

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Hra Kalaha



Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Tomáš Füst, Ph.D.
Rok odevzdání: 2017

Vypracovala:
Bc. Ludmila Škubalová
AME, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma hra Kalaha vypracovala samostatně pod vedením pana Tomáše Fürsta a citovala jsem všechny použité zdroje.

V Olomouci dne

.....
podpis

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Bc. Ludmila Škubalová

Název práce: Hra Kalaha

Typ práce: Diplomová práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Tomáš Fürst, Ph. D.

Rok obhajoby: 2017

Abstrakt: Diplomová práce se zabývá hrou Kalaha. Kromě zmíněné hry se na začátku práce věnuji oblasti teorie her. Popisuji základní matematické modely z teorie her a to hry v normálním a rozvinutém tvaru s konkrétními příklady. V druhé kapitole se soustředím na hru Kalaha, která patří mezi Mancala hry. Na její původ a pravidla. V praktické části analyzuji vymyšlené strategie. Zkoumám jejich sílu a pravděpodobnost výher.

Klíčová slova: Kalaha, Mancala, teorie her, výplatní funkce, hra v normálním tvaru, optimální strategie, hry v rozšířeném tvaru, strom hry, podmíněná pravděpodobnost

Počet stran: 67

Počet příloh: 2

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Bc. Ludmila Škubalová

Title: Kalaha Game

Type of thesis: Master's thesis

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Tomáš Fürst, Ph. D.

The year of presentation: 2017

Abstract: The Thesis deals with the Kalaha game. In addition, the first part of the work is focused on the field of game theory. Basic mathematical models of game theory are described, specifically games in the normal and extensive form with detailed examples. The second chapter deals with the game Kalaha, which belongs into Mancala-class games. The Thesis describes its origin and its rules. In the practical part, several simple strategies are analyzed. The work analyzes their strength and the probability of winning the game.

Key words: Kalaha, Mancala, game theory, game, normal-form game, optimal strategy, extensive-form game, game tree, conditional probability

Number of pages: 67

Number of appendices: 2

Language: Czech

Poděkování

Ráda bych touto cestou vyjádřila poděkování svému vedoucímu diplomové práce panu Tomáši Fürstovi, za obětavou spolupráci, trpělivost, za jeho cenné rady, připomínky i za čas, který mi věnoval během konzultací. Rovněž bych chtěla poděkovat své rodině, příteli a přátelům, kteří mě při studiu podporovali.

Obsah

Úvod	8
1 Teorie her	9
1.1 Historie.....	9
1.2 Základní pojmy	13
1.3 Hra v normálním tvaru	14
1.3.1 Kvalifikace her	15
1.3.2 Hry s konstantním součtem	18
1.3.3 Hry s nulovým součtem	19
1.3.4 Maticové hry	20
1.5 Hry v rozšířeném tvaru	22
1.5.1 Prohledávání.....	25
2 Kalaha	27
2.1 Mancala hry	27
2.2 Historie Mancala her	28
2.3 Kalaha	30
2.3.1 Herní potřeby	32
2.3.2 Příprava hry	32
2.3.3 Pravidla	32
2.3.4 Konec hry	34
2.3.5 Poznatky	36
3 Analýza	38
3.1 Algoritmy	38
3.1.1 Strategie 0.....	39
3.1.2 Strategie 1.....	39
3.1.3 Strategie 2.....	40
3.1.4 Strategie 3.....	41
3.1.5 Strategie 4.....	42
3.1.6 Strategie 5.....	43
3.2 Notace	46
3.4 PC vs. PC	48

3.5	Já vs. PC.....	52
3.6	Délka hry.....	54
3.6.1	Histogramy.....	55
Závěr		58
Literatura		60
Přílohy		63
1. 1	Základní algoritmus tahu.....	63
1.2.	Histogramy	66

Úvod

Diplomovou prací navazuji na svoji bakalářskou práci, která měla název Salónní hry, kam z pohledu teorie her hra Kalaha patří. Hra Kalaha je strategická desková hra pro dva hráče. Důkladněji se zde věnuji oblasti teorie her a více prozkoumávám hru Kalaha z pohledu strategií a možného návodu na vítězství.

Diplomová práce s názvem *Hra Kalaha* je rozdělena do tří kapitol. V úvodní kapitole vysvětluji základním pojmům z teorie her a uvádím dva nejzákladnější matematické modely her (hra v normálním tvaru a hra v rozvinutém tvaru). Pro lepší pochopení jsou v práci uvedené konkrétní příklady. V druhé části se věnuji méně známým hrám Mancala, a konkrétně hře Kalaha. Tu zde popisuji a zajímám se o její zařazení, původ, historii a pravidla. Třetí část, je mé diplomové práci stěžejní. V programu Matlab jsme naprogramovali základní kostru hry. Dále jsme se zaměřili na možné herní strategie a zodpovězení následujících otázek: Je vyšší pravděpodobnost, že hru vyhraje začínající hráč? Má délka hry něco společného s chytrostí hráčů (sofistikovaností strategie)? Budou mé hrací schopnosti lepší než námi nejlepší naprogramovaná strategie? Co se děje s histogramy, které popisují délky her pro danou strategii? Z bakalářské práce zde využívám vymyšlenou notaci hry, která slouží jako přehledný postup hry.

Diplomovou prací bych chtěla čtenáře seznámit s hrou Kalaha, která má kořeny v 10. století našeho letopočtu. A vyzkoušet si své programovací schopnosti, při programování základní verze hry a jejich strategií.

1 Teorie her

1.1 Historie

Již v dílech antických filozofů najdeme problémy, které spadají do oblasti teorie her. Takovým příkladem je situace v díle *Republica* od **Platóna**, v které se zamýšlí nad tím, jak by se měl racionální voják zachovat, když stojí na bitevním poli a očekává útok nepřítele. Zabývá se strategií, jakou by měl zvolit a jaký užitek z toho bude mít.

Společenské hry jsou další oblastí, ve které se objevují prvky z teorie her. Ve středověku a na počátku novověku přispěla populární hra v kostky k vytvoření pojmu *matematické pravděpodobnosti* [15]. Tento pojem je klíčem k pochopení přírodního a společenského dění, a je také konstrukčním prvkem řešení mnoha konfliktních situací. Zejména moderní fyzikální disciplíny jako je statistická fyzika a kvantová teorie se bez pojmu pravděpodobnost vůbec neobejdou. Oproti původním představám (které například sdílel i Albert Einstein) se zdá, že role náhody a její popis skrze pravděpodobnost je pro porozumění světa zcela klíčový. Bez pojmu pravděpodobnosti by se žádný klíčový pojem z teorie her neobešel, příkladem může být pojem smíšená strategie.

Za první matematiky, kteří se zajímali o teorii her, jsou považováni **B. Pascal** (1623–1662) a **P. de Fermat** (1601–1665). S prvním známým řešením hry ve smíšených strategiích přišel britský velvyslanec **James Waldegrave** (1684–1741). [18] Ve svém dopise z roku 1713 popisuje strategii ke karetní hře *Le Her*. Tento dopis je považován za první zmínku o teorii her. Výsledky rozborů některých salonních her (dáma, šachy, poker, go, apod.), pomocí dosud objevených matematických prostředků, využil k získání přehledů o strategických možnostech hráčů. Počátkem 20. století se o teorii her zajímal německý matematik **Ernest Zermelo** (1871–1953), který se věnoval převážně teorii množin a z teorie her především rozboru šachů. Dále francouzský matematik a politik **Emile Borel** (1871–1956), který byl uznávanou autoritou v teorii pravděpodobnosti. Ten se jako první pokusil o matematizaci pojmu strategická hra. Dokázal existenci smíšených strategií a zavedl pojem odpovídající dnešnímu pojmu *ryzí strategie*.

Ve stejném století se někteří matematici věnovali i hledáním optimálních postupů, tj. takových, které maximalizují zisk, resp. minimalizují ztráty. Za prvního teoretika

v oblasti ekonomie a matematické teorie her je považován francouzský filosof a matematik, profesor analýzy a matematiky **Antoine Augustin Cournot** (1801–1877). Jako první v roce 1838 zavedl do ekonomické analýzy funkce a pravděpodobnost. Odvodil pravidlo pro nabídku a poptávku v závislosti na ceně a vytvořil pro ně grafy. Analyzoval situaci duopolu (chování a stanovování cen dvou výrobců), kde předpokládá obdobné náklady, znalost poptávky, homogennost produktu, a tím definoval *Cournotův model* (který je později upravován), resp. Cournotovo řešení duopolu. Moderně může být analyzována i aparátem teorie her a chápána jako případ Nashovy rovnováhy. Staví na tom, že každá z firem maximalizujících zisk předpokládá, že konkurent nezmění množství produkce, pokud ona sama toto změní. Firmy se rozhodují současně a „nepoučí se“. Cournot se pokouší taktéž o zobecnění modelového příkladu a porovnává množství, ceny i zisky s podmínkami monopolu a dokonalé konkurence. [26]

Americký, původem maďarský, matematik **John von Neumann** (1903–1957), je považován za zakladatele teorie her. Kromě matematiky se zabýval ekonomikou, fyzikou, kybernetikou a mnoha dalšími disciplínami. Teorie her je brán jako samostatný obor až od roku 1928, kdy se Neumann celosvětově proslavil prací, ve které vymezil pojmy teorie her a provedl důkaz tzv. základní věty maticových her (maticové tvrzení, které též nazýváme větou o minimaxu). Spolu s **Oskarem Morgensternem** (1902–1977) matematicky rozebírali záměrně vyvolané konfliktní situace při salónních hrách a všimli si shodné struktury konfliktních situací vznikajících při těchto hrách a při ekonomickém nebo vojenském rozhodování. Svou práci završil v roce 1944 publikováním první rozsáhlejší knihy z teorie her *Teorie her a ekonomické chování* (originální název: *Theory of Game and Economic Behavior*) [30]. Toto dílo obsahuje základní pojmy a doplňuje tehdejší výsledky v teorii her. Dále uvádí metodu pro nalezení vzájemně konzistentních řešení pro hry dvou osob s nulovým součtem. V této době se teorie her zabývala především na kooperativní hry. Analyzovaly se strategie pro skupiny jednotlivců za předpokladu, že mezi sebou mohou uzavírat dohody o vhodných strategiích. Kniha se stala základním dílem („biblí“) teorie her nejen svým obsahem, ale i rozsahem. Svazem má více jak šest set stran textu. A prvně se zde matematická teorie her objevuje jako samostatná vědní disciplína aplikované matematiky. [22]

Od té doby na téma teorie her vyšly stovky knih a tisíce odborných statí. V roce 1971 vychází první mezinárodní časopis *International Journal Of Game Theory* odrážející

vývoj teorie her. U nás je to především časopis *Kybernetika* od roku 1965. Vychází v angličtině 6x do roka, v tištěné i elektronické podobě. Další významný časopis vznikl v roce 1989, a to *Games and Economic Behavior* nebo časopis *International Game Theory Review*. Tento akademický časopis je publikován čtvrtletně a obsahuje články a studie týkající se teorií a aplikací teorie her v sociálně-ekonomických, politických kontextů a dalších souvisejících oblastí. Dalším časopisem je časopis *International Journal of Mathematics*, který pokrývá všechna odvětví matematiky, výpočtů a výzkumů. Komentuje nejnovější výzkum a vývoj v oblasti matematiky. Dále vychází mezinárodní časopis *Game Theory and Algebra*, který své články věnuje novým pokrokům ve všech odvětvích matematiky, teorie her, aplikované algebry a geometrie, včetně teorie pole a polynomu. Zajímavým časopisem je také *Public Choice*, ten studuje průsečík mezi ekonomikou a politikou.

Americký matematik, profesor na Princetonské univerzitě **John Forbes Nash Jr.** (1928–2015) vytvořil kritérium známé jako *Nashova rovnováha*. Toto kritérium se dá aplikovat na více druhů her než výše zmíněná kooperativní hra. Rovnováha je dostatečně obecná, proto umožňuje i analýzu nekooperativních her (hry, v kterých hráči nesmí spolupracovat). Tento americký matematik a **John Harsanyi** z Berkeley (1920–2000) a **Reinhard Selten** (1930–2016) v roce 1994 získali Nobelovu cenu za ekonomii za výzkum teorie her. Konkrétně za průkopnickou analýzu rovnováhy v teorii nekooperativních her.

V roce 2005 Nobelovu cenu za ekonomii získali americký ekonom **Thomas Schelling** (1921–2016) a izraelský matematik **Robert J. Aumann** (*1930). Ocenění dostali za objasnění konfliktu a spolupráce na základě analýzy teorie her. Vysvětlili proč některé skupiny jednotlivců, organizací a zemí uspějí se spoluprací, ale jiné řeší situaci konfliktem.

Nobelovu cenu za ekonomii v roce 2012 obdrželi američtí ekonomové **Alvin E. Roth** (*1951) a **Lloyd Shapley** (1923–2016), kteří objasnili teorii stabilizačních tržních alokací a praktické návrhy optimálních trhů. Jejich výzkumem přispěli k poznatkům o tom, jak porovnávat rozličné ekonomické proměnné, jako například studenty se školami, lékaře s nemocnicemi či dárce orgánů s pacienty. [20]

Mezi nejznámější aplikační oblasti teorie her patří ekonomie a vojenství. Ale uplatňuje se však i v takových oborech, jako je politologie, sociologie, psychologie, teorie dopravy, telekomunikace, počítačové systémy, právo nebo biologie.

V **politologii** se teorie her využívá například k modelování situací s volbami, lobbismem, fungování zákonodárných sborů, mezinárodní vztahy nebo vyjednávání. Řada moderních politologických monografií považuje teorii her za nedílnou součást politologie, za nástroj poskytující přesnou terminologii a metody. Často bývají modely teorie her zjednodušené. Tím umožní lépe než cokoliv jiného popsat a pochopit základní principy. Teorie her nemůže vždy poskytnout optimální řešení daného problému, ale je však silným nástrojem pro analýzu situace a rozhodovatele, který ji používá. Dochází tak k racionálnímu uvažování bez emocí.

Pozoruhodné a nejslibnější jsou aplikace teorie her v **biologii**. Po roce 1973 kdy J. Maynad Smith a G. R. Price publikovali svou práci [27], došlo k expanzi biologických aplikací v oblasti evoluční biologie. Čím méně vyvinutá je schopnost organismu přemýšlet, tím lépe modely fungují. Oproti společenským vědám, kde předpoklad racionálních rozhodovatelů by často činil značný problém, v evoluční biologii nejsou potíže s emocemi nebo iracionalitou.

Generaci za generací se živé organismy, řízené geny, utkávají ve vzájemných soutěžích. Geny, které svým nositelům zvolily nejlepší strategii a umožnily jim přežití a rozmnožování, se dále šíří a postupně se „učí“. Výsledkem je, že se jejich nositelé chovají tak, jakoby vědomě hledali optimální strategii, jež by jim předepsala teorie her. Místo výpočtu však geny k rovnovážné strategii dospěly postupným přizpůsobováním se a přírodním výběrem. [7]

Příkladem z **ekonomie**, může být, rozhodující význam ukazatele zisku podniku jako kritéria jeho hospodaření. Zákazník se snaží nakoupit potřebné zboží co nejlevněji, podnik se snaží vyrábět toto zboží, které mu zabezpečí co největší zisk. Máme proti sobě dva účastníky „hry“, kteří mají často odlišné zájmy. [8]

Když se podíváme na **právo**, tedy konkrétně na soudní proces, tak zde také proti sobě stojí dvě strany – obhajoba a žaloba. Obhajoba se snaží shromáždit co nejvíce důkazů o vině obžalovaného. Cílem žaloby je tyto důkazy vyvracet, poukazovat na jejich

nedostatky a nepřesnosti, nalézt co nejvíce protidůkazů, dokázat nevinu obžalovaného nebo poukázat na polehčující okolnosti.

Teorie her se zabývá studiem konfliktních rozhodovacích situací s jedním nebo více účastníky. Mohou to být osoby, firmy, instituce ale také i náhodné mechanismy (příroda). Každý rozhodující se má k dispozici svou množinu rozhodnutí, ze které může konkrétní rozhodnutí vybrat. Výsledek (či užitek z výsledku) závisí nejen na jejich vlastním rozhodnutí, ale také na rozhodnutí ostatních účastníků.

1.2 Základní pojmy

Na začátek definujeme některé základní pojmy z Teorie her, bez kterých se neobejdeme a s kterými se v práci setkáme.

- **hra** je každá rozhodovací konfliktní situace;
- **hráčem** se rozumí účastník hry, který svým chováním může ovlivnit její výsledek;
- **strategie** je předpis, kterým je určena jedna alternativa chování hráče při hře;
- **optimální strategie** je zvolené rozhodnutí, které je pro něj nejvýhodnější;
- **prostor strategií** je množina rozhodnutí;
- **výplata hráče** značí kvantitativně vyjádřený výsledek hry, posuzovaný z hlediska uvažovaného hráče (kladná hodnota výplaty - užitek, záporná hodnota výplaty - prohra). Předpis pro zisk v závislosti na zvolené strategii se nazývá výplatní funkce hráče. [3]

Teorie her provádí analýzu konfliktních rozhodovacích situací pomocí specifických matematických modelů. Dva nejzákladnější modely teorie her jsou hra v normálním tvaru (např. hra Kámen, nůžky, papír) a hra v rozvinutém tvaru (např. šachy, dáma). U her v normálním tvaru, každý hráč volí jeden jediný tah, který oba provedou současně. Oproti hram v rozvinutém tvaru, kde hráči provádí více tahů a v tazích se střídají, sem patří i naše hra Kalaha. Jelikož hry v normálním tvaru mají důležité místo v teorii her, ráda bych čtenáře seznámila i s těmito hrami a jejich matematickými modely.

1.3 Hra v normálním tvaru

Hra v normálním tvaru popisuje situace, v kterých hráči provedou jediné rozhodnutí a to všichni současně. Hra tímto jediným tahem končí a hráči si rozdělí výhru.

