

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kořist a dravec



Vedoucí bakalářské práce:  
**prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.**  
Rok odevzdání: 2013

Vypracovala:  
**Petra Běhalová**  
ME-B, III. ročník

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně za vedení prof. RNDr. Ireny Rachůnkové, DrSc. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 26. dubna 2013

## **Poděkování**

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí diplomové práce prof. RNDr. Ireně Rachůnkové, DrSc. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích.

# Obsah

|                                                                                              |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Úvod</b>                                                                                  | <b>4</b>  |
| <b>1 Podstata a základní pojmy matematického modelování</b>                                  | <b>5</b>  |
| 1.1 Sestavení matematického modelu . . . . .                                                 | 6         |
| <b>2 Diferenciální rovnice 1. řádu</b>                                                       | <b>8</b>  |
| 2.1 Základní pojmy . . . . .                                                                 | 8         |
| 2.2 Geometrická interpretace rovnice 1.řádu . . . . .                                        | 8         |
| 2.3 Systémy lineárních diferenciálních rovnic v rovině . . . . .                             | 9         |
| 2.4 Autonomní systémy nelineárních diferenciálních rovnic v rovině .                         | 10        |
| 2.5 Typy singulárních bodů v rovině . . . . .                                                | 11        |
| <b>3 Lotka Volterra model</b>                                                                | <b>14</b> |
| 3.1 Počátek modelu . . . . .                                                                 | 14        |
| 3.2 Typy interakcí mezi dvěma populacemi . . . . .                                           | 15        |
| 3.3 Základní model Lotka-Volterra ve tvaru soustavy diferenciálních<br>rovníc . . . . .      | 17        |
| 3.4 Hamiltonovské systémy . . . . .                                                          | 24        |
| 3.5 Vnější působení na populace (lov, rybolov, apod.) . . . . .                              | 28        |
| <b>4 Populační model s vnitrodruhovou konkurencí</b>                                         | <b>32</b> |
| 4.1 Odvození populačního modelu s vnitrodruhovou konkurencí . . . .                          | 32        |
| 4.2 Metody linearizace . . . . .                                                             | 33        |
| 4.3 Klasifikace singulárních bodů lineárních systémů s konstantními<br>koeficienty . . . . . | 36        |
| 4.4 Vyšetření populačního modelu s vnitrodruhovou konkurencí . . .                           | 38        |
| <b>Závěr</b>                                                                                 | <b>40</b> |
| <b>Literatura</b>                                                                            | <b>41</b> |

## Úvod

Cílem této práce je odvození a vyšetření populačních modelů typu kořist-dravec. Na základě hypotéz o populacích byly odvozeny tři modely. Nejprve model bez vnitrodruhové konkurence. Protože tento model má nehyperbolický singulární bod, nelze u něj použít metodu linearizace. Z toho důvodu je vyšetřen pomocí Hamiltonovských systémů. Druhým modelem je model zahrnující rybolov. Rovněž tento systém má nehyperbolický singulární bod, proto opět nelze použít metody linearizace. Metody linearizace byly použity u třetího modelu, tj. modelu s vnitrodruhovou konkurencí, neboť jeho singulární bod je hyperbolický. Následně pro konkrétní volby parametrů byly vytvořeny fázové portréty, pomocí nichž je popsán dlouhodobý vývoj obou populací.

# 1 Podstata a základní pojmy matematického modelování

**Modelem** označujeme zobrazení zkoumané skutečnosti (např. vývoj populací různých živočichů, měny atd). **Modelováním** rozumíme účelové zobrazování daných vyšetřovaných vlastností zkoumané skutečnosti pomocí vhodně zvolených vlastností modelu. Hlavním úkolem matematického modelování je popsání různých systémů z okolního světa pomocí matematických modelů. To jsou modely vytvořené pomocí matematických výrazových prostředků, které se dělí podle následujících kritérií:

## 1. Podle času jejich vzniku

Zde jsou prostředky matematického modelování uspořádány chronologicky např.:

- ekonometrie (1930) – obor využívající metody matematické statistiky při ověřování ekonomických teorií na naměřených datech,
- strukturní analýza (1939) – způsob, kterým zkoumáme vztahy uvnitř složitých ekonomických systémů,
- teorie her (1944) – oblast matematiky zabývající se analýzou a řešením různých konfliktních situací s cílem nalézt vhodnou strategii pro danou situaci,
- lineární programování (1947) – oblast matematiky, která se zabývá tvorbou a řešením různých optimalizačních problémů popsanych pomocí lineárních funkcí.

## 2. Podle neurčitosti zpracovávaných dat

- deterministické – tj. takové, v nichž vystupují veličiny s hodnotami, které nejsou spojeny s žádnou mírou neurčitosti (prvky nejsou stochastické),

- stochastické – tj. takové, v nichž se k popisu dané skutečnosti používá náhodných veličin,
- fuzzy – tj. takové, v nichž je potřeba modelovat vágní významy proměnných. Fuzzy množiny slouží jako nástroj k modelování těchto vágních pojmů.

### 3. Podle nutnosti zohledňovat čas

- statické – nezávislé na čase, faktor času neuvažujeme vůbec,
- dynamické – závislé na čase, faktor času nelze opomenout. Dynamické modely rozlišujeme na diskrétní a spojitý. Zejména podle toho, zdali pracujeme s diskrétními časovými úseky, či se spojitým časem.

### 4. Podle účelu, ke kterému má sloužit

- deskriptivní – daný systém chceme čistě jen popsat,
- optimalizační – daný systém chceme nějakým způsobem optimalizovat.

## 1.1 Sestavení matematického modelu

Matematický model, který se mění v průběhu, tj. v čase a je tedy závislý na této veličině podle určitých předem stanovených pravidel, se nazývá dynamický systém.

Matematický model umožňuje:

- objasnit: chování studovaného systému a jeho změny v chování, citlivost systému na změny parametrů,
- předpovědět: budoucí změny v chování daného systému a v jakém časovém okamžiku dojde k jejich nastoupení.

**Sestavení modelu:**

- Formulace problému, vyslovení hypotéz.

- Určení studovaných proměnných.
- Převedení hypotézy do matematických vzorců vyjadřující vztahy mezi proměnnými.
- Odvození matematického modelu.
- Analýza modelu matematickými metodami, tzn. určení kritických, periodických bodů a následné sestavení fázového portréту.
- Interpretace fázového portréту, jinak řečeno popsání s jeho pomocí chování daného systému.
- Ověření v praxi, tzn. zkoumáme, zda hypotetický model vyhovuje kritériu, dále zjistíme, zda mají námi získané informace smysl, dostatečnou přesnost. Také, zda odpovídají empirickým výsledkům. Není-li tomu tak, model změníme, či upřesníme. Např. přidáme další hypotézy, které lépe specifikují testovanou skutečnost, lineární koeficienty nahradíme nelineárními apod.

Významnou skupinu představují matematické modely v podobě **diferenciálních rovnic**. V obyčejných diferenciálních rovnicích figuruje čas  $t$  jako jediná nezávisle proměnná, ostatní proměnné jsou funkcemi času. Jejich změna odpovídá jejich derivaci.



## 2 Diferenciální rovnice 1. řádu

Tato kapitola vychází z [2]. 9

### 2.1 Základní pojmy

Buď  $G$  podmnožina euklidovského prostoru  $R^2$  a  $f$  reálná funkce definovaná na  $G$ . Rovnice

$$y' = f(x, y), \quad ' = \frac{d}{dx} \quad (1)$$

se nazývá diferenciální rovnice 1. řádu. Řešením této rovnice rozumíme funkci  $y$ , která je diferencovatelná v nějakém intervalu  $J$  a splňuje podmínky

$$[x, y(x)] \in G \quad \text{a} \quad y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{pro každé} \quad x \in J.$$

Buď  $[x_0, y_0]$  libovolný bod v  $G$ . Úloha určit řešení rovnice (1), které splňuje počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0, \quad (2)$$

se nazývá počáteční úloha (počáteční problém). Může se stát, že daný počáteční problém nemá řešení nebo má řešení více. Nastane-li taková situace, že existuje řešení  $y$  počátečního problému (1), (2), které není zúžením žádného jiného řešení, nazývá se  $y$  úplné řešení. Existuje-li úplné řešení počátečního problému (1), (2) takové, že každé jiné řešení tohoto problému je jeho zúžením, budeme stručně říkat, že daný problém má právě jedno řešení. Obecným řešením rovnice (1) budeme rozumět funkci záviselou na jednom parametru  $C$  takovou, že speciální volbou  $C$  lze získat řešení každého počátečního problému (1), (2).

