjmy za daný časový interval $\langle t_1, t_2 \rangle$, tj.

$$TC(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt, \text{ resp.}$$

$$TR(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

Příklad 4.4. Určete celkový příjem za období prvních 3 let, je-li známá funkce $f(t) = 10t \cdot e^{(2t+1)}$ v Kč, která popisuje příjem v čase t , přičemž jednotkou času je 1 rok.

Řešení: Při výpočtu určitého integrálu, jehož integrační meze budou 0 a 3, využijeme První větu o substituci i Metodu per partes:

$$TR(0, 3) = \int_0^3 10t \cdot e^{(2t+1)} dt = \left| \begin{array}{l} z = 2t + 1 \\ t = \frac{z-1}{2} \\ dz = 2 dt \\ t = 0 : z = 1 \\ t = 3 : z = 7 \end{array} \right| = \frac{5}{2} \int_1^7 (z - 1) \cdot e^z dz =$$

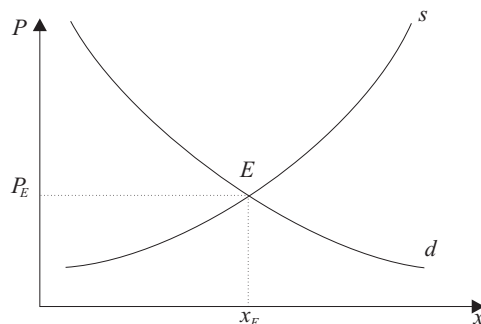
$$= \left| \begin{array}{l} u = z-1 \\ v' = e^z \end{array} \right|_{u'=1}^{v=e^z} = \frac{5}{2} \left([(z-1) \cdot e^z]_1^7 - \int_1^7 e^z \right) = \frac{5}{2} (6e^7 - [e^z]_1^7) = \\ = \frac{5}{2} (6e^7 - (e^7 - e^1)) = 13\,714,71 \text{ Kč.}$$

4.2.2 Přebytek spotřebitele a přebytek výrobce

Další aplikace určitého integrálu se týká trhu výrobků a služeb, proto zmíníme následující důležité pojmy:

- *Nabídkou* rozumíme množství zboží, které je výrobce ochoten prodávat při různých úrovních ceny.
- *Poptávkou* rozumíme množství zboží, které je spotřebitel ochoten nakoupit při různých úrovních ceny.
- *Dokonalá konkurence* je teoretický model trhu, na kterém je v daném odvětví velký počet nakupujících a prodávajících, ale žádný není schopen ovlivnit cenu. Dalším znakem je volný vstup do daného odvětví a homogenní produkty.

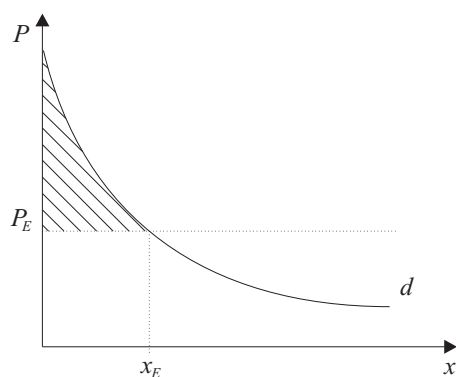
Základním předpokladem následujících úvah je rovnováha na dokonale konkurenčním trhu. Rovnováha na trhu nastává v okamžiku, kdy se nabízené množství rovná poptávanému množství. Takové množství se nazývá *rovnovážné množství*, které značíme x_E ⁵. Rovnovážnému množství odpovídá *rovnovážná cena*, kterou značíme P_E . Pro funkci nabídky $s(x)$ a pro funkci poptávky $d(x)$ bude při rovnovážném množství platit vztah $s(x) = d(x)$.



⁵Označení pro rovnováhu E vychází z anglického equilibrium. Dále zmíněné označení pro nabídku s je odvozeno od supply a pro poptávku d od demand.