Matematický model rozhodovací situace – hra v normálním tvaru – je určena množinou:

$$\{P, X_1, \dots, X_n, M_1, \dots, M_n\}$$

- $P = \{1, 2, \dots, n\}$ je **množina hráčů**, jinými slovy seznam účastníků konfliktní situace. V této práci budeme vždy předpokládat hry o dvou hráčích, které budeme označovat hráč 1 a hráč 2.
- $X_i = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$, $i = 1, \dots, n$, je **množina prostorů strategie**. Kde X_i označuje prostor strategií i -tého hráče. Psaním indexů se vyhneme, jelikož budeme vždy předpokládat hry dvou hráčů. Prostor strategie hráče 1 budeme označovat X a prostor strategie hráče 2 Y . Konkrétní strategie budeme značit x pro hráče 1 a y pro hráče 2.
- $M_i = \{F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $i = 1, \dots, n$, je **množina výplatních funkcí** všech hráčů. Musíme stanovit výhry hráčů pro všechny možné kombinace strategií. Výplatní funkce hráčů jsou proto definovány na kartézském součinu prostorů strategií. Tyto funkce M_i mohou nabývat buď skalárních, nebo vektorových hodnot. U hry dvou hráčů budeme výplatní funkci hráče 1 označovat $F_1(x, y)$ a výplatní funkci hráče 2 $F_2(x, y)$.

$$M_i = X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$$

Pro představu si můžeme hru v normálním tvaru ukázat na této rozhodovací situaci: i -tý hráč ($i=1, \dots, N$) zvolí nějakou strategii $x_i \in X_i$. Potom hráči své volby zveřejní a hráč i dostane částku $M_i(x_1, \dots, x_N)$, kde $x_1, \dots, x_N$ jsou strategie zvolené hráči. Je-li $M_i(x_1, \dots, x_N) < 0$, rozumí se, že hráč i zaplatí (prohraje) částku $|M_i(x_1, \dots, x_N)|$. [4]

Hra dvou hráčů v normálním tvaru by vypadala takto:

$$\{P = (1, 2), X, Y, F_1(x, y), F_2(x, y)\}$$

Konkrétním příkladem hry dvou hráčů v normálním tvaru může být dále popsaná hra. Jelikož jde o hru, kterou hrají dva hráči, bude proto množina hráčů dvouprvková, $P = \{1, 2\}$. Jejich množiny strategií jsou intervaly od 0 do 1, což znamená, že množina strategií prvního hráče je $X = < 0, 1 >$ a množina druhého hráče je $Y = < 0, 1 >$. Výplatní funkce prvního hráče je $F_1(x, y) = x + y$ a pro druhého hráče je výplatní funkce ve tvaru $F_2(x, y) = -(x + y)$. Hra se hraje tak, že hráč 1 zvolí číslo z uzavřeného intervalu $< 0, 1 >$, hráč 2 zvolí nezávisle na něm číslo ze stejného intervalu. Po zveřejnění voleb zaplatí druhý hráč prvnímu částku rovnou součtu zvolených čísel.

$$\{P = \{1, 2\}, X = < 0, 1 >, Y = < 0, 1 >, F_1(x, y) = x + y, F_2(x, y) = -(x + y)\}$$

Jsou-li oba hráči inteligentní, bude pro oba zřejmě nejlépe, zvolí-li první hráč číslo 1 a druhý hráč číslo 0. [16]

1.3.1 Kvalifikace her

Existuje mnoho typů her. Proto, aby bylo možné, dojít k nějakému konkrétnímu návodu na účelné rozhodování, je pro nás nutné si nejdříve specifikovat základní typy her. [9]

Klasifikace her podle počtu hráčů:

- *hry se 2 hráči* (minimální počet hráčů), kdy $n = 2$. Touto hrou je i naše hra Kalaha;
- *n hráčů* (možno vytvářet koalice), kde $n > 2$. U her s možností tvoření koalic, hráči řeší, s kým a proti komu utvořit koalici. V koalicích se hráči dohadují o strategiích, které ve hře použijí v zájmu posílení své pozice;
- $n = \infty$. Jde o případy, kdy není možné specifikovat přesný počet hráčů. Takové případy vznikají zejména pro matematické modely ekonomických systémů. Vystupuje zde velký počet rozhodujících (např. kupujících na trhu, trh v podmínkách dokonalé konkurence). Výsledek se většinou získává limitním přechodem $n \rightarrow \infty$.

Klasifikace her podle povahy hráče:

- *inteligentní hráč* (racionální účastník) logicky analyzuje hru a volí strategii, tak aby maximalizoval svou výhru. Situace, kde vystupují dva inteligentní hráči, se nazývá konflikt;
- *neinteligentní hráč* (indiferentní účastník, náhodný mechanismus) volí svá rozhodnutí podle nějakého rozložení pravděpodobností na prostoru svých strategií, aniž by přitom přihlížel k výhře. Přesto svými náhodnými volbami může ovlivňovat důsledky rozhodnutí inteligentních hráčů;
- *p-inteligentní hráč*, $p \in \langle 0, 1 \rangle$. Jde o hráče, u kterého během hry pozorujeme, že nevolí strategie odpovídající inteligentnímu účastníkovi i když víme, že se jedná o inteligentního hráče a záleží mu na výši výhry. Tato odchylka od optimální strategie mohla být způsobena například z časové tísně, kdy hráči musí zvolit strategii, aniž by měli dostatek času k analýze hry.

Klasifikace her podle součtu výplat hráčů, o který se hráči po skončení hry rozdělí:

- *hry s konstantním součtem* jsou hry, ve kterých součet výplatních funkcí je pevně určen a není tedy ovlivněn strategiemi, které hráči zvolí

$$\sum_{i=1}^n M_i(x_1, \dots, x_n) = K, \forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$$

K je tedy konstanta nezávislá na volbě strategií $x_1, \dots, x_n$. Jde o hry, ve kterých se rozděluje pevně zvolená částka K , kterou nelze volbou strategií zvýšit ani snížit;

- *hry s nekonstantním součtem* jsou hry, ve kterých součet výplat závisí na zvolených strategiích hráčů. U těchto her je možné částku, o kterou se hráči dělí, ovlivnit volbou strategie. Důležitou starostí hráčů v těchto hrách je, aby částka na dělení výher byla pokud možno co největší. Příkladem hry s nekonstantním součtem je např. Sazka nebo Sportka.

$$\sum_{i=1}^n M_i(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

- *hry s nulovým součtem* je zvláštní případ hry s konstantním součtem, kdy součet výplat je roven nule, tzn. $K = 0$. Pro hry dvou hráčů s nulovým součtem to znamená, že co jeden hráč vyhraje, to musí druhý hráč prohrát. Většina salónních her jsou hry s nulovým součtem, kdy hráči vloží nějakou částku do banku a tuto

částku si následně rozdělí dle výsledku hry. V takovém případě je součet výplat všech hráčů nulový.

Příklad 1.1

Hráč A má padesátikorunu a pět desetikorun, hráč B má jednu padesátikorunu a jednu desetikorunu. Z těchto mincí si každý hráč udělá dvě hromádky tak, že na téže hromádce jsou jen mince stejné hodnoty. Hráč A má tedy na jedné hromádce pět desetikorun, tuto hromádku označíme 5x10, a na druhé, kterou označíme 1x50, má jednu padesátikorunu. Hromádky mincí hráče B označíme 1x10 a 1x50. Hráči spolu hrají podle následujících pravidel. Na znamení oba hráči současně položí jednu ze svých hromádek na stůl. Jsou-li vyložené mince stejné hodnoty, vyhrává hráč A, absolutní hodnotu rozdílu hodnot vyložených hromádek mincí. Jsou-li vyložené mince různé hodnoty, vyhrává hráč B, také absolutní hodnotu rozdílu hodnot hromádek.

Například: Hráč A vyloží 1x50 a hráč B 1x10. Mince vyložené při tomto tahu jsou z různé hodnoty, takže vyhrává hráč B $1x50 - 1x10 = 40$ Kč. Těchto 40 Kč mu vyplátí hráč A, který 40 Kč prohrává. Výhry, čili výplaty jednotlivých hráčů znázorňuje následující tabulka Tab. 1.1, v které jsou uvedeny všechny možnosti, které mohou při hře nastat.

TAH		VÝPLATY		SOUČET VÝPLAT
hráče A	hráče B	hráče A	hráče B	
1x50	1x50	0	0	0
1x50	1x10	-40	40	0
5x10	1x10	40	-40	0
5x10	1x50	0	0	0

Tab. 1.1 Hra s nulovým součtem

Z posledního sloupce tabulky je zřejmé, že součet výplat je ve všech případech roven nule. [24]

Klasifikace her podle prostoru strategií:

- *konečné hry*, pro které platí, že prostory strategií $X_1, \dots, X_n$ všech hráčů jsou množiny s konečným počtem prvků. Je to jakákoliv salónní hra (např. dáma, prostor strategií je omezen na kameny ve hře a jejich možné pohyby) či desková hra;

- *nekonečné hry* mají všechny prostory strategií $X_1, \dots, X_n$ s nekonečně mnoha prvky. Aplikace nekonečných her jsou hry, ve kterých hráči hledají nejvhodnější okamžik k provedení určité akce. Řada námětů pro tento typ her je vojenského charakteru.

Klasifikace her podle informace o dosavadních tazích:

- *hry s úplnou informací* znamená, že hráči znají množiny hráčů, prostorů strategií i výplatní funkce. Příkladem této hry jsou šachy. Víme, že hru hrají dva hráči, známe, jaké tahy figurkou může protihráč zvolit a co ztratím, či získám zvoleným tahem;
- *hry s neúplnou informací* jsou hry (např. karetní hry), kde hráči všechny zmíněné informace nemají. Sice víme, kolik hráčů karetní hru hraje, ale nevíme, jaké karty v ruce protihráči drží a jaký výsledek pro nás bude mít zvolená karta.

Klasifikace her podle zájmů hráčů:

- *hry antagonické* což jsou hry, kdy zájmy hráčů jsou v přímém protikladu. Tzn., že jeden hráč ztrácí právě to, co druhý získává;
- *hry neantagonistické* jsou takové hry, v kterých každý z hráčů sleduje své vlastní zájmy. Tyto zájmy však nemusí být v přímém protikladu. Neantagonistické hry dále členíme na hry *kooperativní*, hráči mají možnost uzavírat před volbou strategií závazné smlouvy o tom, jakou volbu učiní (mohou utvářet koalice) a hry *nekooperativní*, kde hráči tuto možnost nemají.

Ukážeme si některé modely her, které hrají dva inteligentní hráči, jejichž zájmy jsou v přímém protikladné. Protikladnost, je v tom, že výhra jednoho hráče jde vždy zcela na úkor druhého hráče. Tyto matematické modely her v normálním tvaru jsou hra s konstantním součtem, hra s nulovým součtem a její speciální hry, maticové hry.

1.3.2 Hry s konstantním součtem

Matematický model:

$$\{P = (1, 2), X, Y, F_1, F_2, F_1(x, y) + F_2(x, y) = K, \forall x \in X, y \in Y\}$$

Jedná se o matematický model antagonistického konfliktu hry v normálním tvaru. Pokud uvažujeme hry dvou hráčů pro libovolné strategie $x \in X, y \in Y$, pak pro výplatní

funkce hráčů platí $F_1(x, y) + F_2(x, y) = K$, kde K je libovolné reálné číslo. Hra se hraje tak, že oba hráči zvolí své strategie nezávisle na sobě a volby hráčů jsou zveřejněny současně. Tedy hru v normálním tvaru popisují situace, v níž hráči provedou jediné rozhodnutí, a to všichni naráz.

V každé hře je pro nás důležité najít optimální řešení. K tomu nám pomůže následující definice o rovnovážných strategiích, které tvoří optimální řešení.

Definice 1.1 (rovnovážná strategie) Strategie prvního hráče $\bar{x} \in X$ se nazývá rovnovážná, pokud k ní existuje strategie druhého hráče $\bar{y} \in Y$ taková, že platí

$$\forall x \in X, y \in Y: F_1(x, \bar{y}) \leq F_1(\bar{x}, \bar{y}), F_2(\bar{x}, \bar{y}) \geq F_2(\bar{x}, y)$$

$\bar{y} \in Y$ se potom nazývá rovnovážná strategie druhého hráče.

Každá dvojice rovnovážných strategií $(\bar{x}, \bar{y})$ se nazývá *optimální řešení*. [29]

Nerovnosti v Definici 1.1 znamenají to, že pokud se některý z hráčů nebude držet optimální řešení, zatímco jeho soupeř ano, jeho výhra se sníží, nebo v lepším případě zůstane stejná. Čili ten kdo se odchýlí od optimální strategie, si nemůže polepšit. Takto definované optimální řešení představují tzv. *Nashovu rovnováhu*.

1.3.3 Hry s nulovým součtem

Jde o zvláštní případ hry s konstantním součtem, pro které platí $K = 0$. Ve hrách s nulovým součtem o dvou hráčích pro výplatní funkce hráčů platí:

$$F_1(x, y) = -F_2(x, y).$$

Tedy výhra druhého hráče, je výhrou prvního hráče s opačným znaménkem.

Optimální řešení hry s nulovým součtem můžeme napsat ve tvaru

$$F_1(x, \bar{y}) \leq F_1(\bar{x}, \bar{y}) \leq F_1(\bar{x}, y).$$

Číslo $F_1(\bar{x}, \bar{y})$, z dvojice rovnovážných strategií $(\bar{x}, \bar{y})$ s vlastnostmi požadovaných v Definici 1.1, se nazývá *cena hry*. [29]

Antagonické hry, ve kterých pro oba hráče existuje pouze konečný počet přístupných strategií, patří ke klasickým hrám. Matematickým modelem těchto her je tzv. maticová hra. Definice maticových her vychází z toho, že při konečném počtu strategií můžeme strategie hry očíslovat čísly $1, 2, \dots, m$ (popř. $1, 2, \dots, n$ pro druhého hráče).

1.3.4 Maticové hry

$$\{P = (1, 2), X = \{1, \dots, m\}, Y = \{1, \dots, n\}, F(i, j) = a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$$

Konečnou hru s nulovým součtem obvykle zapisujeme pomocí matice $\mathbf{A}$, kterou nazýváme *výplatní matice*, kde:

- s_{11} značí první strategie *hráče 1*; To znamená, že pokud hráč 1 zvolí první strategii, zaměříme se na výplaty v prvním řádku výplatní matice $\mathbf{A}$. Konkrétní výplata z toho řádku bude záležet na výběru strategie hráče 2;
- s_{21} je označení pro první strategii *hráče 2*. Ve výplatní matici se jedná o výplaty z prvního sloupce;
- výplata a_{ij} označuje výběr i -tého řádku matice $\mathbf{A}$, což odpovídá výběru i -té strategie hráčem 1. A index j značí výběr j -tého sloupce matice $\mathbf{A}$, který odpovídá výběru j -té strategie hráčem 2;
- a_{mn} je výplata hráče 1 při strategii s_{1m} , kterou mu vyplatí hráč 2 při zvolené strategii s_{2n} .

$$\begin{array}{c} \text{Hráč 2} \\ s_{21} \quad s_{22} \quad \dots \quad s_{2n} \\ \text{Hráč 1} \quad \mathbf{A} = \begin{matrix} s_{11} \\ s_{12} \\ \vdots \\ s_{1m} \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

V maticových hrách z této matice jednoduše najdeme optimální strategie hráčů. Pokud v matici $\mathbf{A}$ existuje prvek, který je současně nejmenší ve svém řádku a největší ve svém sloupci (cílem hráče 2 je minimalizovat výhru hráče 1, neboť výhra 2 hráče je $-a_{ij}$), pak je tento prvek nazýván *sedlový prvek*. Hodnota sedlového prvku a_{ij} je nazývána

výplatou hry (cenou hry). Číslo řádku, v němž se prvek nachází, udává optimální strategii pro hráče 1 a číslo sloupce optimální strategii pro hráče 2. [14]

Při hledání sedlového prvku mohou nastat tři případy:

- matice má jeden sedlový prvek;
- matice má více sedlových prvků (hodnoty prvků jsou si rovny a všechny určují alternativní optimální strategie);
- matice nemá žádný sedlový prvek (optimální strategie se nám tímto postupem nepodařila najít).

Vrátíme se k Příkladu 1.1, pro kterou by výplatní matice vypadala takto:

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{B} \\ & \begin{array}{c} 1 \times 50 \quad 1 \times 10 \end{array} \\ \mathbf{A} \quad \begin{array}{c} 1 \times 50 \\ 5 \times 10 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -40 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Hodnoty v matici určují výplaty hráče **A**. Řádek v matici je vybrán, dle zvolené strategie hráče **A**, a sloupec matice, který určuje strategii zvolenou hráčem **B**. Z výplatní matice je vidět, že vedenou hru nemá smysl hrát. Jelikož hráč **A** bude asi neustále volit strategii 5×10 , která mu zaručuje, že nemůže prohrát. A kdyby hráč **B** zahrál 1×10 , přinesla by mu výhru 40 Kč. Zato pro hráče **B** je nejvýhodnější hrát pouze strategii 1×50 , která mu zaručuje, že nemůže prohrát. Pomocí strategie 1×10 by mohl sice vyhrát 40 Kč, ale jen pokud by hráč **A** hrál strategií 1×50 , což se od něj nedá očekávat, neboť tato strategie mu v nejlepším případě přinese výhru. [24]

Příklad 1.2

Najděte sedlový prvek této maticové hry:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & \textcircled{4} & 5 \\ -3 & 5 & 3 & 7 \\ 7 & 8 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Cena hry je 4. Optimální strategie hráče 1 je strategie $i = 1$ a optimální strategie hráče 2 je strategie $j = 3$. Sedlový prvek ($=a_{13}$) je v matici zvýrazněn tučně a v kroužku.