### 2.2 Geometrická interpretace rovnice 1.řádu

Diferenciální rovnice (1) přiřazuje každému bodu  $[x, y]$  definičního oboru  $G$  funkce  $f$  právě jednu hodnotu  $y'(x)$ , kterou můžeme chápat jako směrnici přímky

procházející bodem  $[x, y]$ . Tuto přímku budeme znázorňovat v souřadnicové rovině krátkou úsečkou, která má střed v bodě  $[x, y]$ . Nazývá se lineární element. Množinu všech lineárních elementů nazýváme směrové pole dané rovnice. Graf  $y$  (integrální křivka  $y$ ) má zřejmě tu vlastnost, že jeho tečna v každém bodě  $[x, y(x)]$  obsahuje příslušný lineární element, tudíž směrové pole dává velmi dobrou představu o integrálních křivkách.

## 2.3 Systémy lineárních diferenciálních rovnic v rovině

Buď

$$x'_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + b_1(t), \quad x'_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + b_2(t), \quad (3)$$

systém lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu, kde  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  a  $b_1$ ,  $b_2$  jsou spojitě reálné funkce na nějakém intervalu  $I$  (připouští se i interval  $I = (-\infty, \infty)$ ) a  $'$  označuje derivaci dle  $t$ .

**Poznámka 2.1.** *Dále budeme kvůli jednoduchosti a přehlednosti užívat vektorové a maticové symboliky.*

Rovnice

$$x' = A(t)x + b(t) \quad (4)$$

kde  $A$  je maticová funkce, tj.

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

a  $b$  je vektorová funkce, tj.  $b(t) = (b_1(t), b_2(t))$ , které jsou definované na nějakém intervalu  $I$ , představuje systém lineárních diferenciálních rovnic (3).

Její řešení budeme rozumět vektorovou funkci  $x = (x_1, x_2)$ , která která je diferencovatelná na nějakém podintervalu intervalu  $I$  a splňuje podmínku  $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$  pro každé  $t \in I$ .

V případě, že  $b(t) = 0$ , rovnice (4) se nazývá homogenní, v opačném případě nehomogenní.

Rovnice  $x' = A(t)x$  se nazývá přidružená k rovnici (4). Řešení rovnice (4) se nazývá úplné řešení, když není zúžením žádného jiného řešení rovnice (4).

Buď  $t_0 \in I, \xi \in R^2$ . Problém určit řešení  $x$  rovnice (4) splňující podmínku  $x(t_0) = \xi$ , se nazývá počáteční (Cauchyho) problém nebo také počáteční (Cauchyho) úloha. Tato počáteční Cauchyho úloha je zapsána ve tvaru

$$x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = \xi. \quad (5)$$

## 2.4 Autonomní systémy nelineárních diferenciálních rovnic v rovině

Buď

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2), \quad x'_2 = f_2(x_1, x_2), \quad (6)$$

systém nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu, kde vektorová funkce  $f = (f_1, f_2)$  je definovaná na nějaké oblasti  $\Omega$  v prostoru  $R^2$ . Systém (6) se nazývá autonomní systém. Často bývá  $\Omega = R^2$ . Oblast  $\Omega$  se nazývá fázová rovina.

Systém (6) lze zapsat ve vektorovém tvaru

$$x' = f(x). \quad (7)$$

Za řešení rovnice (7) budeme opět považovat vektorovou funkci  $x = (x_1, x_2)$ , která je diferencovatelná na nějakém podintervalu intervalu  $I$  a splňuje rovnici  $x'(t) = f(x(t))$  pro každé  $t \in I$ .

Řešení  $x = (x_1, x_2)$  rovnice můžeme interpretovat buďto jako graf funkce  $x$  v prostoru  $R \times \Omega$  nebo jako křivku v prostoru  $\Omega$ . Tato křivka se nazývá orbita systému (6). Je to kolmý průmět grafu funkce  $x$  z množiny  $R \times \Omega$  do  $\Omega$ .

**Věta 2.1.** (*O existenci a jednoznačnosti*): *Nechť  $G$  je otevřená podmnožina  $R^2$  a funkce  $f$  má spojitě všechny parciální derivace na množině  $G$  a nechť  $\xi \in G$ . Potom počáteční úloha*

$$x' = f(x), \quad x(0) = \xi$$

má jediné řešení definované na maximálním intervalu  $I(\xi)$ , který obsahuje 0.

**Definice 2.1.** Bod  $x_0$  se nazývá *singulární bod* (*kritický bod*, *stacionární bod*, *rovnovážný bod*) rovnice (7), jestliže  $f(x_0) = 0$ .

Orbita rovnice (7) se nazývá *cyklus*, jestliže je uzavřenou křivkou. Bod  $x_0$  je zřejmě singulárním bodem právě tehdy, když (7) má konstantní řešení  $x(t) = x_0$ , pro  $t \in (-\infty, \infty)$ .

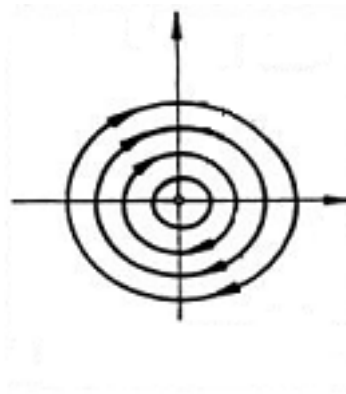
**Věta 2.2.** Autonomní systém (7) může mít orbity trojího typu:

1. *Singulární body. Odpovídají konstantním řešením.*
2. *Uzavřené orbity (cykly). Odpovídají nekonstantním periodickým řešením.*
3. *Orbity, které samy sebe neprotínají.*

## 2.5 Typy singulárních bodů v rovině

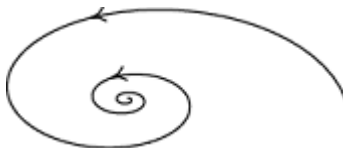
Singulární bod  $x_0$  rovnice (7) se nazývá:

**střed**, když existuje redukované okolí  $U$  bodu  $x_0$  takové, že každým bodem  $a \in U$  prochází jediná orbita, která je uzavřená a obsahuje ve svém vnitřku bod  $x_0$ ;

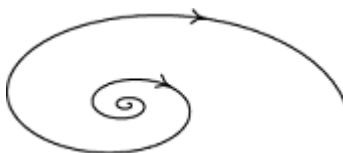


Obrázek 1: Střed

**ohnisko**, když existuje redukované okolí  $U$  bodu  $x_0$  takové, že bod  $x(t)$  orbity  $x$  vycházející z libovolného bodu  $a \in U$  má tu vlastnost, že konverguje pro  $t \rightarrow \infty$  nebo  $t \rightarrow -\infty$  k  $x_0$ , a to tak, že velikost orientovaného úhlu vektoru  $x_0x(t)$  od nějakého pevného vektoru  $x_0x_1$  má nevlastní limitu;



Obrázek 2: Stabilní ohnisko

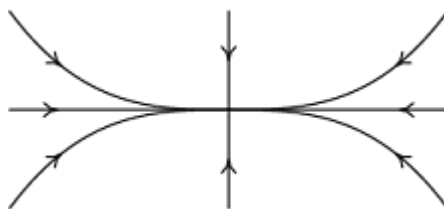


Obrázek 3: Nestabilní ohnisko

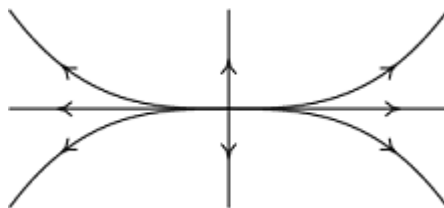
**uzel**, když existuje redukované okolí  $U$  bodu  $x_0$  takové, že pro bod  $x(t)$  orbity  $x$  vycházející z libovolného bodu  $a \in U$  platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0,$$

přičemž velikost orientovaného úhlu vektoru  $x_0x(t)$  od nějakého pevného vektoru  $x_0x_1$  má konečnou limitu;



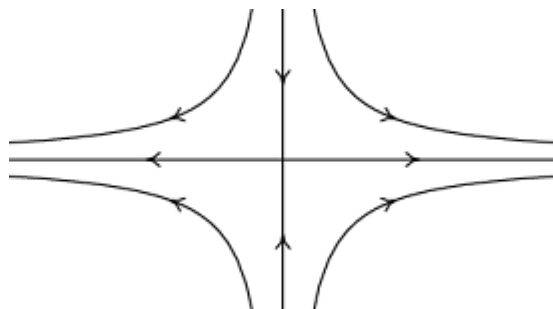
Obrázek 4: Stabilní uzel



Obrázek 5: Nestabilní uzel

**sedlo**, když existuje jen konečný počet orbit, pro jejichž bod  $x(t)$  platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0.$$



Obrázek 6: Sedlo

Ohnisko nebo uzel nazýváme stabilní, jestliže všechny orbity do něj konvergují pro  $t \rightarrow \infty$ , tj. všechny trajektorie z nějakého okolí směřují do tohoto bodu. V opačném případě tento bod nazýváme nestabilní.

## 3 Lotka Volterra model

Tato kapitola vychází z [2], [3], [4].

