

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Fraktální analýza EEG



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí diplomové práce: **prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.**

Vypracoval(a): **Lucie Franková**

Studijní program: N1103 Aplikovaná matematika

Studijní obor: Aplikace matematiky v ekonomii

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2016

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Lucie Franková

Název práce: Fraktální analýza EEG

Typ práce: Diplomová práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.

Rok obhajoby práce: 2017

Abstrakt: Činnost mozku vytváří velice složitý nelineární proces, jehož průběh v čase lze zaznamenat pomocí elektroencefalografu. K popisu značně nepravidelných grafů EEG může být nápomocná fraktální analýza. Teorie fraktálů se zabývá určitou skupinou idealizovaných velice členitých množin. Tato práce obsahuje vypracovaný teoretický aparát, který umožňuje následnou fraktální analýzu grafů EEG, zejména výpočtů fraktálních dimenzí, zdravých lidí a pacientů s epilepsií.

Klíčová slova: fraktální, dimenze, EEG, epilepsie

Počet stran: 66

Počet příloh: 11

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Lucie Franková

Title: Fractal Analysis of EEG

Type of thesis: Master's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.

The year of presentation: 2017

Abstract: Brain activity results in very complex non-linear process, which may be recorded in time by electroencephalography. High irregularity of EEG graphs make one consider the theory of fractals suitable for analysis of EEG. The aim of this thesis is to estimate fractal dimensions of electroencephalograms based on relevant part of theory of fractals which should be included. Important task is then to compare (and distinguish if possible) fractal dimension of healthy brain activity and abnormal activity caused by epilepsy.

Key words: fractal, dimension, EEG, epilepsy

Number of pages: 66

Number of appendices: 11

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením pana prof. RNDr. dr. hab. Jana Andrese, DSc., všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury a s veškerými daty poskytnutými Fakultní Nemocnicí v Olomouci bylo nakládáno v zájmu ochrany údajů pacientů podle etického kodexu. Zmíněná data byla použita pouze pro účely této diplomové práce.

V Olomouci dne
podpis

Obsah

Úvod	8
1 Elektroencefalografie	10
1.1 Centrální nervová soustava	10
1.2 EEG	11
1.3 Epilepsie	12
1.4 Epilepsie v EEG záznamu	13
2 Úvod do problematiky fraktálů	15
2.1 Fraktální geometrie	15
2.2 Fraktál jako atraktor IFS	17
2.3 Hausdorffova fraktální dimenze	19
2.4 Nejznámější fraktální křivky a jiné množiny	22
2.4.1 Von Kochova křivka	22
2.4.2 Cantorova množina	24
2.4.3 Ďáblovo schodiště	25
2.4.4 Weierstrassův signál	27
3 Jiné fraktální dimenze	28
3.1 Soběpodobnostní dimenze	28
3.2 Obvodová dimenze	29
3.3 Pokrývací dimenze	30
3.4 Higuchiho fraktální dimenze	31
3.5 Praktický výpočet fraktální dimenze	32
3.6 Fraktální dimenze známých křivek	34
3.7 Zobecněná fraktální dimenze	36
3.7.1 Rényiho entropie a dimenze	37
3.7.2 Vlastnosti zobecněné fraktální dimenze	39
3.7.3 Zobecněná korelační dimenze	40

4	Fraktální dimenze EEG	42
4.1	Popis výpočetních funkcí	43
4.1.1	Obvodová dimenze	44
4.1.2	Pokrývací dimenze	44
4.1.3	Higuchiho fraktální dimenze	44
4.1.4	Zobecněná korelační dimenze	44
4.2	Obvodová a pokrývací dimenze EEG	45
4.3	Higuchiho fraktální dimenze a zobecněné korelační dimenze EEG .	49
4.4	Zhodnocení výsledků	59
	Závěr	61
	Literatura	63

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala Neurologické klinice Fakultní nemocnice v Olomouci za poskytnutí elektroencefalogramů, zejména panu doktoru Francovi za spolupráci a čas věnovaný shromažďování a výběru grafů. Mé díky rovněž patří nejmenované firmě zajišťující technické zázemí EEG na Neurologické klinice Fakultní nemocnice v Olomouci za konverzi dat do přenosného formátu EDF.

Úvod

Činnost mozku je oproti srdeční činnosti zaznamenávána do velice nepravidelných grafů, jejichž prostřednictvím lze podle frekvence rytmické aktivity rozlišit 6 základních režimů (viz. [32]). Z rytmického pozadí se ovšem mohou nápadně vyjímat tzv. *tranzienty* náhlou změnou frekvence či amplitudy. Klasické lineární metody nejsou při popisu tak různorodého procesu schopny zachytit veškerou informaci, kterou vyšetření mozku poskytuje. Doporučovány jsou proto metody nelineární, mezi něž se řadí i fraktální analýza. Slovo fraktál pochází z latinského *fractus*, v překladu zlomený či rozbitý. Fraktál představuje velice zvrásněný objekt, tak zvrásněný, že klasické míry, jako je délka a další vícerozměrné objemy, u jeho popisu selhávají. Při fraktální analýze se tak důležitým nástrojem popisu EEG stává fraktální dimenze, která na rozdíl od té topologické nemusí nabývat celých hodnot. Fraktální dimenzi je možno interpretovat jako číslo kvantifikující složitost nebo taky *komplexitu* systému za použití dat pocházejících ze sledovaného systému. Jelikož je záznam EEG tvořen časovou řadou, tzn. konečnou množinou pozorování, výsledkem numerických výpočtů bude pouze odhad fraktální dimenze jinak spojitého procesu.

Vyšetření EEG slouží k odhalení různých neurologických onemocnění a poruch, nejvyužívanější je ovšem při hledání tranzientů spojených s epilepsií. Epilepsie je neurologické onemocnění projevující se záchvaty, které se podle odhadů vyskytuje u více než 1% populace. S jistotou je epilepsie diagnostikována až po důkladném přezkoumání EEG. Cílem této práce je za použití elektroencefalogramů zobrazujících zdravou, epileptickou klidovou a epileptickou záchvatovou činnost posoudit pomocí představených prakticky použitelných fraktálních di-

menzí složitost mozkové činnosti těchto stavů a podrobit je srovnání. EEG vyšetření používá celou čepici elektrod snímajících aktivitu z povrchu celé hlavy. Tato práce ovšem pracuje s jednorozměrnými měřeními zachycujícími sledovaný režim mozkové činnosti (zdravá, epileptická klidová, epileptická záchvatová).

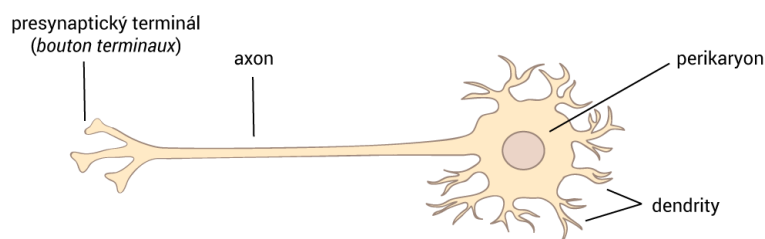
Diplomová práce v 1. kapitole čtenáři představí základní poznatky a termíny potřebné k orientaci v epileptologii. V 2. kapitole je již věnována pozornost základním definicím fraktálů a souvisejícím pojmům jako je iterační systém funkcí či Hausdorffova dimenze. Následně jsou v Sekci 2.4 uvedeny spolu s jejich popisem a vlastnostmi nejznámější křivkové fraktály. Metody výpočtů fraktálních dimenzí a jejich interpretaci shrnuje 3. kapitola. A konečně, 4. kapitola mapuje výpočty odhadů, zejména Higuchiho a zobecněných korelačních dimenzí EEG, a poskytuje srovnání a zhodnocení výsledků. Vyjma Weierstrassova signálu jsou všechny obrázky po Obrázek 3.2 přejaty z internetu, ostatní jsou vygenerovány v prostředí Matlabu.

Kapitola 1

Elektroencefalografie

1.1. Centrální nervová soustava

Centrální nervový systém (dále jen CNS) tvořený mozkem a míchou hraje roli základního řídicího systému člověka. CNS totiž zajišťuje vnímání okolí, vyhodnocuje situaci zpracováním navnímaných informací a následně vyvolává reakce formou řeči či ovládání svalů, popř. vnitřních orgánů [31]. Podstatou fungování CNS je šíření signálu. To mají na starosti nervové buňky *neurony*. CNS jich čítá okolo 10^{10} , z čehož se asi 17 % nachází v mozkové kůře. Neurony se podle své lokalizace v organismu různí, ale v zásadě se vždy skládají z *perikaryonu* (těla), *dendritů*, pomocí nichž neuron signál přijímá, a *axonu*, který vede signál k dalším neuronům. Každý neuron se pojí na dalších 200 – 1000 neuronů, což vytváří úžasně složitou síť nervových buněk.



Obrázek 1.1: Stavba neuronu [31]

V rámci buňky probíhá vlastní šíření signálu tak, že dojde ke změně elektrického potenciálu na cytoplazmatické membráně perikaryonu. Ta se následně

přesouvá na axon. Řeč je o tzv. *akčním potenciálu*. Mezi buňkami je pak signál přenášen buďto chemicky nebo elektricky přes štěrby zvané *synapse*.

Souhrnnou elektrickou aktivitu velkých populací neuronů pak lze z povrchu hlavy zaznamenat pomocí elektrod *elektroencefalografu* (EEG). Takto zaznamenaná aktivita je značně oslabena přechodem přes obalové vrstvy mozku, zejména lebkou. Ta oslabuje měřený potenciál stokrát více než měkké tkáně. Naměřený signál rovněž obsahuje šum, který je naopak způsoben mozkem a kůží na povrchu hlavy. Získaná data je proto nakonec zapotřebí zesílit a vhodně vyfiltrovat.

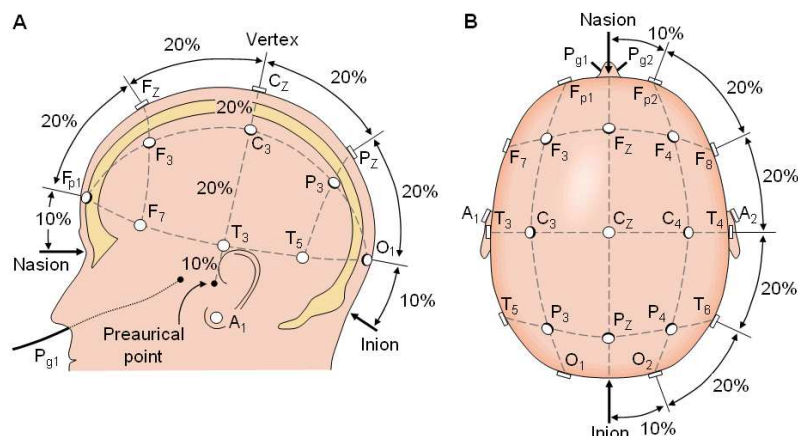
1.2. EEG

Elektroencefalografie neinvazivně vyšetřuje elektrickou činnost mozku na základě změny polarizace neuronů mozkové kůry. První takové vyšetření na člověku provedl německý psychiatr Hans Berger v roce 1929.

Jak již bylo řečeno, ke snímání elektrické aktivity z povrchu hlavy jsou použity elektrody, které jsou na hlavě rozmístěny dle mezinárodně uznávaného systému 10/20 [13]. Čísla 10 a 20 zde představují podíly vzdáleností mezi jednotlivými elektrodami na celkové vzdálenosti mezi určitými body na lebce vyjádřené v procentech. Jednotlivé elektrody jsou označeny vždy písmenem a číslem. Písmena udávají informaci, o který lalok se jedná (Fp - frontopolární, F - frontální/čelní, P - parietální/temenní, T - temporální/spánkový, O - okcipitální/týlní a C - centrální¹) a čísla prozrazují stranu mozku - pravou hemisféru popisují elektrody se sudými čísly a levou hemisféru elektrody s těmi lichými. Dalšími důležitými komponentami přístroje EEG jsou diferenční zesilovač a filtr, které beze sporu mají při hodnotách měřených v μV a přítomnosti šumu své opodstatnění.

EEG může být nápomocné při detekci mozkových poranění, mrtvici, spánkových poruchách či chronických bolestech hlavy, ovšem zdaleka největší úplatnění EEG nachází v oblasti epileptologie.