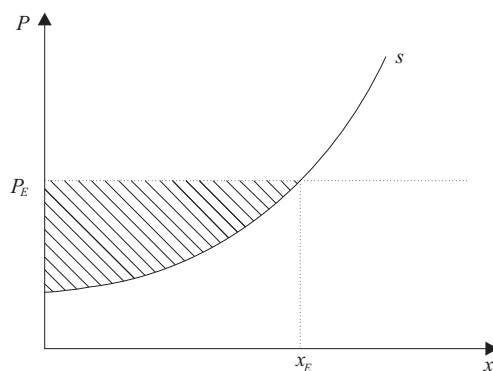
V praxi se můžeme setkat se situací, kdy jsou spotřebitelé ochotni nakupovat daný výrobek za cenu vyšší než je P_E , v takovém případě vzniká tzv. *přebytek spotřebitele*. V následujícím obrázku je přebytek spotřebitele ilustrován jako rozdíl mezi největší částkou, kterou je spotřebitel ochoten zaplatit za dané množství výrobků, a částkou, kterou spotřebitel skutečně platí. Tuto úvahu lze zapsat pomocí integrálu, tj.

$$PS = \int_0^{x_E} d(x) dx - x_E \cdot P_E.$$



Přebytek výrobce zase vzniká v případě, kdy jsou výrobci ochotni prodávat nabízené množství za cenu nižší než je P_E . Tuto situaci lze opět ukázat na obrázku, ve kterém je přebytek výrobce představen jako rozdíl mezi nejmenší částkou, za kterou je výrobce ochoten prodat dané množství výrobků, a cenou, za kterou daný výrobek skutečně prodal, tj.

$$PV = x_E \cdot P_E - \int_0^{x_E} s(x) dx.$$



Příklad 4.5. Určete přebytek spotřebitele a přebytek výrobce, jestliže je známá funkce poptávky $d(x) = 50 - 2x^2$ v Kč a funkce $s(x) = 2(2x + 1)$, která popisuje nabídku daného výrobku a je rovněž vyjádřena v Kč.

Řešení: Abychom mohli úlohu vyřešit, je nutné nejprve zjistit rovnovážné množství a rovnovážnou cenu. Rovnovážné množství vypočítáme z rovnosti

$$d(x) = s(x):$$

$$50 - 2x^2 = 2(2x + 1)$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

Kořeny kvadratické rovnice jsou $x_1 = 4$ a $x_2 = -6$. Rovnovážné množství tedy bude $x_E = 4$, neboť záporná hodnota druhého kořene rovnice zde nemá smysl.

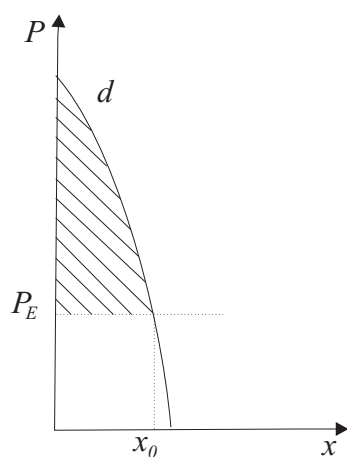
Rovnovážnou cenu vypočítáme z jedné z rovnic dosazením x_E :

$$P_E = 50 - 2 \cdot 4^2 = 18 \text{ Kč.}$$

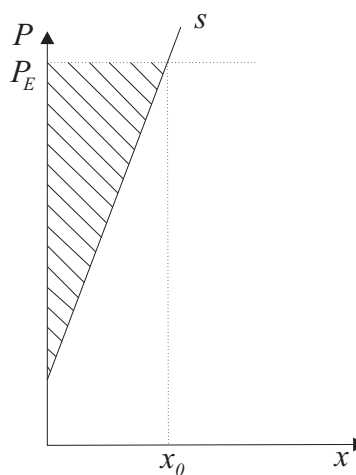
Nyní jsme schopni vypočítat přebytek spotřebitele i výrobce:

$$PS = \int_0^4 (50 - 2x^2) dx - 4 \cdot 18 = \left[50x - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^4 - 72 = 157,33 - 72 = 85,33 \text{ Kč.}$$

$$PV = 4 \cdot 18 - \int_0^4 2(2x + 1) dx = 72 - [2x^2 + 2x]_0^4 = 72 - 40 = 32 \text{ Kč.}$$



