

Univerzita Palackého v Olomouci

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Marta Miklová

V. ročník – kombinované studium

Obor studia: Učitelství pro 1. stupeň ZŠ

**Pojem násobení v didaktickém systému
základní školy**

Diplomová práce

Vedoucí práce: Doc. PhDr. Bohumil Novák, Csc.

Olomouc 2012

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jen uvedených pramenů a literatury.

V Tečovicích dne 20. června 2012

.....

Poděkování

Děkuji Doc. PhDr. Bohumilu Novákovi, Csc. za podnětné rady, cenné připomínky a metodické vedení mé diplomové práce. Velké poděkování patří Mgr. Pavle Macíkové za podporu i pomoc a rodině za trpělivost.

OBSAH

ÚVOD	6
1 TEORETICKÁ ČÁST.....	9
1.1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání	9
1.1.1 Vymezení pojmu RVP ZV	9
1.1.2 Standardy pro základní vzdělávání	10
1.1.3 Charakteristika vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace.....	11
1.2 Učební osnovy násobení	13
2 NÁSOBENÍ JAKO BINÁRNÍ OPERACE.....	16
2.1 Vymezení pojmu binární relace.....	16
2.1.1 Kartézský součin.....	16
2.2 Násobení v množině přirozených čísel	17
2.3 Vlastnosti součinu kardinálních čísel	17
2.4 Početní operace sčítání a násobení	18
2.5 Didaktické zpracování početní operace násobení	19
2.5.1 Metodika výuky násobení.....	19
2.5.2 Zavedení operace násobení.....	20
2.5.3 Vyvozování násobení	21
2.5.4 Nácvik násobilky	22
2.6 Násobení z paměti	23
2.7 Algoritmus písemného násobení	24
2.8 Slovní úlohy jako aplikace početní operace násobení v reálném životě.....	26
3 TESTOVÁNÍ JAKO KOMPETENCE UČITELE MATEMATIKY	28
3.1 Testy v pedagogickém výzkumu	28
3.1.1 Didaktický test.....	29
3.1.2 Nestandardizovaný didaktický test.....	30
4 PRAKTICKÁ ČÁST	34
4.1 Výzkum	34
4.1.1 Metodika výzkumu	34
4.2 Předvýzkum	35
4.2.1 Realizace předvýzkumu.....	35
4.2.2 Hodnocení předvýzkumu.....	36
4.2.3 Výsledky předvýzkumu	36
5 REALIZACE VÝZKUMU.....	37
5.1 Zpracování výzkumu	37
5.2 Hodnocení výzkumu.....	38
5.3 Výsledky výzkumu	53
5.4 Závěr výzkumu	55
ZÁVĚR.....	57
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	59

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ	64
SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK	65
SEZNAM TABULEK.....	66
SEZNAM GRAFŮ	67
SEZNAM PŘÍLOH.....	68

ÚVOD

Popíši vám situaci z běžné výuky matematiky na základní škole. Žáci páté třídy, rozdělení do několika týmů, řeší obtížnou slovní úlohu. Osazenstvo jednoho týmu se dopátralo podstaty řešení, v jiných týmech panuje nejistota a schyluje se k bouřlivé diskuzi. Zanedlouho přichází první tým ohlásit výsledky svých úvah, k mé radosti, naprosto správné. Škola by měla být zábavná pro žáky, ale také pro učitele. Vysvětlování učiva, odpovídání na zvědavé otázky a radost, když žáci pochopí probíranou látku, jsou pro mě velkou motivací.

Matematika má velký význam ve vzdělání každého člověka, a proto se její základy učí už na základní škole. Matematiku využívá denně každý z nás, ať už je to sčítání hodnoty nákupu v obchodě, přepočítávání procent DPH, násobení a dělení při kalkulaci kurzu měny, obraty na burze a mnoho dalších i složitějších matematických úkonů a funkcí, bez kterých by nejen ekonomika nemohla existovat. Také je nutno zmínit důležitost geometrie například pro práci architektů a návrhářů všeho druhu.

Matematika je nedílnou součástí naší kultury. Její důležitost spočívá především v budování intelektuální kázně, logického a funkčního myšlení.

Vzdělávání v matematice je především zaměřeno na výchovu přemýšlivého člověka, který umí používat znalosti z matematiky v různých situacích občanského a profesního života. V hodinách matematiky proto vyučující cíleně motivují žáky k řešení matematických problémů, vedou je k matematizaci reálných situací a k posuzování věrohodnosti výsledků, rozvíjejí u nich schopnost správně se matematicky vyjadřovat, podporují u žáků důvěru v jejich schopnosti, vychovávají je k vytrvalosti, kritičnosti a týmové spolupráci a budují jejich pozitivní vztah k matematice.

Na prvním stupni základního vzdělávání je kladen důraz na základy používání matematické symboliky a jazyka. Matematické vyučování rozvíjí soustředění na řešení problémů a provádění početních operací. Rozšiřuje schopnosti kritického myšlení, věcného vyjadřování, trpělivost a vytrvalost. Již šest let působím jako učitelka na prvním stupni základní školy v Tečovicích. V průběhu této doby jsem vyučovala matematiku, přírodovědu, vlastivědu, tělesnou výchovu, výtvarnou výchovu a pracovní činnosti. Pracovat na venkovské škole je výhodou hlavně proto, že se všichni navzájem dobře známe nejen mezi pedagogy, ale i s žáky. Vzhledem k málo početným třídám mohu navíc výuku přizpůsobit potřebám jednotlivých žáků. Hodně jsem se musela zabývat otázkou didaktiky pro primární školy, a to všech vyučovacích předmětů, největší podíl jsem ovšem

věnovala matematice. Odměnou za kvalitní přípravu do vyučovacích hodin jsou pro mě nadšení žáci s aktivním přístupem k získávání nových dovedností. Práce v hodinách matematiky je pro mě zároveň i studiem. Každou odučenou hodinou totiž pedagog získává lepší pozorovací schopnost v pokroku žáků ve vyučovaném předmětu.

V posledním období u nás zaznamenáváme zvýšený zájem o problematiku vzdělávání. Odrazem tohoto zájmu jsou na našich školách reformní kroky, které vedou ke změně přístupu k cílům vzdělávání, vzdělávacím obsahům, modernizaci vlastního procesu výuky, jenž spočívá ve využívání moderní pedagogické metodologie. O problematiku vzdělávání matematiky se zajímám již delší dobu, prošla jsem několika matematických pracovních seminářů, vzdělávacích akcí a modulů pro pedagogy. I se svými kolegy často diskutujeme nad Rámcovým vzdělávacím programem, Standardy pro základní vzdělávání nebo výstupním testováním žáků v páté třídě, které se velmi úzce dotýká i mne, vyučujícího matematiky. Myslím si a slyším to i od svých kolegů, že úlohy v testech jsou těžké a průměrný žák pátého ročníku je nezládne vyřešit, a to i přesto, že jsou testy nastaveny na základní úroveň. Tento podnět mě přivedl k tématu diplomové práce Pojem násobení v didaktickém systému základní školy.

Cílem této diplomové práce je zjištění úrovně osvojených vědomostí žáků, jejich dovedností a očekávaných výstupů formulovaných v Rámcovém vzdělávacím programu a Standardech pro základní vzdělávání v tematickém okruhu, který se vztahuje k pojmu násobení. Zajímalo mě, jak si žák pátého ročníku dokáže uspořádat pojmy a poznatky, řešit úlohy, hodnotit situaci, kombinovat a počítat. Při současném zavádění plošného testování žáků v 5. a 9. ročníku je aktuálnost tématu důležitá. Zaměřila jsem se na úspěšnost žáků při řešení početní matematické operace násobení. Výuka násobilky, společně s početní operací sčítání, tvoří základ celé matematiky. Zvládnutí spojení pamětného násobení přirozených čísel v oboru násobilky je nezbytným předpokladem k úspěšnému pokračování v dalším učivu. Diplomová práce má odpovědět na otázky, jak žák na konci 5. ročníku zvládá konkretizované výstupy z Rámcového vzdělávacího programu v tematickém okruhu Číslo a početní operace, zaměřených na operaci násobení, upozornit na chyby, které žáci dělají, a zjistit úroveň jejich osvojených vědomostí a dovedností.

Praktická část je zaměřena na žáky 5. ročníku zlínských škol. Na vybraný vzorek respondentů výzkumného šetření byl směřován didaktický test, v němž měli prokázat úroveň osvojených vědomostí a dovedností v matematice, zaměřených k pojmu násobení jako binární operace, a jejich užití. Empirická část obsahuje popis, přípravu a průběh

šetření v reálných podmínkách základní školy. Metodu kvantitativního výzkumu jsem doplnila poznatky z vlastního pozorování a hodnocení situace na svém pracovišti.

1 TEORETICKÁ ČÁST

1.1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

1.1.1 Vymezení pojmu RVP ZV

V současné době naše školství prochází další ze zásadních reforem, koncepčně vycházející z Bílé knihy. Cílem této reformy je proměna školy z instituce, v níž žák pasivně přejímá vědomosti, na instituci vychovávající aktivní lidi, schopné samostatného třídění poznatků, orientující se v současné společnosti a vědomě využívající získaných poznatků k řešení problémů, které na ně život klade (Fuchs aj., 2006).

Do vzdělávací soustavy českého školství byl zaveden nový systém kurikulárních dokumentů pro vzdělávání žáků od 3 do 19 let. Pedagogický slovník (Průcha, 1995) uvádí, že kurikulum je v naší pedagogice pojem nový a jeho zavedení má význam pro komplexní řešení cílů, obsahu, strategií a metod, způsobů organizace a hodnocení školního vzdělávání. Hlavním nástrojem této reformy jsou *školní vzdělávací programy*, které si školy samostatně připraví na základě *rámcových vzdělávacích programů*.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV) je kurikulární dokument státní úrovně, který normativně stanoví obecný rámec základního vzdělávání a je závazný pro tvorbu ŠVP (VÚP Praha, 2007). RVP ZV vymezuje charakter a obsah vzdělávání. Nahradil známé osnovy, ale podstatně se od nich liší. Jeho úkolem už není vyjmenovávat všechny nepostradatelné znalosti, které se každý žák musí naučit, ale obecně formuluje cíle a stanovuje **klíčové kompetence**. Kompetence obecně znamená pravomoc, rozsah působnosti. V RVP ZV je kompetencí míněn *souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti* (RVP ZV, 2010). Hlavní změnu můžeme chápat tak, že dříve byly cílem vzdělávání izolované vědomosti, které ve většině případů neuměli žáci v praxi použít. Nyní jsou cílem vzdělávání stanovené klíčové kompetence, připravenost žáka něco vykonávat. Jedná se například o schopnosti jako je ochota a dovednost stále se učit, tvůrčí přístup, komunikační a prezentační dovednosti, schopnost spolupracovat, jednat s lidmi, nést odpovědnost, řešit problémy, dovednost práce v týmu, schopnost sebevzdělávání.

Vypracování Školního vzdělávacího programu (dále jen ŠVP) je nová povinnost, kterou školy platí za větší volnost v přístupech ke své základní činnosti, tj. k výchově a vzdělávání žáků. ŠVP musí akceptovat všechny požadavky Rámcového vzdělávacího

programu a zároveň musí vycházet z reálných podmínek a potřeb školy, z potřeb a úrovně žáků, z připomínek rodičů a mnoha dalších faktorů (Odvárko, Kadleček, 2006).

RVP ZV ovlivňuje a usměrňuje vzdělávání na všech typech škol, které poskytují základní vzdělávání. RVP ZV ve svých cílech, vzdělávacím obsahu, očekávaných kompetencích a dalších pokynech pro organizaci a realizaci vzdělávání navazuje na Rámcový program pro předškolní vzdělávání a současně je východiskem pro tvorbu Rámcových vzdělávacích programů pro střední vzdělávání. Tím, že RVP ZV vymezuje obsah vzdělávání a očekávané kompetence, převzal funkci standardu základního vzdělávání (RVP ZV, 2010).

1.1.2 Standardy pro základní vzdělávání

Standardy se nově řadí k pedagogickým dokumentům, které by se mohly stát základním legislativním prvkem, který by v moderní společnosti nahradil dosavadní pojetí osnov. Ve významu kvalitativním je možno standard chápat jako definování smyslu, poslání předmětu v daném studijním programu a cílů, k nimž je třeba žáky vést. Standard ve smyslu kvantitativním lze také označit jako základní učivo, tj. minimum dovedností a znalostí (Kalhous, Obst a jiní, 2002).

Mezinárodní výzkumy TIMMS 2009 (mezinárodní výzkum zaměřený na srovnávání matematických dovedností a dovedností v přírodovědných předmětech u žáků škol z několika desítek zemí světa) a PISA 2009 (Program pro mezinárodní hodnocení žáků – Programme for International Student Assessment) poukazují na zhoršující se výsledky našich žáků. Totéž se objevuje i ve zprávě společnosti McKinsey Company (celoevropské testování). Na základě těchto výsledků vyplývá úkol z programového prohlášení vlády naší republiky, kterým je zavedení pravidelného zjišťování výsledků vzdělávání v 5. a 9. ročníku základních škol. Abychom mohli žáky na něco testovat, musíme vytvořit požadavky na to, co má žák konkrétně umět. Tyto požadavky nese už platný rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, který je pro školy povinný.

Nově připravované Standardy v podstatě jen více konkretizují výstupy z RVP ZV na konci 5. a 9. ročníku a sjednocují různě nastavené úrovně jednotlivých škol a obsahují rozeepsané cíle, co má žák ke konkrétnímu tématu umět. Cílem standardů je zkvalitnit základní vzdělávání, upřesnit výstupy RVP ZV, nastavit minimální hranice toho, co mají žáci v uzlových bodech základního vzdělávání umět. Standardy mají zlepšit výsledky našich žáků, kteří se ve srovnání s žáky z jiných zemí velmi zhoršili. Mají také sloužit jako

zpětná vazby pro školu a rodiče, nikoliv jen k sestavování přehledu úspěšnosti škol a tvorbě žebříčků. Standardy pouze sjednocují a konkretizují výstupy pro 5. a 9. třídu, které již v rámci RVP ZV existují a jsou určeny všem školám. RVP ZV říká, co má žák umět, standardy popisují, jak dobře to má umět. Standardy nabudou platnost podpisem ministra školství, mládeže a tělovýchovy.

Očekávané výstupy jsou závazně stanoveny na konci 5. ročníku a 9. ročníku. „*RVP ZV stanovuje očekávané výstupy na konci 3. ročníku (1. období) jako orientační (nezávazné) a na konci 5. ročníku (2. období) a 9. ročníku jako závazné*“ (RVP ZV, 2010, str. 18).

1.1.3 Charakteristika vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě a umožňuje tak získávat matematickou gramotnost (RVP ZV, 2010). Matematická gramotnost zahrnuje dovednost písemně i z paměti sčítat, odčítat, násobit a dělit a užívat tyto operace k řešení problémů v každodenním životě. Důraz je však více kladen na proces řešení problémů než samotný výsledek a na prováděnou činnost než na žákovy znalosti. Pro tuto svoji nezastupitelnou roli se prolíná celým základním vzděláváním a vytváří předpoklady pro další studium. Cílem je naučit žáky používat získané dovednosti a vědomosti, což vyžaduje systematickou a soustředěnou práci samotných žáků. Zkušenosti říkají, že nestačí osvojit si početní, respektive konstrukční návyky. Obtížné je především rozvíjet cit pro jejich aplikaci (Fuchs, 2006).

Vzdělávání klade důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům. Žáci si postupně osvojují některé pojmy, algoritmy, terminologii, symboliku a způsoby jejich použití.

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je vymezena její charakteristikou, cílovým zaměřením a vzdělávacím obsahem vzdělávacího oboru, který je tvořen očekávanými výstupy a učivem v matematice (RVP ZV, 2010). Pojetí vzdělávací oblasti v RVP ZV nespočívá v podstatné změně obsahu, ale v důrazu na dosažení očekávaných výstupů a klíčových kompetencí.

O školním předmětu matematika se říká, že vychovává logické (tedy správné) myšlení. Vyučování matematice však v sobě skrývá i velké nebezpečí formalismu (Hejný,

Kuřina, 2009). Hejný uvádí, že v matematice záleží nejen na vhodném výběru úloh, ale i na pomoci učitele, hodnocení žákovských řešení, na komunikaci, která ve třídě probíhá.

Na 1. stupni základního vzdělávání je kladen důraz na budování základů používání matematické symboliky a jazyka matematiky a na proces řešení problému. Základní matematické pojmy jsou vytvářeny ve čtyřech tematických okruzích:

- číslo a početní operace;
- závislosti, vztahy a práce s daty;
- geometrie v rovině a v prostoru;
- nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Učivo uvedené v učebních osnovách je v rámci školy závazné. Zařazení rozšiřujícího učiva zváží vyučující s ohledem na specifika konkrétní třídy a individuální potřeby žáků (RVP, 2010).

Vzhledem k tématu diplomové práce svou pozornost dále zaměřím pouze na tematický celek Číslo a početní operace se zaměřením na početní operaci násobení a Nestandardní aplikační úlohy a problémy.