¹Jedná se o centrální umístění na lebce, nikoliv o mozkový lalok



Obrázek 1.2: Umístění elektrod na hlavě pacienta [32].

1.3. Epilepsie

Epilepsie je chronické onemocnění, při kterém dochází k poruchám činnosti mozku - *epileptickým záchvatům*. Cytoplazmatická membrána v neuronu z epilepsií postižené oblasti mozku je více vzrušivá a systém komunikace mezi těmito neurony je pak patologicky pozměněn. Výsledkem je šíření a synchronizace abnormální aktivity tak, že v EEG signálu je pozorovatelný *výboj*.



Obrázek 1.3: Epileptické výboje [10]

Dojde-li k synchronizaci enormního množství patologicky fungujících neuronů, situace vyústí v klinický záchvat [9], kdy se oproti běžnému nepravidelnému signálu při vědomí pacienta mozková aktivita stává rytmickou a amplituda záznamovaného signálu se značně zvýší.

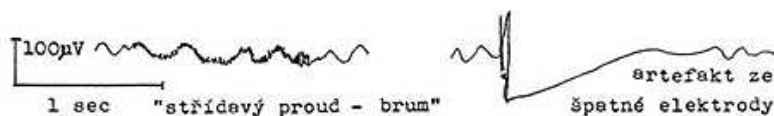
Z hlediska velikosti části mozku postižené epilepsií je rozlišována epilepsie *generalizovaná*, která se týká celého mozku, a *fokální* (ložisková) vycházející z *iritační*² či *epileptogenní*³ zóny. Projevy epileptického záchvatu v závislosti na

²iritační zóna je oblast mozku s abnormální aktivitou, která generuje výboje

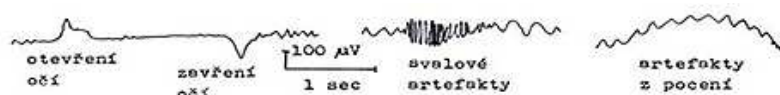
³epileptogenní zóna je oblast mozku (větší než iritační zóna) s abnormální aktivitou, která

dvou a větších pak vytváří *komplexy*. Mezi grafoelementy typické pro epilepsii je řazen hrot (ostrý vrchol o délce 20 - 80 ms), ostré vlny (ostré vrcholy delší než 80 ms, do 200 ms) a také komplexy jednoho či více po sobě jdoucích hrotů s následující pomalou vlnou. Obecně se předpokládá, že projevy epilepsie zachytí EEG snímané z povrchu hlavy ve frekvencích od 0,5 až 40 Hz [24].

V praxi musí vyšetřovatel při čtení EEG signálu zapojit schopnost odlišení epileptického výboje či dokonce klinického záchvatu od rušivých potenciálů - *artefaktů* [10]. Pomocí filtrů můžeme efektivně zneškodnit ku příkladu rušení elektrickou sítí (50 Hz), ovšem na jiné artefakty s původem v prostředí, s původem v přístroji (snímání vadnou elektrodou) nebo s původem v pacientovi, kdy se v EEG záznamu projeví svalový záškub či otevření očí, musí být vyšetřovatel vybaven letitými zkušenostmi. U odhalení artefaktů zapříčiněných pacientem může vyšetřovateli pomoci video monitoring.



Obrázek 1.5: Artefakty technické povahy [10]



Obrázek 1.6: Artefakty biologické povahy [10]

Kapitola 2

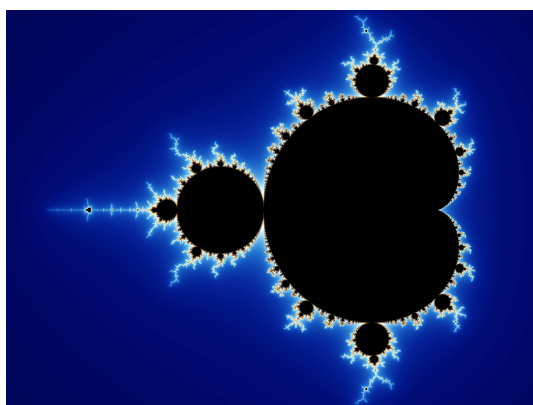
Úvod do problematiky fraktálů

Tato kapitola obsahuje definice fraktálu a shrnutí teorie k nim potřebné. Následně jsou uvedeny nejznámější z fraktálních křivek.

2.1. Fraktální geometrie

Body, úsečky, čtverce a jiné dokonale pravidelné útvary, jimiž se klasická geometrie zabývá, lze v přírodě nalézt spíše zřídka. Země není hladká koule, řeky netvoří pravidelné křivky a ani buňky těl živočichů či rostlin nemají naprosto pravidelnou formu. Nicméně, člověk v tradiční geometrii nachází uspokojivý způsob zobecnění těchto objektů těmi dokonalými, jež svým tvarem připomínají.

Publikováním knihy Fraktální geometrie přírody položil v roce 1982 Benoit



Obrázek 2.1: Mandelbrotova množina

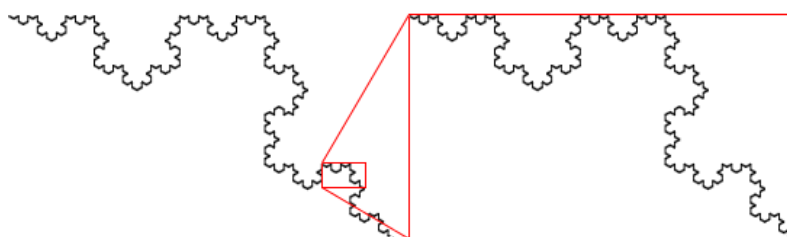
Mandelbrot základy zcela odlišnému popisu světa. Fraktální geometrii lze použít

k modelování stavby tak členitých úkazů přírody, jakými jsou pohoří, lesy, rostliny (např. větvení stromu nebo kapradiny, růžičková stavba kvěťáku) či tělní orgány (větvení průdušek v plicích); nabízí také modely chování počasí nebo modely různých biologických procesů. Množina, kterou se Mandelbrotovi prostřednictvím počítačů podařilo vykreslit, je pojmenována po svém autorovi a můžete ji vidět na Obrázku 2.1.

Jednotná definice fraktálu doposud nebyla stanovena, ale za fraktál [1] lze považovat každý z následujících objektů.

Definice 2.1. : *Pokud je množina F soběpodobná, potom je F fraktál.*

Poznámka 2.1.1. *Tzn. ať už použijeme jakékoliv měřítko, části této množiny jsou podobné jejímu celku.*



Obrázek 2.2: Soběpodobnost znázorněná na von Kochově křivce

Definice 2.2. *Množina F je fraktál, jestliže je tato množina atraktorem systému iterovaných funkcí.*

Systému iterovaných funkcí je věnována Sekce 2.2.

Definice 2.3. : *Množina F se nazývá fraktál, převyšuje-li její Hausdorffova fraktální dimenze dimenzi topologickou,*

Poznámka 2.3.1. *Ekvivalentně, množina F se nazývá fraktál, má-li neceločíselnou fraktální dimenzi.*

Více o Hausdorffově dimenzi v Sekci 2.3.

Přitom fraktál nemusí splňovat každou z těchto definic. Obecně je za fraktál považována podle [3] množina F , která má velice jemnou strukturu (a to i při značném přiblížení), k jejímu popisu nelze využít klasické geometrie, v mnoha případech je F soběpodobná a většinou je její fraktální dimenze větší než topologická. Často lze tuto množinu popsat jednoduchým rekurzivním¹ předpisem.

Z důvodu předpokladů nekonečné členitosti je existence fraktálů v reálném světě nepředstavitelná. I přesto nabízejí efektivní způsob popisu různě složitých předmětů.

2.2. Fraktál jako atraktor IFS

Tato oblast teorie fraktálů byla vypracována postupně J. E. Hutchinsonem a M. F. Barnsleym [1] a využívá se především při konstrukci fraktálů. Zde je uvažován systém iterovaných funkcí $\{X; f_i, i = 1, \dots, N_p\}$, dále jen IFS, skládající se z kontrakčních funkcí f_i s faktory $c_i, i = 1, \dots, N_p$ definovaných na úplném metrickém prostoru X . Klíčovou roli ve výstavbě celého aparátu pak hraje Banachova věta.

Věta 2.4 (Banachova). ([1],[2],[8]) *Bud'*

- (X, d) úplný metrický prostor,
- $f : X \rightarrow X$, kontrakce s faktorem c , tzn.

$$d(f(a), f(b)) \leq cd(a, b), \forall a, b \in X, c \in \langle 0, 1 \rangle$$

Potom existuje právě jeden přitažlivý pevný bod $x_ = f(x_*)$, tedy platí*

$$x_* = f(x_*),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(a), x_*) = 0.$$

V případě, že uvažujeme systém iterovaných funkcí, jsou vstupy jednotlivých iterací podrobeny funkci

$$F : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X);$$

¹tedy pomocí systému iterovaných funkcí

$$F(A) = \bigcup_{n=1}^{N_p} f_n(A), \forall A \in \mathcal{H}(X),$$

kde $\mathcal{H}(X)$ značí hyperprostor² příslušný prostoru X . Taková funkce F se nazývá *Hutchinsonův-Barnsleyův operátor* (*H-B operátor*) a je kontraktivní (viz. [1]). Tedy podle Banachovy věty existuje právě jedna přitažlivá pevná množina $A_* \in \mathcal{H}(X)$, jež splňuje

$$A_* = \bigcup_{n=1}^{N_p} f_n(A_*),$$

$$A_* = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(A), \forall A \in \mathcal{H}(X).$$

Taková množina A_* se nazývá *atraktor* příslušného *systému iterovaných funkcí*.

Věta 2.5 (Kolážová). ([1],[2],[8]) *Mějme úplný metrický prostor (X, d) , k němu příslušný hyperprostor $(\mathcal{H}(X), d_H)$ s Hausdorffovou metrikou³ a systém iterovaných funkcí*

$$\{X; f_n, n = 1, 2, \dots, N_p\}$$

s faktorem kontrakce c a atraktorem A_ . Pro $A \in \mathcal{H}(X)$ platí*

$$d_H(F^m(A), A_*) \leq \frac{c^m d_H(A, F(A))}{c - 1},$$

kde F je H-B operátor systému iterovaných funkcí a F^m m -krát iterovaný H-B operátor systému iterovaných funkcí.

Díky Kolážové větě lze stanovit horní odhad vzdálenosti kompaktní množiny A po m iteracích funkce F od A_* . Nechť je pak dána neprázdná kompaktní množina

²soubor všech neprázdných kompaktních podmnožin prostoru X

³na hyperprostoru je použita Hausdorffova metrika d_H :

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \overbrace{\sup_{a \in A} \left\{ \inf_{b \in B} \{d(a, b)\} \right\}}^{d(A, B)}, \overbrace{\sup_{b \in B} \left\{ \inf_{a \in A} \{d(a, b)\} \right\}}^{d(B, A)} \right\}.$$

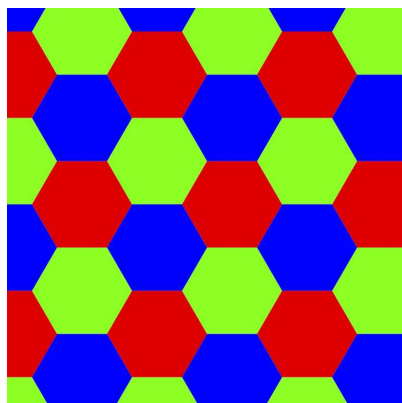
Detailněji popsáno v [1]

$A \in \mathbf{X}$. Pokud najdeme systém iterovaných funkcí $\{X; f_1, f_2, \dots, f_{N_p}\}$, jehož atraktor se nachází v blízkosti množiny A , může být použit k reprezentaci množiny A . To je přínosné například u elektronických úprav obrazu, kdy místo datově náročné množiny A postačí ukládat IFS data [8].

2.3. Hausdorffova fraktální dimenze

Podvědomě chápeme dimenzi jako vlastnost množiny či prostoru spojenou s počtem souřadnic [1], jimiž je v uvažovaném prostředí bod jednoznačně určen. Bod na přímce může být definován jedním číslem, v rovině je k jasnému popisu žádoucí dvojice souřadnic a u prostoru, ve kterém chápeme svůj fyzický výskyt, má bod přesné umístění při třech číselných údajích.