Přebytek spotřebitele



Přebytek výrobce

4.2.3 Tvorba kapitálu a toky investic v časovém intervalu

V jedné z předchozích podkapitol, která se věnovala aplikacím neurčitého integrálu, jsme tvorbu kapitálu vysvětlili jako funkci času a ukázali pro ni vztah v čase t : $K'(t) = I(t)$. Pomocí určitého integrálu navíc budeme schopni tuto funkci pozorovat v nějakém časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Známe-li funkci čistých investic $I(t)$, pak bude pro tvorbu kapitálu $K(t)$ během časového intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ platit vztah

$$K(t) = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt.$$

Obdobně lze kapitál sledovat již od počátku jeho tvorby. Tvorbu kapitálu tedy můžeme definovat pro časový interval $\langle 0, t_1 \rangle$ vztahem

$$K(t) = \int_0^{t_1} I(t) dt.$$

A protože lze uvedený integrál rozepsat podle Newton-Leibnizova vztahu, tj. $\int_0^{t_1} I(t) dt = [K(t)]_0^{t_1} = K(t_1) - K(0)$, můžeme z něj odvodit velikost kapitálu v čase t_1 , tj.

$$K(t_1) = K(0) + \int_0^{t_1} I(t) dt,$$

kde $K(0)$ je počáteční základní kapitál.

Následující příklad bude vycházet ze stejného zadání jako Příklad 4.3, tentokrát však budeme sledovat velikost kapitálu v daném časovém intervalu.

Příklad 4.6. Nechť je dán investiční tok $I(t) = 25\sqrt[3]{t^2}$ v tis. Kč. Určete tvorbu kapitálu během pátého až desátého roku.

Řešení: Ze zadání určíme časový interval, během kterého kapitál sledujeme, tj. $\langle 4, 10 \rangle$. Nyní můžeme řešit určitý integrál s integračními mezemi 4 a 10:

$$\int_4^{10} 25\sqrt[3]{t^2} dt = 25 \left[\frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_4^{10} = 15\sqrt[3]{10^5} - 15\sqrt[3]{4^5} = 545,05 \text{ tis. Kč.}$$

4.2.4 Spojité úročení

Před zavedením samotné aplikace určitého integrálu, týkající se spojitého úročení, nejprve nadefinujeme základní pojmy týkající se této problematiky:

- *Úrokem* rozumíme cenu, za kterou věřitel poskytne půjčku dlužníkovi.
- *Úročením* rozumíme proces výpočtu úroku.
- *Úroková míra* je hodnota úroku v procentech za dané období.
- *Úrokové období* je časový interval, na jehož konci je úrok připsán.

Spojité úročení je zvláštním případem področního úročení, kdy se intervaly připsování úroků nekonečně zkracují. Spojité úročení je zároveň složeným úročením, u nějž pro splatnou částku na konci n -tého roku platí vztah

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n,$$

kde K_0 je počáteční kapitál a i je úroková míra.

U spojitého úročení se setkáváme s *efektivní úrokovou mírou* i_e , což je roční úroková míra, která nám při častém připsování úroků dává stejný úrok jako roční úroková míra a platí

$$1 + i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m,$$

kde m je frekvence připsování úroků.

Jak již bylo řečeno, délka úrokovacích období se u spojitého úročení nekonečně zkracuje, tedy klesá k nule, a pomocí limitního vyjádření a definice eulerova čísla bude platit

$$1 + i_e = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\frac{m}{i}}\right)^i = e^i.$$

Pro splatnou částku na konci n -tého roku u spojitého úročení při úrokové míře i bude tedy platit

$$K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n}.$$

Uvažujeme-li úrokovou míru i proměnnou v čase t , vypočítáme splatnou částku při spojitém úročení za použití určitého integrálu pomocí vztahu

$$K_n = K_0 \cdot e^{\int_0^n i(t) dt}.$$

Příklad 4.7. Jaký musel být počáteční vklad, jestliže se po 2 letech a 9 měsících zúročil na 25 000 Kč při spojitém úročení s úrokovou sazbou $i(t) = \frac{5t^2}{1+t^2} \%$ proměnnou v čase t , kde t je v letech.