1.1.3.1 Vzdělávací obor Číslo a početní operace

Vzdělávací obor Číslo a početní operace tvoří nejrozsáhlejší část učiva. V uvedeném tematickém okruhu žáci porozumí pojmu číslo, získají dovednosti v pamětném a písemném počítání v oboru přirozených čísel, seznámí se s vlastnostmi základních operací s čísly, s odhadem a s prací s chybou. Velký důraz je kladen na zvládnutí pamětného počítání (zejména násobilkou) a provádění písemných početních operací v oboru přirozených čísel. Jak uvádí Fuchs (2006), dovednosti v pamětném počítání vytvářejí „opěrné body“, na kterých se staví porozumění složitějším partiím matematiky.

V tomto tematickém okruhu si žáci osvojují aritmetické operace v jejich třech složkách: dovednost provádět operaci, algoritmické porozumění (proč je operace prováděna předloženým postupem) a významové porozumění (umět operaci propojit s reálnou situací). Žáci se učí získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a později i zaokrouhlováním (RVP ZV, 2010).

1.1.3.2 Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Důležitou součástí matematického vzdělávání jsou Nestandardní aplikační úlohy a problémy, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech

školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje důvěru žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní (Staudková, 2009).

1.2 Učební osnovy násobení

Pro účely této práce se zaměřím na dílčí výstupy a učivo početního výkonu násobení v jednotlivých ročnících, podle doporučených osnov matematiky pro základní školu (VÚP, únor, 2011), které vydalo jako doplněk RVP ZV v roce 2011 MŠMT.

2. ročník

Dílčí výstup – žák:

- násobí z paměti formou opakovaného sčítání i pomocí násobilky;
- řeší a tvoří slovní úlohy na násobení.

Učivo:

- násobilka 2, 3, 4, 5, 10;
- strategie řešení úloh z běžného života.

3. ročník

Dílčí výstup – žák:

- násobí z paměti v oboru osvojených násobílek;
- násobí z paměti dvojčíselná čísla jednocíselným činitelem mimo obor malé násobilky;
- násobí součet nebo rozdíl dvou čísel;
- používá závorky při výpočtech;
- řeší a tvoří slovní úlohy na násobení;
- řeší a tvoří slovní úlohy vedoucí ke vztahu „x krát více“;
- ovládá jednoduché řešitelské strategie.

Učivo:

- násobilka 6, 7, 8, 9;
- nejbližší, nižší a vyšší násobek čísla;

- řešitelské strategie: pokus-omyl, řešení od konce, vyčerpání všech možností, zjednodušování.

4. ročník

Dílčí výstup – žák:

- při pamětném i písemném počítání využívá komutativnost a asociativnost násobení;
- písemně násobí jednociferným a dvojciferným činitelem;
- provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací (dělení a jeho kontrola násobením);
- řeší a tvoří slovní úlohy na násobení a slovní úlohy se dvěma početními operacemi;
- řeší a tvoří slovní úlohy vedoucí ke vztahu „x krát více“.

Učivo:

- komutativnost a asociativnost;
- písemný algoritmus násobení;
- odhad a kontrola výsledku;
- práce s kalkulátorem;
- matematizace reálné situace.

5. ročník

Dílčí výstup – žák:

- písemně násobí až čtyřciferným činitelem;
- účelně propojuje písemné i pamětné počítání (i s použitím kalkulátoru);
- řeší a tvoří úlohy z praktického života s využitím matematizace reálné situace.

Učivo:

- písemný algoritmus násobení;
- fáze řešení problému: zápis, grafické znázornění, stanovení řešení, odhad a kontrola výsledku, posouzení reálnosti výsledku, formulace odpovědi.

Při výuce matematiky se učitelé zaměřují na vyhledávání talentů a jejich další rozvoj. Někteří autoři uvádějí, že logické myšlení se rozvíjí až kolem jedenáctého roku věku dítěte. Nicméně pokud mají žáci zvýšený zájem o matematiku a při řešení úloh jsou

úspěšní, měl by jim učitel zadávat při hodinách diferencované úkoly (Fuchs, Hošpesová, Lišková 2006).

2 NÁSOBENÍ JAKO BINÁRNÍ OPERACE

2.1 Vymezení pojmu binární relace

Binární relací R nazýváme každou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$ dvou množin A , B . Skutečnost, že uspořádaná dvojice $[x, y]$ náleží $A \times B$ patří relaci, zapisujeme $x, y \in R$ nebo jinak $x R y$. Čteme: x je v relaci s y .

Jestliže budeme hovořit o relacích, budou to vždy relace binární. Za binární relaci považujeme i takovou část kartézského součinu, kterou dovedeme určit jen výčtem prvků a nemáme uveden nebo ani nedovedeme určit charakteristický vztah mezi $x \in A$ a $y \in B$.

Binární relace může být určena:

1. výčtem všech uspořádaných dvojic;
2. charakteristickou vlastností všech uspořádaných dvojic (Stopenová, 2003).

2.1.1 Kartézský součin

Jsou-li dány množiny A , B (utvořené z prvků základní množiny Z), nazýváme jejich **kartézským součinem** množinu K , která se skládá ze všech uspořádaných dvojic $[a, b]$, kde $a \in A$, $b \in B$.

Píšeme $K = A \times B$.

Má-li množina A počet prvků a , množina B počet prvků b , pak kartézský součin má $a \cdot b$ prvků.

Jestliže v kartézském součinu $K = A \times B$ platí $A \neq B$, pak se jedná o kartézský součin **mezi** množinami A , B .

Jestliže v kartézském součinu $K = A \times B$ platí $A = B$, pak hovoříme o **kartézské druhé mocnině** a píšeme $A \times A = A^2$. Také říkáme, že kartézský součin je definovaný **na množině A** (Eberová, 2003).

U operace násobení se jedná o binární operaci v množině všech přirozených čísel. Binární operace v množině M se v aritmetice definuje jako zobrazení z $M \times M$ do M . Vzory v tomto zobrazení jsou uspořádané dvojice přirozených čísel a a b . Obrazem je přirozené číslo c (Novák, 1999).

2.2 Násobení v množině přirozených čísel

Jestliže chápeme přirozená čísla jako kardinální čísla konečných množin, pak operaci násobení přirozených čísel můžeme zavést na základě definice násobení kardinálních čísel: $|A| \cdot |B| = |A \times B|$. Jestliže $|A| = a$, $|B| = b$, pak $|A \times B| = a \cdot b$. To plyne ze základní vlastnosti kartézského součinu dvou množin. Operace násobení je neomezeně definovaná, asociativní, komutativní a je to operace s neutrálním prvkem. Komutativnost násobení je vhodné ilustrovat znázorněním ve čtvercové síti. Dvanáct prvků umístíme buď ve třech řadách po čtyřech prvcích nebo ve čtyřech řadách po třech prvcích. Násobení číslem jedna je možno vyvodit pouze pomocí sjednocení několika disjunktních jednoprvkových množin. Příklad $3 \cdot 1 = 3$ (Jirotková, didmat1/3).

Způsoby zavedení:

1. pomocí dvojic kartézského součinu

- a) prvky kartézského součinu rozdělíme do disjunktních množin, každá množina obsahuje dvojice s pevně zvoleným prvkem množiny A. Druhým prvkem dvojice je libovolný prvek množiny B. Dostaneme a disjunktních množin, z nichž každá má b prvků.

2. jako sčítání navzájem rovných sčítanců

- a) aby žáci neviděli v násobení jen jistý druh sčítání, je nutné na počátku výkladu ukázat čtyři až pět stejných sčítanců;
- b) definujeme-li násobení pomocí opakovaného sčítání, má součin $3 \cdot 4$ (tj. $4 + 4 + 4$) jiný význam než $4 \cdot 3$ (tj. $3 + 3 + 3 + 3$). Násobení je operace komutativní. Žákům ukážeme, že výsledek je stejný. Nebude rozhodující, zda žák bude zápisem $3 \cdot 4$ rozumět součet $4 + 4 + 4$ nebo součet $3 + 3 + 3 + 3$ (Jirotková, didmat1/3).

2.3 Vlastnosti součinu kardinálních čísel

1. Součinem každých dvou kardinálních čísel (přirozených čísel) je kardinální číslo (přirozené číslo). Jinak: operace násobení je na uvedených množinách neomezeně definovaná.

2. Pro každá tři kardinální čísla (přirozená čísla) platí:

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. Operace násobení je asociativní.

3. Pro každá dvě kardinální čísla (přirozených čísel) platí: $a \cdot b = b \cdot a$

Operace násobení je komutativní.

4. Existuje číslo 1 takové, že pro každé kardinální číslo (přirozené číslo) platí:

$A \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Číslo jedna se nazývá neutrální prvek (Eberová, 2005).

Množina všech kardinálních čísel (přirozených čísel) s operací násobení tvoří komutativní **pologrupu**.

Pokud budeme uvažovat o dvou operacích, sčítání a násobení současně, tak můžeme říci, že operace **násobení je distributivní vzhledem k operaci sčítání**. To znamená, že pro každá tři kardinální čísla platí: $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

Množina všech kardinálních (přirozených) čísel tvoří aditivní pologrupu a multiplikativní pologrupu. Množina všech kardinálních (přirozených) čísel, na kterých je definována operace sčítání a násobení je **polookruh** (Eberová, 2005).

2.4 Početní operace sčítání a násobení

Násobení je opakované sčítání. Mezi operacemi sčítání a násobení je příbuznost. Obě mají tři společné vlastnosti:

operace	sčítání	násobení
je komutativní	$14 + 37 = 37 + 14$	$14 \cdot 37 = 37 \cdot 14$
je asociativní	$(3 + 28) + 17 = 3 + (28 + 17)$	$(3 \cdot 28) \cdot 17 = 3 \cdot (28 \cdot 17)$
má neutrální prvek	Přičteme-li k libovolnému číslu	Vynásobíme-li libovolné číslo
m	m číslo 0, číslo m se nezmění	číslem 1, číslo m se
nezmění		

Z asociativity obou operací plyne, že závorky můžeme vypustit a psát jednoduše $3 + 28 + 17$ respektive $3 \times 28 \times 17$. V souvislosti s násobením zavádíme i operaci dělení. Říkáme, že dělení je inverzní nebo opačnou operací k násobení.

Opakovaným sčítáním docházíme k násobení: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 5 \times 2$

Opakovaným násobením docházíme k mocnění: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

Násobení je v oboru přirozených čísel neomezeně proveditelné (součinem libovolných přirozených čísel je číslo přirozené). Operace násobení je komutativní, asociativní a je distributivní vzhledem ke sčítání. Kromě těchto vlastností operace poznávají žáci 1. stupně ZŠ číslo 0 jako agresivní prvek násobení ($a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$), číslo 1 jako neutrální (jednotkový) prvek násobení ($a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$) (Jirotková, didmat 1/3).

2.5 Didaktické zpracování početní operace násobení

2.5.1 Metodika výuky násobení

1. Vyvození základních spojení násobení přirozených čísel v oboru do dvaceti a následně v oboru do 100.

$$a \cdot b = c, 0 \leq a \leq 10, 0 \leq b \leq 10, 0 \leq c \leq 100.$$

2. Násobení násobků čísla 10 jednociferným činitelem.

Využíváme rozvoje čísla v desítkové soustavě, komutativnosti a asociativnosti násobení. Například $30 \cdot 2 = (3 \cdot 10) \cdot 2 = (3 \cdot 2) \cdot 10 = 6 \cdot 10 = 60$

3. Pamětné násobení dvojčíferného čísla číslem jednociferným

Využíváme rozkladu čísla na desítky a jednotky a distributivnosti násobení vzhledem ke sčítání. Například $32 \cdot 3 = (30 + 2) \cdot 3 = (30 \cdot 3) + (2 \cdot 3) = 90 + 6 = 96$

4. Násobení číslem 10, kde k je přirozené číslo

$$\text{Například } 32 \cdot 10 = (30 + 2) \cdot 10 = (30 \cdot 10) + (2 \cdot 10) = 300 + 20 = 320$$

Analogicky postupujeme při násobení čísly 100, 1 000 atd. Na základě řešených příkladů žáci poznávají, že číslo násobíme číslem 10 tak, že k násobenému číslu připoisujeme k nul.

5. Písemné násobení – algoritmus písemného násobení.

Základní spoje násobení – násobilka:

Jsou součiny všech dvojic jednociferných čísel – součiny všech dvojic jednociferných čísel z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Osvojování početní operace násobení na 1. stupni probíhá ve dvou fázích:

1. pochopení podstaty operace;
2. pamětní osvojení základních spojů, zvládnutí algoritmu výpočtů.

Nácvik pamětného násobení vychází z manipulací s předměty, jejichž smyslem je, aby žáci pochopili podstatu zaváděné operace. Na manipulativní činnosti navazuje grafické znázornění situace. Nejprve fyzická činnost, potom činnost prováděná v představě a nakonec symbolizace situace, která umožní užívat čísla a operace bez konkrétní činnosti (Jirotková, didmat1/3).

2.5.2 Zavedení operace násobení

K pochopení pojmu násobení se žáci připravují už v 1. ročníku. Řeší úlohy související s opakovanými činnostmi s tímž počtem předmětů: dítě sní k snídani denně dva rohlíky, kakao si osladí vždy třemi kostkami cukru, cesta do školy mu trvá 8 minut a vykoná ji tam a zpět pětkrát za týden.

Cílem zavedení operací je, aby děti pochopily, ve kterých situacích se používá k řešení úlohy násobení a dělení, osvojily si postup, jak se zjistí součin a podíl dvou čísel, a nacvičily spoje násobení a dělení. Násobení a dělení jsou vykládány jako dva samostatné početní výkony. Tento postup je zvolen proto, aby mohlo být při výkladu využito co nejvíce přirozených zkušeností dětí. Divíšek, Hošpesová a Kuřina se domnívají, že samostatný výklad obou výkonů přispěje k pochopení jejich podstaty a zúročí se později při řešení slovních úloh. Nácvik spojů násobení a dělení je tradičně rozdělen do probírání jednotlivých násobílek. Aby děti měly možnost využít pro zapamatování spojů i vztahů mezi jednotlivými řadami násobků, probírá se násobení čtyřmi hned po násobení dvěma.

Modelování násobení a dělení je považováno za velmi důležité, protože je základem dobrého porozumění. Žák by neměl umět jen najít součin nebo podíl dvou čísel, měl by také umět rozeznat situace, k jejichž řešení je možné použít násobení a dělení. Může se zdát, že tato dovednost přímo souvisí se znalostí násobílek. Ale často se stává, že děti, které dovedou bez chyb násobit a dělit, neumějí řešit slovní úlohy. Chyby tohoto druhu se

jen velmi obtížně odstraňují a vznikají právě v období, kdy se děti seznamují s početními operacemi. Proto je nutné věnovat modelování násobení a dělení velkou pozornost (Divíšek, Hošpesová, Kuřina, 1998).

2.5.3 Vyvozování násobení

Při vyvozování násobení a dělení dodržujeme posloupnost kroků, která se v praxi osvědčuje.

1. Znázorňování násobení pomocí reálných předmětů

První krok směřuje k tomu, aby dítě pochopilo, že opakované sčítání stejných sčítanců můžeme nahradit novou operací – násobením. V tomto stádiu výkladu násobení zatím požadujeme, aby dítě např. příklady $2 \cdot 6$ a $6 \cdot 2$ modelovalo odlišnými činnostmi. Zatímco $2 \cdot 6$ znamená 2 skupiny po 6 (neboli $6 + 6$), pak $6 \cdot 2$ je 6 skupin po 2 (neboli $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$). Vzhledem k tomu, že se na počátku nácviku zaměřujeme právě na chápání podstaty celé operace, je třeba tyto dvě odlišné činnosti diferencovat.

2. Znázorňování násobení pomocí skutečných a matematických modelů

K pochopení násobení přispěje i práce s modely, které zastupují určité hodnoty (mince, barevné kruhy, barevné proužky).

Kolik korun je 6 dvoukorun?, 5 pětikorun?

Vymodeluj $6 \cdot 2$ pomocí proužků (6 červených proužků).

3. Komutativita násobení

Teprve až si děti zcela osvojí modelování násobení, upozorníme je, že na pravoúhelník, který modeluje násobení, se můžeme dívat ze dvou stran a pokaždé znamená jiný příklad násobení. Pořadí činitelů v násobení nemá vliv na součin.

6 řad čtverečků po 2 čtverečcích,

v jedné řadě je $6 \cdot 2 = 12$.

2 řady čtverečků po 6 čtverečcích,

v jedné řadě je $2 \cdot 6 = 12$.

2.5.4 Nácvik násobilky

Pro nácvik násobků čísel se využívá modelování pomocí proužků, vyhledávání řad násobků v číselné řadě, vztahů mezi řadami násobků, opakovaného sčítání (Divíšek, Hošpesová, Kuřina, 1998).

Kittler (1994) uvádí, že jakmile děti dobře porozumějí souvislosti násobení s fyzickými činnostmi, stačí se opřít jen o důkladně osvojenou operaci sčítání:

$$6 + 6 + 6 = 3 \cdot 6 = 18$$

Vztahu mezi násobením a sčítáním se užívá:

- ke kontrole správnosti výsledku násobení;
- k násobení větších čísel ($32 \cdot 3 = 3 \cdot 32 = 32 + 32 + 32$).

Opakovanými fyzickými činnostmi se soubory předmětů objevují žáci:

- souvislost mezi násobením a sčítáním (násobení jako opakované sčítání): $3 \cdot 7 = 7 + 7 + 7$;
- souvislost mezi dělením a násobením: $12 : 3 = 4$, protože $4 \cdot 3 = 12$.