Příklad 1.3

Najděte sedlový prvek této maticové hry:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hra s touto maticí nemá sedlový prvek, a tedy nemá ani řešení tímto postupem.

Doposud jsme se zabývali hrami, v kterých měl každý hráč jen jeden svůj tah, který oba hráči uskutečnili nezávisle jeden na druhém. Nyní rozšíříme poznatky na hry se složitější strukturou.

Budeme zkoumat hry dvou hráčů s nulovým součtem, kteří mají větší počet tahů. Půjde o konfliktní situace, kde lze tahy popsat jako posloupnost, v níž hráči reagují na předchozí tahy protihráčů. Mezi takové konflikty patří mnohé salónní hry, jako například dáma, šachy, apod., pro něž je typické střídání tahů mezi „bílým“ a „černým“ hráčem. Takové konflikty nazýváme hrami v rozvinutém tvaru, které jsou též známy pod názvem hry v explicitním tvaru či tahové hry.

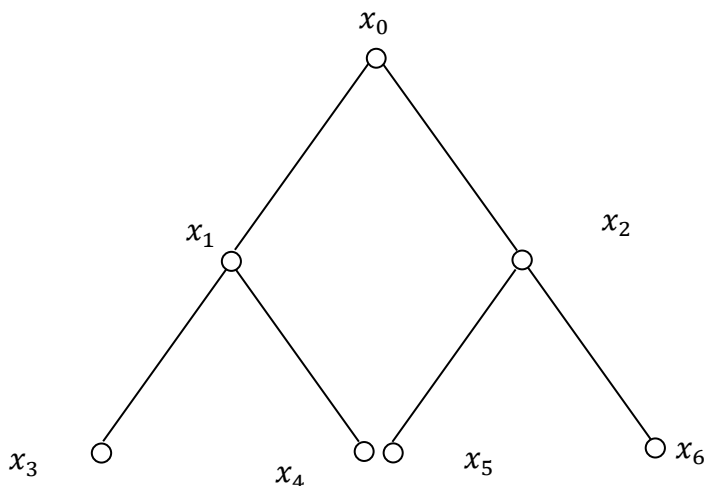
1.5 Hry v rozšířeném tvaru

V konfliktních situacích popisovaných hrami v normálním tvaru, jsme předpokládali, že hráči realizují své strategie v jednom časovém okamžiku. Nyní se však budeme zabývat modelováním konfliktů, jež jsou charakterizovány řadou po sobě jdoucích tahů (rozhodnutí). Tímto typem konfliktu je i naše hra Kalaha.

Prostředek k převedení hry zadané ve formě herních pravidel na hru v normálním tvaru je popis hry v rozvinutém tvaru. Hra v rozvinutém tvaru je určena **herními pravidly**. V pravidlech hry musí být uvedeno jak **výsledek hry** (výplata hráčů) závisí na jednání hráčů ve hře. Jeden konkrétní průběh hry se nazývá **partie hry**. **Tahem** se nazývá každá změna vyvolaná rozhodnutím hráče v průběhu partie. Následkem každého tahu se nastaví určitá **pozice hry**. Každá hra se hraje o nějakou vyčíslenou hodnotu, tj. například o peníze, o zápalky nebo o body. [15]

Základem u her v rozvinutém tvaru je znázornění možných tahů a pozic v průběhu hry definovaných herními pravidly pomocí grafu, tzv. *stromu hry*, viz Obr 1.1. Zobrazuje

všechny situace, které mohou ve hře nastat. Grafem se rozumí útvar, který je ve smyslu teorie grafů popsán jako množina hran a uzlů, a případně dalšími doplňujícími údaji. Všechny základní pojmy z teorie grafů jsem uvedla ve své bakalářské práci [28]. Zde jen popíši graf stromu hry a zaměřím se na různé typy stromů her.



Obr. 1.1 Graf Strom

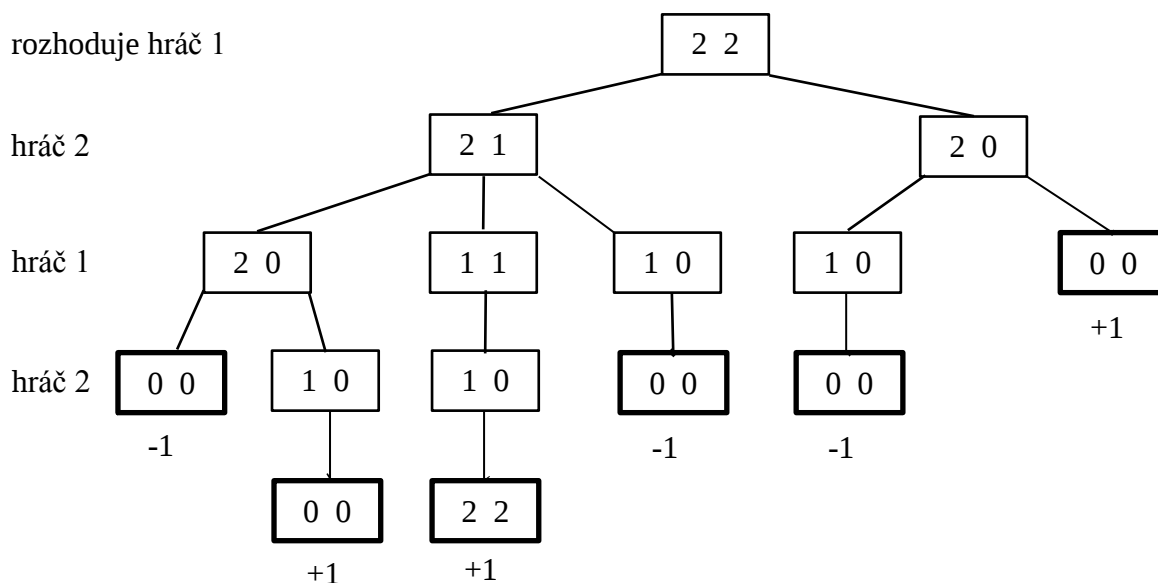
Pojem strom je v teorii grafů definován jako souvislý acyklický graf. Má jeden počáteční uzel (x_0), kterému se říká **kořen**, a ten určuje výchozí bod hry (například rozestavení figurek na šachovnici). Dále má několik koncových uzlů (x_3 , x_4 , x_5 , x_6), kterým se říká **listy** a které reprezentují konec hry. Zbylé uzly jsou **uzly rozhodovací** (x_1 , x_2). V nich hráči činí svá rozhodnutí, jestliže se hráč, který je na radě, rozhodne pro nějaký tah, navodí novou situaci, v níž se rozhoduje druhý hráč – této nové situaci opět odpovídá jistý uzel stromu spojený s předchozím hranou. Stromy, které mají jeden význačný vrchol (kořen stromu), patří do zvláštní skupiny stromů tzv. *zakořeněných stromů*. Tyto stromy jsou typické pro programování. [8]

Při znázorňování hry se většinou postupuje ve směru shora dolů (popř. zleva doprava) a pravidelně se střídají uzly, v nichž se rozhoduje první hráč, a uzly, v nichž se rozhoduje druhý hráč. Výška stromu, tj. počet jeho hladin, je rovna maximální vzdálenosti nějakého listu od kořene. Není nijak omezena, ale v programech se pracuje pouze s konečnými stromy.

Zvláštním případem stromu je *binární strom*. V tomto stromu má každý vrchol nejvýše dva následníky. Binární stromy se v programování využívají častěji než stromy obecné. Používají se například pro prezentaci aritmetického výrazu s binárními operátory nebo pro uložení dat do binárního vyhledávacího stromu. [21]

Příklad 1.4 Hra NIM

NIM je hra určená pro libovolný počet hráčů, ovšem nejméně jsou dva hráči. Ke hře je potřeba n sirek, které se rozdělí na m hromádek ($m < n$). Těch by mělo být alespoň tolik, kolik je hráčů. Hráči losem určí, který začne a postupně, po tazích se střídají v odebírání sirek jedné z hromádky (vždy pouze z jedné hromádky, nikoli z více) a to tak, že musí vzít vždy minimálně jednu sirku. Maximální množství odebraných sirek není omezeno. Hráč, který odebere poslední sirku, prohrál. Ukážeme si průběh hry na nejjednodušší variantě, a to typu 2x2, což znamená o dvou hráčích a dvou hromádkách, kde v každé jsou dvě sirky. Obr. 1.2 znázorňuje strom hry, společně s řešením hry. Počet sirek na hromádkách je určen číslem. [3]



Obr. 1.2 Hra NIM

U koncových uzlů je uvedena výhra +1, což znamená, že vyhrát hráč 1, nebo výhra -1 pokud je vítěz hráč 2. Na hře NIM je dobře vidět, že ze stromu lze znát výsledek hry ještě před samotným začátkem. U varianty 2x2 je před prvním tahem oběma hráčům jasné, že pokud se budou chovat inteligentně, hru vždy vyhraje hráč 2 a hráč 1 ji vždy prohraje. Jen

si hráč 1 v prvním tahu může vybrat, kterým ze dvou způsobů to bude. Nikdy však nemůže vyhrát, pokud některý z hráčů neudělá chybu.

V takovýchto a hlavně složitějších stromech k hledání řešení, využijeme prohledávací techniky a to techniky prohledávání do hloubky a do šířky.

1.5.1 Prohledávání

Tyto programovací techniky umožňují systematicky procházet nějaký „vymezený prostor“ a postupně navštívit všechna jeho místa. Takovým to prostorem může být plán bludiště, datová struktura tvaru stromu, množina možných stavů nějakého výpočetního procesu a přechodů mezi nimi nebo hrací plán hry, jako je i naše studovaná hra Kalaha. Jde o technické prohledávání prostoru do hloubky a do šířky, které se uplatňuje ve všech výše zmíněných případech. Oba tyto základní postupy mají stejný cíl, ale liší se celkovou organizací práce a pořadím, v jakém se jednotlivá místa zkoumaného prostoru procházejí. Podle toho se liší i jejich použitelnost pro řešení konkrétních úloh a efektivita výsledných algoritmů a programů.

Procházení stromu v případě **prohledávání do hloubky** probíhá tak, že v jakém pořadí jsou jeho vrcholy navštěvovány a hodnoty uložené ve vrcholech vypisovány. Pro jednoduchost si průchod stromem vysvětlíme na binárním stromu. Po vypsání hodnoty ve vrcholu se nejprve vydáme vlevo. Po průchodu celým levým podstromem se do vrcholu vrátíme. Poté půjdeme vpravo. Projdeme celý pravý podstrom a opět se vrátíme do vrcholu. Tedy strom je symetricky procházen zleva doprava, jedna jeho větev za druhou. Přitom se opravdu postupuje „do hloubky“ stromu, jelikož sestoupíme od kořene stromu do listu, vrátíme se po stejné cestě zpět jenom tolik, kolik je nezbytně nutné, abychom mohli zkoumat další cestu, a opět znovu sestupujeme do dalšího listu stromu. To znamená, že do každého vrcholu vstoupíme nejvýše třikrát. Poprvé při sestupu od jeho přechozího vrcholu, po druhé při návratu z jeho levého podstromu a na závěr, pokud vrchol má pravý podstrom, tak z něho. [21]

Při **prohledávání do šířky** procházíme strom po jeho vrstvách, po hladinách. V každé vrstvě se prochází postupně zleva doprava. Nejdříve se navštíví kořen stromu, poté jeho levý a pravý následník, pak jeho následníci v pořadí zleva doprava, atd. pořád do kola než budou navštíveny listy ležící v největší vzdálenosti od kořene.

Při prohledávání složitějších stromů je třeba dávat pozor, abychom některé vrcholy nenavštívili vícekrát, nebo na ně zapomněli.

2 Kalaha

2.1 Mancala hry

Kalaha je strategická hra pro dva hráče. Jde o moderní, komerční a tím i o jednu z nejpopulárnějších variant deskových her Mancala. Žánrově bychom hry zařadily mezi abstraktní deskové hry, což jsou hry, které nemají žádnou zastřešující organizaci. Slovo *mancala* pochází z arabského slova *naqalah* doslovně znamená "přestěhoval". Používá se k označení velké skupiny souvisejících her, které se hrají téměř po celém světě. Mancala hry (také známé jako "pebble-and-pit games" nebo "count-and-capture games") se hrají na desce, která obsahuje 2, 3 či 4 řad jamek. Někdy jsou tyto jamky jednoduše vykopané v půdě, nakresleny na papíře nebo vydlabané v dřevě či kameni. Často jsou na desce další dvě nebo čtyři jamky (tzv. *stores*) se speciálním významem. Hra je obvykle pro dva hráče, ačkoliv jsou známy verze s jedním nebo třemi hráči. [10]

Mancala hry se hrají s velkou množinou stejných čítačů. Tyto čítače mohou být buď obléžky, mušle, mince, semena rostlin, fekální pelet (velbloudů, koz, ovcí) nebo nějaké malé kulaté objekty, např. ze slonoviny či skla. Podle toho jaké čítače jsou použity k hraní, se odvodily některé názvy těchto her. Například v Nigérii se za čítače používají semena z rostliny *Adi*, proto je tato hra známá pod názvem *Adi* (hrací deska obsahuje dvě řady po šesti jamkách: 2 x 6 jamek). Dále se názvy her odvozují podle desky, na které se hraje, nebo podle území či kultury, kde hra vznikla.

Na Mali se nářečím jamky nazývají *wari* nebo *awari*, v překladu do češtiny znamenají „domů“. Podle toho, zde mají hru a názvem *Wari* (2 x 6 jamek). V Ghaně je varianta této hry považována za národní hru a je známá pod názvem *Oware* (2 x 6). [31]

Symbolické významy tradičních Mancala her jsou různé. Často jsou spojeny s touhou po „plodnosti“, v závislosti na sociálním zázemí, jako je těhotenství žen, plodnost dobytka, úlovku ryb, sklizně, kult deště nebo získání bohatství.

Hry často obsahují 12 jamek, které v některých oblastech mají symbolizovat dvanáct měsíců, nebo dvanáct znamení zvěrokruhu.

Na pobřeží Slonoviny, kde hrají hru *Oware*, hrají hru pouze během dne. V noci hru nechávají stát venku před domy, aby bohové mohli v noci ve hře pokračovat.

V mnoha částech Afriky a Karibiku mohou Mancala hry hrát pouze muži. Za to v jižní Asii, hrají hry ženy s dětmi. Ve střední Asii byla původně hra *Toguz Kumalak* (2 x 9 jamek) pouze jen pánská hra, ale za sovětských časů se z ní v republikách stal národní sport. Tím byla hra povolena hrát i ženám.

Pro Mancala hry existuje celá řada velikostí desek. Ke každé hře existuje také mnoho variant v pravidlech. Je popsáno okolo 300 tradičních her. Některé hry mají jednoduchá pravidla, zatímco jiné je mají velmi obtížná.

Mezi další tradiční Mancala hry patří *Bao* (Keňa, 4 x 8), *Omweso* (Uganda, 4 x 8), *Pallanguzhi* (Tamil Nadu, jižní Indie, 2 x 7) a *Congkak* (Malajsie, 2 x 7). [25]

Největší známou Mancala hrou je *Tchouba* (Mosambik), která má 160 (4 x 40) jamek a ke hře je potřeba 320 fazolí. Další velkou hrou je *En Gehe* (Tanzanie). Její hrací deska obsahuje dva delší řádky o 50-ti jamkách (celkem 2 x 50 = 100) a k hraní je zapotřebí 400 fazolí. Oproti tomu nejmenšími varianty Mancala her jsou hry *Nano-Wari* (hrací deska má pouze dvě jamky a v každé jsou čtyři fazole) a *Micro-Wari* (má celkem čtyři fazole ve čtyřech jamkách). [17]

Všechny hry začíná s určitým rozdělením čítačů v jamkách (obvykle v každé jamce je stejný počet čítačů). Tah se provádí výběrem jedné jamky, vyjmutí všech čítačů z jamky a vkládáním čítačů v určitém směru zpět jeden po druhém do sousedních jamek. Tento proces se nazývá "**setí**". Jamka, do které je vložen poslední čítač určuje, co se bude ve hře dít dál. Někdy proběhne setí a tah je u konce, někdy setí pokračuje, a jindy hráč hraje znovu. Cílem hry je, vždy jak je to možné, zachytit co nejvíce čítačů do *stores* jamky.

2.2 Historie Mancala her

První archeologické nálezy o Mancala hrách jsou kamenné desky, které byly objeveny v Aksumite Etiopii v Matara (nyní Eritrea) a Yeha (v Etiopii). Tyto nálezy sahají mezi 500 a 700 lety našeho letopočtu. [1]

Obchod s otroky ze západní Afriky od roku 1640 přenesl Mancala hry i do Karibiku (kromě Portorika a Bahamy), USA, a části jižní Ameriky. Šířením islámu se tyto hry rozšířily také na blízký východ, Indie, Malediv, jižní Číny, jižního Thajska, Malajsie a Indonésie. [6]

Prvním Evropanem, který hru Mancala popsal vědeckou prací v 17. Století, byl anglický průzkumník **Richard Jobson** (fl. 1620–1623), a to v knize „*The Golden Trade*“.[11] V ní popisuje své plavby do Etiopie a řeky Gambie během let 1620-1621, při kterých se setkal s Mancala hrou.

V Evropě tradiční varianty Mancala her byly poprvé hrány v oblasti Baltského moře, kde byla velmi populární hra *Bohnenspiel*. V Bosně a Hecegovině, je hra známá jako *Ban-Ban*, kterou zde hrají dodnes. Mancala hry se hrály také v Srbsku, Bulharsku a na řeckém kykladském ostrově Hydra, kde hráli hru pod názvem *Mandoli*. [12]

V museum Burgos ve Španělsku vystavují Mancala hrací desku z kláštera Santo Domingo de Silos (Španělsko), viz Obr. 2.1. Patřila dceři córdobského emíra Abd ar-Rahmán III (891–961, Pyrenejský poloostrov). Deska je skládací ve tvaru pouzdra na tužky. Je složená podél nejdelší osy a v zavřeném stavu je válcového tvaru. Deska je vyrobena ze slonoviny a kovového kování. Má dvě řady po pěti jamkách. Velikostně je 46,5 cm dlouhá a každá jamka je 9 cm široká.