Řešení: Nejprve vypočítáme určitý integrál proměnné úrokové míry v čase t tak, že úrokovou sazbu i v $\%$ vydělíme 100, abychom ji převedli na interval $\langle 0, 1 \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{100} \int_0^{2,75} \frac{5t^2}{1+t^2} dt &= \frac{5}{100} \int_0^{2,75} \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt = \frac{5}{100} \int_0^{2,75} 1 dt - \frac{5}{100} \int_0^{2,75} \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= \frac{5}{100} [t]_0^{2,75} - \frac{5}{100} [\arctg t]_0^{2,75} = 0,0764. \end{aligned}$$

Nyní již můžeme zjistit počáteční hodnotu kapitálu z rovnice $K_n = K_0 \cdot e^{\int_0^n i(t) dt}$:

$$K_0 = \frac{25\,000}{e^{\int_0^{2,75} \frac{5t^2}{1+t^2} dt}} = \frac{25\,000}{e^{0,0764}} = 23\,161,14 \text{ Kč}.$$

4.2.5 Současná a budoucí hodnota příjmů

Další aplikace určitého integrálu v ekonomii spočívá v úloze najít počáteční hodnotu kapitálové investice, která by nám při spojitém úročení a $i - \%$ ročním úroku zajistila požadovaný budoucí příjem.

Za těchto předpokladů hledáme počáteční hodnotu kapitálu, která nám zajistí nepřetržitý tok příjmů po dobu n let. Známe-li funkci $R(t)$, která popisuje tok budoucích příjmů v čase t , lze za uvedených podmínek definovat počáteční hodnotu vkladu v čase $t = 0$, kterou nazýváme *současná hodnota příjmů* a platí

$$PV = \int_0^n R(t) \cdot e^{-\frac{i \cdot t}{100}} dt.^6$$

Při investičním rozhodování nás bude zajímat i *budoucí hodnota příjmů*, kterou zavedeme za stejných podmínek, tedy při spojitém úročení a při $i - \%$ ročním

⁶Pro současnou hodnotu příjmů používáme označení PV z anglického present value a dále zmíněnou budoucí hodnotu příjmů značíme FV od future value.

úroku. Známe-li funkci $R(t)$, která popisuje tok budoucích příjmů v čase t , budoucí hodnotu příjmů v čase $t = n$ vypočítáme pomocí vztahu

$$FV = \int_0^n R(t) \cdot e^{\frac{i \cdot (n-t)}{100}} dt.$$

Příklad 4.8. Určete současnou hodnotu příjmů nepřetržitého toku příjmů po dobu 10 let, kde míra toku příjmů v čase t je popsána funkcí $R(t) = (1 + 3t)$ v tis. Kč při spojitém úročení s roční sazbou 6%.

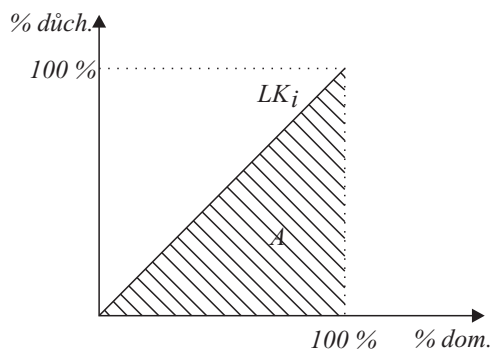
Řešení: Při výpočtu určitého integrálu s integračními mezemi 0 a 10 využijeme Metodu per partes:

$$\begin{aligned} PV &= \int_0^{10} (1 + 3t) \cdot e^{-0,06t} dt = \left| \begin{array}{ll} u = 1 + 3t & u' = 3 \\ v' = e^{-0,06t} & v = -\frac{1}{0,06} e^{-0,06t} \end{array} \right| = \\ &= \left[(1 + 3t) \cdot \left(-\frac{1}{0,06} e^{-0,06t}\right) \right]_0^{10} - \int_0^{10} -\frac{3}{0,06} e^{-0,06t} dt = -\frac{31}{0,06} e^{-0,6} + \frac{1}{0,06} + \\ &+ \frac{3}{0,06} \cdot \left[-\frac{1}{0,06} e^{-0,06t} \right]_0^{10} = -266,89 + \frac{3}{0,06} \cdot \left(-\frac{1}{0,06} e^{-0,6} + \frac{1}{0,06}\right) = 109,10 \text{ tis. Kč.} \end{aligned}$$

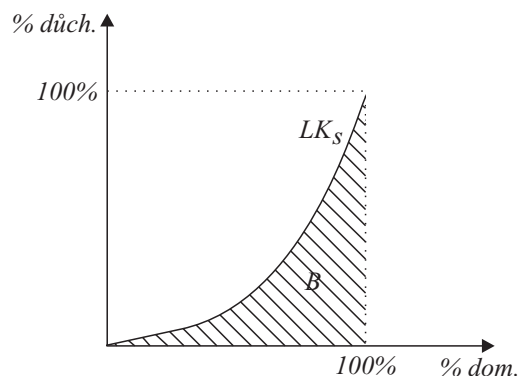
4.2.6 Lorenzova křivka a Giniho koeficient

Poslední v práci zmíněná ekonomická aplikace určitého integrálu bude věnována problematice rozdělení důchodů ve společnosti. *Důchodem* přitom rozumíme tok příjmů, který plyne danému ekonomickému subjektu.