Osvojení základních spojů násobení (násobilky) předpokládá dobrou znalost základních spojů sčítání, z nichž se základní operace násobení vyvozují. Naopak se však při objevování a osvojování operací násobení a dělení opakují a zpevňují dovednosti sčítání a odčítání. Jejich automatizace je tak vedlejším produktem násobilky. Takového vedlejšího efektu v počítání se snažíme dosáhnout zejména při řešení úloh z dětské životní praxe.

Tematický celek Násobení přirozených čísel patří ke sloupům výuky ve druhém a třetím ročníku. Tradičně bývá nejvíce pozornosti, energie i času věnováno nácviku. Aby se dítě naučilo násobit v oboru do 100, potřebuje dobrou přípravu. To znamená, že musí pochopit podstatu násobení a musí umět dobře z paměti sčítat v oboru do 100. Násobilku je třeba procvičovat delší dobu, aby si dítě jednotlivé početní spoje dokonale zautomatizovalo. Snažíme se vytvářet různé životní situace vázané na běžný život a okolí dítěte, které vedou k násobení. Nabádáme žáky, aby při obtížích použili manipulaci, dramatizaci a obrázky. Jirotková uvádí, že úspěšná edukační strategie se opírá o 4 didaktické zásady: nespěchat, umožnit žákovi jeho vlastní styl práce, žákovi poradit, aby si udělal tabulku násobilky, žáka vést k mnohému smysluplnému počítání.

2.6 Násobení z paměti

V prvním období základního vzdělávání je počítání z paměti jednou ze základních forem výuky matematiky. Učí žáky soustředit se na zadání, posiluje pozornost žáků, cvičí paměť na čísla. Pamětné počítání rozvíjí samostatnost myšlení, má velký význam pro rozvoj bystrosti a hbitosti úvah, má praktický význam. Podle Rosecké (2005) při počítání z paměti žák lépe proniká do podstaty aritmetických operací. Zařazováním pamětného počítání ve spojení s činnostmi žáků se vyučování stává pestřejším. Co chceme dobře naučit, zařazujeme do výuky krátce a často.

Žáci se učí pamětně sčítat, odčítat, násobit a dělit („beze zbytku“, tj. dělení v oboru násobilky). Základní spoje sčítání a odčítání v oboru do 20 a násobení do sta, tzv. „malá násobilka“, tvoří východisko numerických výpočtů v aritmetice nejen 1. stupně ZŠ. Jejich bezpečné zvládnutí vyžaduje dlouhodobé procvičování a upevňování a je předpokladem efektivního řešení všech typů matematických úloh.

Osvojení dovednosti správného a přitom rychlého, hbitého počítání, patří mezi specifické cíle vyučování matematice, rozvíjí osobní charakteristiky žáka. Řešení početních úloh „z hlavy“, počítání v „mysli“, obvykle používá početních výhod, založených na vlastnostech početních výkonů, pravidel o pořadí výpočtů a užití závorek k zápisu početního výrazu, a provádění odhadů výsledků řešení včetně posouzení jejich reálnosti (Novák, 1999).

Násobilky jednotlivých čísel (2-10) se probírají v různých učebnicích v různém pořadí, postup nácviku je stejný. Učitel používá pojmy činitel, součin. S podstatou početní operace násobení se žáci seznamují ve 2. ročníku základní školy, je vyvozena násobilka čili základní spoje pro násobení.

Násobilka se vyvozuje postupně jako řada násobků 2, 3, 4, atd. V současnosti se ve školách v učebnicích matematiky násobení vysvětluje jako úsporný způsob sčítání několika stejných sčítanců. Žáci nejprve určují počet objektů počítáním po jedné, pak sčítáním stejných sčítanců, pak teprve násobením. Posléze násobení znázorňují v hromádkách, ve čtvercové síti, v mřížce s kolečky a také na číselné ose. V této fázi se děti seznámí s jednou nejzákladnější vlastností násobení. Naučí se komutativnosti násobení. Je nutné neustále procvičovat, že když se zamění pořadí čísel, která násobí, výsledek je stejný. Dítě by mělo samo objevit, že číslo násobené jednou se nezmění. *Objevení pravidla dítětem napomáhá aktualizaci jeho poznávacích a výkonových potřeb ve vyučování. Dítě se stává vědcem,*

objevitelem, který proniká do tajů matematicky (Coufalová aj., 1997). Učivo pokračuje násobením nulou. Dítě samo dojde k závěru, že každé číslo násobené nulou je nula. Nyní se učí násobení pomocí kartézského součinu. Následuje opakování celého násobení, co se děti prozatím naučily (Kárová, 1996).

Násobení v oboru do 100 (násobilka v oboru násobilky) je nutno s dítětem téměř každý den alespoň na několika příkladech zábavnou formou procvičovat. Početní spoje se musí zautomatizovat, nestačí postup pouze logicky zdůvodnit a znázornit (Kárová, 1996).

Pamětný nácvik násobilkových spojů se dokončuje až ve 3. ročníku. Po zvládnutí násobilkových spojů se začne probírat pamětné násobení mimo obor násobilky (ale jen v oboru do 100). Pamětný algoritmus násobení zavádíme mimo obor malé násobilky, tedy v momentě, kdy aspoň jeden z obou činitelů je větší než 10. Pamětný algoritmus násobení je založen na principu rozkladu činitelů s ohledem na pozornost zápisu v desítkové soustavě a posléze na vynásobení každého z nich.

2.7 Algoritmus písemného násobení

Písemné násobení se žáci učí podle algoritmu. Podle Nováka (1999) se algoritmem označuje soustava elementárních kroků, operací, pomocí kterých lze řešit všechny úlohy určitého typu. Musí mít takovou podobu, aby bylo možno jeho příkazy každému předat, aby jich byl konečný počet a provádění příkázaných operací vytvářelo jednoznačně definovaný proces kdykoliv opakovatelný. Algoritmus je tedy postup determinovaný, hromadný a rezultativní. Můžeme ho vyjádřit slovy, matematickou symbolikou, případně programovacím jazykem nebo vhodným grafickým schématem.

Když se žák učí písemně násobit, musí zesouladit do jednoho organického procesu práci 4 různých kognitivních vrstev: informace o strategii procesu a spoje malé násobilky (obojí uloženo v dlouhodobé paměti), práce krátkodobé paměti a operace nižší aritmetické úrovně. Nácvik písemného násobení tedy rozvíjí schopnost žáka organicky propojit a postupně automatizovat různé úrovně práce kognice. Naučit se algoritmus písemného násobení pro žáka znamená naučit se účinně propojit všechny 4 mentální oblasti, které se na tomto procesu podílejí (Jirotková, didmat1/3).

Algoritmus písemného násobení spočívá na distributivnosti násobení vzhledem ke sčítání, na komutativnosti a asociativnosti násobení s využitím zápisu v desítkové soustavě.

Při vyvozování algoritmu písemného násobení respektujeme tento postup:

Víceciferného činitele násobíme činitelem jednociferným bez přechodů

432

. 2

864 neboť $432 \cdot 2 = (400 + 30 + 2) \cdot 2 = 400 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 2 \cdot 2$

+ 4

+ 60

+ 800

tj.

4

60

800

864

Víceciferného činitele násobíme jednociferným činitelem s přechody přes základ při sčítání dílčích součinů.

$$362 \cdot 7 = (300 + 60 + 2) \cdot 7 = (300 \cdot 7) + (60 \cdot 7) + (2 \cdot 7) = 2\,100 + 420 + 14 = 2\,534$$

Algoritmus:

362

. 7

2 534

Víceciferného činitele násobíme dvojciferným činitelem, který je násobkem čísla 10.

Algoritmus:

432

. 20

8 640

sepisovanou nulu je vhodné odlišit barevně

Víceciferného činitele násobíme dvojciferným činitelem, využíváme rozkladu druhého dvojciferného činitele na desítky a jednotky a distributivnosti násobení vzhledem ke sčítání.

$$432 \cdot 23 = 432 \cdot (20 + 3) = 432 \cdot 20 + 432 \cdot 3 = 8\,640 + 1\,296 = 9\,936$$

S písemným algoritmem násobení se žáci seznamují po bezpečném zvládnutí násobilky. Žáci začínají nejprve písemným násobením jednociferným činitelem, po zvládnutí následuje násobení dvojciferným činitelem. V 5. ročníku nejde jen o pouhé opakování toho, co jsme s žáky probrali, ale jde o rekapitulaci a prohloubený pohled, hledání souvislostí (Kaslová aj., 2002).

2.8 Slovní úlohy jako aplikace početní operace násobení v reálném životě

Složitost úloh předkládaných žákům musí odpovídat jejich dosavadním vědomostem a jejich možnostem v daném vývojovém období (Rosecká, 2005). Je třeba si uvědomit, že rozvoj samostatnosti a schopnosti uvažovat nepodporují úlohy ani příliš obtížné, ani příliš jednoduché. Chceme-li žáky dovést k samostatnosti, musíme se snažit vytvářet situace, při kterých mohou o činnostech diskutovat, obhajovat své závěry pozorování, přesvědčovat spolužáky o správnosti svých řešení a vyjádření. Všechny tyto diskuze jsou významnou pomocí pro slabší žáky.

Slovní úlohy obsahují jednak číselný materiál, dále podmínky úlohy, to je slovní výklad, který popíše spojitost mezi danými a hledanými údaji, ke každé slovní úloze je obvykle zařazena otázka úlohy.

Žáci se učí už od 1. ročníku praktické úlohy (slovní úlohy, úlohy z praktického života) matematizovat: abstrahují kvantitativní vztahy mezi složkami popsané úlohové situace, určují postup řešení, rozhodují, kterých údajů a kterých početních výkonů použijí a ve kterém pořadí. Osvědčilo se pravidelně zařazovat do vyučovacích hodin speciální cvičení v matematizaci (Kittler, 1994). Účinnou pomocí při matematizaci úloh je vhodné znázornění.

K řešení praktické úlohy patří i zkouška správnosti výpočtu (tj. zkouška správnosti řešení matematické úlohy), zkouška správnosti řešení praktické úlohy (tj. zkouška správnosti matematizace) a zhodnocení výsledku.

K problematice řešení slovních úloh na 1. stupni ZŠ je třeba si dále uvědomit, že cílem výuky matematiky v oblasti slovních úloh není jen naučit žáky řešit izolovaně některé jednotlivé slovní úlohy, ale naučit je především **metodě řešení slovních úloh**. Schopnost

žáků řešit slovní úlohy je totiž jedním z důležitých měřítek matematických schopností žáků, především jejich schopnosti aplikovat teoretické poznatky v praxi (Blažková aj., 2003).

Slovní úlohy tvoří ve školské matematice samostatný tematický celek, ale prolínají celým matematickým učivem. Ve vyučování matematice na nich aplikujeme celou šíři poznatků z didaktického systému učiva matematiky. Z didaktických důvodů se slovní úlohy, v nichž se aplikují vědomosti a dovednosti žáků o početních výkonech, třídí na jednoduché a složené (Novák, 1993).

Jednoduchá slovní úloha se řeší použitím jednoho početního výkonu. Do základní typologie jednoduchých slovních úloh patří i úlohy na násobení. Patří sem úlohy na:

- určení součtu stejných sčítanců;
- zvětšení čísla několikrát („n krát více“);
- určení počtu uspořádaných dvojic.

Jednoduché slovní úlohy se rozlišují na úlohy přímé a nepřímé. Přímé úlohy jsou takové, v nichž formulace zadání odpovídá početnímu výkonu, kterým se úloha řeší. Formulace „pětkrát více“ vede k násobení. Nepřímé slovní úlohy se obvykle řeší opačným početním výkonem, než naznačuje formulace zadání. Formulace „dvakrát více“ vede k násobení, ale úloha se řeší dělením. Text úlohy „svádí“ žáka k užití nesprávného početního výkonu.

Mezi důležité matematické dovednosti patří samostatné tvoření jednoduchých i složených slovních úloh. Složená slovní úloha vyžaduje k řešení alespoň dva početní výkony (Novák, 1993).

3 TESTOVÁNÍ JAKO KOMPETENCE UČITELE MATEMATIKY

Jak píše M. Chráska (2007), v pedagogice se v současnosti vedle sebe uplatňují dvě základní paradigmatu: paradigma pozitivistické a paradigma post-pozitivistické. Pedagogický slovník (Průcha aj., 1995) uvádí, že paradigma je zásadní obraz předmětu určité vědy a jejich výzkumných přístupů. Těmto paradigmátům odpovídají také dva (poměrně rozdílné) typy pedagogických výzkumů.

Klasické pedagogické výzkumy vycházejí většinou z pozitivistického paradigmatu. Bývají často označovány jako vědecké výzkumy či jako výzkumy kvantitativně orientované. Vycházejí z přesvědčení, že existuje jedna objektivní realita, která není závislá na našich citech nebo přesvědčení. Slovník spisovné češtiny (2005) uvádí, že pozitivismus je filozofický směr omezující zkoumání na popis a třídění faktů daných bezprostředním pozorováním. Předkládaný učební test se zabývá metodologickými problémy zejména tohoto typu klasického pedagogického výzkumu. Chceme zdůraznit, že pokud v této souvislosti hovoříme o vědeckém výzkumu, nenaznačujeme tím, že ostatní používané metodologie jsou metodami nevědeckými.

V posledních desetiletích se ve světě, ale i u nás stále více uplatňují výzkumy vycházející z paradigmatu post-pozitivistického, které bývají označovány jako výzkumy kvalitativně orientované. V oblasti matematiky a přírodních věd jsou to šetření TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) a PISA, která jsou zařazena mezi mezinárodní výzkumy výsledků vzdělávání. Prostřednictvím těchto výsledků se objektivně dozvídáme, co čeští žáci umí, jak si jako celek stojí ve srovnání se světem a jak se jejich znalosti mění v čase.

3.1 Testy v pedagogickém výzkumu

Pedagogické testování je jednou z nejobjektivnějších metod pedagogické diagnostiky. Podle Zelinkové (2001) je test druh zkoušky zaměřené na zjištění úrovně v určité oblasti. Je diagnostickým nástrojem nejen v pedagogice, ale především v psychologii. Je třeba rozlišit standardizované psychologické testy, které jsou nástroji k měření schopností, nadání, výkonů, postojů, zájmů, kognitivních funkcí atd., od testů, které si utvářejí různí pracovníci za účelem dílčího poznání.

Pojem test lze definovat jako „zkoušku, úkol, identický pro všechny zkoumané osoby s přesně vymezenými způsoby hodnocení výsledků a jejich číselného vyjadřování“ (Chráska, 2007, str. 184). Test tedy není jakákoli zkouška, nýbrž zkouška, na kterou jsou

kladeny určité nároky. Testy lze třídit podle různých kritérií. Obecně je přijímáno dělení na testy schopností, testy osobnosti a testy výkonu.

V pedagogických výzkumech se velmi často používají testy výkonu, které měří výkonnost jedince v určitých oblastech. Nejznámější a nejdůležitější z testů výkonu jsou testy didaktické.

3.1.1 Didaktický test

V pedagogickém slovníku (Průcha aj.,1995) je použit pojem didaktický test, který označuje nástroj systematického zjišťování výsledků výuky. Dále jsou uvedeny jeho vlastnosti a klasifikace testů podle různých hledisek. Gavora (1999) považuje za výstižnější označení testy vědomostí a dovedností. Testy se liší svými vlastnostmi a způsobem zpracování.

Pojem didaktický test (anglicky achievement test) je sice u různých autorů definován různě, ale tato různá vymezení se shodují v tom, že se jedná o zkoušku, která se orientuje na objektivní zjišťování úrovně zvládnutí učiva u určité skupiny osob. Od běžné zkoušky se didaktický test ovšem liší zejména tím, že je navrhován, ověřován, hodnocen a interpretován podle určitých (předem stanovených) pravidel.

Stručná a výstižná je definice didaktického testu, jak ji uvádí P. Byčkovský (1982): didaktický test je „*nástroj systematického zjišťování (měření) výsledků výuky*“ (Chrásková, 2007, str. 184).

V této definici jsou pod pojmem výsledky výuky míněny změny v osobnostech žáků způsobené výukou. Systematičnost postupu je zajišťována tím, že didaktický test je navrhován, ověřován, skórován (bodován) a interpretován podle určitých (předem stanovených) pravidel.

V pedagogických výzkumech se setkáváme s různými druhy didaktických testů, které se liší tím, jaké informace pomocí nich získáváme. Klasifikaci didaktických testů navrhl P. Byčkovský (1982):

- testy rychlosti;
- testy úrovně;
- testy standardizované;
- nestandardizované didaktické testy;
- testy kognitivní a testy psychomotorické;

- testy výsledků výuky a testy studijních předpokladů;
- testy rozlišující (testy relativního výkonu);
- testy ověřující (testy absolutního výkonu);
- testy vstupní, průběžné a výstupní;
- testy monotematické a polytematické;
- testy objektivně skórovatelné;
- testy subjektivně skórovatelné.

3.1.1.1 Konstrukce didaktického testu z matematiky

Při konstrukci (sestavení) testu rozlišíme tři základní etapy:

1) analytická fáze:

- stanovení cíle, záměru, pedagogického smyslu testu;
- vymezení obsahu testu.

Uvedenou analytickou etapou tedy rozumíme jakési promýšlení, předběžnou úvahu, která bude konkretizována a naplněna v další činnosti při práci s testem

2) syntetická fáze:

- výběr vhodných úloh;
- vypracování zadání celého testu.

3) optimalizační fáze:

- ověření kvality sestaveného testu na vzorku žáků.