Obr. 2.1 Hrací deska ve tvaru pouzdra na tužky

V roce 1709 nábytkář Sommer v Künzelsau (Německo), vyrobil barokní mancala stoly na hrad Weikersheim, rodového šlechtického sídla rodu von Hohenlohe, v jihozápadním Německu. Rod je známý pro své nadšení ke stolním hrám (šachy, dáma, Backgammon).

Mancala hry se také objevily na obrazech. V roce 1740 švýcarský malíř **Jean-Etienne Liotard** (1702–1789) ztvárňuje na obraze “*Greek Woman Playing*

Mancala” dvě řecké ženy sedící na kanape a hrají hru Mancala. Obraz je nyní v Paříži v Louvru. [6]

Ve Francii mezi lety 1707–1708 vyšla sbírka “*Recueil De Cent Estampes Representant Differentes Nations Du Levant*”, což je sbírka 100 obrázků reprezentující různé národy Levant (dnešní oblast východního Středomoří). Mezi nimi se nachází obraz dvou tureckých dívek, které hrají Mancala. Autorem obrázků je **M. Le Hay**.

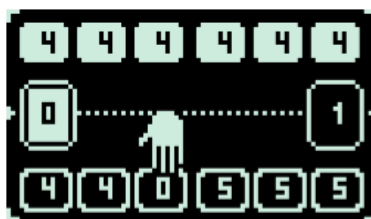
Harold James Ruthven Murray (1868–1955) napsal v roce 1952 knihu „*A History of Board-Games Other Than Chess*“ [19] v které popisuje téměř 200 variant Mancala her.

V roce 1984 **Larry Russ** (1946 - dosud) matematik a děkan a profesor Stevens Institute of Technology v Hoboken, New Jersey (USA), napsal knihu “*The Complete Mancala Games Book*”. [23] Jde o nejúspěšnější knihu o Mancala hrách vůbec. Kniha obsahuje popisy a pravidla pro téměř sto dvouřadých, třířadých a čtyřřadých her. Obsahuje barevné snímky mancala desek s lidmi, kteří hru hrají a zeměpisné údaje, kde se hra hraje.

2.3 Kalaha

Kalaha je strategická hra pro dva hráče. Je to moderní, komerční a nejpopulárnější varianta Mancala her. Hra Kalaha se zakládá z dřevěné desky a skleněných barevných kamenů („americký styl“). Vynalezl ji v roce 1940 ve státě Connecticut americký daňový poradce **William Julius Champion** (1880–1972). Tento nápad měl v roce 1905, když si na Yale University kde studoval, přečetl článek ze Světové výstavy (World Expo) z Chicaga (1893), který byl věnován Mancala hrám.

Na trh hru uvedl v roce 1944. Pár let po té, v roce 1958 založil firmu „*The Game Kalah Company*“ v Holbrook ve státě Massachusetts (USA). Na název hry a pravidla měl sice patent, přesto se vyskytlo mnoho napodobitelů. Jednou z nich byla hra Bantumi, viz Obr. 2.2, která se objevila na prvních mobilních telefonech firmy Nokia, 2000. Tato varianta má na začátku hry čtyři čítače v každé jamce. Cílem bylo, přesunout čítače z jamek ze spodní části obrazovky do skórovací jamky na pravé straně. [31]



Obr. 2.2 Bantumi

Champion došel k názoru, že hra cvičí paměť, bleskové rozhodování, představivost a rozvíjí logické myšlení a proto se snažil, hru šířil po místních školách. Na základní škole v Hoolbrookku, v roce 1963, byl zorganizován první turnaj v Kalaha. V současné době se ve spojených státech každý rok pořádá více jak 50 turnajů. Organizátory jsou nejčastěji školy, mládežnická centra, muzea a knihovny. Kellog Elctronic Research Academy v Chicagu hru Kalaha využívají na podporu studentů, kteří trpí dyskalkulií. [12]

V České Republice **Hana Kotinová**, za pomoci Andrei Vozníkové, založila občanské sdružení *Česká federace mankalových her*. Toto občanské sdružení vzniklo, aby podpořilo velkou rodinu abstraktních her. Hlavní impulzem však byla prosba zakladatelů Světové federace Toguz Kumalak, aby v ČR uspořádali 2. mistrovství světa ve hře Toguz Kumalak. Jelikož málo kdo hraje všechny hry rád, federaci rozdělili na kluby. Zatím mají dva kluby: Národní klub Oware a Národní klub Toguz Kumalak. Vznikly, protože v těchto hrách už více než 5 let pořádají turnaje v ČR. S realizacemi aktivit, sdružení pomáhá mezinárodní velmistr v duševních sportech David Kotin. Soutěže, které federace zaštiťují, jsou mezinárodní Festival šachu a her CzechOpen. Dále pořádají MČR, Mistrovství Evropy a Mistrovství světa v Toguz Kumalaku. [2]

V roce 2016 v Pardubicích federace poprvé organizovala mezinárodní turnaj ve Warri/Oware, který se dosud každým rokem na podzim konal ve Švýcarsku. Turnaje v Oware poprvé proběhly podle pravidel používaných v Ghaně. Dále se hrály tradiční turnaje v Toguz Kumalak a i v jeho variantě Bestemše. V Toguz Kumalak stejně jako v předchozích letech se hrál speciální turnaj s počítačem. Mancalového turnaje se kromě českých, kazašských a kyrgyzských hráčů zúčastnili také země jako Turecko, Ghana, Antigua, Barbuda, Německo, Rakousko, Švýcarsko a Rusko.

V obchodech se pěkná dřevěná cestovní skládací hra Kalaha prodává za méně než 200 Kč. Exkluzivní provedení hry Kalaha můžeme koupit kolem 1 000 Kč. Pokud by nás

hra zaujala, chtěli bychom si ji zahrát doma, ale nechtěli bychom si ji kupovat lze si hrací desku sami vyrobit. A to buď z plata od vajíčka, nebo si jen udělat důlky či kroužky v hlíně (písku) a za fazole použít kamínky.

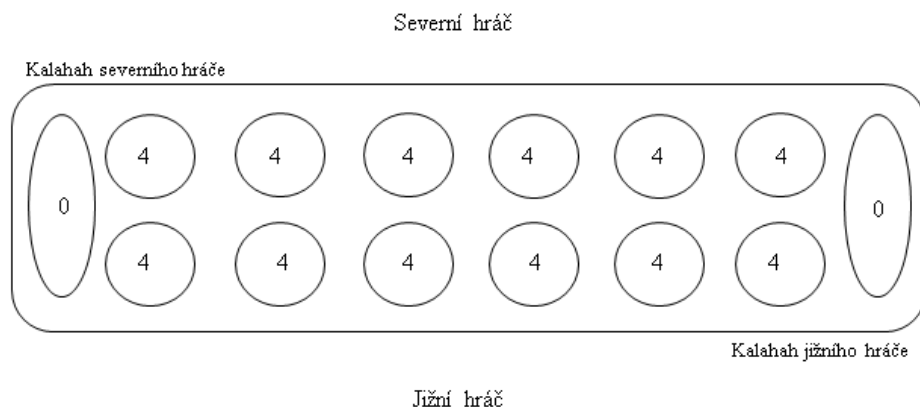
2.3.1 Herní potřeby

Hru hrají dva hráči, kteří ke hře potřebují 48 fazolí (hracích kamenů, čítačů) a hrací desku se dvěma řadami po šesti kulatých jamkách, navíc na každém konci je jedna větší jamka zhruba dvojnásobné velikosti, tzv. *kalahah* (výherní jamka).

Kalaha je vhodná pro děti od 8 a výše let. Hrací doba je přibližně 15 minut.

2.3.2 Příprava hry

Deska se položí podélně mezi oba hráče. Každému hráči patří 6 jamek v řadě blíže k němu a *kalahah* po pravé straně. Před začátkem hry se do všech 12 kulatých jamek umístí po 4 fazolích. Obě *kalahah* jamky na krajích zůstanou prázdné. Obr. 2.3 znázorňuje takto připravenou hru. Losem vybraný hráč hru začíná.

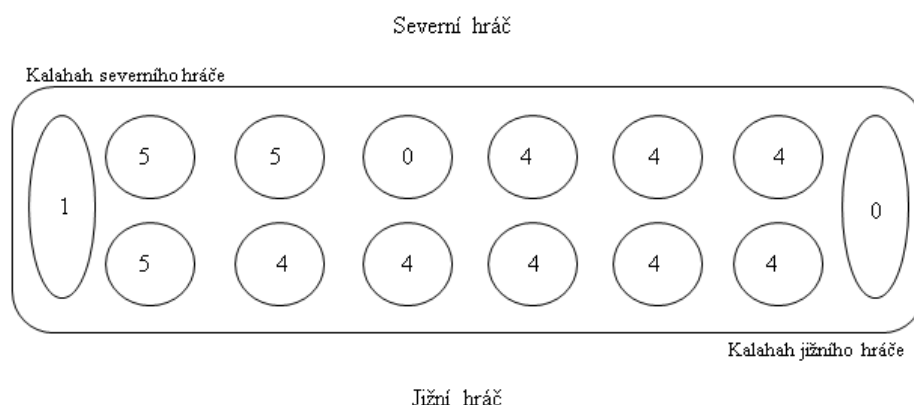


Obr. 2.3 Kalaha

2.3.3 Pravidla

Hráč, který je na tahu, si vybere neprázdnou jamku na své straně desky. Všechny fazole z této jamky vyjme z jamky a vloží si je do ruky. Poté následuje tzv. *setí*, kdy proti směru hodinových ručiček je vždy fazole jedna po druhé vkládána do následujících jamek,

včetně své kalahah. Do každé jamky se vkládá vždy jen jedna fazole. Má-li hráč v ruce stále nějaké fazole, pokračuje v jejich setí na soupeřově polovině hrací desky, ale soupeřův kalahah je vynechán. Na Obr. 2.4 je příklad pozice po jednom z možných úvodních tahů. V tomto tahu severní hráč vybral svoji třetí jamku zprava. Pro lepší pochopení možných tahů a výsledku hry pod pravidly uvádím na konci kapitoly konkrétní příklad hry.



Obr. 2.4 Kalaha po prvním tahu

Existují tři možné výsledky přesunu:

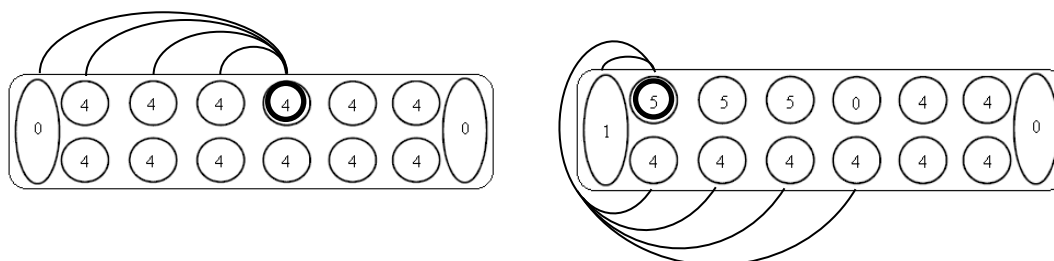
- v případě, že je poslední fazole vložena do kalahah, hráč hraje znovu (takový krok se nazývá *kalah-move*). Toto pravidlo lze použít opakovaně;
- v případě, že je poslední fazole vložena do jamky, v které se nenacházely žádné fazole. Je tato fazole a všechny fazole, které se nacházeli v jamce na protihráčově straně naproti této prázdné jamky, vloženy do kalahah hrajícího hráče a jeho tah je u konce. Takový tah se nazývá *capture*;
- v případě, že poslední fazole je vložena kdekoli jinde, tah je u konce a hraje protihráč.

Při aplikaci tahu *capture* nehraje roli, kolik fazolí v tomto tahu hráč rozmístil, než dosáhl prázdné jamky. Lze například přemístit do sousední jamky vpravo jedinou fazoli, která leží ve své jamce sama. Nebo je možné množství fazolí z vrchovatě naplněné jamky pokrýt celou protivníkovou stranu a s poslední přistát ve vlastní prázdné jamce.

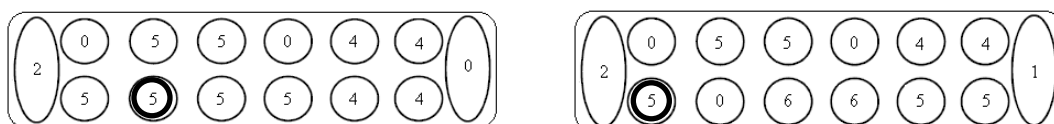
2.3.4 Konec hry

Hra končí, když na konci tahu má jeden z hráčů všech šest jamek na své straně bez fazolí. Když hra skončila, hráč, který má ještě fazole na své straně desky, je vyjme z jamek a vloží je do své kalahah. Spočítáme všechny fazole z obou kalahah. A vítězem se stává hráč s nejvyšším počtem fazolí.

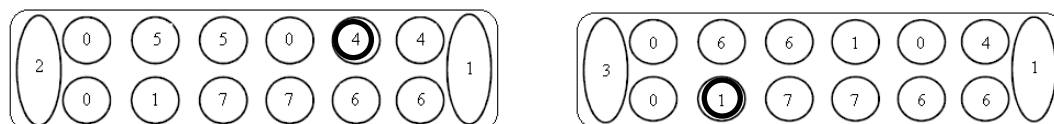
Možné výsledky přesunů fazolí a ukázkou konce hry uvádím v následujícím příkladu. Zvolené jamky si označím čísly od 1 do 6 a to vždy z leva doprava. Hru začíná severní hráč.



Severní hráč začal hru jamkou č. 4, čímž svou poslední fazoly vložil ho kalahah, jedná se tedy o tah *kalah-move*. Proto mohl hrát znovu. Poté zvolil jamku č. 1. Během setí si zasel jednu fazoly do kalahah, což znamená, že po tomto tahu má v kalahah dvě fazole. Jeho tah tím končí a je na řadě jižní hráč.



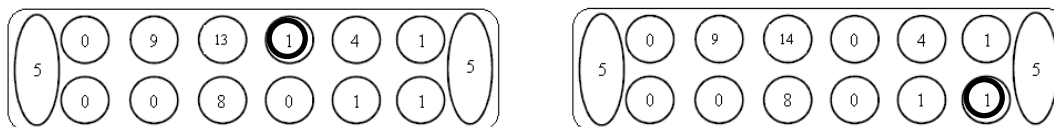
Při zvolení jamky č. 2 jižní hráč také začal tahem *kalah-move* a může hrát znovu. V dalším tahu zvolil jamku č. 1. Počet fazolí v této jamce není tak vysoký, proto setí ukončil těsně před kalahah. Tím mu po tomto tahu v kalahah zůstává jedna fazole.



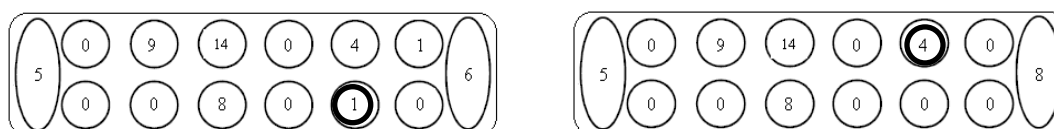
Severní hráč hraje jamkou č. 5, jedná se o tah *capture*. Jelikož poslední fazole z této jamky skončila v prázdné jamce č. 1, pak je dle pravidel, tato poslední fazole vložena ho kalahah. Pokud by jižní hráč měl nějaké fazole v jamce č. 1, byly by i tyto fazole přeneseny do

kalahah severního hráče, ale bohužel zde žádné nebyly. Proto se počet fazolí severního hráče v kalahah zvedl o jedničku. Poté jižní hráč hrál jamkou č. 2.

...

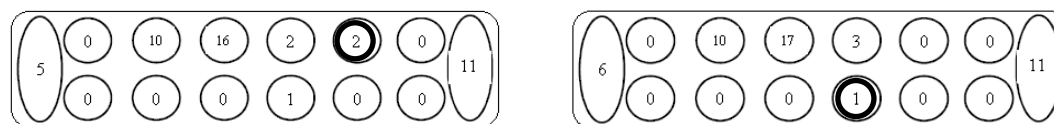


Severní hráč hraje jamkou č. 4. Na to jižní hráč hraje jamkou č. 6, což je tah *kalah-move*, a bude moci hrát znovu.



Dalším tahem jižního hráče je volba jamky č. 5. Tento tah je tahem *capture*, jelikož jamka obsahuje jednu fazoli, která je přenesena do vedlejší jamky vpravo, ve které žádná fazole není. To znamená, že tato fazole a jedna fazole z protihráčovy jamky č. 6 jsou přeneseny do kalahah. Kalahah jižního hráče je proto navýšena o dvě fazole, z šesti na osm. Severní hráč na to reaguje volbou jamky č. 5, což je znovu tah *capture*.

...



Severní hráč hraje jamkou č. 5. A jižní hráč, který už nemá možnost výběru, proto hraje tou jamkou v které má fazoli a to je jamka č. 4.



Po tomto tahu jižní hráč na své straně hrací desky nemá žádné fazole. Jedná se tedy o konec hry. Nyní jsou všechny fazole v jamkách severního hráče převedeny do jeho kalahah (navýšil se počet fazolí o 30, z 6fazolí na 36). Poté, když už nejsou žádné fazole v jamkách se dle počtu fazolí nastrádaných v kalahah rozhodne kdo je vítěz. Vítězem této hry se stal **severní hráč** ($36 > 12$).