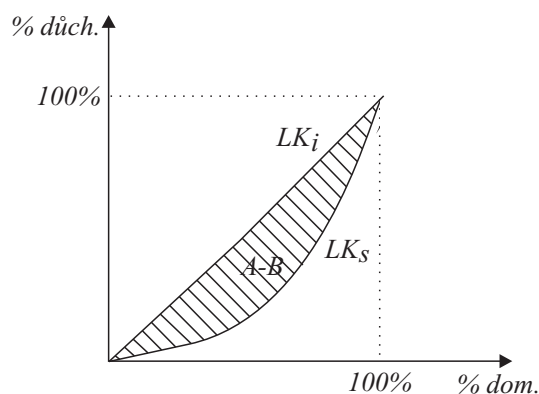
Pro měření stupně nerovnosti v důchodech byla zavedena *Lorenzova křivka*, která přiřazuje procentně rozděleným skupinám obyvatelstva procentní rozdělení důchodů. Absolutně rovnoměrné rozdělení důchodů mezi obyvatelstvo popisuje *ideální Lorenzova křivka*, jejíž trend lze znázornit na následujícím obrázku.



V reálných hodnotách však rozdělení důchodů popisuje *skutečná Lorenzova křivka*, která má konvexní průběh. Ekonomická teorie její průběh ve spojitosti s rozdělením důchodů nazývá *důchodovou pyramidou*. To znamená, že široký základ tvoří většina obyvatelstva s nižšími důchody a ostrou špičku pyramidy tvoří méně početné vrstvy nejbohatších.



Pro měření míry nerovnosti v důchodech byl zaveden *Giniho koeficient*. Ten porovnává skutečnou Lorenzovu křivku s ideální. Tuto úvahu lze ilustrovat na následujícím obrázku.



Giniho koeficient GK srovnává plochu pod ideální Lorenzovou křivkou s plochou pod skutečnou Lorenzovou křivkou a je definován vztahem

$$GK = \frac{A - B}{A}.$$

Poznámka 4.2. Pro následující úvahy budeme místo intervalu $\langle 0, 100 \rangle$ používat interval $\langle 0, 1 \rangle$, kde 1 odpovídá 100%.

Protože plocha pod ideální Lorenzovou křivkou je rovna $\frac{1}{2}$, lze vztah Giniho koeficientu vyjádřit následovně:

$$GK = \frac{A - B}{A} = 2 \left(\frac{1}{2} - B \right) = 1 - 2B,$$

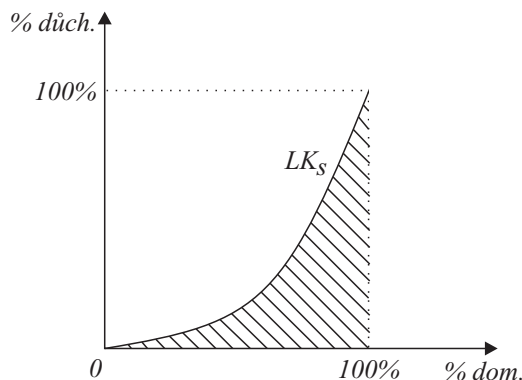
kde plochu pod skutečnou Lorenzovou křivkou můžeme vyjádřit pomocí určitého integrálu s integračními mezemi 0 a 1 a pro Giniho koeficient tedy bude platit

$$GK = 1 - 2 \cdot \int_0^1 LK_s(x) dx.$$

Giniho koeficient nabývá hodnot na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, kde hodnoty blíží se k nule znamenají spíše rovnoměrné rozdělení důchodů a naopak hodnoty blízké číslu 1 znamenají spíše nerovnoměrné rozdělení důchodů.