3.1.2 Nestandardizovaný didaktický test

Jak píše M. Chráska (2007), nestandardizovaný didaktický test je test, u něhož nebyly realizovány všechny kroky obvyklé při přípravě a ověřování testů standardizovaných. Nestandardizované testy bývají v literatuře někdy nazývané „testy připravené učitelem“. Chráska testy označuje jako učitelské, neformální. Neproběhlo u nich ověřování na větším vzorku žáků, a nejsou tudíž známy všechny jejich vlastnosti. Tyto testy si připravují učitelé sami pro svoji vlastní potřebu. U testů nestandardizovaných není také k dispozici testová příručka ani objektivně stanovený testový standard (testová

norma). I při konstrukci těchto testů by však učitelé měli dbát všech základních pravidel a zásad, které se doporučují u testů standardizovaných.

Pro dokonaleji připravované testy než testy učitelské, u nichž ale standardizace nebyla provedena beze zbytku, Chráška (2007) užívá i termínu testy kvazistandardizované. Kvazistandardizovaným testem je např. didaktický test, zjišťující úroveň vědomostí žáků v daném předmětu na určité škole (několik paralelních tříd) nebo na několika školách. Konstrukci těchto testů bývá většinou věnována větší pozornost než u testů nestandardizovaných, bývají známy některé jejich vlastnosti a někdy bývají k dispozici i standardy pro hodnocení testových výsledků.

3.1.2.1 Konstrukce nestandardizovaného didaktického testu

Chceme-li vytvořit nestandardizovaný didaktický test skutečně kvalitní, musíme věnovat dostatečnou pozornost jeho plánování. Prvním krokem při konstrukci didaktického testu je rozhodnutí, k jakému účelu má didaktický test sloužit. Testem lze zjišťovat např. výsledky výuky na konci určitého tematického celku nebo na konci pololetí či roku, testem lze ale také zjišťovat, jak žáci přijímají a chápou probírané učivo atd. Jak píše Smékal, Švec a Zajac (1973), mezi nejdůležitější úkoly ve fázi analytické patří vytčení cíle testu a výběr učiva, které hodláme prověřovat. Učitel, který test bude sestavovat, si musí ujasnit, co chce testem zjistit. Volba prověřovaného učiva musí být přiměřená věku a možnostem žáků. Pro ujasnění účelu testování se zpravidla rámcově vymezuje obsah testu.

Dalším krokem je tedy stanovení obsahu, který má test zkoušet. Zpravidla se postupuje tak, že učivo, které má být předmětem testování, se nejdříve rozčlení na určité prvky (fakta, pojmy, vztahy, definice apod.). Každému prvku učiva se potom přidělí určitý počet testových úloh. Testovou úlohou rozumíme otázku, úkol nebo problém obsažený v testu. Úkol je základní stavební jednotkou didaktického testu. Na kvalitě testových úloh závisí v podstatné míře kvalita celého testování. U jednotlivých úloh se zároveň stanoví, jakou úroveň osvojení poznatků mají zkoušet, tj. zda mají postihovat jen pouhé zapamatování poznatků, nebo také porozumění poznatkům, používání vědomostí k řešení problémových situací apod. V tomto směru jsou dobrou pomocí různé osvědčené taxonomie výukových cílů, např. Bloomova taxonomie výukových cílů. Pedagogický slovník (Průcha, 1955) uvádí, že Bloomova taxonomie cílů je hierarchicky uspořádaný systém poznávacích (kognitivních) cílů výuky. Taxonomie začíná procesy nejméně náročnými na myšlení, které vyžadují pouhé pamětné zvládnutí, a končí procesy

nejnáročnějšími. Systém má 6 základních tříd: znalosti, porozumění, aplikace, analýza, syntéza, hodnotící posouzení.

Po stanovení obsahu testu je možné přistoupit k návrhu testových úloh. Podle charakteru testovaného učiva a podle cíle, který má test splnit, se můžeme rozhodnout pro úlohy otevřené nebo uzavřené. Chráska (2007) doporučuje navržené testové úlohy po určité době (alespoň několika dnů) autorem znovu posoudit. Při posuzování úloh si vedle technické kvality úloh všímáme zejména toho, jakou úroveň osvojení poznatků úlohy zkouší. Jako další krok při konstrukci didaktického testu se doporučuje posouzení navržených úloh dalšími odborníky – kompetenty.

Na základě vlastního posouzení a na základě doporučení kompetentů provede autor závěrečnou úpravu prototypu testu. Ta spočívá v první řadě ve vyřazení těch úloh, které zjevně vykazují nevhodné vlastnosti. Úlohy se většinou v testu řadí podle vzrůstající obtížnosti, a to tak, že první úlohy jsou nejsnadnější a poslední nejobtížnější.

Součástí přípravy testu pro první použití je i předběžné určení času, který bude k vypracování testu třeba, a vypracování pokynů pro práci testovaných.

Navrhování a konstrukce testových úloh v pedagogickém výzkumu je velmi náročná činnost, k jejímuž úspěšnému zvládnutí je potřeba kromě zkušeností také náležitého teoretického poučení. Autor didaktického testu by měl být odborníkem v předmětu, pro který test připravuje, ale měl by být také dobrým pedagogem a psychologem, aby se dokázal vcítit do pozice žáků, které chce testovat.

3.1.2.2 *Vyhodnocení nestandardizovaného didaktického testu*

Z výsledků didaktického testu by měl učitel získat co nejvíce informací pro hodnocení žáků, ale také (a to zejména) pro optimalizaci svého dalšího pedagogického působení. Prakticky po každém použití testu by měl následovat tzv. diagnostický rozbor výsledků žáků. Při tomto rozboru si učitel všímá především chyb, kterých se žáci dopustili, a hledá jejich pravděpodobné příčiny.

Dosažené výsledky testování třídy je výhodné znázornit také graficky, pomocí sloupkového diagramu zvaného histogram četností. Z histogramu četností lze získat představu o rozložení výsledků ve třídě, tzn. informaci o tom, kolik žáků ze třídy v testu dosáhlo velmi dobrých výsledků, výsledků dobrých, průměrných atd. U histogramu

četností se na vodorovnou osu nanášejí dosažené výsledky testování (počty bodů) a na svislou osu počty žáků, kteří daného výsledku dosáhli (četnosti).

Mnoho nejasností je mezi učiteli v otázce převodu bodového hodnocení na klasifikační stupně. Je to vcelku pochopitelné, když uvážíme, že ani v teorii nebyl tento problém doposud spolehlivě a jednoznačně rozřešen. Uvedeme některé přístupy, které se v této oblasti nejčastěji uplatňují (Chráska, 1998):

a) Intuitivní přístup ke klasifikaci

Někteří učitelé přistupují k převodu bodových výsledků na klasifikační stupně zcela subjektivně a sami víceméně intuitivně určují, kolik bodů je potřeba na dosažení určité známky.

b) Klasifikace na základě procenta správných odpovědí

Někdy se při převodu bodových výsledků na klasifikační stupně vychází z procenta správných odpovědí, kterého žák v testu dosáhl.

c) Klasifikace na základě normálního rozdělení

Bodové výsledky žáků v testu můžeme klasifikovat také na základě normálního rozdělení četností. Jestliže se učitel rozhodne pro klasifikaci podle normálního rozdělení, může k tomu s výhodou používat tzv. percentilové hodnoty. Podrobnosti uvádí např. práce Chráska (1998).

4 PRAKTICKÁ ČÁST

4.1 Výzkum

K tématu diplomové práce mě přivedla má profese učitele na základní škole. V dnešní době se mluví o poklesu vědomostí a dovedností našich žáků v matematice. Propad výsledků doprovází i významný pokles obliby matematiky mezi žáky. Mým cílem bylo zjistit, jak žák pátého ročníku zvládá daný výstup v matematice. Blíže jsem se chtěla seznámit s výsledky vzdělávání na běžných zlínských základních školách plně organizovaných a jedné malotřídní.

4.1.1 Metodika výzkumu

Byl zformulován základní problém, jaká je úroveň osvojených vědomostí a dovedností očekávaných výstupů formulovaných ve Standardech pro základní vzdělávání u žáka 5. ročníku se zaměřením na početní operaci násobení. Jako nástroj byl použit nestandardizovaný test. Aby byl zkoumaný výzkumný vzorek co nejpestřejší a získané informace co nejobjektivnější, kromě didaktických testů bylo využito i rozhovorů s pedagogickými pracovníky ze všech oslovených základních škol. Zajímalo mě jejich pohled na dané výstupy vzdělávání, jelikož otázka testování žáků 5. tříd je vysoce aktuální.

V tematickém okruhu Číslo a početní operace jsme očekávali zvládnutí výstupů žáka páté třídy zaměřených na násobení dané Standardy pro základní vzdělávání. V tematickém okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy jsme očekávali, že úlohy z Matematického klokana budou pro žáka pátého ročníku obtížné.

Test vyplnilo celkem 185 žáků pátého ročníku na čtyřech různých školách, v jednom okrese Zlínského kraje.

Okres Zlín

- | | |
|---|---------|
| • ZŠ Tečovice (malotřídní škola) | 14 žáků |
| • ZŠ Otrokovice Trávníky (úplná základní škola) | 53 žáků |
| • 5. ZŠ Zlín (úplná základní škola) | 42 žáků |
| • 17. ZŠ Zlín (úplná základní škola) | 76 žáků |

Na vyplnění anonymního didaktického testu měli žáci neomezený čas. Test obsahuje dvě části. První část zahrnuje matematické úlohy z učiva tematického okruhu Číslo a početní operace, které vyplývají z uvedených Standardů, které obsahují cíle, co má žák 5. ročníku ke konkrétnímu tématu zvládnout. Druhá část zahrnuje matematické úlohy z Matematického klokana. Před řešením didaktického testu jsem realizovala předvýzkum. Vytvořila jsem test na jednotlivé jevy učiva násobení a zadala žákům ke zjištění posouzení vhodnosti úloh. Následně jsem test modifikovala do konečné podoby vzhledem k didaktickému záměru (viz příloha).

Výsledky jednotlivých matematických úloh jsem vyhodnotila do dvou kategorií: správné a chybné řešení. Každá úloha bude náležitě okomentována. Získaná data budou navíc zpracována v kruhových diagramech s náležitým komentářem.

4.2 Předvýzkum

Předvýzkum předcházel řešení didaktického testu. Na testových úlohách byla posuzována vhodnost úloh a zjištění, jak na tom jsou žáci s matematickými dovednostmi se zaměřením na násobení na začátku páté třídy.

4.2.1 Realizace předvýzkumu

Předvýzkum byl realizován ve formě testu. Test byl koncipován jako vstupní zkouška, na začátku školního roku, tematicky zaměřená na početní operaci násobení. Cílem testu bylo, po zopakování základního učiva nižších ročníků, ověřit úroveň matematických vědomostí a dovedností žáků zaměřených na jednotlivé jevy učiva násobení. Úlohy byly vybrány z používaných učebnic matematiky. Bylo využito úloh s tvořenou odpovědí, ve kterých žáci mohli nejlépe uplatnit soubor osvojených znalostí a dovedností. Test řešilo 50 náhodně vybraných žáků pátého ročníku na ZŠ Otrokovice Trávníky, 5. ZŠ Zlín a ZŠ Tečovice. Po předchozí domluvě s učiteli matematiky byl test žákům zadán 21. září 2011 první vyučovací hodinu. Zadání testu bylo žákům nakopírováno. Každý žák pracoval samostatně svým tempem. Celková doba práce byla vymezena na 45 minut. Žáci byli seznámeni s obsahem testu. Bylo jim vysvětleno, jak test zpracovat, a poté přešli k vypracování testových úloh.

4.2.2 Hodnocení předvýzkumu

Před vyhodnocením testů byla vytvořena bodovací tabulka, podle které každá testová úloha získala odpovídající počet bodů. Žáci mohli získat maximálně 40 bodů. Bodování jednotlivých úloh odpovídalo obsahové náročnosti. Správné řešení každé úlohy v testu bylo ohodnoceno počtem bodů podle zvládnutí jednotlivých obsahových položek učiva. Ohodnocení známkou byli žáci podle klasifikační stupnice odpovídající bodovací tabulce.

4.2.3 Výsledky předvýzkumu

Žáci test zvládli dobře, aritmetický průměr známek získaných v testu je 1,64. Nejfrekventovanější známkou byla 1, kterou získalo 24 žáků, pak následovaly známky 2 a 3. Dvojku získalo 20 žáků, trojku 6 žáků. Znamku 4 a známku 5 nezískal nikdo.

Žáci v testu prokázali dovednost násobení v oboru násobilky. Je třeba upozornit na problém při dělení jednociferným dělitelem se zbytkem, většina žáků nemá osvojen algoritmus písemného dělení. Zajímavá je neznalost matematické terminologie (rozdí, součin) a také úlohy na zvětšení čísla několikrát („n krát více“). Chyby se objevovaly při písemném násobení dvojciferným činitelem.

5 REALIZACE VÝZKUMU

Z předvýzkumu vyplynulo, že obsahové jednotky učiva byly do testu vhodně zařazeny.

Didaktický test předvýzkumu byl koncipován jako vstupní test na počátku 5. ročníku. Smyslem tohoto testu bylo, po náležitém opakování učiva předchozích ročníků, ověřit úroveň matematických vědomostí a dovedností žáků zaměřených na jednotlivé jevy učiva násobení. Rozhodla jsme se výzkum udělat ještě objektivněji se zaměřením na učivo a očekávané výstupy formulované ve Standardech pro základní vzdělávání v 5. ročníku. Didaktický test obsahoval matematické úlohy, které měli žáci vyřešit. Úlohy jsem vybrala ze vzorových úloh Standardů pro základní vzdělávání, z tematického okruhu Číslo a početní operace, se zaměřením na početní operaci násobení. Do testu jsem zařadila i úlohy na početní operaci sčítání, odčítání a dělení. Tyto úlohy vyžadují elementární dovednosti, je nutné je zařadit do každého testu, který zjišťuje výsledky vzdělávání. Do testu jsem se nebála zařadit nestandardní úlohy, které jsem vybrala z Matematického klokana. Na realizaci výzkumu jsem spolupracovala s kolegy jiných základních škol. Po předchozí domluvě s vyučujícími matematiky byl test žákům zadán 11. ledna 2012 první vyučovací hodinu. Zadání testu bylo žákům nakopírováno. Každý žák pracoval svým vlastním tempem. Celková doba práce byla časově neomezena. Před řešením testu byli žáci motivováni, seznámeni s cílem práce a dostali pokyny pro vypracování testu.

5.1 Zpracování výzkumu

Didaktický test jsem hodnotila po jednotlivých testových úlohách. Každá úloha je vyhodnocena počtem správných a chybných řešení, ta jsou vyjádřena v procentech úspěšnosti a neúspěšnosti. Na výsledky jsem se dívala ze dvou pohledů označovaných jako obsah a operace. Obsah je vymezen učivem, jehož zvládnutí je testováno. Operace jsou vymezeny dovednostmi, které mají žáci při práci s učivem prokázat. Dovednosti sledované ve výzkumu byly: prokazování znalostí, používání znalostí a uvažování.

5.2 Hodnocení výzkumu

V této části diplomové práce uvádím zpracování výzkumu. Ke každému číslu úlohy se váže grafické znázornění o stejném číslu a vyhodnocení úlohy s komentářem.

Vyhodnocení testu po jednotlivých testových úlohách

Část A – Číslo a početní operace

Vyhodnocení testové úlohy číslo 1

Úloha č.1 směřuje k výstupu – žák:

využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení:

- z paměti sčítá a odčítá do sta, násobí a dělí v oboru malé násobilky;
- využívá komutativnosti sčítání a násobení při řešení úlohy a při provádění zkoušky výpočtu;
- využívá asociativnost sčítání a násobení při řešení úloh s užitím závorek;
- využívá výhodného sdružování čísel při sčítání několika sčítanců bez závorek.

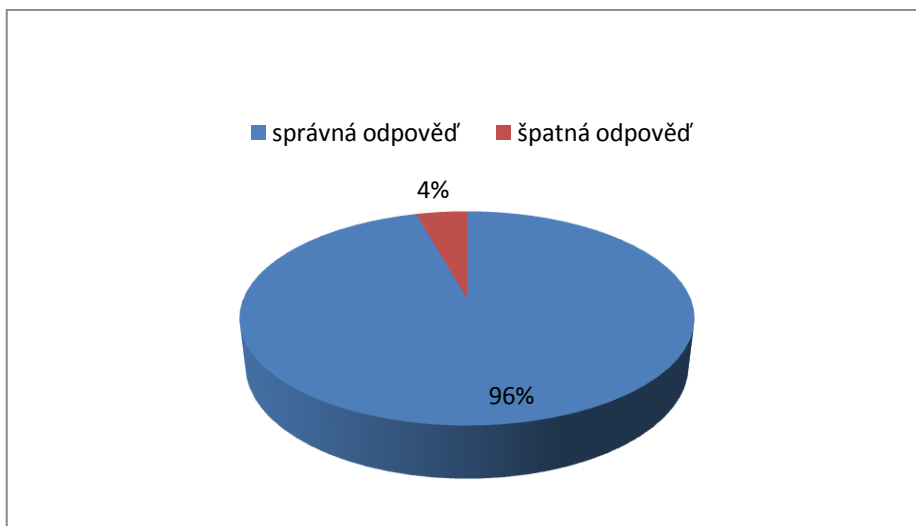
1a) **Doplň chybějící číslo: $8 \cdot _ = 40$**

Správně vyřešilo 177 žáků

Chybně vyřešilo 8 žáků

Poznámka k úloze 1a): aby žák získal výsledek, musí pro výpočet zvolit inverzní početní operaci.