Nechť existuje rozklad uvažované množiny, u kterého by bylo možné jednotlivým podmnožinám přiřadit co nejmenší počet $n + 1$ barev tak, aby se podmnožiny se stejnými barvami nedotýkaly. V tomto zjednodušeném pojetí z [17] je definovaná topologická dimenze podle Lebesgua rovna n .



Obrázek 2.3: Rozklad čtverce na podmnožiny, u kterého postačí k odlišení sousedních podmnožin tři barvy, dává dimenzi čtverce 2. Podobně bychom mohli použít dvě barvy u rozkladu přímky a čtyři barvy u vhodně zvoleného rozkladu třídimenzionálních těles.

Fraktální dimenze poskytuje spíše představu o nepravidelnosti sledovaného objektu či procesu.

Definice 2.6 (Hausdorffova míra). ([1],[3]) Mějme $M \subset \mathbf{R}^n$ a $s \geq 0$. Dále

$$\mathcal{H}_\gamma^s(M) = \inf \left(\sum_i |(Q_i)|^s : \{Q_i\} \text{ je } \gamma\text{-pokrytí } M, \right)$$

tzn. $\{Q_i\}$ je spočetný (konečný) soubor neprázdných množin⁴ o průměru nejvýše γ , které pokryjí množinu M . Potom

$$\mathcal{H}^s(M) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \mathcal{H}_\gamma^s(M)$$

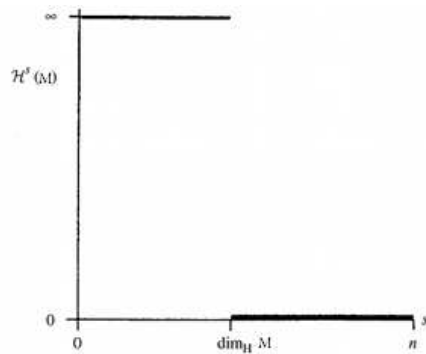
se nazývá s -dimenzionální Hausdorffova míra.

Definice 2.7 (Hausdorffova dimenze). ([3],[1]) Hausdorffova dimenze množiny M je rovna $s \geq 0$ takovému, že

$$\dim_H M = \inf \{s : \mathcal{H}^s(M) = 0\} = \sup \{s : \mathcal{H}^s(M) = \infty\},$$

tzn.

$$\mathcal{H}^s(M) = \begin{cases} \infty, & s < \dim_H M \\ 0, & s > \dim_H M. \end{cases}$$



Obrázek 2.4: Hausdorffova dimenze množiny je rovna takovému s , ve kterém proběhne změna Hausdorffovy míry této množiny z ∞ do 0.

⁴ $|Q_i|$ značí průměr množiny Q_i

Pokud $s = \dim_H M$, potom $\mathcal{H}^s(M)$ může být rovna 0, ∞ nebo

$$0 < \mathcal{H}^s(M) < \infty.$$

Uvažujeme-li např. jednotkovou kružnici, její objem se rovná 0, obsah π a délka ∞ . Hausdorffova dimenze jednotkové kružnice je tedy rovna 2.

Základní vlastnosti Hausdorffovy dimenze [3]

- Otevřená množina $M \subset \mathbf{R}^n$ jistě obsahuje (dle své definice) nějakou n -rozměrnou kouli, tudíž Hausdorffova dimenze otevřené množiny $M \subset \mathbf{R}^n$ je rovna n .
- Geometricky hladká⁵ m -dimenzionální plocha v $\mathbf{R}^n$ má Hausdorffovu dimenzi v hodnotě m .
- Je-li N podmnožinou M , potom platí $\dim_H N \leq \dim_H M$.
- Hausdorffova dimenze posloupnosti množin $M_1, M_2, \dots$ je rovna

$$\dim_H \bigcup_i M_i = \sup_i \{\dim_H M_i\}.$$

- Hausdorffova dimenze konečné či spočetné množiny je rovna 0. Uvažujeme-li totiž, že se taková množina skládá z jednoprvkových podmnožin M_i , kde každá z nich má $\mathcal{H}^0(M_i) = 1$, bude

$$\dim_H \bigcup_i M_i = \sup_i \{\dim_H M_i\} = 0.$$

Věta 2.8. ([3]) *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ a $f : M \rightarrow \mathbf{R}^m$ je zobrazení, které splňuje*

$$|f(x) - f(y)| \leq k |x - y|^\alpha, x, y \in M.$$

Potom $\dim_H f(M) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H M$.

⁵ tzn. diferencovatelná v každém svém bodě

Důkaz. Uveden v [3]. □

Důsledkem Věty 2.8 jsou následující tvrzení ([3]). Nechť $f : M \rightarrow \mathbf{R}^m$ je Lipschitzovsky spojitě zobrazení, tedy pro každé $x, y \in M$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq k |x - y|,$$

potom

$$\dim_H f(M) \leq \dim_H M.$$

Nechť $f : M \rightarrow \mathbf{R}^m$ je bi-Lipschitzovská funkce, tedy pro každé $x, y \in M$ platí

$$k_1 |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq k_2 |x - y|, 0 < k_1 \leq k_2 < \infty,$$

potom

$$\dim_H f(M) = \dim_H M.$$

Jinými slovy, Hausdorffova dimenze je invariantní vůči bi-Lipschitzovskému zobrazení. V případě, že mezi dvěma množinami existuje bi-Lipschitzovské zobrazení (tzn. mají stejné dimenze), je možné prohlásit tyto dvě množiny ve fraktální geometrii za stejné. Naopak, pokud dvě množiny mají různé dimenze, nemůže mezi nimi existovat bi-Lipschitzovská funkce. Tohoto poznatku lze užít k rozlišení množin.

Věta 2.9. ([3]) *Množina $M \subset \mathbf{R}^n$, jejíž Hausdorffova dimenze $\dim_H M < 1$, je naprosto nespojitá.*

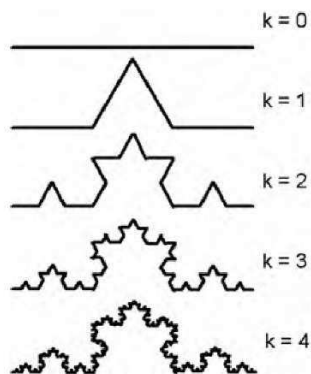
Důkaz. Uveden v [3]. □

2.4. Nejznámější fraktální křivky a jiné množiny

2.4.1. Von Kochova křivka

Podrobně je popsána v [1] a v [3]. Konstrukce von Kochovy křivky vychází z jednotkové úsečky. Při první iteraci dochází k rozdělení dané úsečky na tři stejně dlouhé části, přitom je prostřední třetina nahrazena lomenou křivkou, kterou tvoří

dva segmenty oba o délkách nahrazované části. V každém následujícím kroku se znovu aplikuje takové lámání na všechny rovné části křivky. Při nekonečném počtu kroků získáme von Kochovu křivku.



Obrázek 2.5: Proces vzniku von Kochovy křivky

Jak již bylo naznačeno výše (Obrázek 2.2), von Kochova křivka je *soběpodobná*. Je to dáno tím, že pochází z IFS [26] tvořeného podobnostmi s faktory $\frac{1}{3}$:

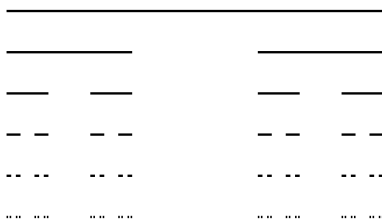
$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ f_2(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f_3(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}, \\ f_4(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Von Kochova křivka má velice jemnou strukturu a přesto, že jde o křivku, pokud bychom ji chtěli změřit, pomocí délky se nám to nepodaří:

$$l_{Koch} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} \right)^n = \infty.$$

2.4.2. Cantorova množina

Detailní popis lze dohledat opět v [1] či v [3]. Cantorova množina (nebo také *Cantorův prach* či *Cantorovo diskontinuum*) není fraktální křivkou, ale je fraktálem a své uplatnění najde v další sekci. Její vznik tkví v nekonečném odebírání vždy střední třetinové části intervalů, přičemž tím počátečním je uzavřený interval $\langle 0, 1 \rangle$. Výsledkem první iterace jsou pak intervaly $\langle 0, \frac{1}{3} \rangle$ a $\langle \frac{2}{3}, 1 \rangle$, po druhé iteraci získáme $\langle 0, \frac{1}{9} \rangle$, $\langle \frac{2}{9}, \frac{1}{3} \rangle$, $\langle \frac{2}{3}, \frac{7}{9} \rangle$ a $\langle \frac{8}{9}, 1 \rangle$ atd.



Obrázek 2.6: Proces vzniku Cantorovy množiny

Cantorovu množinu je tedy možné získat z původně jednotkového intervalu pomocí IFS skládajícího se z funkcí

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x, x \in \mathbf{R},$$

$$f_3(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, x \in \mathbf{R},$$

kde f_1 vede vždy k levé a f_3 k pravé části.

Cantorova množina je opět *soběpodobná* při meziiteračním faktoru podobnosti $\frac{1}{3}$. Tato množina má velice jemnou strukturu teoreticky patrnější až při velkém přiblížení; klasická geometrie uspokojivý popis Cantorovy množiny neposkytuje. Ačkoliv je tvořena nespočetným množstvím bodů, nelze tradičním způsobem měřit její délku (pro každý z bodů existuje prázdné okolí a vzdálenost mezi nimi je různá).

Příklad 2.10. Výpočet Hausdorffovy dimenze Cantorovy množiny [3]

Vycházejme z původní množiny $M = \langle 0, 1 \rangle$, po první iteraci zůstanou dvě části $M_A = M \cap \langle 0, \frac{1}{3} \rangle$ a $M_C = M \cap \langle \frac{2}{3}, 1 \rangle$. Obě tyto množiny jsou podobné

původní množině M s faktorem $\frac{1}{3}$. Nová množina M se skládá z M_A a M_C , tzn. $M = M_A \cup M_C$. Proto díky větě 2.17 platí

$$\mathcal{H}^s(M) = \mathcal{H}^s(M_A) + \mathcal{H}^s(M_C) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(M) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(M).$$

Za předpokladu, že $0 < \mathcal{H}^s(M) < \infty$ při $s = \dim_H M$, můžeme obě strany rovnice vydělit hodnotou $\mathcal{H}^s(M)$,

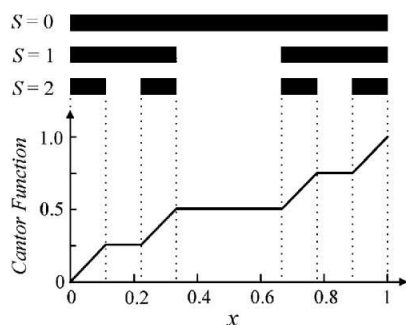
$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(M) &= \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(M) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(M), \\ 1 &= 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s, \\ \log\left(\frac{1}{2}\right) &= s \log\left(\frac{1}{3}\right), \\ s &= \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0,6309. \end{aligned}$$

Nekonečné iterování dává nespočetně nekonečnou množinu, jejíž body v určitém velice malém okolí nemají žádný sousední bod. Nemělo by smysl měřit délku, tudíž nedosahuje dimenze 1, ovšem při nespočetném množství bodů není vhodné dimenzi stanovit jako nulovou. Proto hodnota dimenze 0,6309 dává smysl.

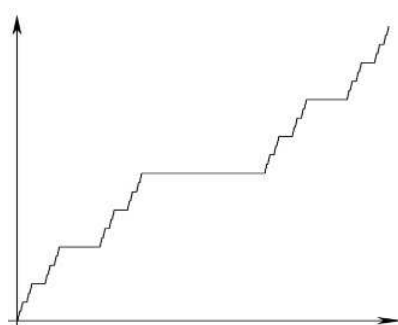
2.4.3. Ďáblovo schodiště

Nechť je dán jednotkový čtverec, kde pomyslná vodorovná osa je tvořena body jednotkového intervalu uvažovaného při konstrukci Cantorovy množiny. Nekonečné vykreslování vyjmutých částí při konstrukci Cantorova diskontinua vždy do středních výšek již vykreslených sousedních intervalů vytváří ďáblovo schodiště. Tzn. při první iteraci je ve výši $\frac{1}{2}$ vykreslen interval $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$. Druhá iterace přidá segmenty $\langle \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \rangle$ a $\langle \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \rangle$ do výšek $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$. Informace o Ďáblu schodišti jsou čerpány z [27].