2.3.5 Poznatky

U deskových her jako je Kalaha je k vítězství nezbytné plánování do budoucna. Snažíme se plánovat dva nebo tři tahy dopředu. Ze své zkušenosti uvádím pár postřehů a poznatků.

Pokud hru začínám, za obecně nejlepší tah považuji vybrat svou čtvrtou jamku, čili tahem *kalah-move*. A to kvůli tomu, že poslední fazoli vložím do své kalahah, a tím mám už jeden bod, ale okamžitě dostávám ještě jeden tah navíc, tedy mohu hrát znovu. Pokud nehraji na standardní desce se čtyřmi fazolemi v jamce, začnu prostě tou jamkou, s kterou poslední fazoli vložím do kalahah.

Jako druhý silný tah, když začínám hru vložím do kalahah, je hrát nejpravější nebo druhou nejpravější jamkou na své straně. Jakýmkoliv z těchto dvou tahů vložím fazoli do čtvrté jamky protihráče, čímž zabráním aby provedl stejně dobrý zahajovací tah. Jamka úplně vpravo je lepší tah, protože chci, aby tato jamka byla prázdná. Níže vysvětluji proč.

Ve hře se snažím co nejdříve vyprázdnit nejpravější jamku. Protože jamka úplně vpravo je hned vedle kalahah a, kdykoli v této jamce bude jedna fazole, zvolím tuto jamku, čímž získám bod a mohu hrát znovu. Z tohoto důvodu, vyprazdňování této jamky je silná strategie. Poté, co je vyprázdněna tato jamka, může v ní kdykoliv přistát fazole a hned, až budu na tahu, můj další krok by měl být vložení této fazole do kalahah a pak hrát znovu.

Pokud hraji s pravidlem *capture*, snažím se vytvořit prázdné jamky na své straně desky. To mi umožní více příležitostí k zachycení soupeřových fazolí tím, že ukončím setí v jedné z nich. Zachycením těchto fazolí je velmi silný tah.

Pokud hraji s pravidlem *capture*, musím si dávat pozor, které soupeřovi jamky jsou prázdné a jestli náhodou nejsou proti mé jamce, v které mám nashromážděny fazole. Pokud existuje možnost, že by protihráč vložil poslední fazoli do této prázdné jamky, mohla bych přijít a všechny tyto nashromážděné fazole. Musím proto dávat pozor a počítat fazole v ostatních protihráčových jamkách, a ujišťovat se, že nemůže poslední fazoli vložit do své prázdné jamky. Je-li ohrožena jedna z mých jamek, která je naplněna fazolemi, můj

další krok by mohl být, buď vyprázdněním této plné jamky, nebo jako obraný tah hrát jamkou, která vyplní protihráčovi prázdné jamky či jamku s kterou chce *capture* provést.

Pokud hraji s pravidlem *capture* a v nějaké z mých jamek se nachází 13 fazolí, vybráním této jamky získám minimálně dvě fazole. A to díky tomu, že setí ukončím zpátky ve vybrané jamce.

3 Analýza

Hra Kalaha má řadu vlastností, které mají vliv na způsob, jak je možné hru vyřešit. První vlastností, je to, že stav desky je jedinečný ve hře, tedy neexistuje opakování pozic. Tuto vlastnost nemají všechny Mancala hry. Například Awari může mít cykly. Druhou vlastností je, že chycené fazole v kalahah už znovu nevstupují do hry. To znamená, že hodnotu hry v určitém stavu, může odvodit pouze z konfigurace aktivních čítačů (to jsou čítače, které nejsou zachyceny).

3.1 Algoritmy

Pomocí matematicko-programu Matlab jsme vytvořili základní algoritmus průběhu hry pro hru Kalaha. [5]

Základní algoritmus 3.1

1. Vytvoří začínající stav hry Kalaha
2. Náhodně vybere, který z hráčů hru začne
3. Hrající hráč zvolí jamku, viz následující strategie, dle kterých výběr jamek probíhá
4. Dojde k setí (= tah se provede ze zvolené jamky, z které jsou vybrány všechny fazole a přerozdělovány dle pravidel)
 - Pokud, bude hráč hrát znovu, vrací se po skončení setí do bodu 3.
 - Pokud, tah setím ukončil, hraje druhý hráč
5. Zjistí, zda je hra u konce
 - Pokud NE – vracím se do bodu 3.
 - Pokud ANO – hra je ukončena
6. Určí, který hráč je vítěz

Takto vypadá hlavní programovací část hry Kalaha. Detailnější algoritmus průběhu tahu s vysvětlivkami uvádím v příloze. S tímto základním algoritmem dále pracujeme tak, že do něho přidáváme různé strategie, podle kterých je volen tah. Vymysleli jsme pět různých strategií. S těmi do konce diplomové práce pracujeme a výsledky her dále analyzujeme.

Výběr tahu je nejdůležitější částí celé hry, protože zvolený tah ovlivní, jak se hra bude dále vyvíjet. Proto je velmi důležité si výběr tahu velmi dobře rozmyslet a zvážit možné výsledky. Nyní si popíšeme našich pět vymyšlených strategií. Jednou z nich je úplně ta nejjednodušší strategie, náhodná. Další strategie obsahují větší rozvahu a měly by být silnější, než zmíněná náhodná strategie.

Pro základní algoritmus 3.1 to znamená, že ho rozšíříme o další body, podle kterých budou hráči volit svůj tah.

3.1.1 Strategie 0

Jde o naši základní a nejjednodušší strategii, podle které můžeme hodnotit sílu jiných strategií. Tahy jsou zde vybírány úplně náhodně. Tedy hráč, který je na tahu, náhodně zvolí jednu ze svých šesti jamek a s ní provede tah. Jedná se o hru s neinteligentními hráči. Máme zde jedno omezení, a to na výběr prázdných jamek. Pokud je vybrána jamka, v které nejsou žádné fazole, je vybírán tah do té doby, dokud není vybrána neprázdná jamka.

Algoritmus 3.2

1. Vytvoří začínající stav hry Kalaha
2. Náhodně vybere, který z hráčů hru začne
3. Hrající hráč zvolí tah náhodně
4. Dojde k setí (ze zvolené jamky jsou vybrány fazole a přerozdělovány dle pravidel)
 - Pokud, bude hráč hrát znovu, vrací se po skončení setí do bodu 3.
 - Pokud, tah setím ukončil, hraje druhý hráč
5. Zjistí, zda je hra u konce
 - Pokud NE – vracím se do bodu 3.
 - Pokud ANO – hra je ukončena
6. Určí, který hráč je vítěz

3.1.2 Strategie 1

Jedná se o chytřejší strategii. Touto strategií se snažíme vybírat takové tahy, které by končily v kalahah. Což by pro nás znamenalo, že bychom měli ještě jeden tah. Jedná se

tedy o tah zvaný *kalah-move*. Tento tah se opakuje do té doby, dokud je možný. Pokud už volba takového tahu neexistuje, vybereme tah náhodně (dle Strategie 0).

Při programování této strategie jsme daný tah hledali pomocí pomocného vektoru *podm* (pro severního hráče je $podm = (1,2,3,4,5,6)$, a pro jižního hráče jsou prvky vektoru od 6 do 1). Zkoušíme, zda se nějaké číslo na stejné pozici neshoduje s číslem ve vektoru, *kalah*, což je 6prvkový vektor, který uvádí aktuální počet fazolí v jamkách na naší straně hrací desky. Pokud ano, je tento tah vybrán, čímž dosáhneme ještě jednoho tahu. Jinak je tah vybrán náhodně.

Algoritmus 3.3

1. Vytvoří začínající stav hry Kalaha
2. Náhodně vybere, který z hráčů hru začne
3. Hrající hráč hledá tah *kalah-move*
 - Pokud, tah neexistuje, vybere tah náhodně
 - Pokud, tah existuje, vybere tento
4. Dojde k setí (ze zvolené jamky jsou vybrány fazole a přerozdělovány dle pravidel)
 - Pokud, bude hráč hrát znovu, vrací se po skončení setí k bodu 3.
 - Pokud, tah setím ukončil, hraje druhý hráč
5. Zjistí, zda je hra u konce
 - Pokud NE – vracím se do bodu 3.
 - Pokud ANO – hra je ukončena
6. Určí, který hráč je vítěz

3.1.3 Strategie 2

V této strategii nám jde o to, vybrat takový tah, kterým poslední fazole skončí v naší prázdné jamce. Tím dosáhneme, že sebere tuto poslední fazoli a i fazole v protihráčově protilehlé jamce. Jedná se o tah zvaný *capture*.

Vektor *kalah* porovnáváme s pomocným vektorem *podm* ($= (0, 0, 0, 0, 0, 0)$). Ve vektoru *kalah* hledáme, zda máme nějakou jamku prázdnou, tedy jamku rovnu nule. Pokud ano, prohledáme od této jamky po směru hodinových ručiček ostatní jamky v *kalah*.

Hledáme, zda existuje jamka, která by svou poslední fazoli vložila do této prázdné jamky. Pokud existuje, tak tuto plnou jamku vybereme.

Máme zde omezení na situaci, kdy by protihráčova jamka, naproti naší jamce nulové byla prázdná, anebo kdyby tato možnost tahu neexistovala tahu, pak tah zvolíme náhodně (Strategie 0).

Algoritmus 3.4

1. Vytvoří začínající stav hry Kalaha
2. Náhodně vybere, který z hráčů hru začne
3. Hrající hráč hledá tah *capture*
 - Pokud, tah neexistuje, vybere ho náhodně
 - Pokud, tah existuje, vybere tento
4. Dojde k setí (ze zvolené jamky jsou vybrány fazole a přerozdělovány dle pravidel)
 - Pokud, bude hráč hrát znovu, vrací se po skončení setí do bodu 3.
 - Pokud, tah setím ukončil, hraje druhý hráč
5. Zjistí, zda je hra u konce
 - Pokud NE – vracím se do bodu 3.
 - Pokud ANO – hra je ukončena
6. Určí, který hráč je vítěz

3.1.4 Strategie 3

Jde o kombinaci strategií 1 a 2. Znamená to, že se nejdříve podíváme, zda existuje možnost tahu *kalah-move*. Pokud ano, pak tento tah opakujeme do té doby, dokud to je možné. Když tento tah však nelze udělat, podíváme se, zda je možnost provedení tahu *capture*. Pokud nelze hrát ani tímto tahem, vybereme jamku náhodně. Omezení pro tah *capture* je stejné jako u Strategie 2.

Algoritmus 3.5

1. Vytvoří začínající stav hry Kalaha
2. Náhodně vybere, který z hráčů hru začne
3. Hrající hráč hledá tah *kalah-move*
 - Pokud, tah existuje, zapamatuje si tento tah (*tah1*) a pokračuje do bodu 4.

4. Hrající hráč hledá tah *capture*
 - Pokud, tah existuje, zapamatuje si tento tah (*tah2*) a pokračuje do bodu 5.
5. Výběr tahu
 - Pokud je $tah1 < tah2$, pak zvolím jamku jako *tah1*
 - Pokud je $tah1 > tah2$, a v protilehlé soupeřově jamce je více jak 1 fazole, pak zvolím jamku jako *tah2*
 - Pokud je $tah1 > tah2$, a v protilehlé jamce je jedna fazole, pak zvolím jamku jako *tah1*
 - Pokud neexistuje žádná z těchto variant, vybere jamku náhodně
6. Dojde k setí (ze zvolené jamky jsou vybrány fazole a přerozdělovány dle pravidel)
 - Pokud, bude hráč hrát znovu, vrací se po skončení setí do bodu 3.
 - Pokud, tah setím ukončil, hraje druhý hráč
7. Zjistí, zda je hra u konce
 - Pokud NE – vracím se do bodu 3.
 - Pokud ANO – hra je ukončena
8. Určí, který hráč je vítěz

3.1.5 Strategie 4

Jako v předchozí strategii jde o kombinaci strategií 1 a 2. Zde je pouze změněno pořadí v jakém prozkoumávání probíhá. Výběr vhodného tahu prohledáváme obráceně. Znamená to, že se nejdříve podíváme, zda jde udělat tah *capture*. Když tento tah udělat nejde, prohledáme, zda lze provést tah *kalah-move*. Když ani tento tah nelze udělat, vybereme tah náhodně. Při výběru tahem *capture* je zde znovu omezen na výběr jamky, díky které bychom nezískali žádné protihráčovi fazole.

Algoritmus 3.6

1. Vytvoří začínající stav hry Kalaha
2. Náhodně vybere, který z hráčů hru začne
3. Hrající hráč hledá tah *capture*
 - Pokud, tah existuje, vybere tuto jamku a pokračuje do bodu 5.
 - Pokud, tah neexistuje, pokračuje do bodu 4.
4. Hrající hráč hledá tah *kalah-move*

- Pokud, tah existuje, vybere tuto jamku a pokračuje do bodu 5.
 - Pokud, tah neexistuje, vybere jamku náhodně a pokračuje do bodu 5.
5. Dojde k setí (ze zvolené jamky jsou vybrány fazole a přerozdělovány dle pravidel)
 - Pokud, bude hráč hrát znovu, vrací se po skončení setí do bodu 3.
 - Pokud, tah setím ukončil, hraje druhý hráč
 6. Zjistí, zda je hra u konce
 - Pokud NE – vracím se do bodu 3.
 - Pokud ANO – hra je ukončena
 7. Určí, který hráč je vítěz

3.1.6 Strategie 5

Mělo by jít o nejchytřejší strategii. Ze začátku se jedná o stejnou strategii, jako je Strategie 3. Tedy prozkoumáme stav hry na tah *kalah-move* a poté na tah *capture*. Když neexistuje ani jeden z těchto tahů, podíváme se, zda neexistuje hrozba ze strany protihráče. Jde o hrozbu tahu *capture* z jeho strany. Pokud takový tah je, že by nám protihráč vybral jamku, vybíráme tuto ohroženou jamku.

Však když tato hrozba nehrozí, zaměříme se na své plné jamky. Snažíme se vybrat jamku, díky které bychom v dalším kole mohli použít tah *capture*. Podíváme se, zda nemáme jamku, kterou když v tomto kole vyprázdníme, tak v ní v příštím kole budeme moci ukončit tah *capture*. Tímto tahem dostaneme do kalahah jak tuto poslední fazoli, tak i fazole z protihráčovy protilehlé jamky. V této fázi Strategie 5 však máme dvě podmínky, které musí být splněny. První je, aby protihráčova protilehlá chtěná jamka nebyla prázdná. A druhou, aby jamka zvolená v prvním kole měla malý počet fazolí, tak aby při setí fazolí z této jamky nebyly žádné fazole vloženy do jamek na protihráčově straně.

Při neexistenci této možnosti zkusíme vybrat jamku, pomocí které setí proběhne pouze na straně hráče. Tedy vybranou jamkou nezasejeme žádné fazole do protihráčových jamek na druhé straně hrací desky. Tato myšlenka má za úkol takzvané „vyhladovění“. Jde o stav hry, kdy protihráč ať si vybere jakoukoliv jamku ze své strany hrací desky, vždy naseje fazole i do našich jamek. My si tyto darované fazole bude „škudlit“, tzn. sít pouze na své straně a žádnou nepřihrát protihráči. Pokud by k takovému „vyhladovění“ došlo, je velká pravděpodobnost, že hladovějící hráč hru prohraje.

Když neuspějeme ani s touto fází strategie, tak se vrátíme zpět k předešlé myšlence, o možnosti v dalším tahu využít tah *capture*. Nyní se už ale nezaměříme na délku setí. Tedy nezajímá nás, jestli tahu při vyprázdnění vybrané jamky nasejí nějaké fazole do protihráčových jamek. Tímto tahem nám jde o ohrožení protihráče a donucení ho k aktivitě.

Nelze-li najít vhodný tah ani jednou z těchto možností, vybereme jamku náhodně, podle Strategie 0.

Jelikož jsme se obávali, že při takovém to omezení výběru tahů, dojde k opakování pouze dvou her. Na hry kdy začíná severní hráč, nebo hry kdy začíná jižní hráč. Proto jsme na začátek algoritmu vložili náhodu. Pokud v kterémkoliv z prvních tří tahů není do šestého bodu Algoritmu 3.7 vybrána vyhovující jamka, což znamená, že neexistuje možnost hrát tahem *kalah-move* ani *capture*, ani neexistuje ohrožení tahem *capture* od protihráče, je jamka vybrána náhodně.

Algoritmus 3.7

1. Vytvoří začínající stav hry Kalaha
2. Náhodně vybere, který z hráčů hru začne
3. Hrající hráč hledá tah *kalah-move*
 - Pokud, tah existuje, zapamatuje si tento tah (*tah1*)
 - Jinak je $tah1 = 0$
4. Hrající hráč hledá tah *capture*
 - Pokud, tah existuje, zapamatuje si tento tah (*tah2*)
 - Jinak je $tah2 = 0$
5. Výběr tahu
 - Pokud je $tah1 < tah2$, pak zvolí jamku jako *tah1* a přejde do bodu 10.
 - Pokud je $tah1 > tah2$, a v soupeřově chtěné jamce je více jak 1 fazole, pak zvolí jamku jako *tah2* a přejde do bodu 12.
 - Pokud je $tah1 > tah2$, a v chtěné jamce je jedna fazole, pak zvolí jamku jako *tah1* a přejde do bodu 12.
 - Pokud neexistuje žádná z těchto variant, přejde do dalšího bodu
6. Prozkoumá ohrožení z protihráčovy strany tahem *capture*
 - Pokud, hrozí ohrožení, vybere tuto ohroženou jamku a přejde do bodu 12.