Graf č. 1 Vyhodnocení matematické úlohy č. 1 a)



zdroj: Didaktický test (leden 2012)

Řešení daného příkladu ukazuje, že naprostá většina žáků pamětně zvládá násobení v oboru malé násobilky. Je to celkem 177 žáků (96 %). K získání výsledku na příslušné místo žáci při výpočtu pravděpodobně zvolili inverzní početní operaci. Tím prokázali, že si uvědomují vzájemnou souvislost mezi násobením a dělením. K získání výsledku ale také mohli určit činitele (násobence) daného součinu vyjmenováváním násobků. Lze konstatovat, že žáci ovládají násobení z paměti v oboru do sta a automaticky užívají spoje všech násobílek.

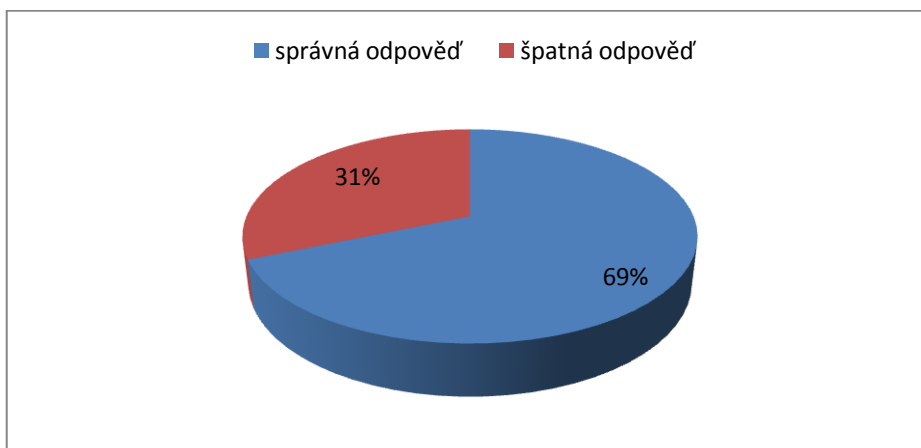
Důvodem chybných odpovědí může být neúplná představa o číslech, nepochopení významu operace násobení, nebo žáci ještě nemají zautomatizované spoje všech násobílek.

1b) **Doplň chybějící číslo: $8 + 8 \cdot _ = 40$**

Správně vyřešilo 127 žáků

Chybně vyřešilo 58 žáků

Graf č. 2 Vyhodnocení matematické úlohy 1 b)



zdroj: Didaktický test (leden 2012)

Řešení daného příkladu naznačuje, že 127 žáků (69 %) používá pravidla pro pořadí početních výkonů v zápisu bez závorek, z paměti sčítá a násobí čísla do sta a provádí zkoušku výpočtu.

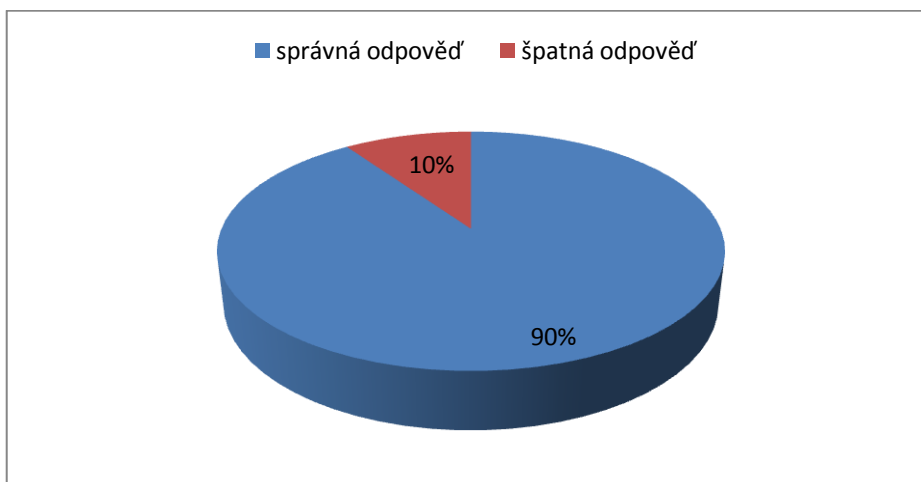
Žáci, kteří vyřešili příklad chybně, patrně nevyužili „přednost“ násobení před sčítáním a neprovedli zkoušku výpočtu, aby si ověřili, zda platí rovnost příkladu. Pravidla pro pořadí výpočtů tudíž ještě nemají osvojena.

1c) **Doplň chybějící číslo:** $(8 + 4) \cdot 5 = \underline{\quad}$

Správně vyřešilo 167 žáků

Chybně vyřešilo 18 žáků

Graf č. 3 Vyhodnocení matematické úlohy 1 c)



zdroj: Didaktický test (leden 2012)

Příklad správně vyřešilo 167 žáků (90 %), což ukazuje, že žáci dokáží využít asociativnosti sčítání a násobení při řešení úlohy s užitím závorek, pamětně sčítat a násobit do sta. Zpaměti mohli dané sčítance roznásobit a sečíst, což je výhodnější. Ale rovněž mohli nejprve vypočítat závorku a poté součet vynásobit daným číslem. Při této variantě žáci prokázali dovednost pamětně násobit jednociferné číslo dvojciferným v oboru do sta. U žáků, kteří řešili příklad chybně, se můžeme domnívat, že jsou u nich ještě nedostatečně osvojeny a upevněny dovednosti sčítání a násobení.

Vyhodnocení testové úlohy číslo 2

Úloha č.2 směřuje k výstupu – žák:

provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel:

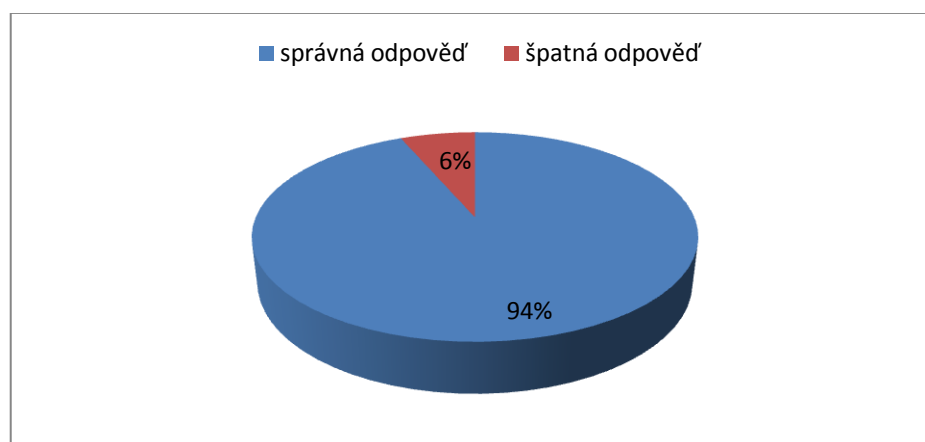
- správně sepíše čísla pod sebe (dle číselných řádů) při sčítání, odčítání, násobení a dělení přirozených čísel;
- aplikuje při písemném výpočtu znalost přechodu mezi číselnými řády;
- využívá znalosti malé násobilky při písemném násobení jednociferným číslem;
- provádí písemné početní operace včetně kontroly výsledku;
- dodržuje pravidla pro pořadí operací v oboru přirozených čísel.

2a) Vypočítej:
$$\begin{array}{r} 929 \\ -28 \\ \hline \end{array}$$

Správně vyřešilo 173 žáků

Chybně vyřešilo 12 žáků

Graf č. 4 Vyhodnocení matematické úlohy č. 2 a)



zdroj: Didaktický test (leden 2012)

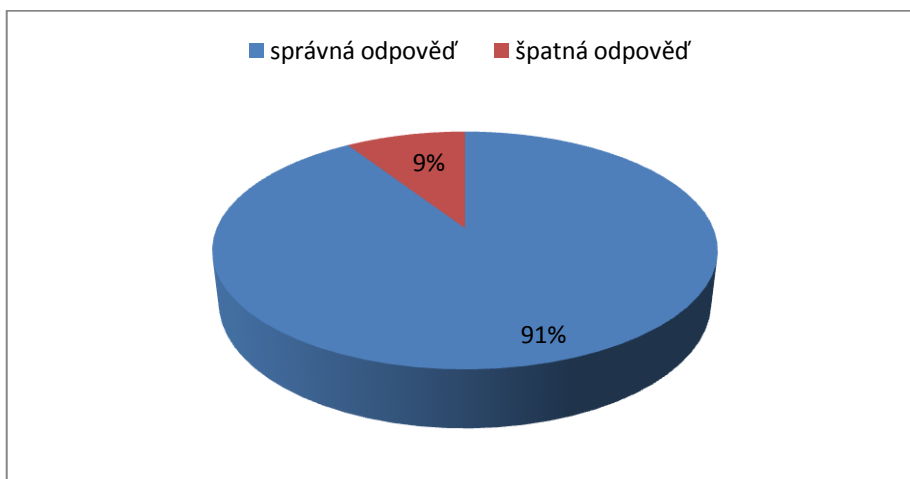
Příklad na písemné sčítání správně vypočítala většina žáků (94 %). Tito žáci zvládají při písemném výpočtu aplikovat znalost přechodu mezi číselnými řadami. Mají upevněnou dovednost písemného provádění početní operace sčítání. U chybných výpočtů se můžeme domnívat, že žáci zapomněli přičíst jednotku vyššímu řádu, nebo udělali chybu z nepozornosti.

2b) Vypočítej:
$$\begin{array}{r} 434 \\ -154 \\ \hline \end{array}$$

Správně vyřešilo 168 žáků

Chybně vyřešilo 17 žáků

Graf č. 5 Vyhodnocení matematické úlohy č. 2 b)



zdroj: Didaktický test (leden 2012)

Správný výsledek vypočítalo 168 (91 %) žáků, což je o pět žáků méně než u předešlého příkladu. Při písemném odčítání žáci prokázali upevněnou dovednost písemného provádění početní operace odčítání. 17 žáků (9 %) písemně odčítalo chybně. Při písemném odčítání u těchto žáků ještě není správně upevněn algoritmus písemného odčítání s přechodem desítky a žáci si asi důsledně neověřují správnost výpočtu sčítáním. Je také možné, že žáci nemají jistotu v pamětném počítání.

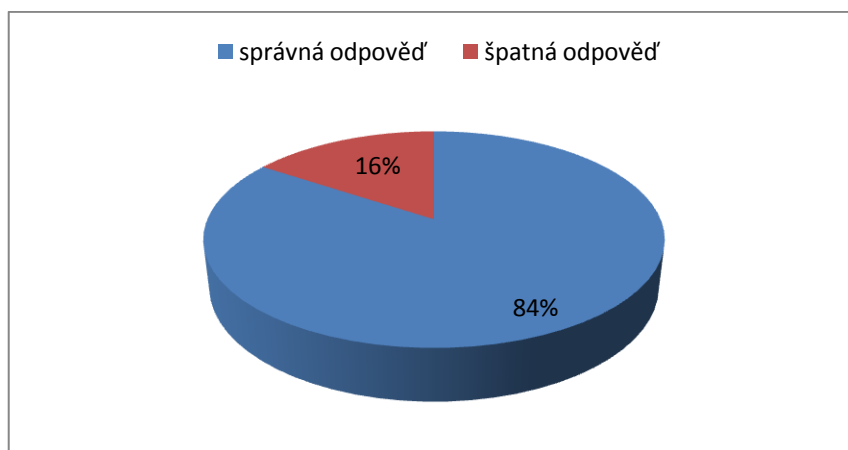
2c) Vypočítej:
$$\begin{array}{r} 328 \\ - 7 \\ \hline \end{array}$$

Správně vyřešilo 156 žáků

Chybně vyřešilo 29 žáků

Poznámka k úloze 2a), 2b), 2c): tyto úlohy vyžadují elementární dovednosti, je nutné je zařadit do každého testu.

Graf č. 6 Vyhodnocení matematické úlohy č. 2 c)



zdroj: Didaktický test (leden 2012)

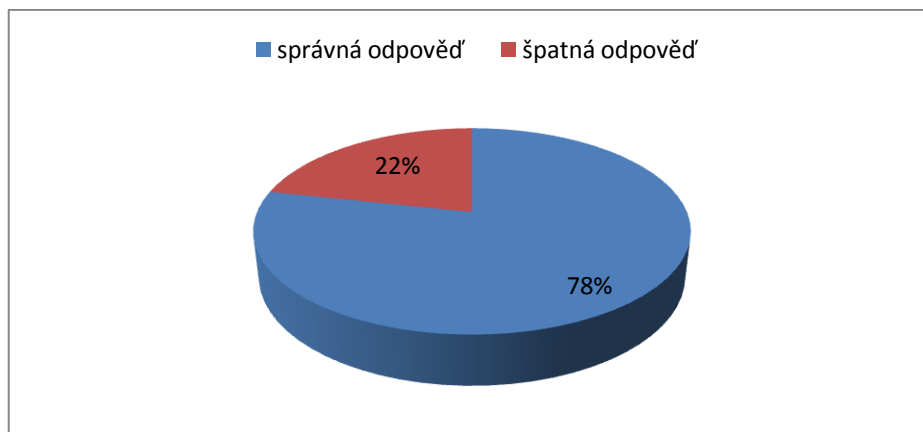
U uvedeného příkladu prokázalo dovednost písemného provádění násobení činitelem 156 žáků (84 %). Tito žáci zvládají algoritmus písemného násobení jednociferným činitelem a umí algoritmus výpočtu vyjádřit matematickou symbolikou, automaticky užívají spoje všech násobílek. U 29 žáků (16 %) se neprojevila dovednost pamětného zvládnutí násobení v oboru do sta, ale při psaní výpočtu žáci nejspíše nepřičítali jednotky vyšším řádům. Tudíž nemají osvojen písemný algoritmus násobení, nemají jistotu v pamětném počítání a zvládnuté spoje pamětného násobení a sčítání.

2d) Vypočítej: $19\,209 : 8 = _ _ _ _ \text{ zb.}$

Správně vyřešilo 145 žáků

Chybně vyřešilo 40 žáků

Graf č.7 Vyhodnocení matematické úlohy č. 2 d)



zdroj: Didaktický test (leden 2012)

Písemný algoritmus dělení se liší od všech ostatních písemných algoritmů (sčítání, odčítání, násobení) tím, že jediný nezačíná od jednotek nejnižšího řádu, ale naopak pracujeme s jednotkami nejvyššími řádu dělence. V tomto smyslu pracujeme s řády jinak a je potřeba to zvládnout. Řešení daného příkladu naznačuje, že 145 žáků (78 %) prokázalo dovednost písemného dělení jednomístným dělitelem se zbytkem s aplikací osvojeného algoritmu. Úspěšní žáci mají upevněny osvojené poznatky i algoritmus písemného dělení se zbytkem. Čtyřicet neúspěšných žáků nezvládá dovednost písemného dělení vícemístného dělence jednociferným dělitelem se zbytkem. Tito žáci pravděpodobně nejsou schopni nalézt nejbližší nižší násobek zvoleného čísla k danému číslu, nemají tedy zautomatizované spoje malé násobilky. Anebo spoje malé násobilky mají plně zautomatizovány, ale nemají dostatečně osvojen algoritmus písemného dělení se zbytkem.

Vyhodnocení testové úlohy číslo 3

Úloha č.3 směřuje k výstupu – žák:

řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru:

- porozumí textu úlohy (rozlišuje informace důležité pro řešení úlohy);
- přiřadí úloze správné matematické vyjádření s využitím osvojených početních operací;
- přiřadí k zadanému jednoduchému matematickému vyjádření smysluplnou slovní úlohu (situaci ze života).

Zadání úlohy.

Přiřaď k jednotlivým úlohám odpovídající matematické vyjádření:

$36 + 4$

$36 - 4$

$36 \cdot 4$

$36 : 4$

Při řešení uvedené matematické úlohy nešlo o získání výsledku.

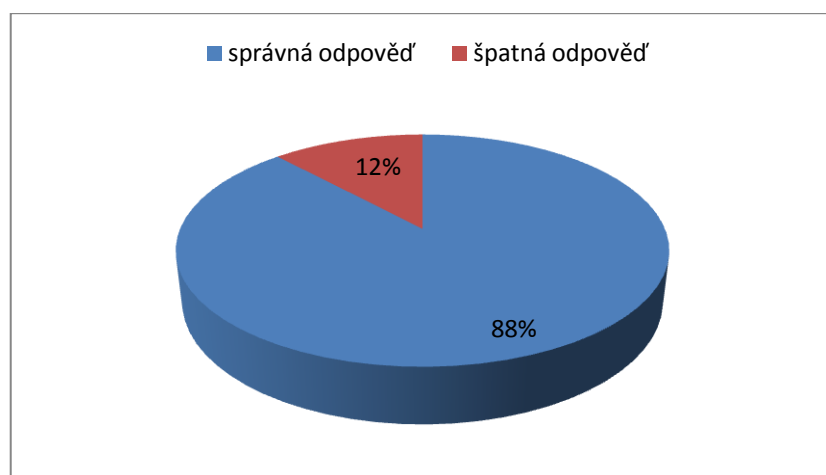
3a) Mamince je 36 let. Její dcera je čtyřikrát mladší. Kolik let je dceři?