Horní plocha vykrojená takto definovanou křivkou má po otočení o 180° naprosto identický tvar jako ta dolní. Lze tedy usuzovat, že obsah obou částí je roven



Obrázek 2.7: Konstrukce ďáblova schodiště



Obrázek 2.8: Ďáblovo schodiště

$\frac{1}{2}$. Protože uvažujeme pouze neklesající vývoj křivky skládající se z vodorovných schodů, délka křivky formující schodiště je rovna 2. Topologická dimenze křivky je tedy nepochybně rovna 1 (a s ní rovněž dimenze fraktální). Ďáblovo schodiště je selfafinní⁶, protože pro jakékoliv $a \in \mathbf{N}$ je křivka v $\langle 0, (\frac{1}{3})^a \rangle \times \langle 0, (\frac{1}{2})^a \rangle$ podobná kompletnímu ďáblovu schodišti. Ďáblovo schodiště má ovšem stejně nepravidelnou strukturu jako Cantorova množina, logicky je tedy rovněž fraktálem a definice, na kterou se lze při tomto odvolat, je obsažena v [16].

Ďáblovo schodiště lze při náhodném výběru bodu z Cantorovy množiny chápat jako pravděpodobnostní funkci $P(x)$, že tento bod leží vlevo od nějakého předem určeného bodu x , $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

⁶Určité části ďáblova schodiště jsou jeho zobrazeními při zachování dělicího poměru - (sobě)podobnost je speciálním případem (self)afinity

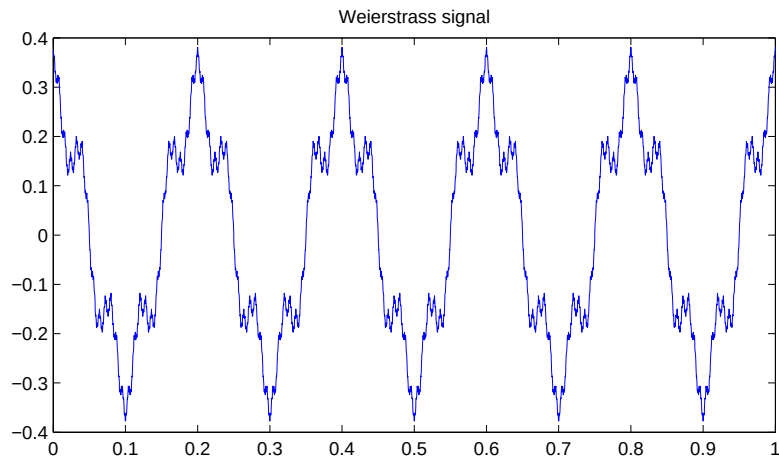
2.4.4. Weierstrassův signál

Weierstrassova funkce je součástí klasické matematické analýzy. Jedná se o spojitou funkci, která v žádném bodě nemá derivaci. Mezi fraktály se mimo jiné vlastnosti řadí na základě soběpodobnosti. Obecnou podobu funkce, se kterou Weierstrass pracoval, lze dohledat v [11]. Pro účely této práce ovšem použijeme následující předpis.

Nechť $H \in (0, 1)$ a λ je minimální frekvence oscilací. Weierstrassovu funkci definujeme podle [19] jako:

$$f_{W_c}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-kH} \cos(2\pi\lambda^k t).$$

Parametr H značí Hurstův exponent, jehož definice je obsažena v [22]. V praxi se nekonečný součet nahradí konečným a výsledný produkt tohoto umělého generování je znám jako Weierstrassův signál.



Obrázek 2.9: Weierstrassův signál generovaný pro $H = 0.8$ a $\lambda = 5$.

Hausdorffova dimenze takto definovaného Weierstrassova signálu je rovna

$$\dim_H = 2 - H.$$

Z obrázku je zřejmé, že z dosud navržených křivek má k elektroencefalogramům nejbližší právě Weierstrassův signál.

Kapitola 3

Jiné fraktální dimenze

Hausdorffova dimenze jakékoliv množiny existuje, nevýhodou však je, že např. u EEG není možné se k její hodnotě dopočítat. Z tohoto důvodu se v praxi používají alternativní metody výpočtu fraktální dimenze založené na mocninných zákonech. Tato kapitola začíná u základních fraktálních dimenzí jako jsou soběpodobnostní, obvodová a pokrývací dimenze [1], a dále představuje Higuchiho fraktální dimenzi [20] a zobecněnou korelační dimenzi [14],[2],[15], které vyčíslují fraktální dimenzi časových řad a tím zprostředkovaně také procesu či systému, ze kterého vycházejí. V další kapitole se dvě poslední uváděné metody stávají hlavními nástroji fraktální analýzy. Pro podrobnější teorii fraktálních dimenzí odkazujeme čtenáře na [3], [4], [5] a příp. na populárně zpracovanou četbu o fraktálech v [6] a [7].

3.1. Soběpodobnostní dimenze

Předpokladem k výpočtu soběpodobnostní fraktální dimenze je IFS skládající se pouze z podobností a znalost tohoto IFS $\{X; f_i, i = 1 \dots n\}$, ze kterého množina pochází, nebo alespoň jemu příslušných koeficientů $r_1, r_2, \dots, r_n$. Pak je aplikován *Moranův* vzorec [1]

$$\sum_{i=1}^n r_i^{dim_s} = 1,$$

který lze ve speciálním případě u IFS skládajícího se pouze z podobností se shodnými faktory $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$ převést na

$$nr^{dim_s} = 1.$$

Pak získáme soběpodobnostní dimenzi jako

$$dim_s = \frac{\log(n)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

Příklad 3.1. Výpočet soběpodobnostní dimenze von Kochovy křivky

IFS von Kochovy křivky se skládá ze čtyř funkcí, viz. Podsekce 2.4.1, jejichž faktory podobnosti mezi jednotlivými iteracemi jsou totožné a rovné $r = \frac{1}{3}$. Soběpodobnostní dimenzi Kochovy křivky dostaneme po dosazení do vzorce

$$dim_s = \frac{\log(4)}{\log(3)} \doteq 1,262.$$

3.2. Obvodová dimenze

Měření obvodu území států či pobřeží a následné srovnávání představuje problém neřešitelný pomocí nástroje jako je délka. Naměřená délka obvodu totiž závisí na použité délce jednotky (úsečky) obvodu; čím je délka obvodové jednotky (úsečky) menší, tím je měření přesnější a délka obvodu větší.

L. E. Richardson se tímto problémem zabýval [1] a zaznamenal vztah mezi délkou obvodu (L) a délkou použité úsečky (s) jako

$$L(s) \approx s^{-dim_{Obv}+1},$$

a při použití vzorce

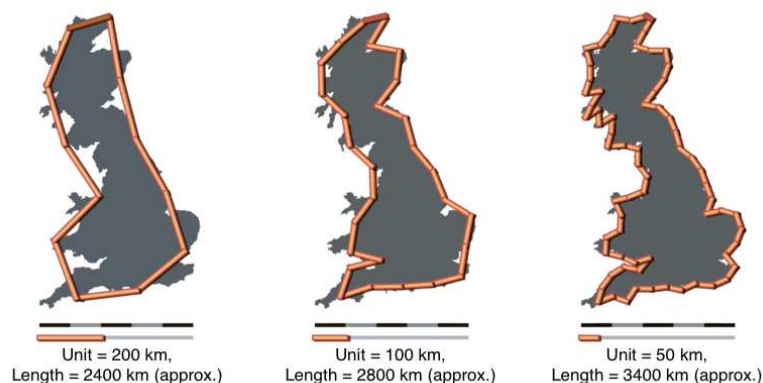
$$N(s)s \approx L(s),$$

kde $N(s)$ značí počet úseček o délce (s) potřebných ke změření obvodu, a získal

$$N(s)s \approx s^{-dim_{Obv}+1},$$

$$N(s) \approx s^{-dim_{Obv}},$$

$$N(s) \approx \left(\frac{1}{s}\right)^{dim_{Obv}},$$



Obrázek 3.1: Délka obvodu Velké Británie závisí na použité délce jednotky obvodu.

odkud může být obvodová dimenze vyjádřena jako

$$\dim_{Obv} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\log(N(s))}{\log\left(\frac{1}{s}\right)}.$$

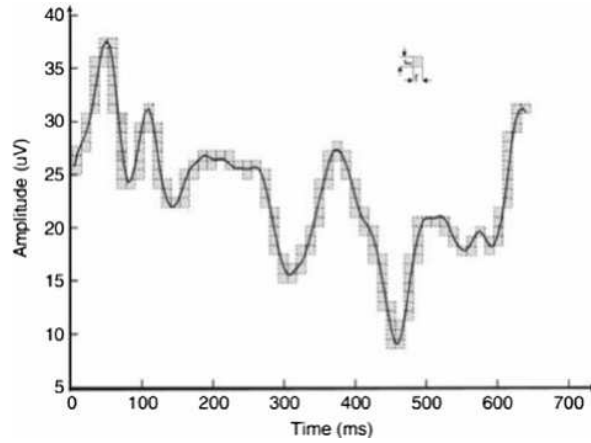
Obvodová dimenze tak poskytuje informaci o míře nepravidelnosti a je ilustrativním příkladem, že fraktální dimenze umožňuje srovnání různých množin v případech, kdy klasické přístupy měření množin selhávají.

3.3. Pokrývací dimenze

Zdaleka nejpoužívanějším způsobem výpočtu fraktální dimenze na základě mocninných zákonů je však pokrývací dimenze. Pokrývací dimenze (anglicky *box-counting dimension*) je totiž aplikovatelná na obrázky a grafy, kdy nejčastější¹ interpretací tohoto postupu je rozložení mřížky na daný vstup a následné zjištění počtu čtverců/krychlí, jimiž obrázek či graf prochází. Tento údaj je při délce stran čtverců r značen jako $N(r)$.

¹ $N(r)$ může rovněž značit:

- nejmenší počet uzavřených koulí o poloměru r , které tvoří pokrytí dané množiny,
- nejmenší počet krychlí o straně r , které tvoří pokrytí dané množiny,
- nejmenší počet množin, jejichž průměry jsou maximálně r a tvoří pokrytí dané množiny,
- největší počet neslučitelných koulí o poloměru r se středy v bodech dané množiny



Obrázek 3.2: Proces pokrývání elektroencefalogramu

Výchozím vzorcem je pak [1]

$$N(r) \approx \left(\frac{1}{r}\right)^{dim_{Pok}},$$

a odvozená pokrývací dimenze nabývá podoby

$$dim_{Pok} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\log(N(r))}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

3.4. Higuchiho fraktální dimenze

K odhadu fraktální dimenze dynamického systému, jehož chování popisuje určitá časová řada, užívá Higuchiho algoritmus [20] průměrných délek křivek, které spojují hodnoty dílčích, tzv. reprezentačních, časových řad.

Mějme k dispozici časovou řadu $y_1, y_2, \dots, y_N$. Z ní budou vytvořeny dílčí reprezentační časové řady y_k^m užitím časových rozestupů k následovně:

$$y_k^m : y_m, y_{m+k}, y_{m+2k}, \dots, y_{m+\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor k},$$

$$m = 1, 2, \dots, k,$$

kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x . Délku křivky $L_m(k)$, kterou vytváří repre-

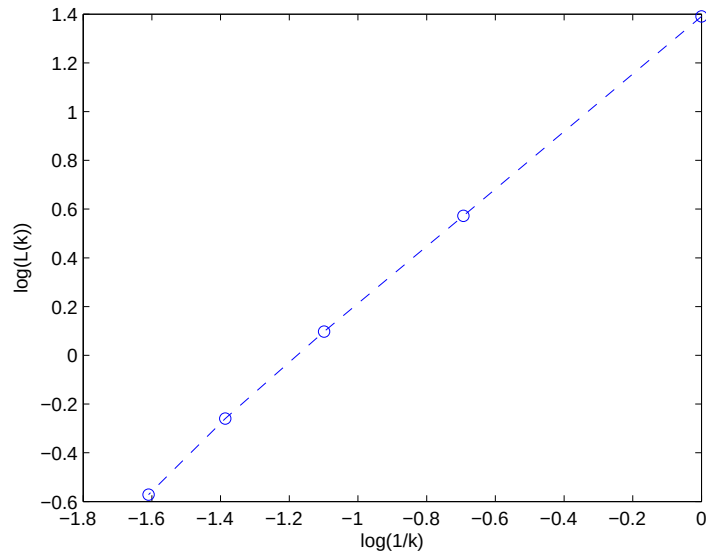
zentační řada y_k^m , pak vypočítáme jako

$$L_m(k) = \frac{1}{k} \left[\left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor} |y_{m+ik} - y_{m+(i-1)k}| \right) \frac{N-1}{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor k} \right].$$

Pro dané k definujeme délku křivky $L(k)$ při původní časové řadě jako průměr délek $L_m(k)$ přes $m = 1, 2, \dots, k$. Potom $\dim_{Hig}$ takové, že

$$L(k) \approx \left(\frac{1}{k} \right)^{-\dim_{Hig}},$$

je odhadem fraktální dimenze.