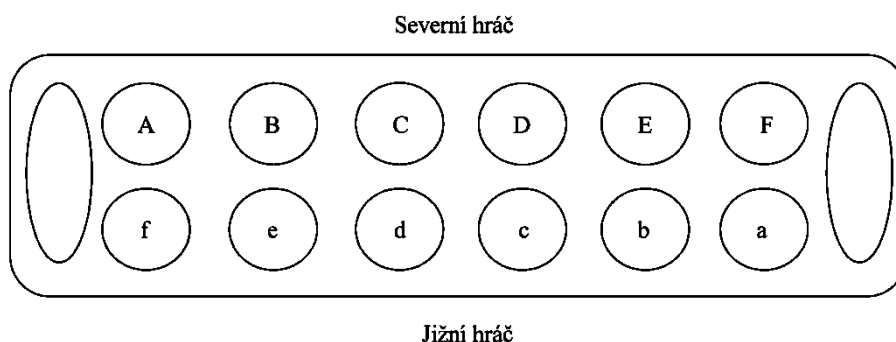
- Pokud hrozba nehrozí, přejde do dalšího bodu
7. Tah vybrán náhodně
- Pokud je počet hry tahů menší jak 4 a neexistuje tah1, tah2 ani ohrožení tahem *capture*, je tah vybrán náhodně a přejde do bodu 12.
 - Pokud je počet tahů větší nebo rovno 4, přejde do dalšího bodu
8. Pokusí se ohrozit protihráče tahem *capture*, aniž by protihráčovi nasel nějaké fazole
- Pokud existuje plná jamka, s kterou při jejím setí nenaseje žádné fazole protihráčovi, a po jejímž vyprázdnění lze v dalším tahu hrát tahem *capture*, zvolí tuto plnou jamku a přejde do bodu 12.
 - Pokud žádná taková plná jamka neexistuje, přejde do dalšího bodu
9. Vyhladovění
- Pokud lze hrát jamkou, kterou by během setí nenasel protihráčovi, vybere tuto jamku a přejde do bodu 12.
 - Pokud jsou jamky moc plné, přejde do dalšího bodu
10. Pokusím se ohrozit protihráče tahem *capture*, bez omezení
- Pokud existuje plná jamka, po jejímž vyprázdnění lze v dalším tahu hrát tahem *capture*, zvolím tuto plnou jamku a přejde do bodu 12.
 - Pokud žádná taková plná jamka neexistuje, přejde do dalšího bodu
11. Náhoda
- Jelikož žádná jamky neodpovídá žádná jamka z výše vypsáním podmínkám, tah je vybrán náhodně a přejde do dalšího bodu
12. Dojde k setí (ze zvolené jamky jsou vybrány fazole a přerozdělovány dle pravidel)
- Pokud, bude hráč hrát znovu, vrací se po skončení setí do bodu 3.
 - Pokud, tah setím ukončil, hraje druhý hráč
13. Zjistí, zda je hra u konce
- Pokud NE – vracím se do bodu 3.
 - Pokud ANO – hra je ukončena
14. Určí, který hráč je vítěz

3.2 Notace

V této části čerpám ze své bakalářské práce, v které jsem zavedla notaci hry Kalaha. Notace se používá k zápisu a jeho možnému rozboru po skončení hry. Zvolené značení jsem naprogramovala do Matlabu.

Značení jamek a situací je stejné tak, jak je to zavedeno v bakalářské práci. Jediná výjimka je v číslování. Hru nečísluji po partiích, tedy tah severního a jižního hráče, ale každý provedený tah zvlášť.

Tah je zapisován, pořadovým číslem tahu, zvolenou jamkou a celkovým množstvím fazolí v kalahah. Jamky severního hráče jsou označeny zprava A, B, C, D, E, F a jamky jižního hráče zleva a, b, c, d, e, f, viz Obr. 3.3.



Obr. 3.3 Notace

Značení tahu:

kalah-move +

capture [] (v hranaté závorce je uvedena jamka, do které byla vložena poslední fazole)

Značení situací:

+ - vyhrál severní hráč (Od jistého tahu, kdy má hráč ve své kalahah více jak 24 fazolí je jasné, že se stal vítězem, proto se v průběhu hry objeví tento znak. Objeví se také i na konci hry pokud hru vyhrál severní hráč.);

- + vyhrál jižní hráč (značí nám, že jižní hráč naseł ve své kalahah více jak 24 fazolí či je vítězem hry);
- = hra končí remízou;
- # konec hry;
- ! silný tah (velmi chytrý tah, který by hráči mohl zajistit výhru);
- ? slabý tah (jde o hráčovu chybu, kterou buď ztrácí, nebo snižuje svou pravděpodobnost na výhru).

Značení silného tah (!) a slabého tah (?), které se používají k rozboru hry, poté co je hra dohrána, nejsou v Matlabu naprogramovány. A to z toho důvodu, protože pro takový rozboje je zadaný algoritmus nedostačující. Proto jsou notace hry o tyto znaky ochuzené. Lze je ale doplnit ručně po ukončení a rozebrání hry.

Pro lepší pochopení přikládáme ukázkou notace jedné hry vygenerované z Matlabu. Pod notací hry je k Příkladu 3.1 komentář, v kterém vysvětlují zvolené značení.

Příklad 3.1

```

1.c+
2.a(1)
3.D+
4.F(1)
5.b+
6.c(2)      ?
7.E+
8.D(2)
9.f(3)
10.D(2)
11.d(4)
12.F(2)
13.f+
14.e[f](14)
15.F(2)
16.f+
#
+-

```

Příklad 3.1 nám ukazuje hru, kterou začal hrát jižní hráč jamkou c. Ze značky „+“ víme, že hráč bude hrát znovu. V příštím tahu zvolil jamku a. Tímto jsou tahy severního

hráč u konce. V závorce je vypsán počet fazolí zasetých v jeho kalahah. Což je po tomto tahu jedna fazole.

Severní hráč začíná hru jamkou *D*, tedy také tahem *kalah-move*, proto se vyskytuje symbol „+“. Poté hraje jamkou *F*, čímž jsou jeho tahy u konce a z čísla v závorce víme, že ve své kalahah má zatím 1 fazoli.

Přesuneme se do tahu 14., který hraje jižní hráč. V tomto tahu hraje hráč jamkou *e*, v které bylo nashromážděno tolik fazolí (9), že hráč nasele fazole do své kalahah tak i do všech protihráčových jamek a vrátil se na svoji stranu desky, kde poslední fazoli vložil do prázdné jamky *f*. Tím je jeho tah u konce. V kalahah po tomto tahu má 14 fazolí.

Po 16. tahu nám symbol „#“ značí, že došlo k ukončení hry. Vítězem je severní hráč, proto symbol „+-“.

Poté následoval rozbor hry. Při rozboru jsem k šestému tahu doplnila „?“, jelikož jde o slabý tah, mohlo by se říct i hrubou chybou jižního hráče. Tímto tahem si jižní hráč určit, pokud severní hráč bude hrát chytře, že prohraje. Kdyby jižní hráč místo zvolené jamky *c*, hrál jamkou *d*, donutil by severního hráče reagovat na jeho ohrožení, tahem *capture* a měl by tím šanci na výhru.

Pro jednodušší označení budeme v dalších analýzách severního hráče označovat, jako hráče A, a jižního hráče, jako hráče B.

3.4 PC vs. PC

Po naprogramování těchto pěti strategií do Matlabu jsme se zaměřili na jejich sílu (chytrost). To jsme prováděli tak, že jsme v Matlabu proti sobě pustili dvě vybrané strategie (např. Strategii 0 proti Strategii 1), které v hrách vybíraly jamky dle daných pravidel strategií. V každé dvojici strategií jsme analyzovali výsledky z 1 000 000 her. U každé hry jsme sledovali délku hry (počet tahů v dané hře) a výsledek každé hry (vítězství či remízu).

Naším předpokladem bylo, že nejméně silná (chytrá) strategie je Strategie 0, o něco silnější Strategie 2, pak Strategie 1, poté Strategie 4, předposlední Strategie 3 a poslední nejsilnější Strategie 5.

Ze zjištěných výherců her jsme vyvodili jak moc je každá strategie silná vůči ostatním strategiím. U všech možných dvojic strategií jsme vypočítali podmíněné pravděpodobnosti. A to

- ppAA - podmíněná pravděpodobnost, že vyhraje hráč A, když hru začal hrát hráč A;
- ppBB - podmíněná pravděpodobnost, že vyhraje hráč B, když hru začal hrát hráč B;
- ppAB - podmíněná pravděpodobnost, že vyhraje hráč B, když hru začal hrát hráč A;
- ppBA - podmíněná pravděpodobnost, že vyhraje hráč A, když hru začal hrát hráč B;
- ppAR - podmíněná pravděpodobnost, že hra skončí remízou, když hru začal hrát hráč A;
- ppBR - podmíněná pravděpodobnost, že hra skončí remízou, když hru začal hrát hráč B.

Nyní se blíže podíváme na vypočtené podmíněné pravděpodobnosti každé strategie. Pro jednotlivé strategie je uvedena tabulka se všemi možnými kombinacemi strategií. Označení 0/1 znamená, že hráč A hrál se Strategií 0, za to hráč B se Strategií 1. Pro každou dvojici strategií je ve sloupci tučně a podtrženě vyznačena nejvyšší podmíněná pravděpodobnost výher.

Například v tabulce Tab. 3.1 Strategie 0 (A/B) je pro dvojici strategií 0/2 nejvyšší hodnotu u podmíněné pravděpodobnosti, že vyhraje hráč A, když hru začne hrát hráč A (ppAA=0,486).

	0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5
ppAA	<u>0,485862</u>	0,10392	<u>0,486156</u>	0,076962	0,081779	0,080162
ppAB	0,451101	0,869619	0,450411	0,901608	0,89556	0,902658
ppBB	0,485243	<u>0,892014</u>	0,485547	<u>0,921887</u>	<u>0,912485</u>	<u>0,932675</u>
ppBA	0,451399	0,086004	0,451240	0,060022	0,067489	0,054019
ppRA	0,063037	0,026461	0,063433	0,021429	0,022661	0,017181
ppRB	0,063357	0,021982	0,063213	0,018091	0,020027	0,013305

Tab. 3.1 Strategie 0 (A/B)

Strategie 0 je předpokládána za nejhorší strategii, což nám tabulka Tab. 3.1 potvrzuje. U dvojic 0/0 a 0/2 lze říci, že pravděpodobnost výhry téměř nezávisí na tom, který z hráčů hru začíná. Pro tyto dvojice jsou podmíněné pravděpodobnosti u ppAA a ppBB o trochu vyšší, než u ostatních pravděpodobností, ale i tak se hodnoty ve sloupci skoro rovnají. Z tabulky je vidět, že Strategie 0 přehraje i Strategii 2, viz ppAA u 0/2. Ale jelikož ppBB, že hru vyhraje hráč B, když ji začne, je velmi blízko ppAA. Proto se dá říci, že Strategie 2 je stejně tak slabou strategií, jako je Strategie 0. Zbylé dvojice strategií (0/1, 0/3, 0/4, 0/5) potvrzují náš předpoklad o nejslabší strategii. Jelikož výhry hráče B, který je vždy z každé dvojice chytřejší hráč, nezávisí na tom, který z hráčů hru začíná. Strategie 0 je nejslabší.

	1/0	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5
ppAA	<u>0,892014</u>	<u>0,543604</u>	<u>0,782264</u>	0,429307	0,434036	0,386099
ppAB	0,086004	0,401387	0,181185	0,516645	0,510866	0,568154
ppBB	0,103920	0,542726	0,228314	<u>0,658998</u>	<u>0,624336</u>	<u>0,734572</u>
ppBA	0,869619	0,402867	0,729542	0,292119	0,321529	0,229168
ppRA	0,021982	0,055009	0,036551	0,054048	0,055099	0,045747
ppRB	0,026461	0,063357	0,021982	0,063213	0,018091	0,020027

Tab. 3.2 Strategie 1 (A/B)

U Strategie 1, lze z tabulky (viz Tab. 3.2) pozorovat její sílu. Mezi kombinacemi strategií 1/2 a 1/3 dochází ke zlomu, ve kterém Strategie 1 ztrácí sílu, tedy nejvyšší pravděpodobnosti výher. První tři dvojice strategií mají jasné výhry hráče A, krom 1/1, kde dochází k symetrii výher. To znamená, že Strategie 1 je chytřejší než Strategie 0 a Strategie 2. U zbylých třech dvojic Strategie 1 oslabuje a pravděpodobnost výher hráče B převyšují.

	2/0	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5
ppAA	0,485547	0,228314	0,500677	0,161044	0,162261	0,134562
ppAB	0,451240	0,729542	0,443719	0,805044	0,803567	0,843368
ppBB	<u>0,486156</u>	<u>0,782264</u>	<u>0,505925</u>	<u>0,840862</u>	<u>0,827376</u>	<u>0,886840</u>
ppBA	0,450411	0,181185	0,437822	0,129065	0,140892	0,093809
ppRA	0,063213	0,021982	0,055603	0,033911	0,034171	0,022069
ppRB	0,063433	0,036551	0,056253	0,033911	0,031732	0,019351

Tab. 3.3 Strategie 2 (A/B)

Že Strategie 2 je druhou nejslabší strategií, potvrzuje tabulka Tab. 3.3. Vidíme, že nejvyšší podmíněné pravděpodobnosti výher se nacházejí u ppBB. Z toho vyplývá, že jde o velmi slabou strategii. U kombinace 2/0 je jakási vyrovnanost hodnot podmíněných pravděpodobností na výhru, tedy výhra nezávisí, který z hráčů hru začal. Dvojice strategií 2/2 ukazují, že větší pravděpodobnost výhry má hráč, který hru začíná. Zbylé tři dvojice mají jasnou převahu ve výhodě výhry hráče B, a to i v případech kdy hru začíná hráč A. Kdybychom ji porovnávali s náhodnou Strategií 0, tak zjistíme, že Strategie 2 je lepší.

	3/0	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5
ppAA	<u>0,921887</u>	<u>0,658998</u>	<u>0,840862</u>	<u>0,557300</u>	<u>0,560198</u>	0,504664
ppAB	0,060022	0,292119	0,129065	0,389970	0,386827	0,446316
ppBB	0,076962	0,429307	0,161044	0,533786	0,488779	<u>0,621815</u>
ppBA	0,901608	0,516645	0,805044	0,412936	0,452325	0,340184
ppRA	0,018091	0,063213	0,033911	0,052729	0,052975	0,049020
ppRB	0,021429	0,054048	0,033911	0,053278	0,058896	0,038000

Tab. 3.4 Strategie 3 (A/B)

Strategie 3 je velmi silná, což je vidět z tabulky Tab. 3.4. Do zlomu ztráty síly dochází až u poslední dvojice 3/5. Což znamená, že jediné Strategie 5 danou strategii přehrála. Toto potvrzuje náš předpoklad, že jde opravdu o druhou nejsilnější strategii. V hrách proti strategiím 0 a 2, je Strategii 3 jedno, kdo hru začal, jestli on či hráč B. U zbylých strategií na pravděpodobnost výhry má vliv začínající hráč.

	4/0	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5
ppAA	<u>0,912485</u>	<u>0,624336</u>	<u>0,827376</u>	0,488779	<u>0,541086</u>	0,491075
ppAB	0,067489	0,321529	0,140892	0,452325	0,404948	0,458664
ppBB	0,081779	0,434036	0,162261	<u>0,560198</u>	0,506211	<u>0,633888</u>
ppBA	0,895560	0,510866	0,803567	0,386827	0,435407	0,326523
ppRA	0,020027	0,018091	0,031732	0,058896	0,053966	0,050261
ppRB	0,022661	0,055099	0,034171	0,052975	0,058382	0,039589

Tab. 3.5 Strategie 4 (A/B)

V této tabulce Tab. 3.5 vidíme sílu Strategie 4. Nejde o tak silnou strategii, jako byla předešlá, ale i tak se jedná o jednu ze silnějších strategií. Kromě dvojic 4/3 a 4/5 má hráč A jasně vyšší pravděpodobnost výhry, i když není začínajícím hráčem. U těchto dvou (4/3 a 4/5) má výhodu začínající hráč B.

	5/0	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5
ppAA	<u>0,932675</u>	<u>0,734572</u>	<u>0,88684</u>	<u>0,621815</u>	<u>0,633888</u>	0,517627
ppAB	0,054019	0,229168	0,093809	0,340184	0,326523	0,480969
ppBB	0,080162	0,386099	0,134562	0,504664	0,491075	<u>0,517725</u>
ppBA	0,902658	0,568154	0,843368	0,446316	0,458664	0,480893
ppRA	0,013305	0,020027	0,019351	0,038000	0,039589	0,001404
ppRB	0,017181	0,045747	0,022069	0,049020	0,039589	0,001382

Tab. 3.6 Strategie 5 (A/B)

Poslední tabulka Tab. 3.6 potvrzuje předpoklad, že Strategie 5 je nejsilnější strategií. Nejen kvůli tomu, že ppAA je skoro vždy nejvyšší, krom 5/5, kde se jedná o setiny, ale také kvůli tomu, že výhry hráče B jsou nejmeně pravděpodobné. Od dvojice 5/3 do konce je vidět, že začínající hráč má výhodu.

Ze všech tabulek je vidět, že v které hře má na výhru větší pravděpodobnost, dle porovnání ppAA vs. ppBA a ppBB vs. ppAB, začínající hráč.

Nejnižší pravděpodobnosti skončení hry remízou, dle začínajícího hráče A nebo B, jsou u Strategie 5, konkrétně u 5/5. Ukončení hry remízou nejsilnějšími strategiemi, je skoro nulové. V ostatních hrách jsou remízy setinné číslo, což značí malý výskyt. Z 21mil. všech her došlo k 844 762 remízám, což je každá 25 hra.

V další části práce se zaměříme na mé hrací schopnosti. Vyzkouším si hrát hry s předdefinovanými strategiemi.

3.5 Já vs. PC

S každou strategií jsem si zahrála 60 her. Předpokladem bylo, že budu hrát jako výše daná Strategie 5 a možná i chytřeji. S tímto předpokladem lze souhlasit po porovnání mých podmíněných pravděpodobností s výslednými podmíněnými pravděpodobnostmi Strategie 5.