Matematické vyjádření _____

Správně vyřešilo 163 žáků

Chybně vyřešilo 22 žáků

Graf č. 8 Vyhodnocení matematické úlohy 3 a)



zdroj: Didaktický test (leden 2012)

Slovní úloze odpovídá matematické vyjádření $36 : 4$. Jde o úlohu na dělení, zmenšení čísla několikrát („n krát méně“). Matematické vyjádření k úloze správně přiřadilo 163 (88 %) žáků. Můžeme se domnívat, že tito žáci mají osvojeny početní operace. Mají vybudovaný úsudek na řešení úloh pomocí vztahu „několikrát méně“ a operaci aktivně pochopili. Chybné matematické vyjádření k úloze přiřadilo 22 žáků (12 %). Můžeme si myslet, že úvahy těchto žáků souvisejí s nesprávným chápáním vztahů „o několik více/méně“ a „několikrát více/méně“. K chybě ovšem může také vést mechanické uplatnění.

3b) Pavel měl ve sbírce 36 modelů letadel. Od dědečka dostal 4 nové modely. Kolik modelů má nyní celkem?

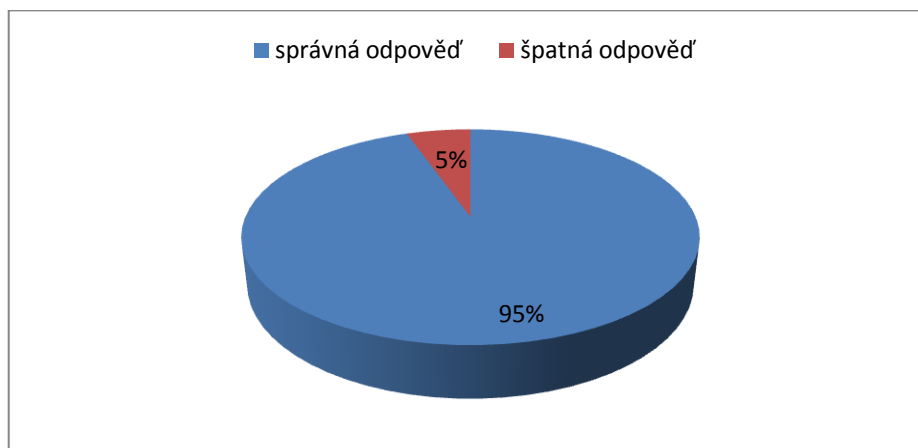
Matematické vyjádření _____

Poznámka k úloze 3a), 3b): záměrně jsou použita stejná čísla, aby nebylo možné přiřadit úlohu k matematickému vyjádření jen na základě shody číselných údajů.

Správně vyřešilo 175 žáků

Chybně vyřešilo 10 žáků

Graf č. 9 Vyhodnocení matematické úlohy 3b)



zdroj: Didaktický test (leden 2012)

Slovní úloze odpovídá matematické vyjádření $36 + 4$. Jde o úlohu na sčítání, na určení součtu. Matematické vyjádření k úloze správně přiřadilo 175 žáků (95 %). Naprostá většina těchto žáků pochopila jednoduchou slovní úlohu. Správný výsledek ve slovní úloze při vyjádření „Pavel dostal...“ získáme pomocí operace sčítání. Můžeme si myslet, že slovní úlohu, ve které se nevyskytuje porovnávání, žáci zvládnou vyřešit. U 10 chybných řešení se naskytá možnost, že žáci neporozuměli textu slovní úlohy, nepostihli význam ani matematickou stránku úlohy.

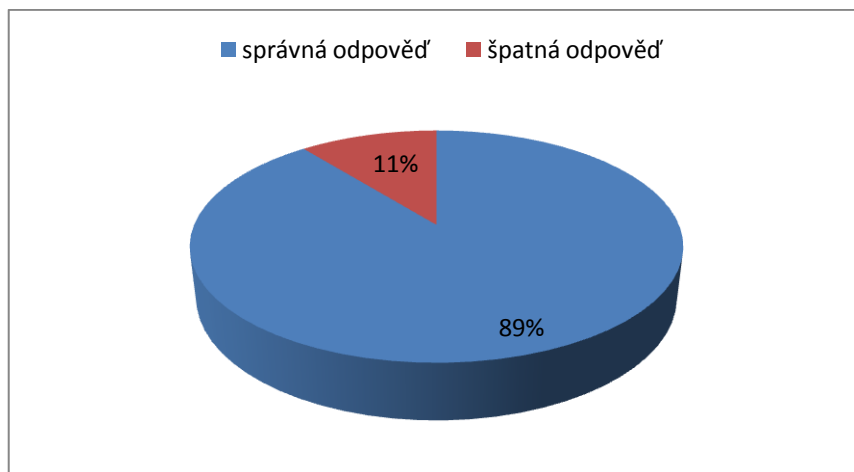
3c) V počítačové učebně bylo původně 36 počítačů. 4 počítače však již byly zastaralé a poruchové, proto byly z učebny odstraněny. Kolik počítačů v učebně zůstalo?

Matematické vyjádření _____

Správně vyřešilo 165 žáků

Chybně vyřešilo 20 žáků

Graf č. 10 Vyhodnocení matematické úlohy 3 c)



zdroj: Didaktický test (leden 2012)

Slovní úloze odpovídá matematické vyjádření $36 - 4$. Jde o úlohu na odčítání, na určení rozdílu. Matematické vyjádření k úloze správně přiřadilo 165 žáků (89%). Většina žáků jednoduchou slovní úlohu pochopila (počítače byly odstraněny, správný výsledek získáme pomocí operace odčítání). U 20 chybných řešení se naskýtá možnost, že žáci nepochopili matematickou stránku úlohy.

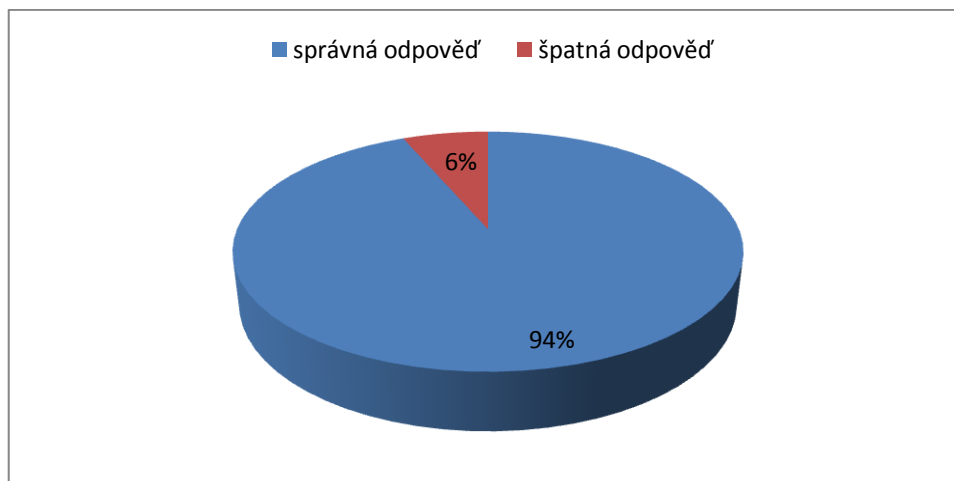
3d) Ve školní jídelně připravovala kuchařka 4 mísy s jablky. V každé míse bylo 36 jablek. Kolik jablek měla kuchařka celkem?

Matematické vyjádření _____

Správně vyřešilo 173 žáků

Chybně vyřešilo 12 žáků

Graf č. 11 Vyhodnocení matematické úlohy 3 d)



zdroj: Didaktický test (leden 2012)

Slovní úloze odpovídá matematické vyjádření 36×4 . Jde o úlohu na násobení, na určení součtu stejných sčítanců. Matematické vyjádření k úloze správně přiřadilo 173 (94 %) žáků, to je naprostá většina. Úspěšní žáci pochopili jednoduchou slovní úlohu na násobení. Dvanáct žáků k úloze chybně přiřadilo chybné matematické vyjádření. Neúspěšní žáci nejspíše neporozuměli textu úlohy.

Výše uvedené matematické úlohy žáci zvládli uspokojivě. V testu se objevily jak závažné – hrubé chyby (žák neovládá základní dovednosti a teoretické poznatky a nedovede jich použít), tak i nepodstatné – malé chyby (které vznikly z přehlédnutí, nepozornosti), kterých se žák dopustil. Většina žáků má bezpečně osvojeny základní matematické pojmy, chápe smysl operací.

Část B

Uvedené nestandardní matematické úlohy poskytují žákům příležitost využít osvojené vědomosti a dovednosti při řešení praktických a reálných problémů. Žáci mají za úkol řešit jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky. Žák musí řešit matematický problém, hledat a objevovat metodu řešení (heuristika), protože jeho dosavadní zkušenost řešení úlohy neumožňuje (Novák, 1993). Následující nestandardní úlohy jsem vybrala k ověření logického myšlení žáků. Pro žáky s poruchami učení může být řešení daných slovních úloh problematické z několika důvodů:

- pokud má dítě problémy s dyslexií, neumí si přečíst s porozuměním text slovní úlohy a nepostihne ani význam, ani matematickou stránku úlohy;
- pokud má dítě problémy s dysgrafií, není schopno zapsat zadání úlohy, ani příklad pro výpočet;
- pokud se u dítěte vyskytuje ideognostická dyskalkulie (podle Košče), není schopno postihnout vztahy mezi veličinami zadanými ve slovní úloze a mezi veličinami hledanými (Blažková, 2007).

Vyhodnocení testových úloh 4, 5, 6

Úloha č. 4, 5, 6 směřuje k výstupu – žák:

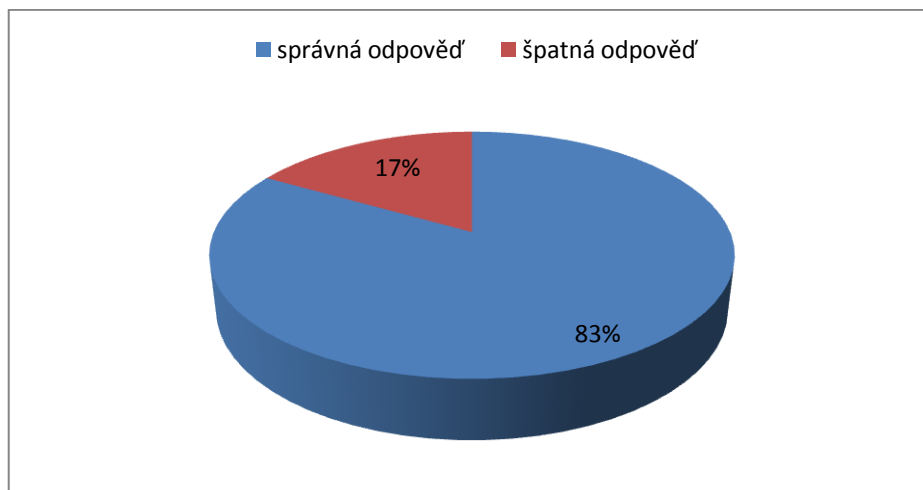
řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky:

- vyhledá v textu úlohy potřebné údaje a vztahy;
- volí vhodné postupy řešení;
- vyhodnotí výsledek úlohy.

4. Soňa čtyřikrát hodila kostkou ze hry „Člověče, nezlob se“. Celkový počet hozených bodů byl 23. Kolikrát padla šestka?

Správně vyřešilo 154 žáků

Chybně vyřešilo 31 žáků



zdroj: Didaktický test (leden 2012)

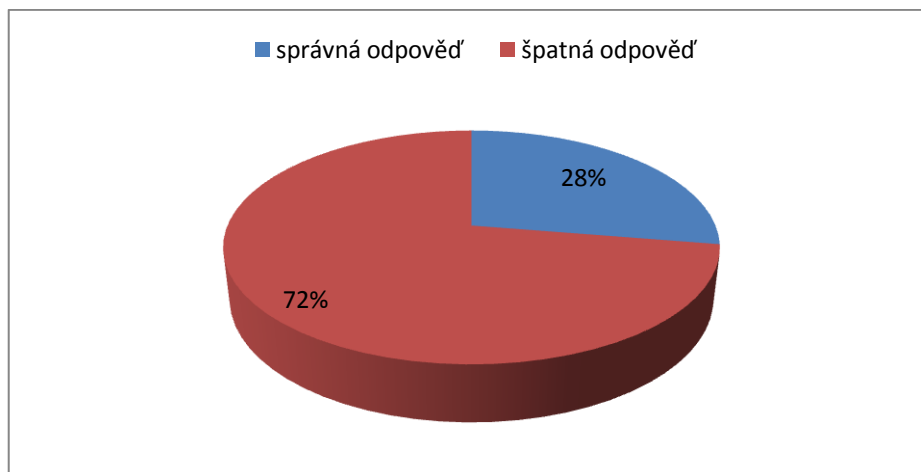
Nepřímou úlohu správně vyřešilo 154 žáků (83 %). Úspěšní žáci v řešení úlohy uplatnili praktické zkušenosti a správný úsudek, úlohu řešili dělením. 31 žáků (17 %) bylo při řešení úlohy neúspěšných. Můžeme se domnívat, že text úlohy svedl žáky k užití nesprávného početního výkonu násobení. Úloha vede k násobení (kolikrát padla šestka), ale řeší se dělením (počet bodů byl 23, kolikrát padla šestka – kolikrát se šestka vejde do 23?).

5. Podél jedné strany v parku je 9 světel. Vzdálenost mezi každými světly je 8 metrů. Jirka skákal po cestě od prvního světla k poslednímu. Kolik metrů skákal?

Správně vyřešilo 51 žáků

Chybně vyřešilo 134 žáků

Graf č. 13 Vyhodnocení slovní úlohy č. 5



zdroj: Didaktický test (leden 2012)

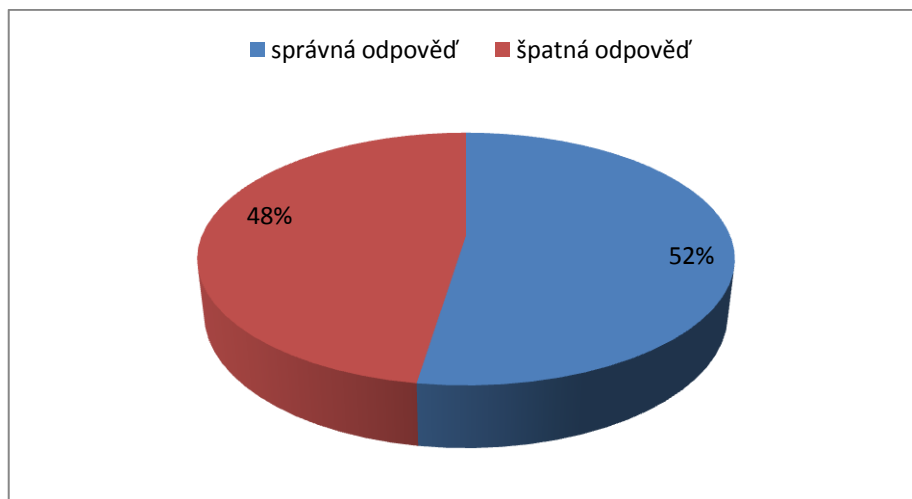
Úloha vyžaduje představu o situaci, k řešení úlohy je nutné grafické znázornění. Podmínky úlohy lze vhodně vyjádřit úsečkou. Ze znázornění plyne, že počet skoků je $8 \cdot 8 = 64$. Při řešení uvedené úlohy bylo 134 (72 %) žáků neúspěšných. Můžeme předpokládat, že jednoduchou praktickou slovní úlohu žáci správně zmatematizovali početní operací násobení, ale nesprávným zápisem početního příkladu $8 \cdot 9$. Náčrt úlohy by žáky navedl ke správnému řešení. Musíme ale také předpokládat, že výpočet správného zápisu početního příkladu $8 \cdot 8$ nemusel být správný. A to v případě, že žáci neovládají pamětné násobení v oboru do sta. Úlohu správně vyřešilo 51 žáků (28 %). Tito žáci prokázali schopnost řešit slovní úlohu s reálným námětem, která vyžaduje představivost a grafické znázornění.

6. Když cvičitel opic v cirkusu zapíská poprvé, opice vytvoří 6 řad po čtyřech opicích. Po druhém zapískání opice vytvoří 8 řad. Kolik opic je v každé řadě po druhém zapískání?

Správně vyřešilo 97 žáků

Chybně vyřešilo 88 žáků

Graf č. 14 Vyhodnocení matematické úlohy č. 6



zdroj: Didaktický test (leden 2012)

Úloha vyžaduje představu o situaci, stejně jako předešlá úloha. Grafické znázornění není nutné, ale k pochopení lze podmínky úlohy vhodně znázornit schématem. Jedná se o složenou úlohu, která vyžaduje k řešení dva různé početní výkony. Při prvním výpočtu na násobení úloha vede k určení součtu stejných sčítanců (6 řad po čtyřech opicích). Při druhém výpočtu se jedná o úlohu na dělení (rozdělování) na stejné části (je dán celek – 24 opic – a počet částí – 8 řad, má se určit velikost jedné části – kolik opic je v jedné řadě). Při řešení úlohy bylo 97 žáků (52 %) úspěšných. Tito žáci dokázali postihnout logickou strukturu úlohy. Správní řešitelé si nejprve zjistili potřebný údaj, který nebyl přímo v zadání úlohy uveden, a to kolik opic bylo celkem v cirkusu. Tento výpočet je vedl k určení počtu opic při vytvoření 8 řad, tedy k početnímu výkonu dělení. Úspěšní žáci prokázali, že umí využít osvojené matematické poznatky. Vyhledají v textu úlohy potřebné údaje a vztahy, volí vhodné postupy při řešení a vyhodnotí výsledek úlohy. Necelá polovina neúspěšných žáků (48 %) buď nemá čtenářské dovednosti a neporozuměli textu úlohy, nebo (což je pravděpodobnější), nezvládá použít získané znalosti a dovednosti. Úloha nebyla příliš složitá, ale pro žáky 5. ročníku obtížná.