Obrázek 3.3: Log-log graf Higuchiho metody pro Weierstrassův signál

3.5. Praktický výpočet fraktální dimenze

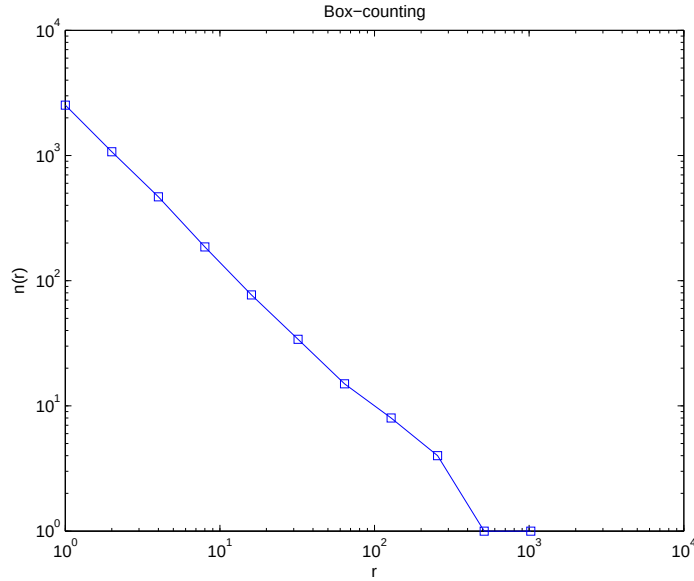
Díky l'Hospitalovu pravidlu lze využít k výpočtu fraktální dimenze log-log grafu. Jak čitatel, tak jmenovatel se totiž při $r \rightarrow 0^+$ blíží k ∞ , proto lze např.

pokrývací dimenzi vyjádřit jako

$$\begin{aligned}
 dim_{Pok} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\partial \log(N(r))}{\partial r}}{\frac{\partial \log(\frac{1}{r})}{\partial r}} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\partial \log(N(r))}{\partial \log(\frac{1}{r})} \\
 &= \lim_{r_1, r_2 \rightarrow 0^+} \frac{\log(N(r_2)) - \log(N(r_1))}{\log(r_2) - \log(r_1)}.
 \end{aligned}$$

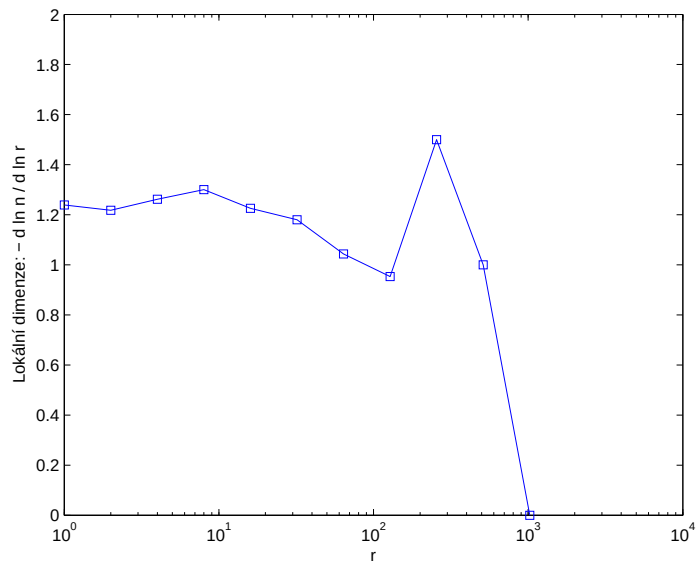
Lepších výsledků je dosaženo při odebrání limity [25], k výpočtu fraktální dimenze je tak použit předpis

$$dim_{Pok} = \frac{\log(N(r_2)) - \log(N(r_1))}{\log(r_2) - \log(r_1)}.$$



Obrázek 3.4: Log-log graf pokrývací dimenze Kochovy křivky

V praxi fraktální dimenzi vyčíslíme jako absolutní hodnotu směrnice grafu hodnot $\log(N(r))$ proti $\log(r)$. Výsledná fraktální dimenze je ovlivněna volbou škálovacích parametrů r , nejvhodnější je takové rozmezí r , při kterém fraktální dimenze nabývá přibližně konstantních hodnot. Vhodnou pomůckou v tomto bodě může být graf $\frac{\partial \log(N(r))}{\partial \log(\frac{1}{r})}$ proti $\log(r)$.



Obrázek 3.5: Hodnoty lokálních pokrývacích dimenzí Kochovy křivky

3.6. Fraktální dimenze známých křivek

K veškerým výpočtům v této diplomové práci byl použit Matlab. Pomocí funkcí uvedených v Sekci 4.1 byly vypočteny fraktální dimenze Kochovy křivky, Weierstrassova signálu a Ďáblova schodiště. Výpočet je důkladněji popsán v příloženém skriptu *PostupZnameFraktaly.m*.

	dim_H	dim_{Obv}	dim_{Pok}	dim_{Hig}
Kochova křivka	1,2619	1,2182	1,2545	-
Weierstrassův signál	1,2	1,1291	1,1902	1,2090
Ďáblovo schodiště	1	1,0592	1	1

Tabulka 3.1: Odhady fraktálních dimenzí množin, u nichž známe teoretickou Hausdorffovu dimenzi (dim_H).

Pro srovnání jednotlivých odhadů fraktální dimenze jsou v Tabulce 3.1 shrnuty výsledky obvodové, pokrývací a Higuchiho fraktální dimenze množin a mohou být srovnány se známou Hausdorffovou dimenzí (vyznačena modře). Kochova křivka není časová řada, proto je buňka pro Higuchiho fraktální dimenzi

prázdná. Nejlépe si u uvedených množin vedou pokrývací dimenze a Higuchiho fraktální dimenze, kdy odchylka např. při měření na Weierstrassově signálu dosahuje u pokrývací dimenze 0,0098 a u Higuchiho fraktální dimenze 0,0090. Při vytváření obrázků, jež mají sloužit jako vstupy pro výpočet pokrývací a obvodové dimenze, je důležité zachovávat velikost, poměr stran a další vlastnosti vkládaného obrázku. Tyto parametry mají vliv na výsledné hodnoty odhadovaných fraktálních dimenzí a tím je mohou znehodnotit. Z tohoto důvodu je přistupováno k obvodové a pokrývací dimenzi vycházejících z obrázků pouze jako k orientačním metodám.

3.7. Zobecněná fraktální dimenze

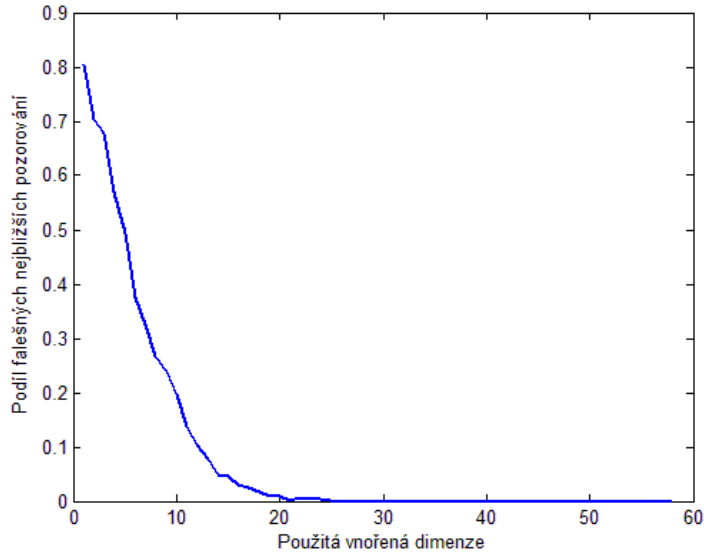
Vstupem doposud uvedených metod výpočtu fraktální dimenze byl EEG záznam ve formě časové řady, popř. jejího vyobrazení. Ovšem časový záznam EEG v hlubším smyslu představuje projekci diskretizované trajektorie dynamického systému [12], za který činnost mozku můžeme pokládat, na jednu osu fázového prostoru. Na základě teorému vnoření lze z časové řady, kterou máme k dispozici, zpětně rekonstruovat fázový prostor činnosti mozku [23]. Zobecněná fraktální dimenze poskytuje číselný popis vlastností atraktoru a tím kvantifikuje chování dynamického systému, ze kterého časová řada pochází.

Rekonstrukce fázového prostoru může být provedena *metodou časových zpoždění*. Dimenzi rekonstruovaného fázového prostoru, tzv. *dimenzi vnoření*, je možno stanovit pomocí metody *falešných nejbližších sousedů* [12]. Tato metoda hledá dvojice bodů, které k sobě mají v dimenzi m blízko z důvodu série projekcí původního fázového prostoru dynamického systému do nižších dimenzí. Pokud je podíl takových dvojic vysoký, dimenze fázového prostoru původního dynamického systému je větší než m a algoritmus pokračuje vyšetřováním dimenze $m + 1$. Takto se postup opakuje dokud není dosaženo dimenze d_e , při které je podíl falešných sousedů (téměř) roven nule. Přehledný popis této metody poskytuje [21].

Fázový prostor rekonstruovaný z naměřených dat $y_0, y_1, y_2, \dots, y_N$ je tvořen d_e -dimenzionálními vektory se zpožděním τ

$$x_k = (y_k, y_{k+\tau}, y_{k+2\tau}, \dots, y_{k+(d_e-1)\tau}),$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots, N_r$ a $N_r = N - (d_e - 1)\tau$. Ke stanovení τ lze použít autokorelační funkci či funkci *average mutual information* [23]. Použijeme-li však $\tau = 1$ a podrobíme-li data analýze falešných nejbližších pozorování, bude ve většině případů EEG záznam, pokud ne plně, tak z větší části, "rozbalen" při $d_e = 22$ [21].



Obrázek 3.6: *Stanovení vnořené dimenze pomocí falešných nejbližších pozorování* - vyobrazení podílu falešných nejbližších pozorování s použitím kódů z [21] na datech popsanych ve 4. kapitole.

3.7.1. Rényiho entropie a dimenze

Tato subsekce vychází z [14]. Vezměme v úvahu množinu E skládající se z n prvků, pro které platí $n = 2^N$ s nějakým kladným celým číslem N . Tak lze každý z prvků jednoznačně identifikovat pomocí přiřazeného binárního čísla o N číslicích. Z údaje $N = \log_2 n$ Rényiho entropie vychází.