Tabulka 3.7 obsahuje stejně definované podmíněné pravděpodobnosti, jako u zmíněných tabulek výše. Symbol L/0 označuje L, jako já Ludmila (L), kde hraji za hráče A, a 0 znamená Strategie 0, kde počítač hraje za hráče B. V každém sloupci jsou znovu zvýrazněny nejvyšší podmíněné pravděpodobnosti výher.

	L/0	L/1	L/2	L/3	L/4	L/5
ppAA	<u>1</u>	<u>0,84615</u>	<u>0,86667</u>	<u>0,73333</u>	<u>0,823529</u>	0,611111
ppAB	0	0,15385	0,13333	0,26667	0,176471	0,333333
ppBB	0	0,41176	0,14286	0,66667	0,428571	<u>0,615385</u>
ppBA	<u>1</u>	0,58824	0,85714	0,33333	0,571429	0,384615
ppRA	0	0	0	0	0	0,055556
ppRB	0	0	0	0	0	0

Tab. 3.7 Já proti počítači (A/B)

Se Strategií 0 jsem vyhrála všechny hry. A bylo jedno, jestli jsem hru začínala já nebo soupeř. S porovnáním s hrami, které hrál počítač (5/0), mám větší pravděpodobnosti výhry. To znamená, že hraji chytřeji jak Strategie 5.

Proti Strategie 1, už mé vítězství tak jasné není. Nejvíce jsem vyhrála hry, v kterých jsem byla začínající hráč. Vyhrála jsem i dost her, které začal protihráč. Ale i nějaké začínající hry jsem prohrála. Oproti následující Strategii 2 má začínající hráč B větší pravděpodobnost výhry se Strategií 1. Nejnížší pravděpodobnost výhry má hráč B, pokud hru začínám já. S touto strategií jsem hrála chytřeji než počítač.

I když jsem převážně hry vyhrávala, protihráč mě se Strategií 2 párkrát porazil. Ale vyhrála jsem i mnoho her, které začal protihráč. U her, kdy proti sobě hrály počítačové Strategie 5 a Strategie 2 jsou podmíněné pravděpodobnosti výher hráče A vyšší, což znamená, že počítačové Strategii 5 se podařilo v této kombinaci strategií hrát chytřeji.

U Strategie 3 jde vidět, že se jedná o jednu z chytřejších strategií. A to z toho důvodu, že začínající hráč má větší pravděpodobnost výhry, než hráč, který hru nezačíná. Oproti předešlým strategiím je zde velký vzrůst ppBB. S porovnání s hrami, které hrál počítač v kombinaci strategií 5/5 jsou mé hrací schopnosti lepší.

Strategie 4, dopadla podobně jako Strategie 1. Mé pravděpodobnosti výher jsou vyšší než protihráčovi pravděpodobnosti. Výhry pravděpodobnosti jsou s porovnáním počítače vyšší, kromě ppBB. To znamená, že když protihráč začínal, dala jsem mu nižší šance na výhru. Tedy podařilo se mi jeho začínající hry vyhrát pro sebe.

Nejchytřejší Strategie 5, znovu jako Strategie 3, ukazuje, že začínající hráč má znatelně větší pravděpodobnost výhry. Jelikož jde o silnou strategii, tyto pravděpodobnosti výher jsou nižší než u Strategie 3. Což znamená, že začínající hráč nemá vždy výhru tak

jasnou. S touto strategií, i když o tisíce jsem byla poražena. Ale oproti Strategii 5 jsem vyhrála více her, které začínal druhá hráč.

Ve svých 60 hrách jsem se zaměřila i množství zasetých fazolí v kalahách vítězného hráče na konci hry. Mým předpokladem je, že čím silnější strategie proti sobě hrají, tím je menší rozdíl zasetých fazolí v kalahah vítězného a poraženého hráče. Čili počet fazolí v kalahah vítězného hráče s chytřejší strategií klesá.

Aby hráč byl vítěz, je nutné mít na konci hry z celkových 48 fazolí, počet zasetých fazolí v kalahah více jak 24. Předpoklad o klesajícím počtu fazolí v kalahah vítězného hráče a síle strategií, stojí na tom, že s čím chytřejším protihráčem hrají, který se také snaží do své kalahah zasít co nejvíce fazolí, tím v každém tahu dochází ke snaze zasít co nejvíce fazolí do kalahah.

	L/0	L/1	L/2	L/3	L/4	L/5
průměr	36,4	33,6	33,2	33,2667	31,9	29,3871

Tab. 3.8 Fazole v kalahah vítězného hráče

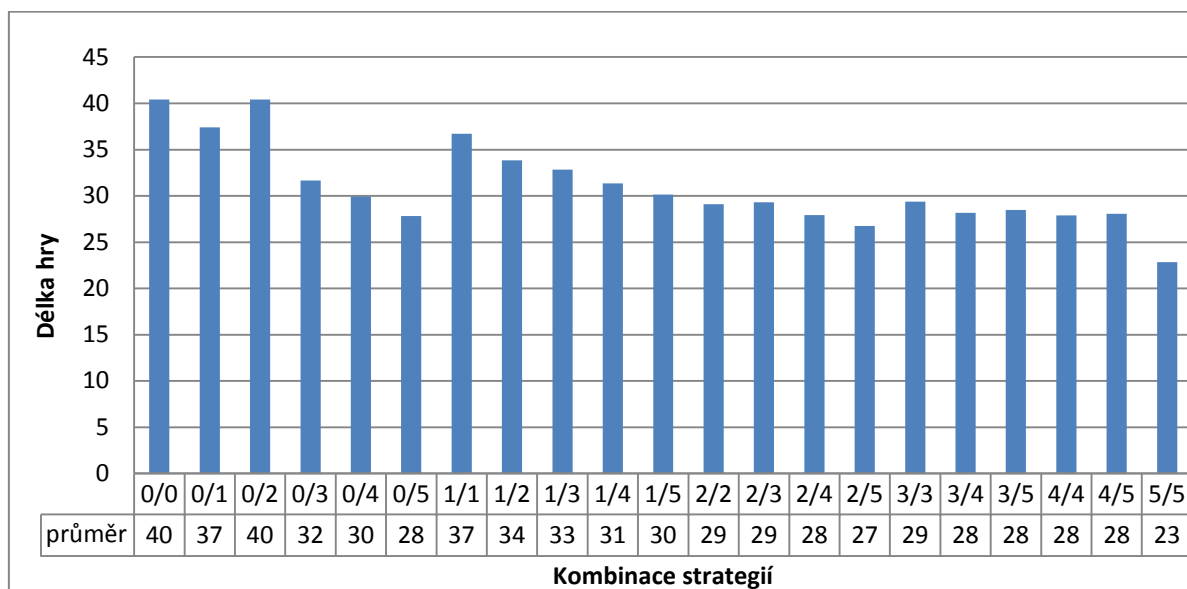
Průměry uvedené v tabulce Tab. 3.8 jsou vypočítány z počtu fazolí v kalahah vítězných hráčů na konci her, které jsou sečtené a vydělené šedesáti (60 her).

3.6 Délka hry

Zajímavým ukazatelem je i *délka hry*. Tou rozumíme počet tahů, které v dané hře hráči udělali. Za jeden tah považujeme, že hráč, který je na tahu, si zvolí jamku, s kterou bude hrát, vyjme všechny fazole z této jamky a s nimi provede setí. Tím se změní stav hry Kalaha a tah je u konce. Pokud by hráč hrál znovu, pak je toto bráno jako další tah.

Naším předpokladem bylo, že s čím silnější strategií, tedy s chytřejší, se bude hrát, bude se délka hry zkracovat. Tedy, čím silnější hra, tím méně tahů bude v dané hře potřeba. Tento předpoklad porovnáme s průměrnou délkou her každé dvojice strategií, viz Graf 3.1. Tento průměr jsme vytvořili z 1 miliónu her, kdy jsme proti sobě nechali hrát dvě zvolené strategie.

Nejdříve hráči A zafixujeme Strategii 0 a u hráče B strategie měníme, poté zafixujeme Strategii 1, atd. Jelikož jsou strategie přibližně seřazeny dle chytrosti, tak vidíme, že zvyšováním strategie dochází skoro vždy ke snižování délky hry. Nejvíce tahů mají hry 0/0 a 0/2, s průměrem 40,4 tahů ve hře. Za to nejméně tahů (22,8) mají hry 5/5. Tím se nám náš předpoklad potvrdil.



Graf 3.1 Průměr počtu tahů v 1mil. her pro dvě dané strategie

Překvapivým údajem je délka hry kombinace strategií 1/1. Průměrný počet tahů v této kombinaci je 36, 7. Očekávala jsem, že její délka bude rozhodně menší než délka her pro kombinace 1/2 a 2/2. A to z toho důvodu, že Strategie 1 je chytřejší. Toto je ale dosaženo tím, že budu hrát tahem *kalah-move*, který je pro Strategii 1 stěžejním tahem, vždy mi za tento tah budou napočítány dva tahy.

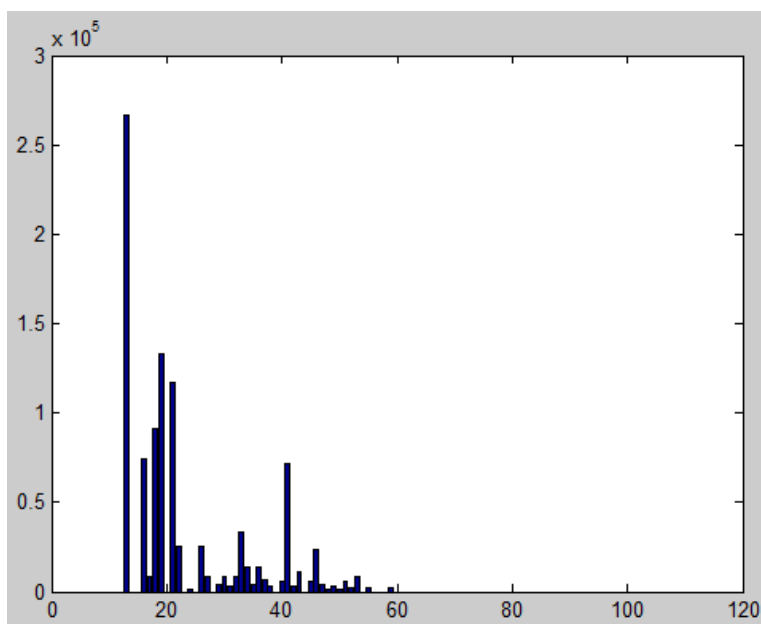
3.6.1 Histogramy

Pro každé dvojice strategií z 1 mil her, kde hrál počítač proti počítači, jsme si nechali vykreslit histogramy délek her. Většina z nich měla tvar podobný normálnímu rozdělení. Což nás překvapilo. Grafy uvádím v Příloze č. 2. Jedinou výjimkou jsou hry, v kterých vystupuje Strategie 5.

U těchto grafů dochází k velkému výskytu her s určitou délkou hry. S čím silnější strategií Strategie 5 hraje, tím více grafy přecházejí k deterministickému rozdělení. To

znamená, že určité délky her se nevyskytují vůbec, oproti tomu ty délky her, které se vyskytují, se vyskytují ve větších počtech. K tomuto dochází z toho důvodu, protože u Strategie 5, máme velké omezení na výběr jamky. Strategie má přesně daný výběr jamky a možnost výběru jamky náhodně je minimální.

Nejzajímavější jsou hry, kdy proti sobě hrají Strategie 5 (5/5), viz Graf 3.2. Možnosti výběru jamky jsou tak omezené, že hry s určitým počtem tahů mají o mnoho větší výskyt, než ostatní hry. Jedná se o hry, které mají 16 tahů. Vyskytují se každou čtvrtou hru (266 717 her z 1 mil z 5/5). Algoritmus je při kombinaci těchto strategií nastaven tak, že první tah je vždy tah *kalah-move* a druhý tah vybírá jamku náhodně. To znamená, že zvolení další jamky je $1/5$. U her s délkou 16 je v druhém tahu zvolena jamka *F*, když začíná hru hráč A nebo jamka *a*, pokud začíná hráč B. Jelikož pak v průběhu celé hry není možnost náhodného tahu, jako u zbylých her, proto je výskyt těchto her o tolik vyšší. Při kombinaci těchto strategií (5/5) se celkem objevuje 35 možných variant her.



Graf 3.2 Histogram délek her 5/5

U her s délkou 16 se tedy střídají jen dvě varianty her. A to jestli začíná hráč A, nebo hráč B. Obě tyto hry vyhrává nezačínající hráč. Až do devátého tahu jde o zrcadlené vybírání tahů (hráč A zvolí tahy $D + E$, na to hráč B zahraje tahy $c + b$). Do tohoto tahu je hra symetrická. Po těchto tazích začínajícímu hráči zůstaly na jeho straně plné pouze první tři jamky zprava, v kterých má tolik fazolí, že ať zvolí jakoukoliv jamku, vždy naseje nějaké fazole i do protihráčových jamek. Došlo k vyhladovění začínajícího hráče. Protihráč

si fazole přehazuje jen na své straně, dokud nedojde k vyčerpání plných jamek začínajícího hráče. Příklad 3.1 u notace je jedním z této her. Druhou variantu přikládám v Příkladu 3.2.

Příklad 3.2

1.D+
2.F(1)
3.c+
4.a(1)
5.E+
6.D(2)
7.b+
8.c(2)
9.A(3)
10.c(2)
11.C(4)
12.a(2)
13.A+
14.B[F](14)
15.a(2)
16.A+

-+

Závěr

V diplomové práci jsme se snažili čtenáře seznámit s hrou Kalaha, hru prozkoumat do hloubky a najít co nejsilnější deterministickou strategii.

Z teorie her jsme se zaměřili na její historii a na nejdůležitější osobnosti, které stáli u vzniku a rozvoji teorie her. Zaměřili jsme se také na matematiky, kteří byli oceněni Nobelovou cenou za ekonomii z oblasti teorie her. A na aplikační oblasti jako je biologie, ekonomie a právo, u kterých jsme uvedli konkrétní příklady. Dále jsme vyzdvihli základní pojmy a možné kvalifikace her dle různých kritérií. Zaměřili jsme se na dva základní modely. Prvním je hra v normálním tvaru, zde jsme podrobněji popsali hru s konstantním součtem, a maticové hry (hry s nulovým součtem). Druhým modelem je hra v rozšířené formě. Zde jsme se zabývali jeho popisem, graf strom. Poukázali jsme na jeho typy a možná prozkoumávání ve stromu.

Oproti bakalářské práci více popisují historii Mancala her a výskyt hracích desek v literaturách či uměleckých dílech. Uvádím různé tradiční Mancala hry a poté se zaměřuji na komerční hru Kalaha. Popisují přípravu hru a její pravidla.

Programovací technika prohledávání do hloubky stromu hry Kalaha jsme nakonec nepoužily z důvodu složitosti větvení stromu. Z bakalářské práce víme, že jen po první partii (po prvních tazích obou hráčů) dochází k 116 různým situacím. Proto jsme se omezili jen na šest vymyšlených strategií, které jsou podle mne dostačující.

Při vymýšlení strategií, které vybírají jamky dle zvolených pravidel, jsme se zaměřily zejména na tahy *capture* (poslední fazole vložena do prázdné jamky) a *kalah-move* (poslední fazole vložena do kalahah). Strategie 1 volí jamku tahem *kalah-move*, ale pokud tento tah nelze zvolit je jamka vybrána náhodně. Strategie 2 se zaměřuje na tah *capture*, ale jako u Strategie 1, pokud nelze hrát tímto tahem je jamka vybrána náhodně. Další dvě strategie jsou kombinace dvou zmíněných strategií. Strategie 3 volí vhodnou jamku nejdříve z pohledu tahu *kalah-move* a poté z tahu *capture*. Za to Strategie 4 zkoumá výběr jamky obráceně, nejdříve se zaměří na tah *capture* a poté na tah *kalah-move*. Dále jsme vymysleli Strategie 5, která vybírá jamky s větší rozvahou. V tahu zkoumá možná ohrožení druhým hráčem, snaží se vhodným výběrem jamky ohrozit protihráče a být vždy o jeden tah napřed. Kvůli možnému porovnávání strategií jsme naprogramovali i Strategie 0, která vybírá jamky náhodně.

Předpoklad o síle (chytrosti) vymyšlených strategií se nám potvrdit. Sílu každé strategie jsme zjistily z podmíněných pravděpodobností na výhru v porovnání s ostatními kombinacemi strategií, které jsme pro danou kombinaci dvou strategií vypočetli z 1 mil her. Nejslabší je náhodná Strategie 0, a těsně za ní Strategie 2 s tahem *kalah-move*. Poté následuje Strategie 1 s tahem *capture*. Dále jsou kombinace těchto tahů a to v pořadí Strategie 4 a Strategie 3. A jako nejsilnější strategií se nám potvrdila Strategie 5.

V porovnání vymyšlených strategií s mými hracími schopnosti se nám předpoklad, že budu hrát stejně či lépe jak Strategie 5, potvrdil. Sice dle hodnoty nejvyšší podmíněné pravděpodobnosti mě počítač porazil, tedy podmíněné pravděpodobnosti výhry počítačem v hrách, které začíná počítač, jsou vyšší (jen o setiny) než mé podmíněné pravděpodobnosti výhry, u her kdy hru začínám já, avšak jsem uhrála více her, v kterých začínal počítač, proto se troufám považovat za silnějšího hráče než Strategie 5.

V mých hrách jsme se také zaměřili na počet zasetých fazolí v kalahah vítězného hráče na konci hry. Předpoklad o klesajícím počtu fazolí v kalahah u her s chytřejší strategií se nám potvrdil.

Další předpoklad o síle strategie a délce hry se nám také potvrdil. Délkou hry myslíme počet tahů, které v dané hře hráči udělali. A zjistili jsme, že čím chytřejší hráči spolu hrají, tím hra bude kratší. To znamená, že délka hry závisí na chytrosti hráčů.

