

POSUDEK OPONENTA DIPLOMOVÉ PRÁCE
NIKOLY HLAVÁČOVÉ
PROPERTIES OF SOLUTIONS TO THE EQUATIONS DESCRIBING FLOW OF
FLUIDS

TOMÁŠ FÜRST

Předložená práce obsahuje zobecnění důkazu existence slabého řešení Navier-Stokesových rovnic pro stlačitelné viskózní isotermální proudění tekutin s nelineárním tensorem napětí. Původní výsledek, který dokázal vedoucí práce na trojrozměrné oblasti s $C^{2+\mu}$ hladkostí hranice, je zobecněn na oblasti s $C^{0,1}$ hranicí. Důkaz je veden pomocí aproximace oblasti posloupností jiných oblastí s hladší hranicí, která k dané oblasti konverguje ve smyslu kapacit.

Je potřeba si uvědomit, že problémy spojené s existencí, jednoznačností a regularitou řešení Navier-Stokesových rovnic patří k nejvýznamnějším otevřeným problémům současné matematiky. Existence a regularita řešení Navier-Stokesových rovnic patří mezi sedm tzv. Millenium Problems (problémy pro třetí tisíciletí) a Clay Mathematics Institute vypsál v roce 2000 za jeho řešení odměnu milion dolarů (která stále nebyla vyplacena). Je tedy zřejmé, že dosáhnout jakéhokoliv nového výsledku v této oblasti je mimořádně obtížné, natož pak pro studentku magisterského stupně. Touto optikou je třeba předloženou práci posuzovat. Proto se domnívám, že výsledek v práci předložený je zcela mimořádný a zasluhuje vysoké ocenění.

Dále je potřeba pochválit, že práce je psaná anglicky. Ač by to mělo být na magisterském stupni pravidlem, je to teprve druhá práce v angličtině, se kterou jsem se na katedře setkal.

Matematický aparát potřebný k dosažení výše popsaného výsledku je podle mého názoru dosti složitý, obsahuje Orliczovy prostory a jejich vlastnosti, slabá řešení, distribuce, Sobolevovy a Lebesgueovy prostory a jejich vlastnosti, a podobně. Téma má navíc značný přesah do mechaniky kontinua. Je potřeba vysoce ocenit, že diplomantka má takovou šíři záběru.

K práci mám následující připomínky na které není potřeba u obhajoby reagovat:

- (1) Na straně 4 se množinou $\mathbb{N}$ asi myslí přirozená, nikoliv celá čísla. Stejně tak symbol $\partial_t u$ a zřejmě i ∂_t značí slabé derivace, nikoliv klasické.
- (2) Práce by snesla jazykovou korekturu.
- (3) U Věty 1.3 by možná někdo ocenil reference na důkaz, nikoliv jeho náznak. To samé platí i o Větě 1.9, úvodní pasáž tím dostává lehce zen-buddhistický nádech.
- (4) Definici 1.6 by velmi prospěl obrázek.
- (5) U Definice 1.15 by mohla být poznámka, že daná třída netvoří prostor a proč tomu tak je.
- (6) Definice 1.19 by snesla nějakou motivaci. Čtenáři neobeznámenému s teorií Orliczových prostorů nemůže být jasné, proč se norma definuje takto.
- (7) Občas mě lehce mátlo, že symbol M znamená jednu funkci a jednu množinu.
- (8) Při formulaci problému na straně 16 by rozhodně stálo za to vysvětlit symboly pro tensorový součin vektorů a skalární součin tensorů. Matematikům nepracujícím v oblasti modelů proudění nejsou větší jasné.
- (9) V rovnici 2.3 je překlep, podmínka se předepisuje jen na hranici.
- (10) V rovnici 2.8 asi chybí absolutní hodnota.
- (11) V rovnici Lemmatu 3.2 je překlep.
- (12) V rovnici pod vztahem (5.4) je překlep.

U obhajoby bych rád pochopil následující:

- (1) V Definici 1.23 se pojmem “bounded measurable functions” myslí funkce, jejichž L^∞ norma je konečná?
- (2) V Definici 1.33 se symbolem $D^\alpha u$ rozumí slabé derivace?
- (3) Vzhledem k tomu, že pojem kapacity a konvergence v ní je pro práci dost důležitý, uvítal bych k Definici 1.37 nějaký příklad a/nebo protipříklad posloupnosti množin, která v tomto smyslu někam konverguje (či nekonverguje).
- (4) Je jasné, že prostory v Definici 1.39 jsou prostory a normy jsou skutečně normy?
- (5) Jak důvěryhodná je reference [4]?
- (6) Při formulaci problému na straně 16 by rozhodně stálo za to vysvětlit, co znamenají jednotlivé členy v rovnicích a kde se rovnice vzaly. Například tlakový člen $\nabla \rho$ potřebuje komentář. Proč je v tomto tvaru? Jak to souvisí s isotermálností proudění?
- (7) Je skutečně možné v podmínce 2.4 připustit i rovnost?
- (8) Má příklad nelineárního tensoru napětí na straně 17 dole nějaký fyzikální základ?
- (9) Energetická nerovnost na straně 18 je dvojnásob zajímavá. Zaprvé by sneslo nějaký komentář, proč platí nerovnost a ne rovnost, jak by bylo lze ze zdravého fyzikálního názoru očekávat. Zadruhé bych rád pochopil, proč člen $\rho \ln(\rho)$ nemá správné jednotky, a tudíž vlastně nejde sčítat s kinetickou energií v první části výrazu. Co je fyzikální smysl tohoto členu a kde se vzal?
- (10) Korolár 2.4, který představuje vlastně hlavní praktický přínos celé práce, by snesl důkaz. Je skutečně jasné, že ke každé $C^{0,1}$ oblasti lze dokonvergovat ve smyslu kapacit oblastmi s $C^{2+\mu}$ hranicí?
- (11) Není v Lemmatu 3.1. potřeba předpokládat nulu na hranici? Co jsou p a q ? Jsou to duální exponenty, nebo ne?
- (12) Co je φ v důkazu Lemmatu 3.3 a jak to souvisí s rovnicí (1.4)?
- (13) Je skutečně jasné, že z toho, že ρ a u splňují příslušné rovnice na libovolném B , plyne, že je splňují na celém Ω , jak se tvrdí na straně 33?
- (14) Jak souvisí celá práce s tvarovou optimisací, o které je řeč v úvodu a závěru ale nikde mezi tím?

Celkově konstatuji, že práce je svou obtížností nesrovnatelná s jakoukoliv diplomou prací, kterou jsem zde vedl či oponoval. I přes množství nejasností a otázek (z nichž část jde jistě i na můj vrub) práci rozhodně *doporučuji* práci k obhajobě, navrhuji hodnocení *výborně* a autorce přeju zdárné pokračování práce ve zvolené mimořádně náročné oblasti.

Olomouc 5. 5. 2010