### 3.1 Počátek modelu

Tento model, označovaný též jako Dravec a kořist, byl pojmenován podle autorů, kteří jej odvodili a vyvinuli současně, nezávisle na sobě. Označení Lotka Volterra vzniklo spojením jejich jmen Alfred J. Lotka a Vito Volterra.

**Alfred James Lotka** (1880 – 1949) se narodil ve Lvově. Byl americký matematik, chemik a ekolog, který odvodil tento model, na základě rovnic studovaných V. Volterrou, v roce 1925 k popisu chemické reakce. Do Spojených států přišel roku 1902 a napsal zde mnoho teoretických článků o chemických oscilacích. Napsal také knihu o teoretické biologii (1925). Po zbytek svého pracovního života strávil v pojišťovací společnosti (Metropolitan Life). Stal se prezidentem PAA (Population Association of America).



Obrázek 7: Alfred James Lotka

**Vito Volterra** (1860 – 1940) byl italský matematik a fyzik, nejvíce známý pro jeho příspěvky k matematické biologii. Narodil se v Anconě. Jeho práce jsou obsaženy v knihách jako jsou Teorie funkcionalu, Integrál a Integro-diferenciální rovnice (1930). V roce 1922 se připojil k opozici vůči fašistickému režimu Benita Mussoliniho a v roce 1931 odmítl složit povinnou přísahu věrnosti. Kvůli tomu se

musel vzdát univerzitního postu atd. Poté odešel do zahraničí a těsně před svou smrtí se vrátil do Říma. Po 1. Světové válce byl nejslavnějším výsledkem tohoto období model Lotka-Volterra. V roce 1915, kdy Itálie vyhlásila válku Rakousku, byly v mnoha přístavech v Jaderském moři ukryty miny proti obávaným invazím. Důsledkem bylo pozastavení rybolovu. Po skončení 1. Světové války se očekávaly lepší úlovky, neboť populace ryb měla čas k jejímu doplnění. Nestalo se tak. Vito Volterra se poté snažil naleznout vysvětlení tohoto jevu. Možným řešením je označován model Lotka Volterra.



Obrázek 8: Vito Volterra

Model Lotka Volterra je jedním z prvních a také nejjednodušších modelů dravec-kořist založen na matematických principech. Popisuje vzájemnou interakci mezi dvěma druhy populací v ekosystému, kde jedna populace představuje dravce a druhá kořist. Jako příklad můžeme uvést vztah mezi mravenečníkem a mravenci, žraloky a lachtany, masožravými rostlinami a hmyzem atd.

### 3.2 Typy interakcí mezi dvěma populacemi

Mezi jedinci různých populací existují rozmanité vztahy. Tyto vztahy můžeme rozdělit následovně:



| Typ interakce | Koeficienty úměrnosti | Projevy interakce                                                                        |
|---------------|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| Neutralita    | $k_1 = k_2 = 0$       | Populace se neovlivňují                                                                  |
| Mutualismus   | $k_1 > 0, k_2 > 0$    | Vzájemně příznivá interakce (spolupráce) populací                                        |
| Konkurence    | $k_1 < 0, k_2 < 0$    | Vzájemné vytlačování populací v konkurenčním boji                                        |
| Komensalismus | $k_1 > 0, k_2 = 0$    | Interakce působí příznivě na populaci 1, populace 2 není ovlivňována                     |
| Amensalismus  | $k_1 < 0, k_2 = 0$    | Populace 1 je potlačována, populace 2 není ovlivňována                                   |
| Parazitismus  | $k_1 < 0, k_2 > 0$    | Populace 1 má příznivý vliv na rozvoj populace 2, populace 2 potlačuje rozvoj populace 1 |

#### Neutralita:

Vztah mezi dvěma druhy, které neovlivňují sebe navzájem. Tedy jeden druh populace nemá žádný vliv na populaci druhou. Neutralismus je velmi nepravděpodobný a tedy velmi vzácný.

#### Mutualismus:

Jedná se o druh symbiózy, ze které mají obě či více populací prospěch, užitek. Typickým příkladem mutualismu je vztah mezi mravenci a mšicemi. Mravenci umožňují vajíčkům mšic bezpečné přezimování ve svých hnízdech a chrání je tím před dalšími predátory. Podobné interakce jsou označovány za spolupráci.

#### Konkurence:

Představuje soutěžení mezi jedinci buď téhož druhu, v takovém případě hovoříme o vnitrodruhové konkurenci, nebo různých druhů. Pak hovoříme o mezidruhové konkurenci. Jako příklad vnitrodruhové konkurence uvedeme dva stromy rostoucí blízko sebe, kteří mezi sebou soutěží o vodu, živiny z půdy apod. Příkladem mezidruhové konkurence můžeme považovat případ lvů a gepardů, neboť obě populace loví totožné kořisti. Jsou tedy negativně ovlivněny přítomností druhé populace, protože budou mít méně jídla k dispozici.

### **Další druhy konkurence:**

Bránění konkurence – dochází přímo mezi jednotlivci prostřednictvím agrese apod. kdy jednotlivci zabraňují druhým populacím se pást, rozmnožovat se a přežít.

Vykořisťování – dochází nepřímo prostřednictvím společného omezujícího prostředí, který funguje jako meziprodukt.

Zdánlivá konkurence – nastane nepřímo mezi dvěma druhy, které jsou oba loveni stejným predátorem.

### **Komensalismus:**

Název pochází z anglického slova commensal , což znamená sdílení potravin. Jedná se o vztah, který prospívá jedné z populací. Naopak druhá populace není ovlivněna vůbec.

### **Amensalismus:**

Vztah, kdy jeden druh populace je potlačován a druhý není ovlivňován.

### **Parazitismus:**

Jeden druh bohatne na úkor jiného. Interakce, ve které dravec se živí svou kořistí. Jako příklad postačí tasemnice, pijavice, které parazitují na svém hostiteli.

## **3.3 Základní model Lotka-Volterra ve tvaru soustavy diferenciálních rovnic**

V tomto systému uvažujeme, že zde existují pouze dva druhy, predátor a jeho kořist. Budeme proto sledovat vývoj dvou funkcí:

$$P = P(t),$$

$$N = N(t),$$

kde  $P = P(t)$  udává počet predátorů a  $N = N(t)$  počet jejich kořisti.

Tyto funkce se mění v čase  $t$  a jejich změnu, hovoříme o růstu či klesání, vyjádříme pomocí derivace

$$P' = \frac{dP(t)}{dt},$$

$$N' = \frac{dN(t)}{dt}.$$

Povaha interakce mezi predátory a kořistí je založena na následujících hypotézách:

**Hypotéza 1.:**

Růst populace kořisti je úměrný velikosti této populace a její klesání je úměrné počtu setkání predátorů s kořistí.

Nyní výše uvedenou hypotézu vyjádříme rovnicí:

$$\frac{d}{dt}N(t) = aN(t) - bN(t)P(t). \quad (8)$$

Diferenciální rovnice (8) popisuje rychlost změny u kořisti. Tempo růstu představuje výraz  $aN(t)$ , a účinky predátora  $-bN(t)P(t)$ , kde  $a, b \in (0, 1)$ .

Úbytky, které jsou způsobeny důsledkem predace jsou úměrné počtu dravců a kořisti.

**Hypotéza 2.:**

Klesání populace predátorů je úměrné velikosti této populace a jejich růst je úměrný počtu setkání predátorů s kořistí. Tuto hypotézu vyjádříme následující rovnicí:

$$\frac{d}{dt}P(t) = -fP(t) + cN(t)P(t). \quad (9)$$

V diferenciální rovnici (9) je úmrtnost predátorů zastoupena výrazem  $-fP(t)$  a přírůstek výrazem  $cN(t)P(t)$ , kde  $c$  a  $f$  jsou kladné konstanty.