Nyní předpokládejme, že $E = E_1 \cup \dots \cup E_b$, kde pro každou dvojici $(E_i, E_j); i, j = 1, \dots, b; i \neq j$ platí $E_i \cap E_j = \emptyset$. Náhodně a nezávisle na sobě rozmístíme n prvků do b podmnožin $E_1, \dots, E_b$ respektujíc pravděpodobnosti $p_1, \dots, p_b$. Přitom mezi n prvky je jeden středem zájmu, ovšem není známo který. Takových experimentů je uskutečněno m , po každém z nich je odhaleno rozmístění prvků v jednotlivých podmnožinách a podmnožina, jež obsahuje hledaný prvek. Necht' $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ značí rozdělení prvků po prvním, druhém, $\dots$ experimentu a $\Omega^{(m)}$ značí vektorový součin rozdělení příslušejících m experimentům. Sledovaný prvek bude jednoznačně určen, jakmile jeho "cesta podmnožinami" bude vzhledem k ostatním unikátní. Necht' P_{nm}^* označuje pravděpodobnost, že hledaný prvek bude po m

experimentech jednoznačně rozpoznán. Definujme

$$e_1(n, \delta) = \min \{m : P_{nm}^* \geq 1 - \delta\}, \delta \in (0, 1),$$

podle Rényiho platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{e_1(n, \delta)} = H_1(P),$$

kde $H_1(P)$ značí *Shannonovu entropii* udávající informaci plynoucí z jednoho experimentu

$$H_1(P) = - \sum_{i=1}^b p_i \log_2 p_i.$$

Celkové množství informace potřebné k charakterizaci množiny E vyjadřuje $\log_2 n$ a při dostatečně velkém n je k odhalení hledaného prvku zapotřebí $\frac{\log_2 n}{-\sum_{i=1}^b p_i \log_2 p_i}$ experimentů.

Podobně lze zapojit pravděpodobnost P_{nm}^q počtu prvků se stejnou cestou menšího než q . Pro $q = 2, 3, \dots$:

$$e_q(n, \delta) = \min \{m : P_{nm}^q \geq 1 - \delta\}, \delta \in (0, 1),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{e_q(n, \delta)} = \left(1 - \frac{1}{q}\right) H_q(P),$$

kde $H_q(P)$ se nazývá *Rényiho entropie* definovaná jako

$$H_q(P) = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_{i=1}^b p_i^q.$$

Pro $q \rightarrow 1$ získáme opět Shannonův vzorec

$$\lim_{q \rightarrow 1} H_q(P) = H_1(P),$$

$$H_1(P) = - \sum_{i=1}^b p_i \log_2 p_i.$$

Mějme diskrétní náhodnou veličinu X_n , vytvořenou z X jako $X_n = \frac{\lfloor nX \rfloor}{n}$ při $n \rightarrow \infty$ s rozdělením pravděpodobností $P_n = \{p_1, p_2, \dots\}$. Informaci obsaženou

v X_n lze definovat pomocí

$$H_1(P_n) = - \sum_i p_i \log_2(p_i), \text{ pro } q = 1,$$

$$H_q(P_n) = \frac{1}{1-q} \log_2 \left(\sum_i p_i^q \right), \text{ pro } q \neq 1.$$

V případě spojitého rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X by bylo množství informace nekonečné. Proto se Rényi omezil na diskrétní náhodnou veličinu X_n .

Definice 3.2. *Zobecněná fraktální dimenze (nebo také Rényiho dimenze) q -tého řádu rozdělení pravděpodobnosti příslušného náhodné veličině X_n , kde $q \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ (používají se spíše celá kladná čísla), je definována jako*

$$\dim_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_q(P_n)}{\log_2 n}.$$

Tato dimenze nabývá kladných hodnot a lze ji interpretovat jako rychlost, s jakou se informace blíží k ∞ [14]. Vzhledem ke q je $\dim_q$ nerostoucí funkcí, tedy platí

$$q_1 < q_2 \implies \dim_{q_1} \geq \dim_{q_2},$$

přitom pokud má veličina X_n rovnoměrné rozdělení, pak se $\dim_q$ pro různá q nemění.

3.7.2. Vlastnosti zobecněné fraktální dimenze

Čím je q větší, tím větší dává výpočet $\dim_q$ váhu oblastem s vysokou četností. V opačném případě, nízké hodnoty q zvětšují vliv méně zasažených intervalů. V hraničních případech dle [23] a [2] platí

$$\dim_{-\infty} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log_2(\min_i(p_i))}{\log_2 r},$$

$$\dim_{\infty} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log_2(\max_i(p_i))}{\log_2 r}.$$

Zde r představuje jednotnou šíři intervalů při rozložení mřížky pro konstrukci diskrétního rozdělení pravděpodobnosti, p_i pak značí pravděpodobnost zásahu i -tého intervalu, $r \rightarrow 0$ tudíž adekvátně zastupuje limitu $n \rightarrow \infty$.

Pomyslným přechodem mezi zobecněnými fraktálními dimenzemi záporných a kladných řádů je dim_0 . Pro $q \rightarrow 0$ dim_0 místo četností zásahů vyšetřuje samotné zásahy oblastí v datech (1-Ano/0-Ne), tedy

$$dim_0 = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log_2 N(r)}{\log_2 r},$$

známe již jako pokrývací dimenzi.

Pro $q \rightarrow 1$, $dim_q \rightarrow dim_1$ je použit Shannonův vzorec:

$$dim_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sum_i p_i \log_2(p_i)}{\log_2(r)},$$

a dim_1 se nazývá informační dimenze [2].

Zobecněná fraktální dimenze řádu $q = 2$ dim_2 se nazývá korelační dimenze [2]

$$dim_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log_2(\sum_i p_i^2)}{\log_2(r)}.$$

3.7.3. Zobecněná korelační dimenze

Grassberger a Procaccia představili algoritmus pro výpočet korelační dimenze, která vypovídá o chování sledovaného dynamického systému. K vytvoření empirického rozdělení pravděpodobnosti jsou použity vzdálenosti mezi body fázového prostoru zrekonstruovaného z poskytnuté časové řady. Korelační integrál $C(r)$ pak počítá relativní četnosti vzdáleností dvou bodů fázového prostoru menších než r , podle [15] tudíž

$$C(r) = \frac{2}{N_r(N_r - 1)} \sum_{i=1}^{N_r-1} \sum_{j=i+1}^{N_r} \Theta(r - \|x_i - x_j\|),$$

kde $\|x_i - x_j\|$ značí Chebyshevovu vzdálenost bodů fázového prostoru, N_r celkový počet bodů fázového prostoru a $\Theta(x)$ splňuje

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Korelační dimenze je pak vypočtena jako směrnice log-log grafu na základě vztahu

$$dim_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(C(r))}{\log(r)}.$$

Tento postup lze zobecnit [15]. Zobecněný korelační integrál $C_q(r)$ představuje průměrnou relativní četnost bodů, v jejichž r -okolí se nachází jiný bod fázového prostoru.

$$C_q(r) = \left(\frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \left(\frac{1}{N_r - 1} \sum_{j \neq i, j=1}^{N_r} \Theta(r - \|x_i - x_j\|) \right)^{q-1} \right)^{\frac{1}{q-1}},$$

Zobecněnou korelační dimenzi řádu q získáme podle

$$dim_q = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log_2(C_q(r))}{\log_2(r)}.$$

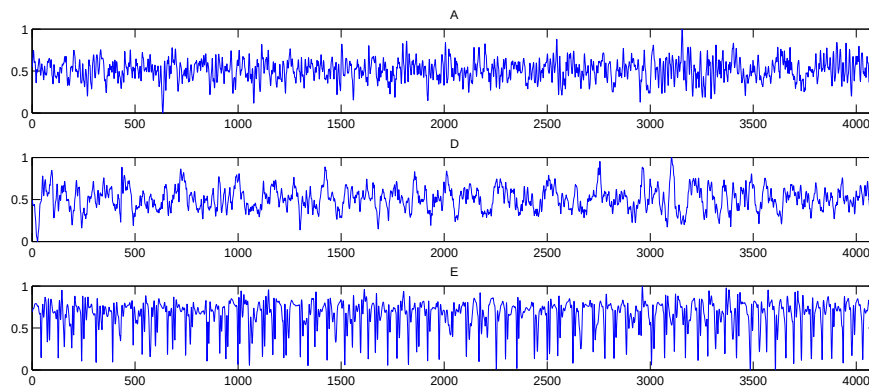
Kapitola 4

Fraktální dimenze EEG

EEG zobrazuje v průběhu času nepravidelnou činnost mozku. Složitost mozkové aktivity lze posuzovat pomocí fraktální dimenze EEG (viz. důsledek Věty 2.8). Čím je dynamický systém popisovaný danou časovou řadou složitější, tím je fraktální dimenze vyšší [23].

Fraktální analýza byla provedena na volně dostupných datech z veřejné databáze [18]. Naměřené jednokanálové úseky o délce 23,6 sekund jsou oproštěny od artefaktů, ukládány s frekvencí měření 173,61 Hz a filtrovány pásmovou propustí o šíři 0,5-85 Hz. Protože se epilepsie v povrchově snímaném EEG projevuje spíše v nižších frekvencích, byl navíc aplikován Butterworthův filtr 0,53-40 Hz, jež je příslušenstvím Eeglabu [24],[18]. Předmětem zkoumání je 60 datasetů pocházejících ze tří skupin měření; skupinu A tvoří EEG zdravých lidí při měření s otevřenýma očima, skupiny D a E se skládají z předoperačních měření přímo na šedé kůře mozkové. V případě skupiny D jde o data z epileptogenní zóny v klidovém režimu, u skupiny E se jedná o zaznamenání epileptického záchvatu bez ohledu na to, z jaké oblasti měření pochází. Pro názornou ukázkou jsou na Obrázku 4.1 ke shlédnutí první datasety z každé zkoumané skupiny.

Záznam EEG diskretizuje nepřetržitou činnost mozku. Fraktální dimenze časové řady jako konečné množiny bodů tvořících dvourozměrný graf naměřených v ekvidistantních časových okamžicích tak úplně nevypovídá o dynamickém systému, ze kterého pochází, jako o množině samotné. Proto v této práci budeme zkoumat fraktální dimenze křivky EEG (obvodová, pokrývací a Higuchiho fraktální



Obrázek 4.1: Reprezentační EEG postupně zdravého člověka s otevřenýma očima, klidové EEG pacienta s epilepsií, záchvatové EEG pacienta s epilepsií

dimenze) a fázového prostoru zrekonstruovaného z příslušné časové řady EEG (zobecněná korelační dimenze). Přitom obvodová a pokrývací dimenze zde vychází z grafů uložených v obrázkových formátech, Higuchiho fraktální dimenze škáluje průměrnou délku křivky EEG při různých časových rozestupech zachytných bodů v poskytnutém vektoru měření EEG a z toho také vychází rekonstrukce fázového prostoru pro výpočet zobecněné korelační dimenze. Hausdorffova a soběpodobnostní dimenze mají spíše teoretický význam, proto se u výpočtů z dat zachycujících přírodní úkazy a děje užívá alternativních metod výpočtů.

Pro stanovení statisticky signifikantních rozdílů mezi fraktálními dimenzemi zkoumaných skupin byla použita jednoduchá analýza rozptylu¹ a Kruskalův-Wallisův test mnohonásobného porovnávání.

4.1. Popis výpočetních funkcí

Veškeré výpočty byly provedeny v prostředí Matlabu.

¹Předpoklad normality je alespoň v případě klidových režimů jak normálních, tak epileptických, splněn (viz. [2]).

4.1.1. Obvodová dimenze

Pro výpočet obvodové dimenze z obrázku byla použita funkce *edgedetector.m* původně vytvořená pro výpočet obvodové dimenze tvaru listu a důkladně popsaná v ([29]). Tato funkce je použita spíše pro zajímavost a případné lepší pochopení vztahu fraktální dimenze k určité křivce.

4.1.2. Pokrývací dimenze

Pokrývací dimenze je počítána funkcí *boxcount.m* ([28]), ta vstupní binární obrázek opakovaně „rozostřuje“ pomocí mřížek o šířích čtverců $r, r = 2^0, \dots, p$, a zjišťuje počet křivkou zasažených takto konstruovaných čtverců (n). Přitom p závisí na velikosti vstupu. Konečná pokrývací dimenze je následně vypočtena na základě vztahů v Sekcích 3.3 a 3.5.