Příklad 4.9. Vypočítejte Giniho koeficient, je-li skutečná Lorenzova křivka popsána funkcí $LK_s = x^2$.

Řešení: $GK = 1 - 2 \cdot \int_0^1 x^2 dx = 1 - 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.



Výsledná hodnota Giniho koeficientu $\frac{1}{3}$ vypovídá o spíše rovnoměrném rozdělení důchodů.

4.3 Aplikace nevlastního integrálu

Aplikace nevlastního integrálu v ekonomii úzce souvisí s aplikacemi určitého integrálu. V práci již bylo naznačeno, že nevlastní integrál je speciálním typem určitého integrálu, kdy buď interval, na kterém funkci vyšetřujeme, je neomezený, nebo funkce je na daném intervalu neomezená. V ekonomických aplikacích nevlastního integrálu pracujeme zejména s nevlastními integrály vlivem meze, neboť nám umožňují sledovat ekonomické veličiny v nekonečném časovém intervalu $\langle t_1, \infty \rangle$.

Tato kapitola byla zpracována za pomoci zdroje [8].

4.3.1 Věčný důchod

Tato aplikace nevlastního integrálu navazuje na aplikaci integrálu určitého, kde jsme zjišťovali celkový příjem za určitý časový interval. V tomto případě však budeme uvažovat časový interval $\langle t_1, \infty \rangle$, neboť předpokládáme věčné příjmy, tzv. *věčný důchod*.

Obecně tedy platí, že uvažujeme-li spojitou funkci $f(t)$, která popisuje příjmy v čase t , kde $t \in \langle t_1, \infty \rangle$, můžeme za použití nevlastního integrálu vlivem meze vypočítat celkové příjmy za daný časový interval $\langle t_1, \infty \rangle$ nebo-li věčný důchod předpisem

$$TR(t_1, \infty) = \int_{t_1}^{\infty} f(t) dt.$$

Příklad 4.10. Určete doživotní celkový příjem, je-li známá funkce

$f(t) = 100 \cdot \frac{6t^2+2}{e^{(t^3+t)}}$ v tis. Kč, která popisuje příjem v čase t , přičemž jednotkou času je 1 rok.

Řešení: Při výpočtu nevlastního integrálu vlivem meze využijeme První větu o substituci:

$$\begin{aligned} TR(0, \infty) &= \int_0^{\infty} 100 \cdot \frac{6t^2+2}{e^{(t^3+t)}} dt = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(100 \cdot \int_0^z \frac{6t^2+2}{e^{(t^3+t)}} dt \right) = \\ &= \left| \begin{array}{l} s = t^3 + t \\ ds = (3t^2 + 1)dt \\ t = 0 : s = 0 \\ t = \infty : s = \infty \end{array} \right| = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(100 \cdot \int_0^z \frac{2}{e^s} ds \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(200 \cdot \left[-\frac{1}{e^s} \right]_0^z \right) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(200 \cdot \left[-\frac{1}{e^{(t^3+t)}} \right]_0^z \right) = 200 \cdot (0 + 1) = 200 \text{ tis. Kč.}$$

4.3.2 Neomezený kapitálový příjem

Poslední uvedená ekonomická aplikace nevlastního integrálu rovněž navazuje na aplikaci určitého integrálu, ve které jsme hledali počáteční neboli současnou hodnotu kapitálu, která by nám při spojitém úročení a i -% úrokové míře zajistila nepřetržitý tok příjmů $R(t)$ po dobu n let.

Tentokrát však budeme uvažovat, že časový interval, po který nám plyne daný tok příjmů, je neomezený, tj. $\langle 0, \infty \rangle$. Takový budoucí tok příjmů nazýváme *neomezený příjem* a jeho současnou hodnotu vypočítáme pomocí nevlastního integrálu vlivem meze ze vztahu

$$PV = \int_0^{\infty} R(t) \cdot e^{-\frac{i \cdot t}{100}} dt.$$

Příklad 4.11. Určete současnou hodnotu neomezeného kapitálového příjmu, který nám bude plynout doživotně, jestliže míra toku příjmů v čase t je popsána funkcí $R(t) = (1\,000t + 200)$ Kč při spojitém úročení s roční sazbou 2%, kde t je v letech.