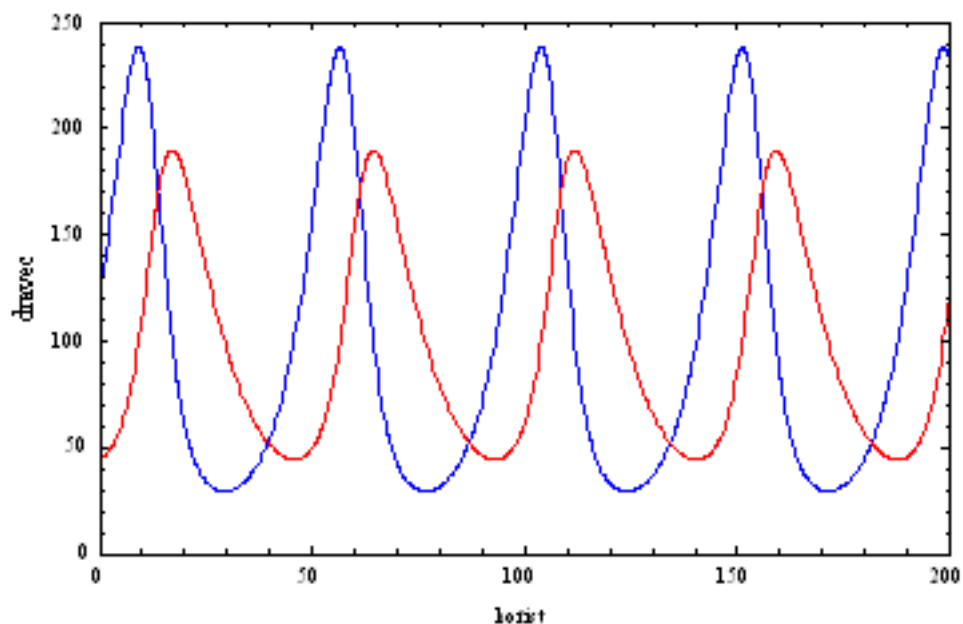
Odvozením následujícího systému dvou diferenciálních rovnic 1. řádu ve tvaru:

$$N' = N(a - bP), \quad (10)$$

$$P' = P(-f + cN), \quad (11)$$

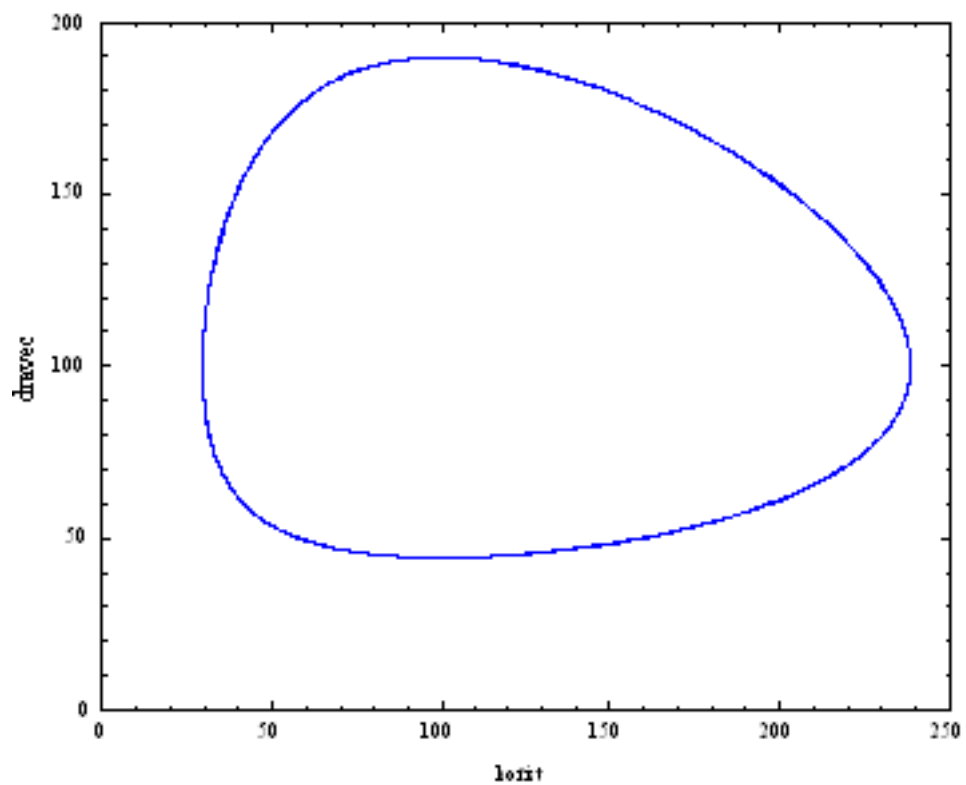
získáme systém, který je označován jako systém Lotka-Volterra. Poskytuje velmi jednoduché vysvětlení jak se mění populace predátora a kořisti. Jedná se o autonomní systém, neboť pravé strany rovnic nejsou explicitně závislé na čase.

Počet obou druhů populací a jejich vývoj v průběhu času zobrazuje obrázek 9. Zde jsme dosadili za parametry  $a, b, f, c$  následující hodnoty:  $a = 0,2, b = 0,002, c = 0,001, f = 0,1$ .



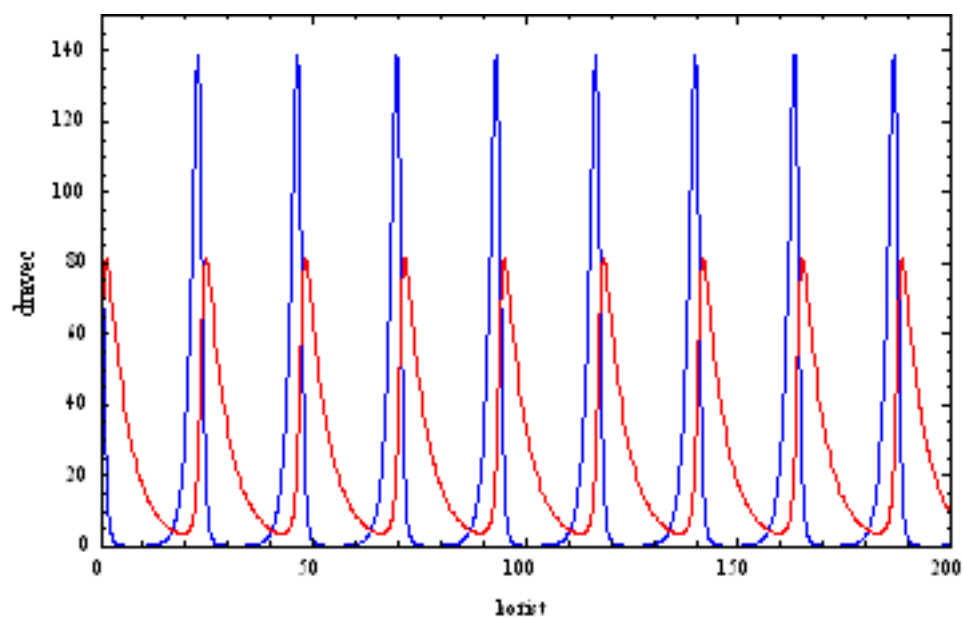
Obrázek 9: Populační graf č.1

Této situaci odpovídá fázový portrét ( viz obrázek 10).



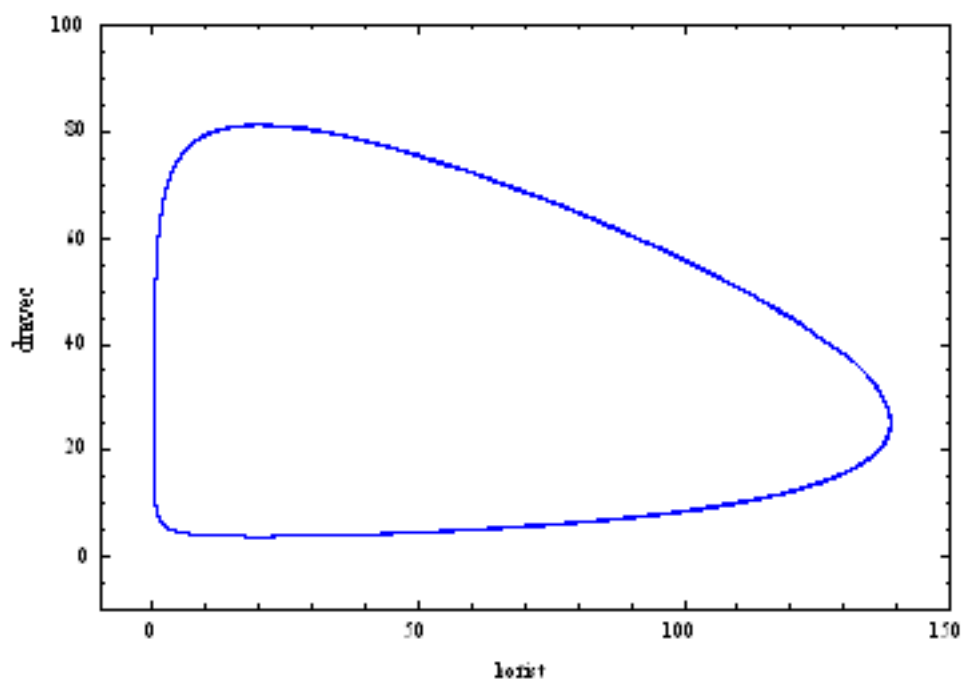
Obrázek 10: Fázový portrét č.1

Obrázek 11 odráží vyšší proces množení kořisti, rychlejší úmrtnost dravců, kteří jsou vysoce aktivní v lovení. Odpovídající hodnoty parametrů:  $a = 0,75$ ,  $b = 0,03$ ,  $c = 0,01$ ,  $f = 0,2$ .



Obrázek 11: Populační graf č.2

Této situaci odpovídá fázový portrét (viz obrázek 12).



Obrázek 12: Fázový portrét č.2

Nyní zkoumáme fázový portrét obecné soustavy (10), (11).