Matematické úlohy v části B žáci zvládli méně dobře, výsledky uspokojivé nejsou. Při řešení nestandardních úloh se projevuje úroveň rozumových schopností žáka.

5.3 Výsledky výzkumu

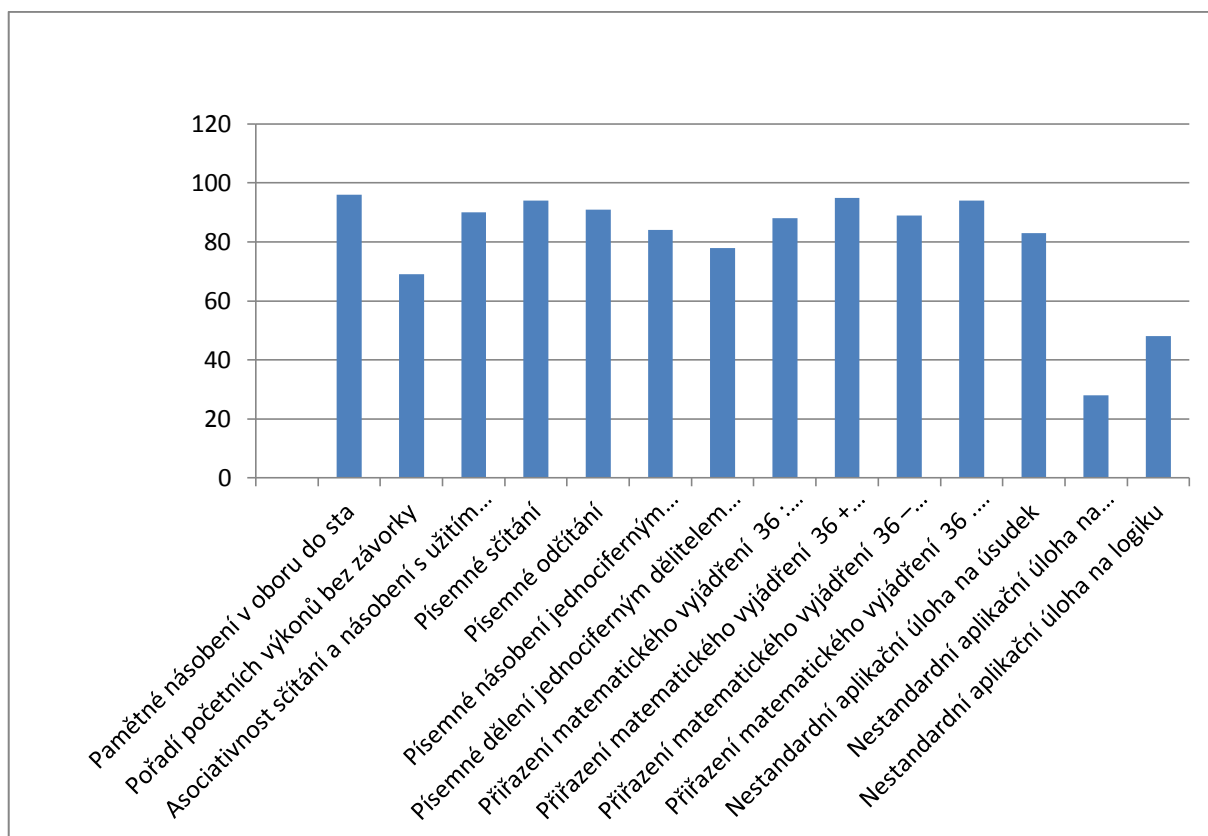
Při empirickém zjišťování matematických znalostí a dovedností byl při řešení matematických úloh, zaměřených na početní operaci násobení, zjištěn následující stav (výzkum leden 2012 u 185 žáků 5. ročníku zlínských škol).

Pro zpřehlednění celkového výzkumu uvádím tabulku, kde je u každé úlohy uvedena správná a nesprávná odpověď v absolutních číslech i v procentech, a graf.

Tabulka č. 1 Výzkumný soubor – vyhodnocení matematických úloh

Matematický obsah úlohy	Správně vyřešilo	%	Chybně vyřešilo	%
Pamětné násobení v oboru do sta	177	96	8	4
Pořadí početních výkonů bez závorky	127	69	58	31
Asociativnost sčítání a násobení s užitím závorek	167	90	18	10
Písemné sčítání	173	94	12	6
Písemné odčítání	168	91	17	9
Písemné násobení jednociferným činitelem	156	84	29	16
Písemné dělení jednociferným dělitelem se zb.	145	78	40	22
Přiřazení matematického vyjádření $36 : 4$ úloze	163	88	22	12
Přiřazení matematického vyjádření $36 + 4$ úloze	175	95	10	5
Přiřazení matematického vyjádření $36 - 4$ úloze	165	89	20	11
Přiřazení matematického vyjádření $36 \cdot 4$ úloze	173	94	12	6
Nestandardní aplikační úloha na úsudek	154	83	31	17
Nestandardní aplikační úloha na představivost	51	28	134	72
Nestandardní aplikační úloha na logiku	97	52	88	48

Graf. č.15 Výzkumný soubor - Vyhodnocení matematických úloh



zdroj: Didaktický test (leden 2012)

Z uvedených výsledků je zřejmé, že matematické znalosti a dovednosti u žáka 5. ročníku jsou, s malými nedostatky, dostatečně osvojeny a upevněny. Neúspěšnost se projevila při řešení nestandardních úloh. Nestandardním aplikačním úlohám a problémům není na školách věnována dostatečná pozornost, řešení úloh tohoto typu není pravidelně zařazováno do výuky matematiky.

5.4 Závěr výzkumu

Z celkového počtu 200 rozeslaných didaktických testů se jich vrátilo 185 vyplněných, což představuje 85%. Test obsahoval celkem šest matematických úloh. Z tematického okruhu Číslo a početní operace to byly tři úlohy s dílčími úkoly (část A), z tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy samostatné tři úlohy (část B). Dané matematické úlohy měli žáci vyřešit.

Po vyhodnocení testu jsem výsledky zpracovala do 14 grafů – každý graf představoval dílčí matematickou úlohu včetně zpracování výsledku. Výsledky v grafech jsou uváděny v procentech. Na základě výsledků průzkumu bylo potvrzeno očekávání, že

žák 5. ročníku zvládá výstupy v matematice zaměřené na násobení, formulované ve Standardech pro základní vzdělávání. Přesto se objevily případy v řešení úloh, nad kterými je nutno se zamyslet. Řešení matematické úlohy $8 + 8 \cdot _ = 40$ ukázalo, že žák řešení nevidí hned a zkouší dosazovat číslice bez provedení kontroly výpočtu, neupřednostňuje sčítání před násobením. Nesprávná odpověď u úlohy č. 5, kdy Jirka skákal od prvního světla k devátému po osmi metrech, napovídá, že velká část žáků řeší úlohu tím, že prostě vynásobí čísla v zadání, ať už úloha říká cokoli. Žáci si mohou úlohu znázornit graficky a barevně znázornit skoky ke světlu.

Při rozboru testu jsem se zaměřila zejména na chyby, kterých se žáci dopustili, a hledala jsem možné příčiny. Mám zkušenosti s tím, jak se učí násobení. Nestačí se násobilku naučit drilem. Test ukázal, že znalost násobilkových spojů nestačí k řešení předložených matematických úloh. Analýza řešení úloh ukázala nedostatky v matematických znalostech a dovednostech žáků. Při pamětném počítání úloh žáci nevyužívají komutativnost a asociativnost sčítání a násobení. Tato dovednost nesouvisí se znalostí násobilky, žáci neumějí tyto matematické úlohy řešit. V mnoha případech neproběhla kontrola řešení úlohy, žákům chybí zodpovědnost za vyřešenou úlohu. Většina žáků nerozumí algoritmu písemného násobení a písemného dělení.

Výsledky, které jsem získala prostřednictvím testu, považuji za podnětné při hledání nových, vhodnějších způsobů, jak pomoci žákům lépe zvládat početní operaci násobení. Tyto poznatky hodlám předložit a doporučit vedení na malotřídní základní škole Tečovice a předat vedení na plně organizovaných zlínských školách k rozšíření a zlepšení výsledků žáků v matematice.

ZÁVĚR

Předložená práce se zabývala zjišťováním výsledků vzdělávání v matematice u žáka pátého ročníku. Cílem diplomové práce bylo zjistit, jaká je úroveň osvojených vědomostí a dovedností očekávaných výstupů formulovaných ve Standardech pro základní vzdělávání v tematickém okruhu Číslo a početní operace se zaměřením na početní operaci násobení. Cílem bylo také potvrdit, zda žák pátého ročníku základní školy zvládá očekávané výstupy. K výzkumu bylo použito kvantitativní metody. Formou didaktického testu byli osloveni žáci pátých ročníků čtyř základních škol Zlínského kraje.

Výsledky vytvořeného nestandardizovaného didaktického testu ukázaly, že žák pátého ročníku základní školy zvládá výstupy formulované ve Standardech pro základní vzdělávání. Většina žáků efektivně používá násobilkou a rozumí algoritmům písemného sčítání, odčítání, násobení a dělení.

Mluvila jsem s učiteli, kteří test žákům zadávali, a zjistila jsem si jejich názory. Učitelé žáky přebírají až v páté třídě, kde se s výukou matematiky již „záznaky dělat nedají“. Při výuce násobilkou není odvedena poctivá práce v nižších ročnících. V páté třídě žáci násobí opakovaným sčítáním na prstech. Někteří žáci mají krásně nabíflované násobilkové spoje, ale neumí je využít při řešení matematických úloh. Potíže žákům dělá pamětné počítání do sta a písemné násobení dvojčiferným a trojčiferným činitelem, ve kterém se objevuje nula. Žáci neovládají základní matematickou terminologii. Žákům chybí soustředěnost a koncentrace na řešení matematických úloh. Někteří žáci přistupují k řešení příkladu laxně, proto nesprávně počítají, ale jiní, snaživí trpící dyslexií nebo dysgrafií mohou mít problémy s řešením slovních úloh. Ale dá se tomu zabránit vhodnou motivací, individuálním přístupem, použitím názoru, modelováním situací, pravidelným zařazováním aktivních činností, grafickým znázorňováním úloh a prací s nízkými čísly v úlohách, vhodným způsobem procvičování, využíváním praktických činností a vycházením ze zkušeností žáků, zařazováním matematických projektů s prezentací. Nutností je zlepšit domácí přípravu žáků na vyučování. Podstatnou roli ve výuce hraje osobnost učitele matematiky a jeho přístup ke vzdělávacímu procesu.

Tvorba diplomové práce mne velmi obohatila. Seznámila jsem se s teoretickými poznatky násobení, Rámcovým vzdělávacím programem a Standardy pro základní vzdělávání. Měla jsem možnost si ověřit tvorbu didaktického testu a výzkum šetření.

V podobě neformálního rozboru didaktického testu jsem získala řadu poznatků o aktuálnosti potřeby výuky násobení v didaktickém systému základní školy.

Matematiku používáme všichni, ať už si to uvědomujeme, či nikoliv. Stejně jako čtení a psaní, je porozumění matematice nezbytné pro každodenní život a práci. Matematické dovednosti nám pomáhají nakupovat s rozvahou, sjednat pojištění, modernizovat dům, porozumět statistickým údajům, určit vzdálenosti při cestování. Díky matematice rozvíjíme úsudek, myšlení a schopnosti řešení problémů. Tyto dovednosti se cení nejenom ve vědě, podnikání, obchodu a ve výrobě, ale i v jiných oblastech, jako jsou výtvarné umění, hudba a sport. Matematika má velký význam pro vzdělání každého člověka. Matematické vyučování klade důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům, pojmům a jejich vzájemným vztahům. Matematika je předmět, který rozvíjí logické a funkční myšlení, a to především v dětském věku. Matematika není jen souborem vzorců a pouček, ale je mocným nástrojem v poznávání světa, který žákům usnadní řešení úkolů, které je čekají v praktickém životě.

Cíl, který jsem si v této diplomové práci stanovila, se mně podařilo naplnit. Doufám, že moje práce bude přínosem pro všechny, kteří se zabývají problematikou vzdělávání, nejen pro učitele matematiky.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

BLAŽKOVÁ Růžena, Matoušková Květoslava, Vaňurová Milena. *Kapitoly z didaktiky matematiky (slovní úlohy, projekty)*. Brno: Masarykova univerzita Pedagogická fakulta, 2002. ISBN 80-210-3022-4.

BLAŽKOVÁ Růžena, VAŇUROVÁ Milena, MATOUŠKOVÁ Květoslava. *METODICKÝ NÁVOD k Matematice pro 3. ročník ZŠ a OŠ 1. díl*. Praha: Alter, 1995.

BLAŽKOVÁ, Růžena a kol. *Poruchy učení v matematice a možnosti jejich nápravy*. Brno: Paido, 2007. ISBN 80-85931-89-3.

BRENÍKOVÁ Markéta, MATUŠKOVÁ Lenka. *Hrátky s čísly aneb Moje první počítání*. Praha: Grada Publishing, a. s., 2004. ISBN 80-247-0206-1.

BYČKOVSKÝ Petr. *Základy měření výsledků výuky: Tvorba didaktického testu*. Dotisk. Praha: ČVUT, 1988.

COUFALOVÁ Jana, PĚCHOUČKOVÁ Šárka, HEJL Jiří, HERVERT Jaroslav. *Metodické pokyny k učebnicím a pracovním sešitům matematiky v druhém ročníku základní školy*. Praha: FORTUNA, 1997. ISBN-80-7168-465-1.

ČÍŽKOVÁ Miroslava. *Matematika pro 3. ročník základní školy. Metodická příručka*. Praha: SPN, 2009. ISBN 978-80-7235-433-7.

DIVÍŠEK Jiří, HOŠPESOVÁ Alena, KUŘINA František. *Svět čísel a tvarů. Metodická příručka k výuce matematiky v 2. ročníku základní a obecné školy*. Praha: Prométheus, 1998. ISBN- 80-7196-073-X.

EBEROVÁ Jindřiška. *Základy matematiky 2 pro studenty učitelství 1. stupně ZŠ*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2003. ISBN 80-244-0759-0.

EBEROVÁ Jindřiška. *Základy matematiky 4. Texty k distančnímu vzdělávání v rámci kombinovaného studia*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2005. ISBN 80-244-1070-2.

FUCHS Eduard, HOŠPESOVÁ Alena, LIŠKOVÁ Hana. *Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu Základní vzdělávání*. Praha: Prométheus, 2006. ISBN 80-7196-326-7.

HEJNÝ Milan, KUŘINA František. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál, 2009. Pedagogická praxe. ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ Milan a kol. *Matematické a přírodovědné úlohy pro první stupeň základního vzdělávání. Náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2011. ISBN 978-80-211-0611-6.

CHRÁSKA Miroslav. *Metody pedagogického výzkumu. Základy kvantitativního výzkumu*. Praha: Grada Publishing, a. s., 2007. ISBN 978-80-247-1369-4.

JUSTOVÁ Jaroslava. *MATEMATIKA pro 5. ročník základních škol. Učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Praha: ALTER, 2009. ISBN 978-80-7245-154-8.

KALHOUS Zdeněk, OBST Otto. *Školní didaktika*. Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7178-253-X.

KÁROVÁ Věra. *Počítání bez obav*. Praha: Portál, 1996. ISBN 80-7178-050-02.

KASLOVÁ Michaela, FIALOVÁ Dana, ČÍŽKOVÁ Romana, KORDA Jan. *Sbírka úloh z matematiky pro 4. a 5. ročník základní školy*. Praha: SPN, 2002. ISBN 80-7235-169-9.

KITTLER Josef. *METODICKÁ PŘÍRUČKA k učebnici matematiky a pracovním listům pro 2. ročník ZŠ*. Praha: ALBRA, 1994. ISBN-80-85823-11-X.

KUŘINA František a kolektiv. *Matematika a porozumění světu: setkání s matematikou po základní škole*. Praha: Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1743-7.

MOLNÁR Josef, MIKULENKOVÁ Hana. *Zajímavá matematika (nejen) pro páťáky*. Olomouc: Prodos, 1997. ISBN 80-85806-68-01.

NOVÁK Bohumil, MOLNÁR Josef. *Matematika pro 5. ročník. Příručka pro učitele*. Olomouc: Prodos, 1998. ISBN 80-7230-014-8.

NOVÁK Bohumil. *Matematika III: Několik kapitol z didaktiky matematiky*. Olomouc: Univerzita Palackého, Pedagogická fakulta, 1999. ISBN 80-7067-979-4

NOVÁK Bohumil. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky 1* (pro studium učitelství 1. stupně ZŠ). Olomouc: Vydavatelství UP, 2003. Skripta (Univerzita Palackého). ISBN 80-244-0691-8.