Řešení: Při výpočtu nevlastního integrálu vlivem meze využijeme Metodu per partes:

$$\begin{aligned} PV &= \int_0^{\infty} (1\,000t + 200) \cdot e^{-0,02t} dt = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z (1\,000t + 200) \cdot e^{-0,02t} dt = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = 1\,000t + 200 & u' = 1\,000 \\ v' = e^{-0,02t} & v = -\frac{1}{0,02} e^{-0,02t} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\left[(1\,000t + 200) \cdot \left(-\frac{1}{0,02} e^{-0,02t} \right) \right]_0^z + \int_0^z \frac{1\,000}{0,02} e^{-0,02t} dt \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(-(50\,000z + 10\,000) \cdot e^{-0,02z} + 10\,000 + 50\,000 \cdot \left[-\frac{1}{0,02} e^{-0,02t} \right]_0^z \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left(-(50\,000z + 10\,000) \cdot e^{-0,02z} + 10\,000 + 50\,000 \cdot \left(-\frac{1}{0,02} e^{-0,02z} + \frac{1}{0,02} \right) \right) = \\ &= 10\,000 + 2\,500\,000 = 2\,510\,000 \text{ Kč.} \end{aligned}$$

Závěr

Zpracování této bakalářské práce mne přesvědčilo, že integrální počet má velký význam a široké užití v ekonomické praxi. Největší podíl na ekonomických aplikacích má zřejmě určitý integrál díky svým integračním mezím, které nám například umožňují sledovat různé ekonomické ukazatele v časovém intervalu.

Čtenář může v práci nalézt jak základní matematické pojmy, vlastnosti a vztahy týkající se integrálního počtu, tak i velké množství ekonomických aplikací neurčitého, určitého i nevlastního integrálu. Doporučený rozsah práce mi však nedovolil uvést úplně všechny existující aplikace.

Jediný problém, se kterým jsem se při psaní bakalářské práce potýkala, byl nedostatek literatury zabývající se aplikacemi nevlastního integrálu.

Literatura

- [1] Bohanesová, E., *Finanční matematika I*, 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2006.
- [2] Cipra, T., *Finanční a pojistné vzorce*, 1. vydání. Praha: Grada Publishing, 2006.
- [3] Dowling, E., T., *Schaum's outline of theory and problems of mathematical methods for business*, 3. vydání. New York, N.Y.: McGraw-Hill, 2001.
- [4] Fuchs, K., Tuleja, P., *Základy ekonomie*, 1. vydání. Praha: EKOPRESS, 2003.
- [5] Chiang, A., C., *Fundamental methods of mathematical economics*, 3. vydání. New York : McGraw-Hill, 1984.
- [6] Jacques, I., *Mathematics for economics and business*, 5. vydání. Harlow: Financial Times Prentice Hall, 2006.
- [7] Kojecká, J., Kojecký, T., *Matematická analýza pro 1. semestr*, 1. vydání. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1997.
- [8] Křenek, J., Ostravský, J., *Diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné s aplikacemi v ekonomii*, 9. vydání. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008.
- [9] Kunderová, P., *Základy pravděpodobnosti a matematické statistiky*, 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2004.
- [10] Laitochová, J., *Matematická analýza 2. Integrální počet*, 2. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2003.
- [11] Macáková, L. a kol., *Mikroekonomie: základní kurs*, 10. vydání. Slaný: MELANDRIUM, 2007.

- [12] Mošová, V., *Matematická analýza I*, 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2002.
- [13] Novák, V., *Integrální počet v R* , 1. vydání. Praha 1: Státní pedaogické nakladatelství, 1986.
- [14] Novotný, M., *Integrální počet*, 2. vydání. Praha 1: Státní pedaogické nakladatelství, 1969.
- [15] Schwabik, Š., Šarmanová, P., *Malý průvodce historií integrálu*, 1. vydání. Praha: Prometheus, 1996.
- [16] Matematická analýza I [online], dostupné z: <http://kam.mff.cuni.cz/kla-zar/analyzaI.pdf>, [citováno 10. 2. 2011].
- [17] Neurčitý integrál, Určitý integrál [online], dostupné z: <http://kma.me.sweb.cz/integral.pdf>, [citováno 18. 11. 2010].
- [18] Nevlastní integrál [online], dostupné z: <http://kma.me.sweb.cz/nevl-integral.pdf>, [citováno 3. 2. 2011].