U rovnic (10), (11) je jeden parametr zásadní, nezbytný. Tento parametr označíme  $\alpha$ , přičemž  $\alpha = \frac{f}{a}$ . Zbylé parametry mohou být odstraněny, aniž by došlo k jakékoli změně struktury fázového portréту. Užijeme substituci:

$$\tau = at, \quad u(\tau) = \frac{c}{f}N(t), \quad v(\tau) = \frac{b}{a}P(t). \quad (12)$$

Tedy platí

$$t = \frac{\tau}{a}, \quad u(\tau) = \frac{c}{f}N\left(\frac{\tau}{a}\right), \quad v(\tau) = \frac{b}{a}P\left(\frac{\tau}{a}\right). \quad (13)$$

Odsud

$$\frac{du(\tau)}{d\tau} = \frac{c}{f} \frac{d}{dt} N\left(\frac{\tau}{a}\right) \frac{1}{a}. \quad (14)$$

Nyní dosadíme za  $\frac{d}{dt}N\left(\frac{\tau}{a}\right) = \frac{d}{dt}N(t)$  z první rovnice (10). Tedy

$$\frac{d}{dt}N\left(\frac{\tau}{a}\right) = N\left(\frac{\tau}{a}\right) \left[ a - bP\left(\frac{\tau}{a}\right) \right]. \quad (15)$$

Dosazením do (14) dostáváme

$$\frac{du(\tau)}{d\tau} = \frac{c}{fa}N\left(\frac{\tau}{a}\right) \left[ a - bP\left(\frac{\tau}{a}\right) \right]. \quad (16)$$

Z (13) poté plyne

$$\frac{du}{d\tau} = u(\tau)[1-v(\tau)]. \quad (17)$$

Obdobně dostáváme

$$\frac{dv(\tau)}{d\tau} = \frac{b}{a} \frac{d}{dt} P\left(\frac{\tau}{a}\right) \frac{1}{a}. \quad (18)$$

Dosadíme za  $\frac{d}{dt}P\left(\frac{\tau}{a}\right) = P\left(\frac{\tau}{a}\right) [-f + cN\left(\frac{\tau}{a}\right)]$  z rovnice (11)

$$\frac{dv(\tau)}{d\tau} = \frac{b}{a^2}P\left(\frac{\tau}{a}\right) \left[ -f + cN\left(\frac{\tau}{a}\right) \right]. \quad (19)$$

Dosazením do (18) dostáváme

$$\frac{dv(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{a}v(\tau) \left[ -f + c\frac{f}{c}u(\tau) \right] \quad (20)$$

a z (13) poté plyne

$$\frac{dv(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{a}v(\tau) [-f + fu(\tau)] = \frac{f}{a}v(u-1), \quad (21)$$

kde  $\alpha = \frac{f}{a}$ .

Užitím těchto substitucí jsme převedli systém (10) a (11) na tvar s jedním parametrem  $\alpha$ . Tedy

$$\frac{du}{d\tau} = u(\tau) [1 - v(\tau)], \quad (22)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \alpha v(\tau) [u(\tau) - 1]. \quad (23)$$

Pro systém (22), (23) uijeme další substituci

$$x_1 = \ln u, \quad x_2 = \ln v,$$

tedy

$$u = e^{x_1}, \quad v = e^{x_2}.$$

Výše zmíněnou substituci dosadíme do soustavy rovnic (22), (23) a dostáváme, že

$$x'_1 = \frac{1}{u}u' = \frac{1}{u}u(1-v) = 1-v = 1-e^{x_2},$$

$$x'_2 = \frac{1}{v}v' = \frac{1}{v}\alpha v(u-1) = \alpha(u-1) = \alpha(e^{x_1}-1).$$

Tedy



$$x_1' = 1 - e^{x_2}, \quad x_2' = \alpha(e^{x_1} - 1). \quad (24)$$

K vyšetření soustavy (24) uijeme teorii Hamiltonovských systémů.

### 3.4 Hamiltonovské systémy

Tyto systémy jsou jedny z nejstarších dynamických systémů. V jejich názvu je zahrnuto jméno autora Sira Williama Rowana Hamiltona. Byl to irský matematik, fyzik, astronom, který přispěl k rozvoji optiky, dynamiky a algebry.

Pro danou funkci  $H : R^2 \rightarrow R$ , kde  $H \in C^1(R^2)$ , se následující soustava diferenciálních rovnic

$$x_1' = \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2), \quad (25)$$

$$x_2' = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2), \quad (26)$$

nazývá Hamiltonovským systémem s Hamiltoniánem  $H$ .

**Věta 3.1.** *Hladiny  $H(x_1, x_2) = c$ ,  $c \in R$ , jsou tvořeny orbitami soustavy (25), (26).*

Důkaz

Vytvořme složenou funkci  $\tilde{H}(t) = H(x_1(t), x_2(t))$ , kde  $(x_1(t), x_2(t))$  je řešení soustavy (25), (26).

Pak

$$\frac{d\tilde{H}(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial H}{\partial x_2}x_2' = \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0,$$

pro všechna  $t \in R$ . Proto  $H(x_1(t), x_2(t)) = c$  pro  $t \in R$ . Tedy orbita řešení  $(x_1(t), x_2(t))$  je  $c$ -hladinou funkce  $H$ , nebo částí této  $c$ -hladiny.

**Poznámka 3.1.** Jestliže (25), (26) je mechanický systém, pak  $H(x_1, x_2)$  určuje totální energii tohoto systému. Systém (25), (26) konzervuje energii, protože  $H$  je konstantní na orbitách (25), (26). Speciálním případem Hamiltonovských systémů jsou tzv. konzervativní systémy, které vznikají z diferenciální rovnice 2. řádu.

Soustava (24) je Hamiltonovský systém, kde

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = 1 - e^{x_2}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_1} = \alpha - \alpha e^{x_1}. \quad (27)$$

Odsud získáme funkci  $H(x_1, x_2) = x_2 - e^{x_2} + \alpha(x_1 - e^{x_1})$ .

Podle věty 4.1. najdeme orbity systému (24) jako hladiny funkce  $H$ . Hladiny funkce  $H$  určíme vyšetřením průběhu funkce dvou proměnných.

Funkce  $z = H(x_1, x_2)$  je funkce dvou proměnných s definičním oborem  $R^2$ , jejíž parciální derivace mají tvar (27) a druhé parciální derivace jsou

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} = -\alpha e^{x_1}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} = -e^{x_2},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.$$

Nyní nalezneme stacionární body, tzn. první parciální derivace podle obou proměnných položíme rovny nule.

$$\alpha(1 - e^{x_1}) = 0 \Rightarrow e^{x_1} = 1 \Rightarrow x_1 = 0,$$

$$1 - e^{x_2} = 0 \Rightarrow 1 = e^{x_2} \Rightarrow x_2 = 0.$$

Soustava (24) má jediný singulární bod a to  $(0, 0)$ .

Abychom ukázali, že bod  $(0, 0)$  je ostrým lokálním maximem funkce  $H$ , vytvoříme Hessovu matici  $H_m$  v tomto bodě.

$$H_m = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha e^{x_1} & 0 \\ 0 & -e^{x_2} \end{pmatrix}.$$

Hessián matice  $H_m$  určíme jako determinant této matice. Označme  $H_s$  jako Hessián matice  $H_m$ , potom

$$H_s = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$H_s = \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 H}{\partial x_2^2} - \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2$$

a proto platí pro  $x_1 = x_2 = 0$

$$H_s = -\alpha e^{x_1} (-e^{x_2}) - 0 = -\alpha(-1) = \alpha. \quad (28)$$

Funkce  $H$  má v bodě  $(x_1, x_2)$  lokální extrém, jestliže pro Hessián v tomto bodě platí, že

$$H_s(x_1, x_2) > 0.$$

Konkrétně má v tomto bodě:

- ostré lokální minimum pokud

$$\frac{\partial^2 H(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} > 0,$$

- ostré lokální maximum pokud

$$\frac{\partial^2 H(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} < 0.$$

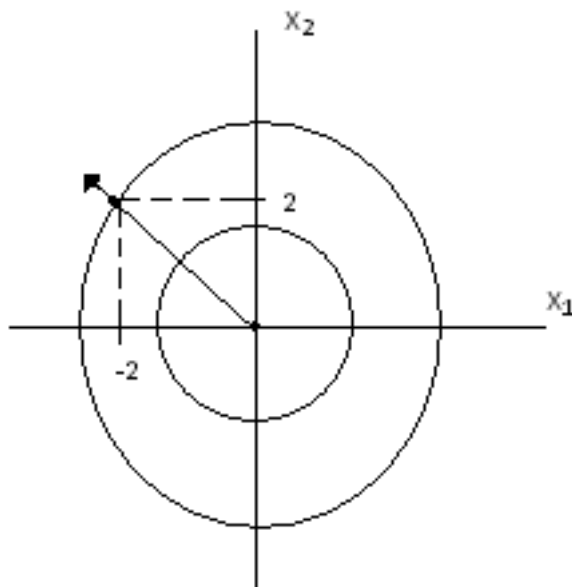
Pokud  $H_s(x_1, x_2) < 0$ , hovoříme o sedlovém bodě.