NOVÁK Bohumil. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky* (pro studium učitelství pro 1. stupeň ZŠ). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2005. ISBN 80-244-1068-0.

ODVÁRKO Oldřich, KADLEČEK Jiří. *Knižka pro učitele ke školním vzdělávacím programům na druhém stupni ZŠ Matematika a její aplikace*. Praha: Prométheus, 2006. ISBN 80-7196-333-X.

PRŮCHA, Jan, WALTEROVÁ Eliška, MAREŠ Jiří. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál, 1995. ISBN 80-7178-029-4.

ROSECKÁ Zdena. *Malá didaktika činnostního učení*. Brno: Tvořivá škola, 2007. ISBN 80-903397-3-5.

ROSECKÁ Zdena, KOSTEČKOVÁ Marie. *Metodický průvodce učebnicí Matematika 3 pro 3. ročník*. Brno: Nová škola, 2005. ISBN-80-7289-072-7.

STAUDKOVÁ Hana a kol. *Průvodce učebnicemi matematiky ALTER pro 1. ročník základních škol*. Praha: ALTER, 2009. ISBN-978-80-7245-203-3.

ZELINKOVÁ Olga. *Pedagogická diagnostika a individuální vzdělávací program*. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-544-X.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007. 126 s. [cit. 2012-06-12]. Dostupné z WWW:<http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf>.

<http://www.vuppraha.cz/ramcove-vzdelavaci-programy>

<http://www.vuppraha.cz/dalsi-minimetodika-tentokrat-k-vyuzivani-obrazovych-materialu>

<http://www.msmt.cz/vzdelavani/standardy-pro-zakladni-vzdelavani-1>

<http://www.skolaonline.cz/Home/tabid/41/articleType/ArticleView/articleId/2227/MSMT-blize-specifikovalo-standardy-pro-zaklad>

<http://www.msmt.cz/vzdelavani>

[class.pedf.cuni.cz/**jirotkova**/didmat1/3.Tři základní operace07\[260309...](http://class.pedf.cuni.cz/jirotkova/didmat1/3.Tři%20základní%20operace07[260309...)

.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

$[x, y]$	uspořádaná dvojice x, y
A, B	množiny A, B
$A \neq B$	množina A se nerovná množině B
$A \times B$	kartézský součin množiny A a množiny B
$x \in A$	prvek x patří (náleží) množině A
$\leq$	je menší nebo rovno než
$\geq$	je větší nebo rovno než

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK

MŠMT	Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy
PISA	Programme for International Student Assessment (Program pro mezinárodní hodnocení patnáctiletých žáků v oblasti čtenářské, matematické a přírodovědné gramotnosti)
RVP ZV	Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání
ŠVP	Školní vzdělávací program
TIMMS	Trends in Mathematics and Science Study (Mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání)
VÚP	Výzkumný ústav pedagogický
ZŠ	Základní škola

SEZNAM TABULEK

Tabulka č. 1 Výzkumný soubor – vyhodnocení matematických úloh

SEZNAM GRAFŮ

- Graf č. 1: Vyhodnocení matematické úlohy č. 1a)
Graf č. 2: Vyhodnocení matematické úlohy č. 1b)
Graf č. 3: Vyhodnocení matematické úlohy č. 1c)
Graf č. 4: Vyhodnocení matematické úlohy č. 2a)
Graf č. 5: Vyhodnocení matematické úlohy č. 2b)
Graf č. 6: Vyhodnocení matematické úlohy č. 2c)
Graf č. 7: Vyhodnocení matematické úlohy č. 2d)
Graf č. 8: Vyhodnocení matematické úlohy č. 3a)
Graf č. 9: Vyhodnocení matematické úlohy č. 3b)
Graf č. 10: Vyhodnocení matematické úlohy č. 3c)
Graf č. 11: Vyhodnocení matematické úlohy č. 3d)
Graf č. 12: Vyhodnocení matematické úlohy č. 4
Graf č. 13: Vyhodnocení matematické úlohy č. 5
Graf č. 14: Vyhodnocení matematické úlohy č. 6
Graf č. 15: Výzkumný soubor – vyhodnocení matematických úloh

SEZNAM PŘÍLOH

PŘÍLOHA č. 1	Didaktický test z matematiky pro žáky 5. ročníku
PŘÍLOHA č. 2	Autorské řešení didaktického testu z matematiky
PŘÍLOHA č. 3	Nestandardizovaný didaktický test z matematiky pro žáky 5. ročníku
PŘÍLOHA č. 4	Autorské řešení nestandardizovaného didaktického testu z matematiky pro žáky 5. ročníku

1. Násob zpaměti:

$9 \cdot 8 =$	$8 \cdot 6 =$	$4 \cdot 8 =$	$8 \cdot 3 =$
$8 \cdot 7 =$	$6 \cdot 7 =$	$3 \cdot 9 =$	$5 \cdot 9 =$
$6 \cdot 9 =$	$7 \cdot 9 =$	$8 \cdot 4 =$	$6 \cdot 3 =$
$5 \cdot 9 =$	$9 \cdot 9 =$	$9 \cdot 4 =$	$4 \cdot 7 =$

16 b.

2. Jsou dána čísla 6 a 3. Vypočítej jejich:

a) rozdíl vynásobený 10

b) součin vydělený třemi

2 b.

3. Násob zpaměti:

$40 \cdot 10 =$	$5 \cdot 100 =$	$1 \cdot 1\,000 =$
$10 \cdot 6 =$	$100 \cdot 30 =$	$1\,000 \cdot 90 =$

6 b.

4. Napiš číslo, které je:

a) 23 krát větší než 8

b) 79 krát větší než 5

2 b.

5. Jana měla číslo 9 dělit třemi, ale omylem ho třemi vynásobila.

Kolikrát je její výsledek větší než ten správný?

2 b.

6. Vypočítej příklady písemného násobení.

$$\begin{array}{r} 219 \\ \cdot 8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\,456 \\ \cdot 45 \\ \hline \end{array}$$

2 b.

7. Vyřeš slovní úlohu.

Jarda si koupil temperové barvy a štětec. Temperové barvy stály 60 korun, což bylo desetkrát více než štětec. **Kolik Jarda utratil? Kolik mu zůstalo se stokoruny?**

3 b.

8. Děľ písemně a proved' zkoušku:

$$654 : 4 = \qquad \text{Zk:} \qquad 316\,504 : 9 = \qquad \text{Zk:}$$

4 b.

9. Načrtni, vypočítej, zapiš a odpověz.

Václavské náměstí v Praze má tvar obdélníku.

Délka je 750 metrů a šířka je 60 metrů.

Kolik metrů ujde člověk, když toto náměstí obejde dvakrát?

4 b.

PŘÍLOHA 2 – Autorské řešení didaktického testu z matematiky

1. Násob zpaměti:

$$\begin{array}{llll}
 9 \cdot 8 = 72 & 8 \cdot 6 = 48 & 4 \cdot 8 = 32 & 8 \cdot 3 = 24 \\
 8 \cdot 7 = 56 & 6 \cdot 7 = 42 & 3 \cdot 9 = 27 & 5 \cdot 9 = 45 \\
 6 \cdot 9 = 73 & 7 \cdot 9 = 63 & 8 \cdot 4 = 32 & 6 \cdot 3 = 18 \\
 5 \cdot 9 = 45 & 9 \cdot 9 = 81 & 9 \cdot 4 = 36 & 4 \cdot 7 = 28
 \end{array}$$

16 b.

2. Jsou dána čísla 6 a 3. Vypočítej jejich:

a) rozdíl vynásobený 10

$$(6 - 3) \cdot 10 = 3 \cdot 10 = 30$$

rozdíl je výsledek početní operace odčítání

b) součin vydělený třemi

$$(6 \cdot 3) : 3 = 18 : 3 = 6$$

součin je výsledek početní operace násobení

2b.

3. Násob zpaměti:

$$\begin{array}{lll}
 40 \cdot 10 = 400 & 5 \cdot 100 = 500 & 1 \cdot 1\,000 = 1\,000 \\
 10 \cdot 6 = 60 & 100 \cdot 30 = 3\,000 & 1\,000 \cdot 90 = 90\,000
 \end{array}$$

6 b.

4. Napiš číslo, které je:

a) 23 krát větší než 8

b) 79 krát větší než 5

2 b.

$$23 \cdot 8 = 184$$

$$79 \cdot 5 = 395$$

5. Jana měla číslo 9 dělit třemi, ale omylem ho třemi vynásobila.

Kolikrát je její výsledek větší než ten správný?

$$9 : 3 = 3 \qquad 9 \cdot 3 = 27$$

$$27 : 3 = 9$$

Janin výsledek je devětkrát větší než ten správný.

2 b.

6. Vypočítej příklady písemného násobení.

$$\begin{array}{r}
 \underline{. 8} \\
 1\ 752
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \underline{. 45} \\
 42\ 280 \\
 \underline{338\ 24} \\
 380\ 520
 \end{array}$$

2 b.

7. Vyřeš slovní úlohu.

Jarda si koupil temperové barvy a štětec. Temperové barvy stály 60 korun, což bylo desetkrát více než štětec. **Kolik Jarda utratil? Kolik mu zůstalo se stokoruny?**

$$60 : 10 = 6 \qquad \text{šest korun stál štětec}$$

$$60 + 6 = 66,- \text{ Kč}$$

Jarda utratil 66,- Kč.

$$100 - (60 + 6) = 100 - 66 = 34$$

Jardovi ze stokoruny zůstalo 34,- Kč.

3 b.

8. Děj písemně a proved' zkoušku:

$$\begin{array}{rcll}
 654 : 4 = 163 \text{ zb.2} & \text{Zk: } 163 & 316\ 504 : 9 = 35\ 167 \text{ zb.1} & \text{Zk: } 35\ 167 \\
 \underline{. 4} & & \underline{. 9} & \\
 25 & 652 & 46 & 316\ 503 \\
 14 & & 1\ 5 & \\
 2 & & 60 & \\
 & 652 + 2 = 654 & 64 & \\
 & & 1 & 316\ 503 + 1 = 316\ 504
 \end{array}$$

4 b.

9. Načrtni, vypočítej, zapiš a odpověz.

Václavské náměstí v Praze má **tvár obdélníku**.

Délka je 750 metrů a šířka je 60 metrů.

Kolik metrů ujde člověk, když toto náměstí obejde dvakrát?

$$o = 2 \cdot (750 + 60) = 2 \cdot 810 = 1\,620 \text{ m} \quad 1\,620 \cdot 2 = 3\,240 \text{ m}$$

3 b.

PŘÍLOHA 3 – Nestandardizovaný didaktický test z matematiky pro žáky 5. třídy

Část A – Číslo a početní operace

1. Doplň chybějící čísla:

a) $8 \cdot _ = 40$

b) $8 + 8 \cdot _ = 40$

c) $(8 + 4) \cdot 5 = _$

2. Vypočítej:

a) 929	b) 437	c) 328
<u> 28 </u>	<u> -154 </u>	<u> . 7 </u>
---	---	- ---

d) $19\,209 : 8 = _ _ _ _ \text{ zb.}$

3. Přiřaď k jednotlivým úlohám odpovídající matematické vyjádření:

$36 + 4$

$36 - 4$

$36 \cdot 4$

$36 : 4$

- a) Mamince je 36 let. Její dcera je čtyřikrát mladší. Kolik let je dceři?

Matematické vyjádření _____

- b) Pavel měl ve sbírce 36 modelů letadel. Od dědečka dostal 4 nové modely.

Kolik modelů má nyní celkem?

Matematické vyjádření _____

- c) V počítačové učebně bylo původně 36 počítačů. 4 počítače však již byly zastaralé a poruchové, proto byly z učebny odstraněny. Kolik počítačů v učebně zůstalo?

Matematické vyjádření _____

d) Ve školní jídelně připravovala kuchařka 4 mísy s jablky. V každé míse bylo 36 jablek.

Kolik jablek měla kuchařka celkem?

Matematické vyjádření _____

Část B – Nestandardní aplikační úlohy a problémy

4. Soňa čtyřikrát hodila kostkou ze hry „Člověče, nezlob se“. Celkový počet hozených bodů byl 23. Kolikrát padla šestka?

Šestka padla ____ krát.

5. Vyřeš úlohu.

Podél jedné strany v parku je 9 světel. Vzdálenost mezi každými světly je 8 metrů.

Jirka skákal po cestě od prvního světla k poslednímu. Kolik metrů skákal?

6. Vyřeš úlohu.

Když cvičitel opic v cirkusu zapíská poprvé, opice vytvoří 6 řad po čtyřech opicích. Po druhém zapískání opice vytvoří 8 řad. Kolik opic je v každé řadě po druhém zapískání?

PŘÍLOHA 4 – Autorské řešení testu

Nestandardizovaný didaktický test z matematiky pro žáky 5. třídy

Část A – Číslo a početní operace

1. Dopln chybějící čísla:

a) $8 \cdot \underline{5} = 40$

b) $8 + 8 \cdot \underline{4} = 40$

c) $(8 + 4) \cdot 5 = \underline{60}$

2. Vypočítej:

a) $\begin{array}{r} 929 \\ + 28 \\ \hline 957 \end{array}$	b) $\begin{array}{r} 437 \\ - 154 \\ \hline 283 \end{array}$	c) $\begin{array}{r} 328 \\ \cdot 7 \\ \hline 2\,296 \end{array}$
---	--	---

d) $19\,209 : 8 = \underline{2\,401}$ zb. 1

3 2

00

9

1

3. Přiřaď k jednotlivým úlohám odpovídající matematické vyjádření:

$36 + 4$

$36 - 4$

$36 \cdot 4$

$36 : 4$

a) Mamince je 36 let. Její dcera je čtyřikrát mladší. Kolik let je dceři?

Matematické vyjádření $36 : 4$

b) Pavel měl ve sbírce 36 modelů letadel. Od dědečka dostal 4 nové modely.

Kolik modelů má nyní celkem?

Matematické vyjádření $36 + 4$

c) V počítačové učebně bylo původně 36 počítačů. 4 počítače však již byly zastaralé a poruchové, proto byly z učebny odstraněny. Kolik počítačů v učebně zůstalo?

Matematické vyjádření $36 - 4$

d) Ve školní jídelně připravovala kuchařka 4 mísy s jablky. V každé míse bylo 36 jablek.

Kolik jablek měla kuchařka celkem?

Matematické vyjádření $36 \cdot 4$

Část B – Nestandardní aplikační úlohy a problémy

4. Soňa čtyřikrát hodila kostkou ze hry „Člověče, nezlob se“. Celkový počet hozených bodů

byl 23. Kolikrát padla šestka?

Šestka padla 3 krát.

5. Vyřeš úlohu.

Podél jedné strany v parku je 9 světel. Vzdálenost mezi každými světly je 8 metrů.

Jirka skákal po cestě od prvního světla k poslednímu. Kolik metrů skákal?

$$8 \cdot 8 = 64$$

Jirka skákal 64 metrů.

6. Vyřeš úlohu.

Když cvičitel opic v cirkusu zapíská poprvé, opice vytvoří 6 řad po čtyřech opicích. Po druhém zapískání opice vytvoří 8 řad. Kolik opic je v každé řadě po druhém zapískání?

$$(6 \cdot 4) : 8 = 24 : 8 = 3$$

Po druhém zapískání jsou v každé řadě 3 opice.

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Marta Miklová
Katedra:	Matematiky
Vedoucí práce:	Doc. PhDr. Bohumil Novák, CSc.
Rok obhajoby:	2012

Název práce:	POJEM NÁSOBENÍ V DIDAKTICKÉM SYSTÉMU ZÁKLADNÍ ŠKOLY
Název v angličtině:	THE TERM „MULTIPLICATION“ IN ELEMENTARY SCHOOL DIDACTIC SYSTEM
Anotace práce:	Diplomová práce je zaměřena na početní operaci násobení v didaktickém systému základní školy. Teoretická část analyzuje tematický okruh „Číslo a početní operace“ se zaměřením na operaci násobení v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání a věnuje pozornost konstrukci nestandardizovanému didaktickému testu. Na základě teoretických znalostí z této oblasti je násobení aplikováno na žáka 5. ročníku za pomoci nestandardizovaného didaktického testu, který obsahuje matematické úlohy vztahující se k tomuto tématu.
Klíčová slova:	Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, Standardy Matematiky, Matematika a její aplikace, binární operace, početní operace násobení, vlastnosti násobení, metodika výuky násobení, nestandardizovaný didaktický test
Anotace v angličtině:	The thesis is focused on the arithmetic operation of multiplication in didaktickém of primary school. The theoretical part analyzes the Number count and thematic range of operations, focusing on the operation of

	multiplication in the framework training programme for basic education and pays attention to the construction of the nestandardizovanému didaktickému test. On the basis of theoretical knowledge in this area is to multiply 5 pupil applied to class using the unstandardized test that contains didactical mathematical tasks pertaining to this topic.
Klíčová slova v angličtině:	Framework Educational Programme for Basic Education, Standards Mathematics, Mathematics and its applications, binary operations, arithmetic operations multiplication, multiplication properties, methods of teaching multiplication, math problems, unstandardized didactic test
Přílohy vázané v práci:	Příloha č. 1 Didaktický test Příloha č. 2 Autorské řešení didaktického testu Příloha č. 3 Nestandardizovaný didaktický test Příloha č. 4 Autorské řešení nestandardizovaného didaktického testu
Rozsah práce:	
Jazyk práce:	CZ