Zajímavé se ukázaly histogramy délek her. Oproti ostatním strategiím u Strategie 5 dochází k přechodu od tvaru připomínající normální rozdělení k deterministickému rozdělení. Což je způsobeno omezeným výběrem vhodné jamky dle Strategie 5.

Literatura

- [1] Arneson, E., *Mancla: Basics, History and Origin of the Mancala Board Game* [online], dostupné z: <http://boardgames.about.com/od/mancala/p/mancala.htm>, [citováno 9. 11. 2016].
- [2] *Česká federace mankalových her* [online], dostupné z: <http://www.mankala.cz/index.html>, [citováno 16. 2. 2017].
- [3] Dlouhý, M.; Fiala, P., *Úvod do teorie her*, 1. vydání. Oeconomica, Praha 2007.
- [4] Dlouhý, M.; Fiala, P., *Úvod do teorie her*, 2. vydání. Oeconomica, Praha 2009.
- [5] Doňar, B.; Zaplatílek, K., *MATLAB pro začátečníky*, 2. vydání. BEN - technická literatura, Praha 2005.
- [6] Gering, R., *Timeline* [online], dostupné z: <http://mancala.wikia.com/wiki/Timeline>, [citováno 2. 11. 2016].
- [7] Hykšová, M. *Historické počátky teorie her* [online]. FD ČVUT, 2004, dostupné z: http://euler.fd.cvut.cz/predmety/game_theory/files/Hyksova2004a.pdf, [citováno 9. 9. 2016].
- [8] Chobot, M.; Turnovec, F., *Teória hier*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislave, Bratislava 1967.
- [9] Chvoj, M., *Pokročilá teorie her*, 1. vydání. Grada Publishing, a.s., Praha 2013.
- [10] Irfving, G.; Donkers, J.; Uiterwijk, J., *Solving Kalah* [online], dostupné z: <http://www.fdg.unimaas.nl/educ/donkers/pdf/kalah.pdf>, [citováno 13. 12. 2016].
- [11] Jobson, R., *The Golden Trade*. Dawson's of Pall Mall, London 1623.
- [12] *Kalaha* [online], dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Kalah>, [citováno 1. 12. 2016].
- [13] Korda, B., *Matematické metody v ekonomii*. SNTL, Praha 1967.
- [14] Mañas, M., *Teorie her a její ekonomické aplikace*, 2. vydání. SPN, Praha 1988.

- [15] Mañas, M., *Teorie her a konflikty zájmů*. Oeconomica, Praha 2002.
- [16] Mañas, M., *Teorie her a optimální rozhodování*. SNTL, Praha 1974.
- [17] *Mancala* [online], dostupné z: <http://en.wikipedia.org/wiki/Mancala>, [citováno 24. 11. 2016].
- [18] Moutelík, T.; Raida, V.; Sedláček, V., *Teorie her* [online], dostupné z: <http://www.pupa.6f.sk/studenti/hry.pdf>, [citováno 18. 10. 2016].
- [19] Murray, HJR, *A History of Board-Games Other Than Chess*, Clarendon Press, Oxford 1952.
- [20] *Nobel Prize* [online], dostupné z: <https://www.nobelprize.org/>, [citováno 2. 2. 2017].
- [21] Pavel Töpfer, *Algoritmy a programovací techniky*. PROMETHEUS, s.r.o., Praha 1995.
- [22] Peliš, M., *Teorie her jako formální teorie racionálního rozhodování* [online], dostupné z: <http://web.ff.cuni.cz/~pelis/gt-pelis.pdf>, [citováno 18. 10. 2016].
- [23] Russ, L., *Mancala Games*, 1. vydání. Reference Publications Inc., Algonac (Michigan) 1984.
- [24] Říha, O., *Základy teorie her, Text pro profesory gymnasií*. JČSMF, Praha 1973.
- [25] Sankt, P., *Mancala Guide* [online], dostupné z: <https://www.unknowns.de/wbb4/lexicon/index.php?entry/8-mancala-guide/>, [citováno 21. 11. 2016].
- [26] Širůček, P., *Polozapomenuté postavy ekonomického myšlení*, ACTA OECONOMICA PRAGENSIA, 23(3), 2015.
- [27] Smith, J. Maynard; Price, G. R., *The Logic of Animal Conflict*. Nature, 246(11), 1973.
- [28] Škubalová, L., *Salónní hry*, bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc 2013.

- [29] Talašová, J., *Matematická teorie rozhodování*, skripta v rámci Investice do rozvoje vzdělávání (CZ.1.07/2.2.00/15.0243). Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc 2014.
- [30] Von Neumann, J., Morgenstern, O, *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press, Princeton, 2004.
- [31] Wee ee Ching, *Analysis of Kalah* [online], dostupné z:
<http://www.math.nus.edu.sg/~urops/Projects/Kalah%28Wee%29.pdf>, [citováno 10. 12. 2016].

Přílohy

1. 1 Základní algoritmus tahu

```
% hlavní program, vytvoření herní desky pomocí dvou vektorů s 6ti prvky,
% což bude představovat 6 jamek pro každého hráče a dvou cifer, což budou
% kalahah obou hráčů
kalah.A = 4*ones(1,6);
kalah.B = 4*ones(1,6);
kalah.kalA = 0;
kalah.kalB = 0;

% náhorně určíme, který hráč hru začne
if rand < 0.5
    hraje = 'A';
else
    hraje = 'B';
end

% podmínka, že hráč má alespoň něco v 6ti jamkách, tedy není konec hry
podmA = any(kalah.A~=0);
podmB = any(kalah.B~=0);
pocet == 0; % počítání počtu tahů ve hře

% podmínka, je potvrzena, tzn., že hráči nějaké fazole v jamkách mají a
% hra tedy může pokračovat
while podmA && podmB
    pocet = pocet+1;
    strategie == 0; % strategie, podle které je vybrán tah (Strategie 0
                    % (=0) až Strategie 5 (=5))
    tah = vybertah(strategie, hraje, kalah)
    [kalah, hraje] = udelejtah2(kalah, hraje, tah); % funkce setí
    podmA = any(kalah.A ~= 0); % hráč A alespoň něco má
    podmB = any(kalah.B ~= 0);

% funkce setí
function [argout1, argout2] = udelejtah2(argin1,argin2,argin3)

% dostaneme stav hry (argin1)
% kdo hraje (argin2)
% a kterou jamku hráč vybral (argin3)

% vejde nový stav hry (argout1)
% a kdo je na tahu (argout2)

kalah = argin1;
kdo = argin2;
tah = argin3;

% řešíme kdo je kdo, a ten co je na tahu je vždy ten první
if kdo=='A'
    prvni = kalah.A;
    druhy = kalah.B;
    prvnik = kalah.kalA;
    druhyk = kalah.kalB;
end

if kdo=='B'
```

```

    prvni = kalah.B;
    druhy = kalah.A;
    prvnik = kalah.kalB;
    druhyk = kalah.kalA;
end

% kontrola zda hraji s 48 fazolemi
kontrola = sum(prvni) + sum(druhy) + prvnik + druhyk;
if kontrola ~= 48
    error('Spatny pocet kamenu!')
end

kolik = prvni(tah); % počet fazolí, které se nachází ve vybrané jamce
prvni(tah)=0;

% učím, v jakém pořadí bude setí probíhat, tzn., začnu v setí na své
straně hrací desky, své kalahah, a poté na protihráčově strana hrací
desky, jeho kalahah vynechám
if kdo=='A'
    pom = [prvni(6:(-1):1) prvnik druhy];
    pos = 7 - tah; % od této pozice začnu sít fazole
else % hraje B
    pom = [prvni prvnik druhy(6:(-1):1)];
    pos = tah; % od této pozice začnu sít fazole
end

while kolik > 0 % dokud mám nějaké fazole v ruce
    pos = pos + 1;
    if pos > 13,
        pos = pos - 13;
    end
    pom(pos) = pom (pos) + 1;
    kolik = kolik - 1;
end

if kdo=='A'
    prvni = pom(6:(-1):1);
    prvnik = pom(7);
    druhy = pom(8:13);
else
    prvni = pom(1:6);
    prvnik = pom(7);
    druhy = pom(13:(-1):8);
end
% setí je hotovo

% vložil jsem poslední fazoli do své prázdné jamky, tzn., vložím si do
kalahah jak tuto poslední fazoli, tak i fazole z protihráčovy jamky
if kdo == 'A'
    if (pos <= 6) && (prvni(7-pos) == 1)
        prvni(7-pos) = 0;
        prvnik = prvnik + 1 + druhy(7-pos);
        druhy(7-pos) = 0;
    end
else % hraje B
    if (pos <= 6) && (první(pos)==1)
        prvni(pos) = 0;
        prvnik = prvnik + 1 + druhy(pos);
        druhy(pos) = 0;
    end
end
end

```

```

% rozhodnu, kdo hraje dál
if kdo == 'A' % hrál A
    if pos ~= 7 % neskončil ve svém kalahah, tzn., bude na tahu hráč B
        argout2 = 'B';
    else % skončil ve svém kalahah, tzn., hraje znovu hráč A
        argout2 = 'A';
    end
else % hrál B
    if pos~=7 % neskončil ve svém kalahah
        argout2 = 'A';
    else % skončil ve svém kalahah
        argout2 = 'B';
    end
end

% do dalšího tahu určíme to, že ten co je na tahu je první
if kdo == 'A'
    kalah.A = prvni;
    kalah.B = druhy;
    kalah.kalA = prvnik;
    kalah.kalB = druhyk;
else
    kalah.A = druhy;
    kalah.B = prvni;
    kalah.kalA = druhyk;
    kalah.kalB = prvnik;
end

argout1 = kalah; % na závěr funkce vrátí aktuální stav kalah

% konec hry, tzn., jeden hráč má už prázdné jamky a druhému se zbytek
jeho fazolí v jamkách přenesse do kalahah
if sum(kalah.A) == 0
    kalah.kalB = kalah.kalB + sum(kalah.B);
    kalah.B = zeros(6,1);
end
if sum(kalah.B) == 0
    kalah.kalA = kalah.kalA + sum(kalah.A);
    kalah.A = zeros(6,1);
end
end % k podmínce, že oba něco mají

%% dle počtu fazolí v kalahah se určí který z hráčů je vítěz, a vypíše
výsledek hry, tzn., buď vítěze, nebo remízu

if kalah.kalA > kalah.kalB
    disp('Vyhrál hrac A');
end

if kalah.kalA < kalah.kalB
    disp('Vyhrál hrac B');
end

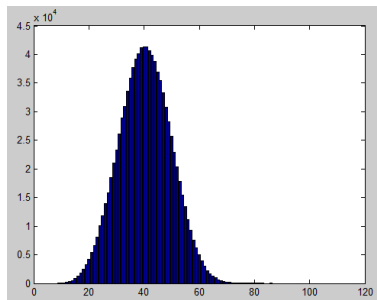
if kalah.kalA == kalah.kalB
    disp('Remíza');
end

```

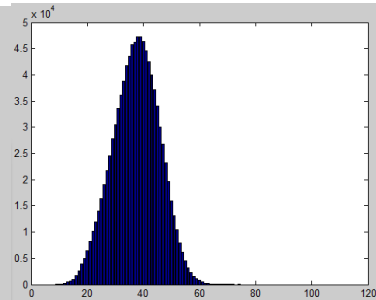
1.2. Histogramy

Histogramy délky her z 1 mil her, kde proti sobě hrají počítače proti sobě dle zadané strategie (strategie hráče A/strategie hráče B).

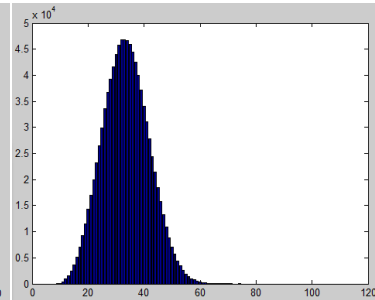
0/0



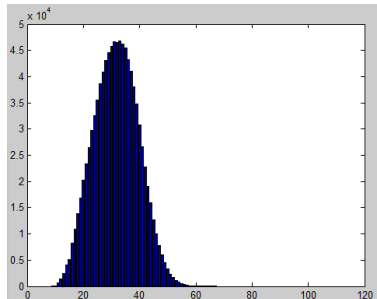
0/1



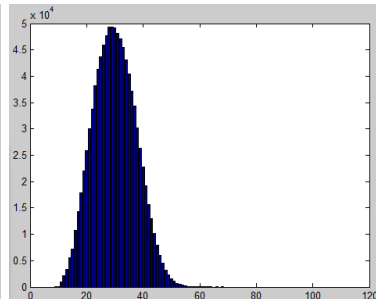
0/2



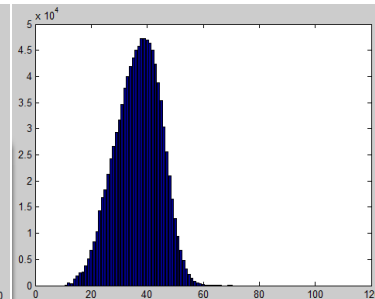
0/3



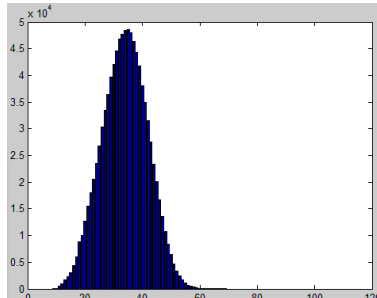
0/4



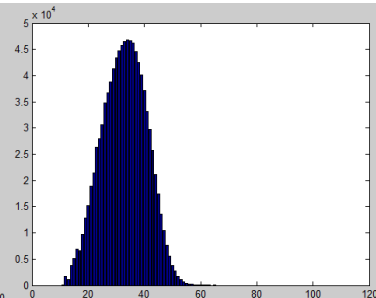
1/1



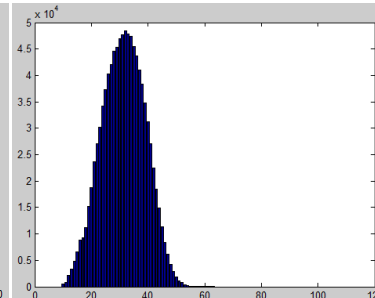
1/2



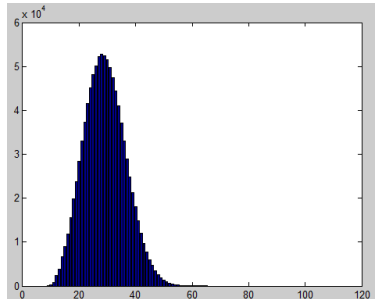
1/3



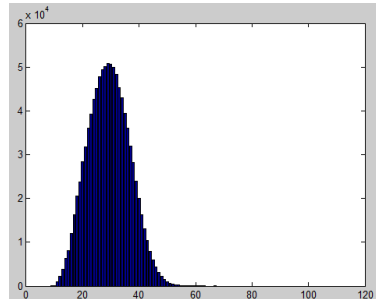
1/4



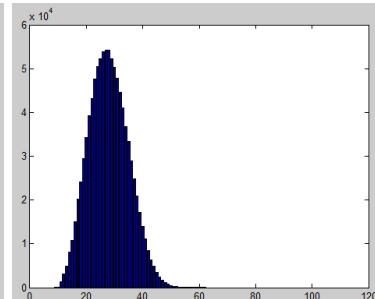
2/2



2/3



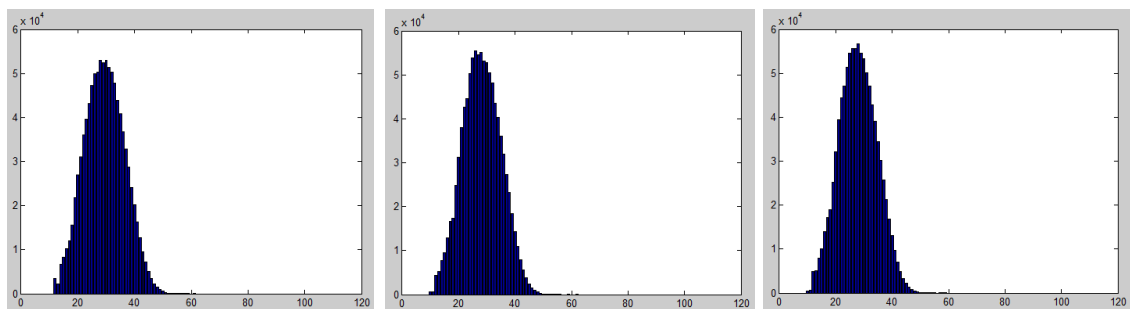
2/4



3/3

3/4

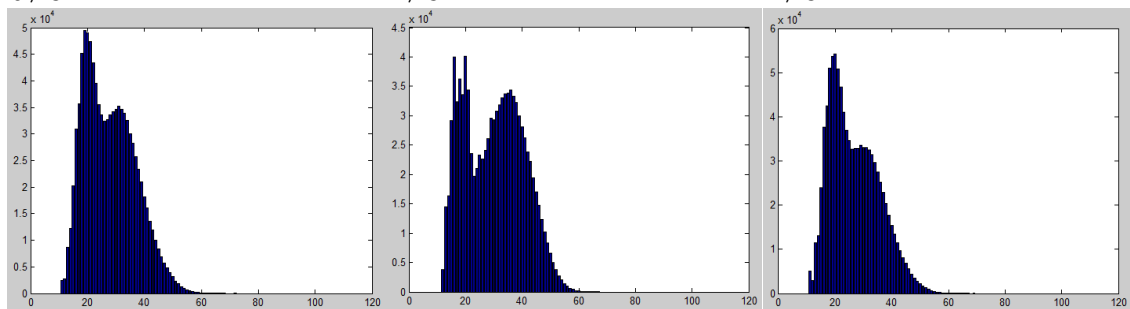
4/4



0/5

1/5

2/5



3/5

4/5

5/5