Zde platí, že  $H_s = \alpha > 0$  a  $\frac{\partial^2 H(0, 0)}{\partial x_1^2} = -\alpha e^0 < 0$ . Proto  $H$  má v bodě  $(0, 0)$  ostré lokální maximum.

$H(0, 0) = -1 - \alpha \dots$  ostré lokální i globální maximum. Hladiny funkce  $H$  jsou uzavřené křivky obíhající počátek. Směrová derivace funkce  $H$  v libovolném bodě různém od bodu  $(0, 0)$  ve směru libovolného vektoru směřujícího od počátku je záporná.

**Příklad 3.1.** Zvolme například bod  $X = (-2, 2)$  a vektor  $v = (-1, 1)$ . Pak

$$H'_v(x) = \frac{\partial H}{\partial x_1}(X)(-1) + \frac{\partial H}{\partial x_2}(X)1 = \alpha(1 - e^{-2})(-1) + 1 - e^2 < 0.$$

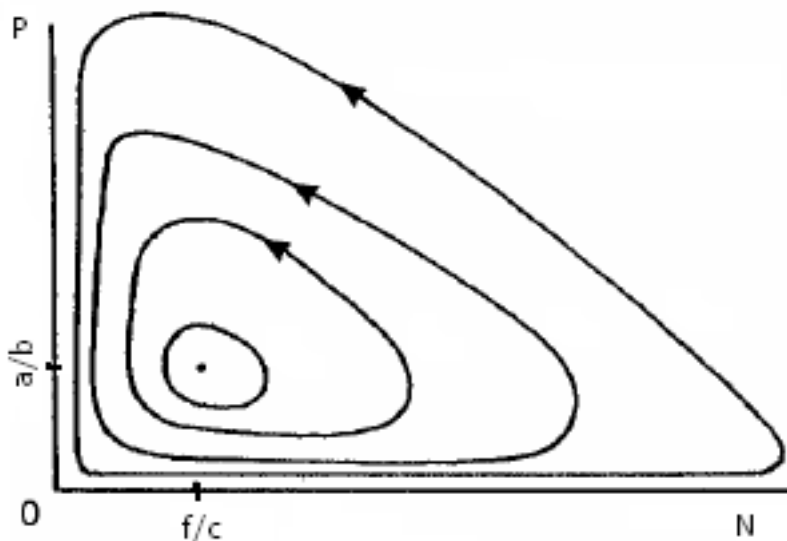


Obrázek 13: Grafické znázornění příkladu

Vrátíme-li se zpět k modelu (10), (11), dostáváme fázový portrét se singulárním (rovnovážným) bodem

$$(N, P) = \left(\frac{f}{c}, \frac{a}{b}\right),$$

který je typu střed (viz. obrázek 14).



Obrázek 14

### 3.5 Vnější působení na populace (lov, rybolov, apod.)

Pro bližší zkoumání vlivů působících na vývoj populací, mimo důsledky vyplývající ze vztahu predátora a kořisti, upravíme systém (10), (11) tak, aby zahrnoval i vliv rybolovu. Tedy

$$N' = N(a - bP) - rN = N(a - bP - r),$$

$$P' = P(-f + cN) - rP = P(-f + cN - r),$$

kde  $r$  představuje stejný podíl rybolovu na počtu predátorů a kořisti.

Dostáváme tedy model

$$N' = N(a - bP - r), \quad (29)$$

$$P' = P(-f + cN - r). \quad (30)$$

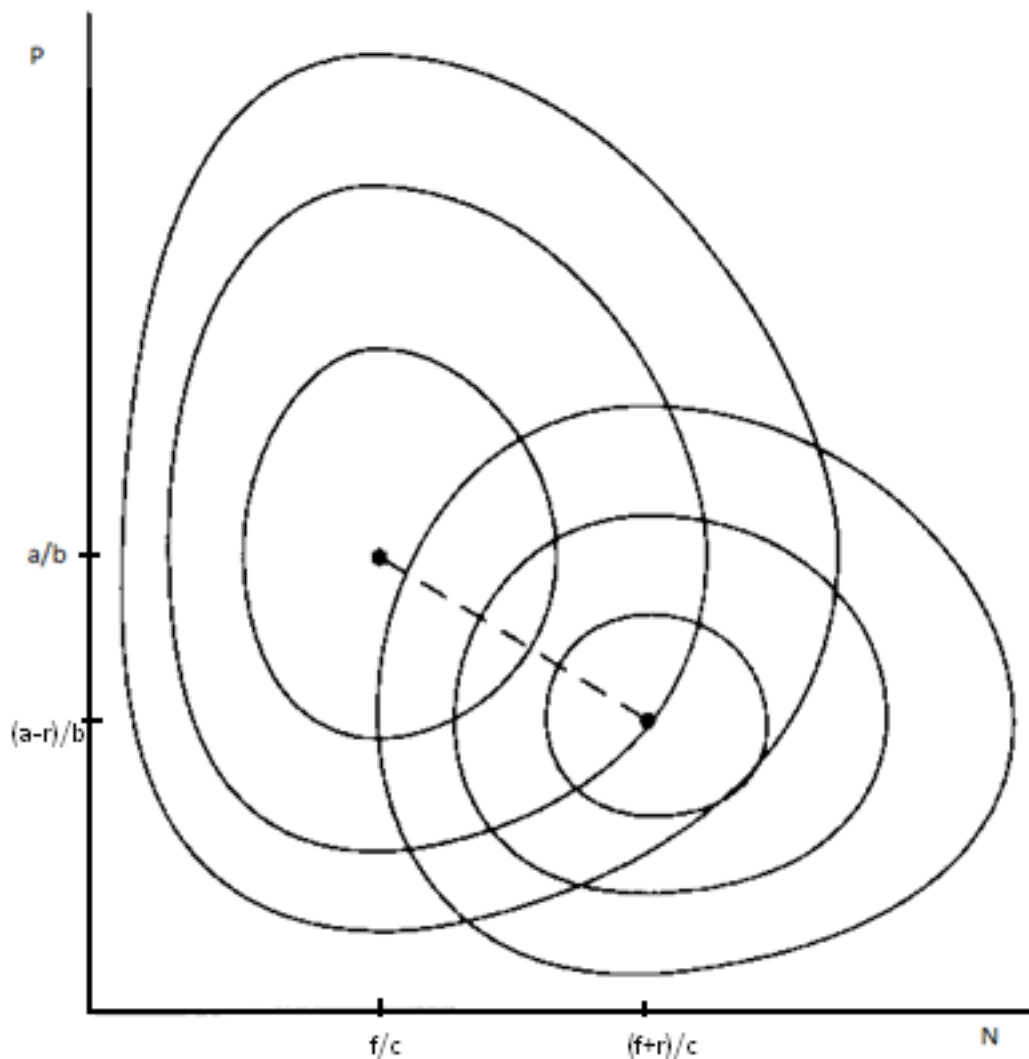
Níže uvedený obrázek 15 ukazuje, že bez rybolovu má systém rovnovážný bod  $(\frac{f}{c}, \frac{a}{b})$ . Pokud ovšem zahrnujeme do svých úvah i rybolov, poté je  $(\frac{f+r}{c}, \frac{a-r}{b})$  rovnovážným bodem. Jinak řečeno, porovnáváme fáze populací predátora a kořisti v období rybolovu a bez něj. Daný systém dospěje k rovnováze pokud

$$P = \frac{a - r}{b}$$

a

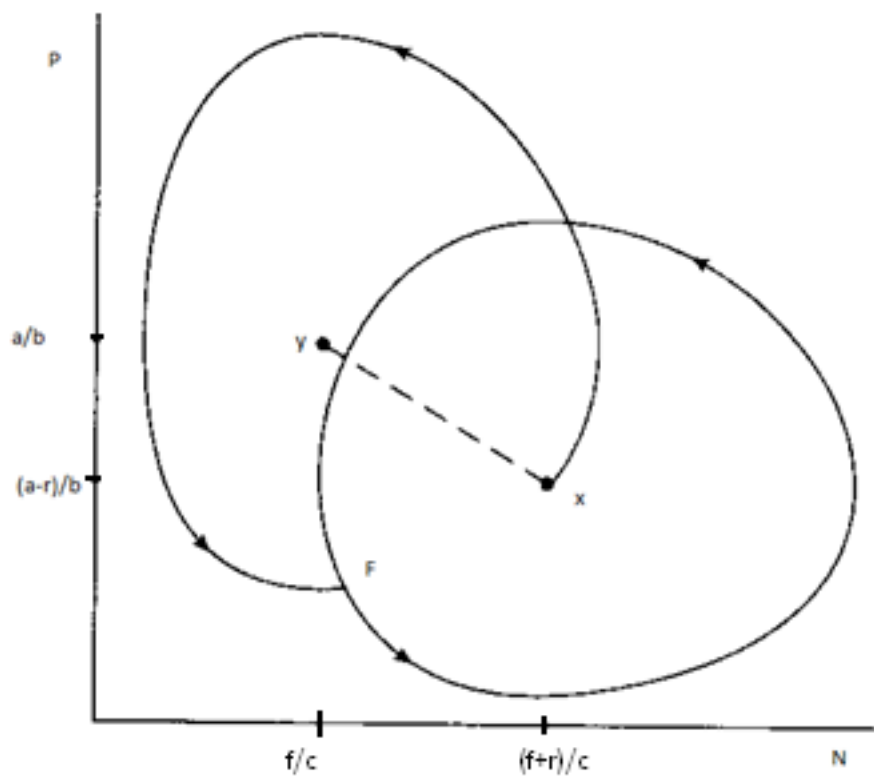
$$N = \frac{f + r}{c}.$$

Na obrázku 15 vidíme jak se posune rovnovážný bod v modelu, pokud do něj zahrneme rybolov. Následkem rybolovu se zvětšila populace kořisti a zmenšila populace predátora.