4.1.3. Higuchiho fraktální dimenze

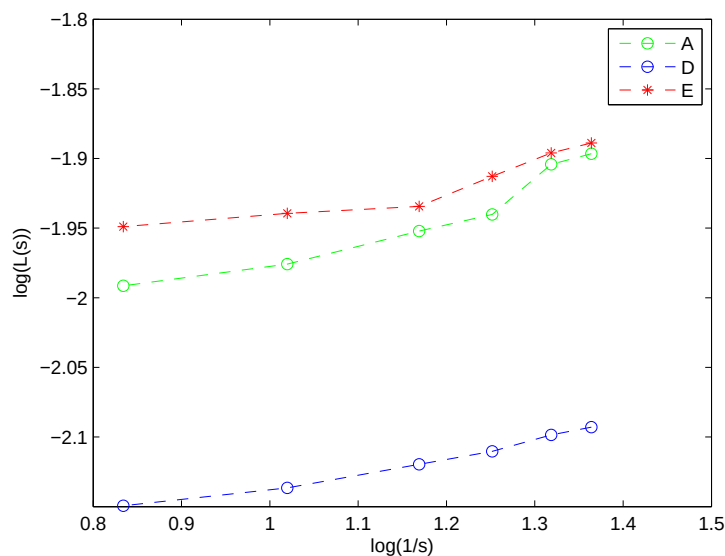
Tato dimenze je zjišťována přímo ze vstupní časové řady. S inspirací v [20] a [36] byla vytvořena funkce *Higuchi.m*, která z původní řady měření sestavuje reprezentační časové řady prostřednictvím rozestupů k , stanovuje délky takto vytvořených křivek a pro každé použité k je průměruje. Higuchiho fraktální dimenze je následovně získána pomocí vztahů v Sekcích 3.4 a 3.5.

4.1.4. Zobecněná korelační dimenze

K výpočtu zobecněných korelačních dimenzí byla vytvořena podle [15], [35] funkce *ZobKorq.m*. Vložená časová řada je použita k rekonstrukci d_e -dimenzionálního fázového prostoru činnosti mozku metodou časových zpoždění. Na základě vzdáleností bodů fázového prostoru je zjištěn korelační integrál řádu q pomocí vztahů uvedených v Sekcích 3.7.3 a následně je vyčíslena příslušná fraktální dimenze (viz. Sekce 3.7.3 a 3.5).

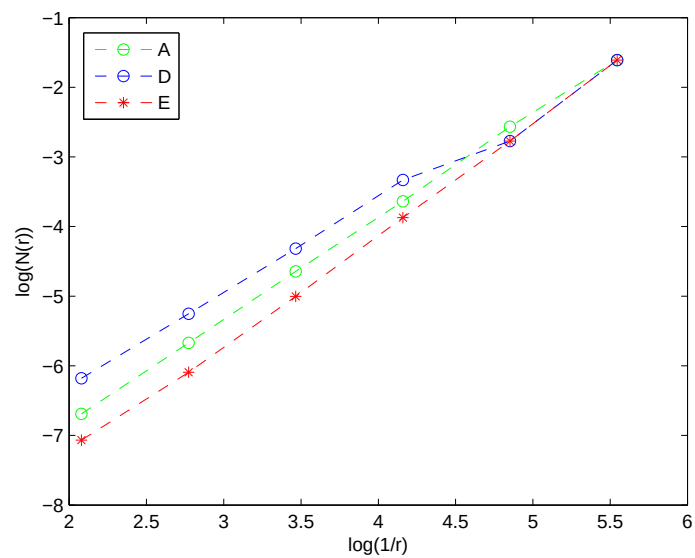
4.2. Obvodová a pokrývací dimenze EEG

Pro účely této práce byly vytvořeny obrázky ze zkrácených a znormovaných úseků 2000 pozorování (tzn. 11,52 sekundy) tak, že výška, resp. šířka, obrázku je dána rozmezím signálu, resp. časovým rozpětím. Připomeňme, že na kvalitu výsledných odhadů fraktální dimenze z obrázků má vliv jak volba škálovacích parametrů r, s , tak relativní velikost vkládaných obrázků a samotných grafů. K těmto výpočtům byly použity funkce uvedené v Sekci 4.1.1-2. Postup výpočtu pokrývací dimenze v prostředí Matlabu je přiložen ve skriptu *PostupPok.m*. Kvalitu odhadů podmiňuje lineární závislost $\log(L(s))$ či $\log(N(r))$ na logaritmu škálovacích parametrů, viz Obrázek 4.2 a 4.3. Výsledné hodnoty fraktálních dimenzí pro jednotlivé skupiny jsou shrnuty v Obrázcích 4.4, 4.6, 4.8 a 4.5, 4.7, 4.9.

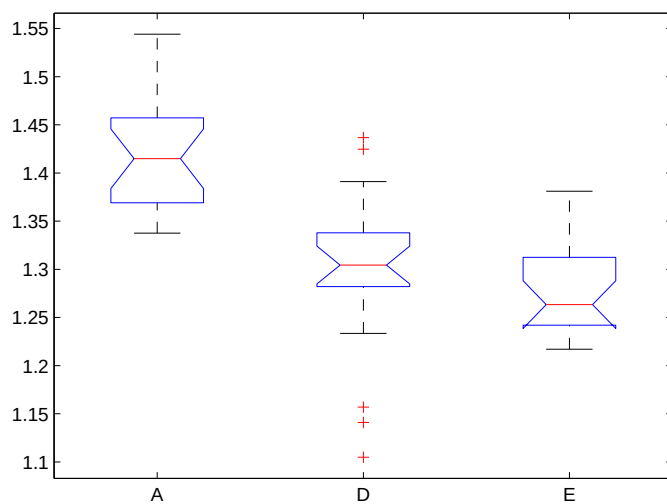


Obrázek 4.2: Vztah mezi $\log(\frac{1}{s})$ a $\log(L(s))$ určující kvalitu výpočtu obvodové dimenze

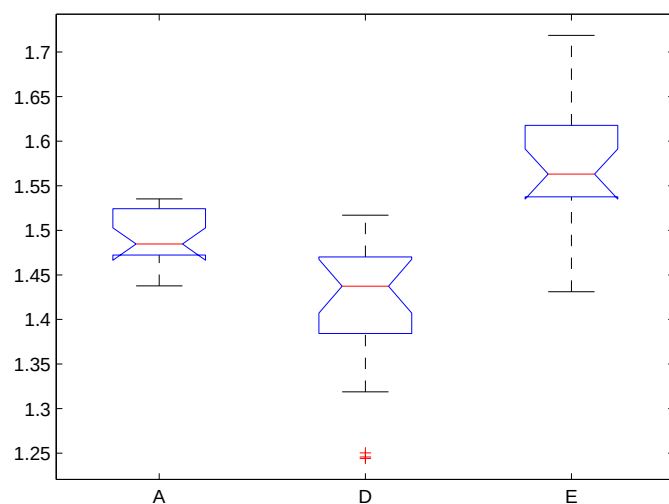
Odhady fraktální dimenze křivky EEG jsou vzájemně značně rozporuplné, a to hlavně v případě nitrolebních záchvatových měření. Domnívám se, že výpočet pokrývací dimenze z grafu EEG uloženého v obrázkovém formátu příliš podléhá velikosti průměrné amplitudy grafu a také celého obrázku. Mozková aktivita spolu



Obrázek 4.3: Vztah mezi $\log(\frac{1}{r})$ a $\log(N(r))$ určující kvalitu výpočtu pokrácení dimenze



Obrázek 4.4: Kvartilový graf obvodových dimenzí EEG sledovaných skupin



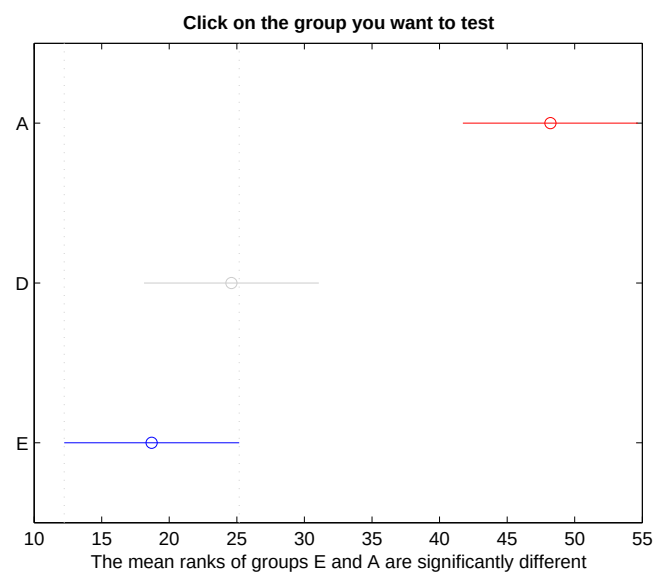
Obrázek 4.5: Kvartilový graf pokrývacích dimenzí EEG sledovaných skupin

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Groups	0.22824	2	0.11412	25.8	1.05142e-08
Error	0.25215	57	0.00442		
Total	0.4804	59			

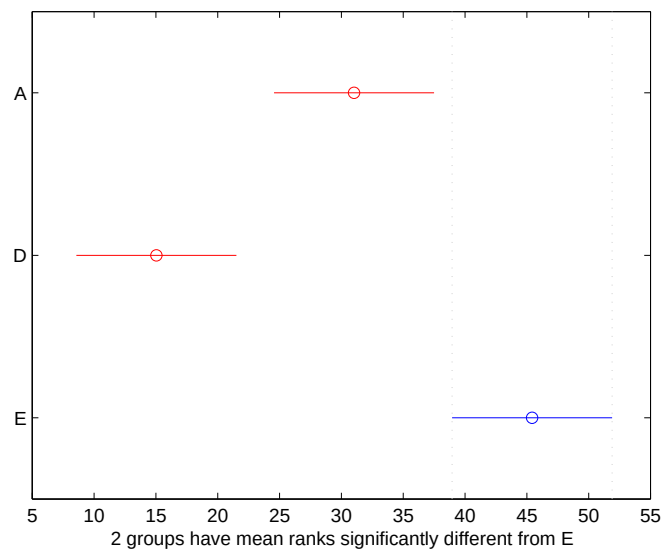
Obrázek 4.6: Tabulka analýzy rozptylu pro obvodovou dimenzi

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Groups	0.24662	2	0.12331	27.28	4.86874e-09
Error	0.2576	57	0.00452		
Total	0.50422	59			

Obrázek 4.7: Tabulka analýzy rozptylu pro pokrývací dimenzi



Obrázek 4.8: Výsledky K-W testu pro obvodovou dimenzi



Obrázek 4.9: Výsledky K-W testu pro pokrývací dimenzi

s nasnímaným šumem je příliš rozmanitá. Naproti tomu, při větším rozlišení se projevuje bodový charakter časových řad, který pak přispívá ke snižování odhadů fraktální dimenze. Obě metody zjevně určité odlišnosti mezi vytvořenými obrázky epileptických a zdravých EEG vnímají, ovšem ke zpochybnění těchto metod přispívá závislost na způsobu generování obrázků a zkrácení informace obsažené v EEG přenesením grafu do obrázků s nižším rozlišením (předmětem zkoumání je tak opravdu křivka i v případě pokrývací dimenze). Rovněž připomeňme, že obrázky jsou tvořeny z poloviční dávky dat (11,52 s z původních 23.6 s).

4.3. Higuchiho fraktální dimenze a zobecněná korelační dimenze EEG

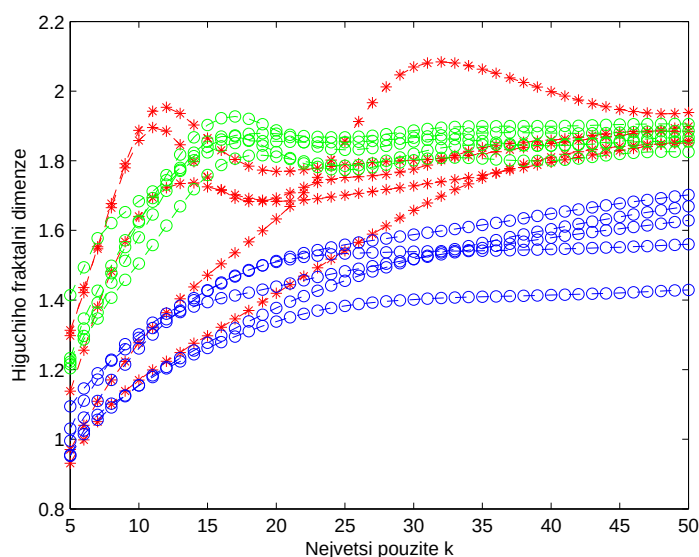
Hlavními nástroji analýzy EEG jsou Higuchiho fraktální dimenze a zobecněná korelační dimenze, které se specializují na vysoce rozmanité dynamické systémy a vycházejí přímo z časových řad. Podávají tak výpověď o složitosti těchto systémů.