Obrázek 15: Model s rybolovem a bez rybolovu

Velikost rybí populace, tím i úlovku, závisí na fázi periodického cyklu. Následující obrázek představuje situaci snížení úlovku v případě, kdy lov je obnoven po jeho přerušení. Samotný lov pak poruší periodický režim. Pokud narušení ustane, systém se vrátí do jednoho z původních oscilujících režimů. Jestliže však lov pokračuje i v době, kdy populace jak dravce, tak kořisti jsou vyčerpány z důvodu přirozeného cyklu, očekáváme menší úlovek. Bod  $F$  znázorňuje snížení úlovku, i když populace ryb měla dostatek času k doplnění. Z obrázku 16 je navíc patrné, že  $x$  je bodem rovnováhy systému zahrnující rybolov a  $y$  bod rovnováhy systému bez rybolovu.



Obrázek 16: Snížení úlovku

Model (10), (11) odvozený v sekci 3.3 není realistický. Totéž platí i o modelu (29), (30) odvozeném v sekci 3.5. Model se stane realističtější, pokud do něj zahrneme vnitrodruhovou konkurenci.



## 4 Populační model s vnitrodruhovou konkurencí

Tato kapitola vychází z [2], [3].

### 4.1 Odvození populačního modelu s vnitrodruhovou konkurencí

Každá populace bez ohledu na dravce, kořist má svou omezenou kapacitu, svou hranici. Tato kapacita odráží limitující faktory, například: dostupnost zdrojů, onemocnění, stáří. Tyto faktory nemusí udržovat ony populace neustále na stejné úrovni. Může dojít k jejich vychýlení. Pokud hovoříme o onemocnění, můžeme říci, že tento faktor oslabuje jedince v dané populaci a tím představuje zdánlivě menší konkurenci, je tomu tak i u stáří. Dostupnost zdrojů vyvolává mezi jedinci populace konkurenci v tom smyslu, aby pro sebe samé získali největší příděl obživy. Do svých úvah můžeme zahrnout i takový faktor, jako je například počet samců/samic v jedné populaci. Větší počet samců/samic vyvolává konkurenci v rámci páření.

Z toho důvodu předpokládejme, že populace kořisti se bude řídit zákonem logistického růstu v případě, když dravci nebudou vykazovat žádnou aktivitu, tj. budou v klidu.

Nikým nerušenou populaci kořisti můžeme popsat rovnicí:

$$\frac{dN}{dt} = aN(1 - \epsilon N), \quad (31)$$

kde  $\epsilon = \frac{1}{K}$  je kladný parametr, který brání  $N(t)$  v neomezeném růstu bez hranic a číslo  $K$  reprezentuje únosnou kapacitu prostředí. K vyřešení (31) použijeme separaci proměnných. Výsledné řešení je ve tvaru:

$$N(t) = \frac{N(0)e^{at}}{1 + \epsilon N(0)(e^{at} - 1)}.$$

Jestliže  $t \rightarrow \infty$ , tak  $N(t) \rightarrow K$ .

Tím jsme nahradili původní model (10), (11) systémem

$$N' = N(a - bP - \epsilon aN), \quad (32)$$

$$P' = P(-f + cN). \quad (33)$$

Často se setkáváme s případy, kdy  $\epsilon \ll 1$ , neboť maximálně možná populace druhů kořisti bývá velká.

Je rozumné předpokládat, že  $\epsilon \ll \frac{c}{f}$  a to z toho důvodu, že velikost populace kořisti v rovnováze nesmí přesáhnout její maximální hodnotu.

Nyní určíme singulární (rovnovážné) body systému (32), (33). Z rovnic

$$f_1(N, P) = N(a - bP - \epsilon aN) = 0,$$

$$f_2(N, P) = P(-f + cN) = 0,$$

dostáváme tři body. Bod  $(0, 0)$ , který odpovídá situaci, že obě populace jsou nulové. Bod  $(\frac{1}{\epsilon}, 0)$ , který odpovídá situaci, že populace kořisti má velikost  $\frac{1}{\epsilon}$  a populace predátora je nulová. Reálný význam má pro nás bod  $(N_0, P_0)$ , kde

$$N_0 = \frac{f}{c} \quad \text{a} \quad P_0 = \frac{a}{b}(1 - \frac{\epsilon f}{c}).$$

Typ bodu  $(N_0, P_0)$  určíme pomocí linearizace.

## 4.2 Metody linearizace

Uvažujme nelineární diferenciální rovnici

$$x' = f(x), \quad (34)$$

kde  $f \in C^1(G)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Necht  $x_0 \in G$  je singulární bod diferenciální rovnice (34) (viz. Definice 2.1).

Singulární bod  $x_0$  se nazývá hyperbolický, jestliže všechna vlastní čísla Jacobiho matice  $Df(x_0)$  mají nenulové reálné části. V opačném případě se singulární bod nazývá nehyperbolický. Není-li bod  $x_0 \in G$  singulárním bodem diferenciální rovnice (34), nazývá se regulární.

Zmíněná Jacobiho matice má tvar

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}.$$

K diferenciální rovnici (34) přiřadíme lineární rovnici tvaru  $x' = Ax$  tak, že nejprve pro  $x \in G$  vyjádříme  $f$  ve tvaru Taylerova vzorce

$$f(x) = f(x_0 + Df(x_0)(x - x_0) + \omega(x_0)(x - x_0),$$

kde  $\omega(x_0)(x - x_0)$  je zbytek v Taylerově vzorci. Následně pro  $x \in G$  dostatečně blízké bodu  $x_0$  platí

$$f(x) \doteq f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0), \quad (35)$$

kde  $f(x_0) = 0$  neboť se jedná o kritický bod. Symbolem  $A$  označíme konstantní matici  $Df(x_0)$ . Tedy k rovnici (34) přiřadíme vzhledem k (35) rovnici

$$x' = A(x - x_0). \quad (36)$$

Substitucí

$$y = x - x_0, \quad y' = x'$$

dostáváme z (36) lineární variační rovnici

$$y' = Ay. \quad (37)$$

Metoda linearizace je založena na následujících větách.

**Definice 4.1.** *Dvě diferenciální rovnice  $x' = f(x)$  a  $x' = g(x)$  se nazývají lokálně topologicky ekvivalentní, existují-li otevřené množiny  $U, V \subset \mathbb{R}^2$  a homeomorfismus  $h : U \rightarrow V$  zobrazující orbity jedné diferenciální rovnice na orbity druhé diferenciální rovnice (jedná se o části orbit ležících v  $U$  resp. ve  $V$ ), přičemž zachovává směr toku na orbitách pro rostoucí  $t$ .*

**Věta 4.1.** *(Grobman-Hartmanova) Nechť  $f \in C^2(G)$  a  $x_0 \in G$  je hyperbolický kritický bod (34). Pak existuje okolí  $U$  bodu  $x_0$  a okolí  $V$  bodu  $(0, 0)$ , na nichž jsou lokálně topologicky ekvivalentní (34) a lineární variační rovnice  $y' = Df(x_0)y$ .*

**Věta 4.2.** *Nechť platí předpoklady Grobman-Hartmanovy věty. Pak, je-li bod  $(0, 0)$  uzel nebo ohnisko u diferenciální rovnice  $y' = Df(x_0)y$ , je bod  $x_0$  stejného typu u diferenciální rovnice (34).*

Nyní se vrátíme k úloze určit typ bodu  $(0, 0)$  pomocí linearizace.

Najdeme tedy Jacobiho matici příslušnou k soustavě (32), (33). Tato matice se skládá z parciálních derivací  $\frac{\partial f_1}{\partial N}$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial P}$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial N}$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial P}$  a má tvar

$$\begin{pmatrix} a - bP - 2\epsilon aN & -bN \\ cP & -f + cN \end{pmatrix}.$$

Nyní dosadíme do matice bod  $(N_0, P_0)$  a dostaneme konstantní matici  $A$ . Tedy

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon a f}{c} & -\frac{b f}{c} \\ \frac{a}{b}(c - \epsilon f) & 0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Linearizovaný systém je tvaru

$$x' = Ax \quad (39)$$

a má jediný singulární (rovnovážný) bod  $(0, 0)$ . Tento singulární bod je hyperbolický, jak později ukážeme (41). Můžeme proto užít metodu linearizace a tedy typ tohoto bodu se shoduje s typem bodu  $(N_0, P_0)$ . K určení typu užijeme následující klasifikaci.

**Poznámka 4.1.** *Kritický bod  $(\frac{f}{c}, \frac{a}{b})$  diferenciálních rovnic (10), (11) je nehyperbolický a proto v něm nelze užít linearizaci. Snadno to ověříme u transformované rovnice (24), kde*

$$Df(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} 0 & -e^{x_2} \\ \alpha e^{x_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

*A*

$$Df(0, 0) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

*kde*

$$tr = 0, det = \alpha.$$

*Potom*

$$\lambda_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4\alpha}}{2} = \pm i\sqrt{\alpha}.$$

*Podobně kritický bod  $(\frac{f+r}{c}, \frac{a-r}{b})$  diferenciálních rovnic (29), (30) je nehyperbolický.*

### 4.3 Klasifikace singulárních bodů lineárních systémů s konstantními koeficienty

Tato klasifikace se odvíjí na základě typu vlastních čísel matice  $A$ , a to zda se jedná o vlastní čísla reálná nebo komplexně sdružená. Pokud hovoříme o ne-

nulových reálných vlastních číslech, singulární bod vykazuje tvar stabilního uzlu, nestabilního uzlu, či sedla (viz obrázky 4 - 6). V opačném případě, pokud vlastní čísla jsou komplexně sdružená, jedná se o střed, či stabilní a nestabilní ohnisko (spirály) (viz obrázky 1 - 3). Komplexně sdružená vlastní čísla mají přitom tvar

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i.$$

Lineární systémy s konstantními koeficienty mají obecné řešení typu

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2,$$

kde  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou vlastní čísla konstantní matice a  $v_1, v_2$  jsou vlastní vektory.

Singulární body lineárních systémů tedy rozlišujeme pomocí vlastních čísel následovně:

- Reálná vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

Singulární bod má tvar stabilního uzlu. Pokud jsou obě vlastní čísla záporná, pak  $\exp(-\lambda_i t)$  v obecném řešení povede všechna řešení systému k 0. (Obrázek 4).

- Reálná vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

Zde je singulární bod ve tvaru nestabilního uzlu. Řešení systému porostou do nekonečna, protože exponenciály jsou zde kladné. V tomto případě vlastní vektor spolu s vlastním číslem o větší absolutní hodnotě bude vyvíjet větší tlak na orbitu. (Obrázek 5).

- Reálná vlastní čísla  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

V tomto případě singulární bod odpovídá sedlu. (Obrázek 6).

- Komplexně sdružená vlastní čísla:  $\alpha < 0$

Pokud je reálná část vlastního čísla  $\alpha$  záporná, singulárním bodem je zde stabilní ohnisko (spirála). Spirála konverguje směrem k počátku, a směr její rotace (po směru nebo proti směru hodinových ručiček) závisí na hodnotě  $\beta$ .

- Komplexně sdružená vlastní čísla:  $\alpha > 0$

Zde se jedná o nestabilní ohnisko (spirálu). Spirála se vzdaluje od singulárního bodu. (Obrázek 3).

- Komplexně sdružená vlastní čísla:  $\alpha = 0$

Singulární bod systému s vlastními čísly ve tvaru  $\lambda = \pm i\beta$  se nazývá středem. Orbity jsou soustředěné elipsy a směr rotace udává  $\beta$ .

#### 4.4 Vyšetření populačního modelu s vnitrodruhovou konkurencí

Nyní vyšetříme pomocí metody linearizace model (32), (33). Abychom zjistili vlastní čísla linearizovaného systému (39) s maticí (38), postupujeme následovně.

$$\det A = \frac{fa}{c}(c - \epsilon f) > 0,$$

$$\operatorname{tr} A = -\frac{\epsilon af}{c}.$$

Vlastní čísla můžeme určit podle vzorce

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A}}{2}. \quad (40)$$

Tedy platí

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\epsilon af}{c} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon af}{c}\right)^2 - 4\frac{fa}{c}(c - \epsilon f)}}{2}. \quad (41)$$

Určeme limitu

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \left( \frac{\epsilon af}{c} \right)^2 - 4\frac{fa}{c}(c - \epsilon f) \right) = -4fa < 0.$$

Tedy pro kladné dostatečně malé  $\epsilon$ , tj.

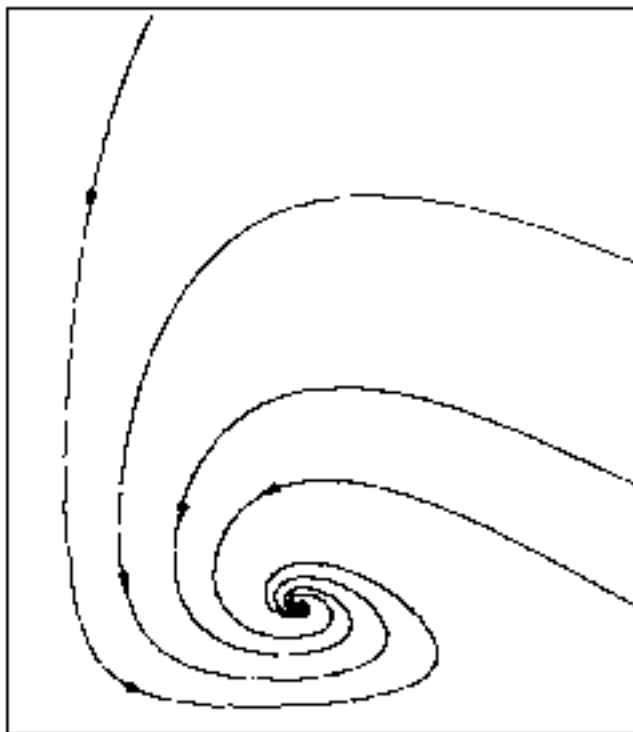
$$0 < \epsilon \ll \frac{c}{f}$$

je diskriminant v (41) záporný a proto  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  jsou komplexně sdružená vlastní čísla s reálnou zápornou částí. Systém se tedy pro malé hodnoty  $\epsilon > 0$  chová jako stabilní ohnisko (viz obrázek 2). Z metody linearizace plyne, že také singulární (rovnovážný) bod  $(N_0, P_0)$  systému (32), (33) je stabilní ohnisko.

Použijeme-li pro parametry například následující hodnoty  $a = 0,2, b = 0,002, c = 0,001, f = 0,1$ , pak

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \left( \frac{\epsilon a f}{c} \right)^2 - 4 \frac{f a}{c} (c - \epsilon f) \right) = -0,08 < 0.$$

Tedy jedná se o stabilní ohnisko (viz obrázek 17).



Obrázek 17: Fázový portrét



## Závěr

Předmětem této bakalářské práce bylo odvození a následné vyšetření populačních modelů, konkrétně modelů typu kořist-dravec označovány jako model Lotka-Volterra. Základní model (bez vnitrodruhové konkurence) byl odvozen ve tvaru soustavy diferenciálních rovnic a byl vyšetřen pomocí teorie Hamiltonovských systémů. Ke grafickému znázornění populačních křivek v čase obou populací jsem využila programu Wolfram Mathematica 9.0. Do zmíněného modelu bylo zahrnuto i vnější působení na dané populace. Ukázalo se, že v důsledku např. rybolovu dojde k růstu populace kořisti a ke snížení populace dravce. Základní model Lotka-Volterra (bez vnitrodruhové konkurence) není realistický, taktéž i model v němž uvažujeme vnější zásah do populací. Aby se model stal realističtější, zakomponovala jsem do něj i vnitrodruhovou konkurenci. Následně byl model vyšetřen za pomoci linearizace. K nalezené nelineární diferenciální rovnici (32), (33) jsme přiřadili lineární rovnici, jejíž jediný singulární bod  $(0, 0)$  je stabilní ohnisko. Proto i singulární bod  $(N_0, P_0)$  je stabilní ohnisko.

## Literatura

- [1] J. Hale, H. Kocak: Dynamics and Bifurcations. Springer, New York, 1991.
- [2] J. Kalas, M. Ráb: Obyčejné diferenciální rovnice. Brno, 1995.
- [3] R. Illner, C.S. Bohun, S. McCollum, T.van Roode: Mathematical Modelling, AMS, Rhode Island 2005.
- [4] [www.en.wikipedia.org](http://www.en.wikipedia.org)