Higuchiho fraktální dimenze je ve volně dostupné literatuře, např. [24], hojně užívaným nástrojem k hodnocení grafů EEG. Počítá míru komplexity přímo z dat časové řady. Jako u předešlých metod, i zde je stále aplikován jednoduchý mocninný vzorec.

Pomocí přiložené funkce *Higuchi.m* byla při $k = 4, \dots, 20$ odhadnuta fraktální dimenze přímo z časové řady. Takto bylo k stanoveno na základě vykreslení hodnot dim_{Hig} proti použitému hraničnímu k [24]. Ukazatelem efektivního hraničního k je místo, kde již tato křivka příliš neroste. Zmíněný graf byl společně pro 5 datasetů z každé skupiny vykreslen do Obrázku 4.3. Graf zobrazující sílu lineárního vztahu mezi $\log\left(\frac{1}{k}\right)$ a $\log L(k)$ je na Obrázku 4.11. Výsledky anovy, K-W testu a příslušný kvartilový graf zachycují Obrázky 4.15, 4.17 a 4.13.

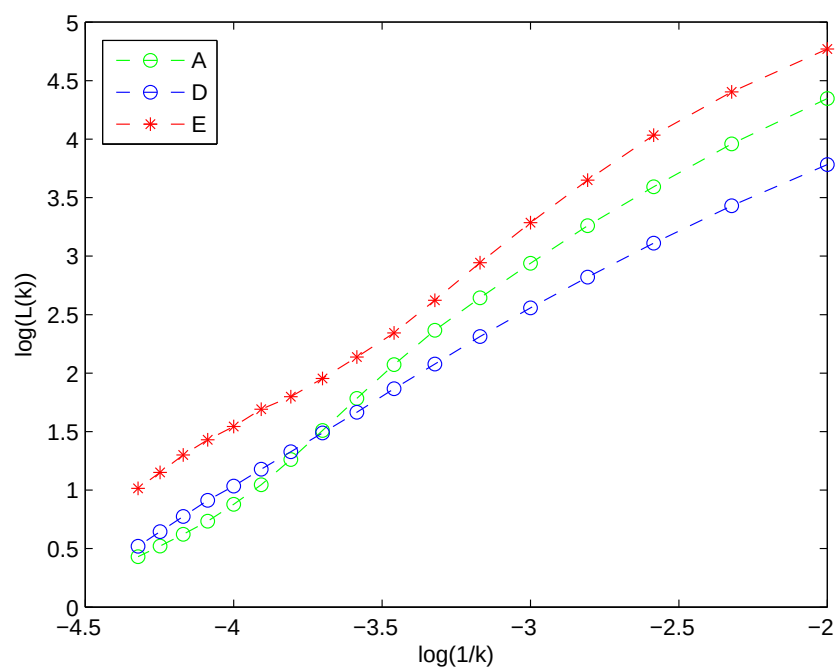
EEG je výstupem velice komplikované činnosti mozku, uvažujeme-li více do hloubky, EEG hromadně zachycuje činnost funkčních uskupení neuronů v oblasti dané elektrody. Již v Sekci 3.7 jsme uvedli, že elektroencefalogram je tvořen působením 22 stavových proměnných. K důkladnějšímu popisu mozkové aktivity zkoumaných stavů jsme tedy vycházejíc z EEG zrekonstruovali 22-dimenzionální

fázový prostor. Následně jsme odhadli zobecněnou fraktální dimenzi řádů 2 - 10 EEG ze všech 3 skupin. Tento postup zahrnuje přikládání funkce *ZobKorq.m*. Na Obrázku 4.19 si můžete prohlédnout spektrum zobecněných fraktálních dimenzí zástupců každé ze tří skupin, Obrázek 4.12 představuje log-log graf a výsledky korelační dimenze všech tří skupin jsou porovnány v Obrázcích 4.16, 4.18 a 4.14.

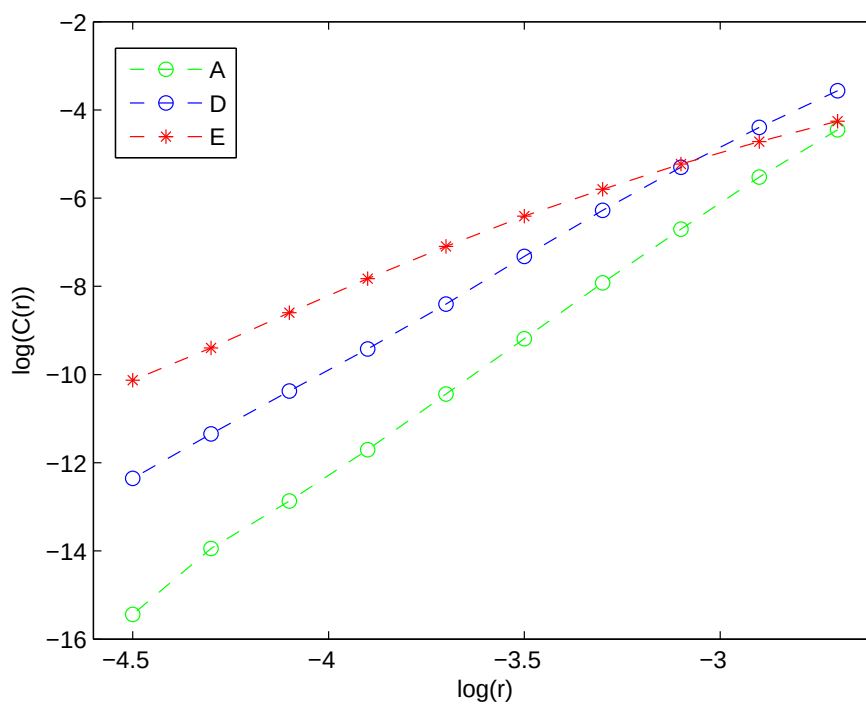


Obrázek 4.10: Závislost Higuchiho fraktální dimenze na použitém hraničním k pro prvních pět zástupců z každé zkoumané skupiny (zdravé EEG je označeno zeleně, klidové epileptické modře a záchvatové epileptické červeně). Pro k nejvýše 20 již Higuchiho fraktální dimenze nijak razantně nestoupá a zároveň se při pohledu na graf odhady jednotlivých skupin alespoň trochu odlišují. Příliš malá k oslabují lineární vztah a tedy také odhadovanou dimenzi, z toho důvodu bylo použito nejnižší zapojené $k = 4$.

Výsledky jsou opět značně rozporuplné. Higuchiho dimenze epileptické záchvatové činnosti je na 5%-hladině testu signifikantně vyšší než u epileptického klidového režimu, zatímco korelační dimenze ($q = 2$) vypovídá opačně. Záchvatové EEG podle dim_2 pochází z fázového prostoru o průměrně nižší fraktální dimenzi než normální i epileptické klidové EEG. Statistické testy na hladině 0,05 signifi-



Obrázek 4.11: Linearita odhadované Higuchiho fraktální dimenze



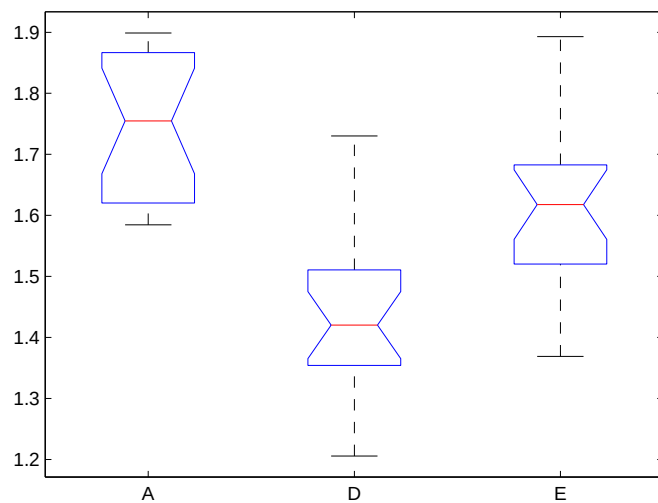
Obrázek 4.12: Linearita odhadované zobecněné fraktální dimenze

Higuchiho dimenze		
A	D	E
1,8120	1,4386	1,6832
1,8558	1,3380	1,6930
1,8252	1,5092	1,7696
1,8778	1,3770	1,6330
1,8871	1,5122	1,4195
1,8988	1,4019	1,5003
1,8865	1,6023	1,6594
1,8847	1,3351	1,5795
1,6225	1,2057	1,5960
1,7133	1,3167	1,8930
1,6106	1,2482	1,7729
1,5914	1,3705	1,4728
1,5845	1,4987	1,6492
1,6545	1,4996	1,5668
1,7114	1,3883	1,6025
1,7522	1,5145	1,3688
1,6088	1,5618	1,6480
1,7571	1,7302	1,5400
1,6179	1,4003	1,4715
1,7663	1,4594	1,6821

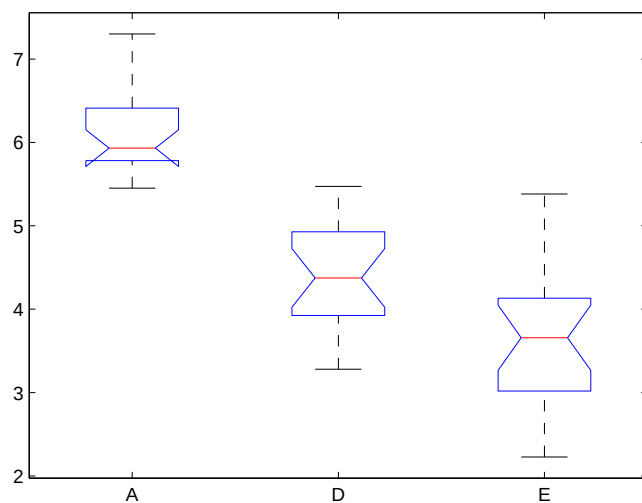
Tabulka 4.1: Higuchiho fraktální dimenze pro všechna EEG ze skupin A, D, E.

Korelační dimenze		
A	D	E
6,0994	4,9574	3,3092
5,9296	4,0464	4,2260
5,7068	3,8430	3,6948
7,3015	4,5644	3,7509
5,9085	4,0444	4,1379
6,8305	5,0844	5,3812
6,6409	5,4727	3,0937
6,4917	4,1964	2,9424
6,0460	3,5573	5,2796
5,6822	4,0078	3,3796
5,8281	3,5237	3,8815
5,7365	4,3474	2,4598
5,5088	4,9000	3,6192
5,4517	4,7112	3,6146
6,3310	4,6892	2,2290
5,8907	5,3760	2,9141
5,9348	4,4023	4,1260
6,2898	5,1521	2,2274
5,8697	3,2802	4,1601
7,2247	3,6440	3,8511

Tabulka 4.2: Korelační dimenze ($q=2$) pro všechna EEG ze skupin A, D, E.



Obrázek 4.13: Kvartilový graf Higuchiho fraktálních dimenzí EEG sledovaných skupin



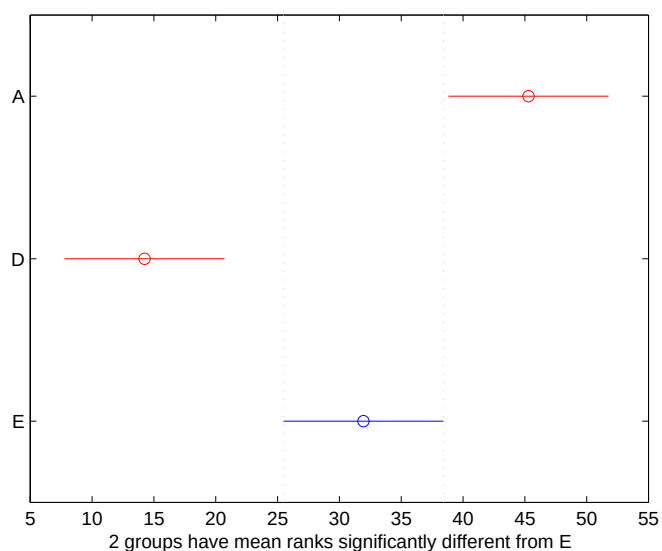
Obrázek 4.14: Kvartilový graf korelačních dimenzí EEG sledovaných skupin

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Groups	0.96924	2	0.48462	32.46	3.88194e-10
Error	0.85096	57	0.01493		
Total	1.82021	59			

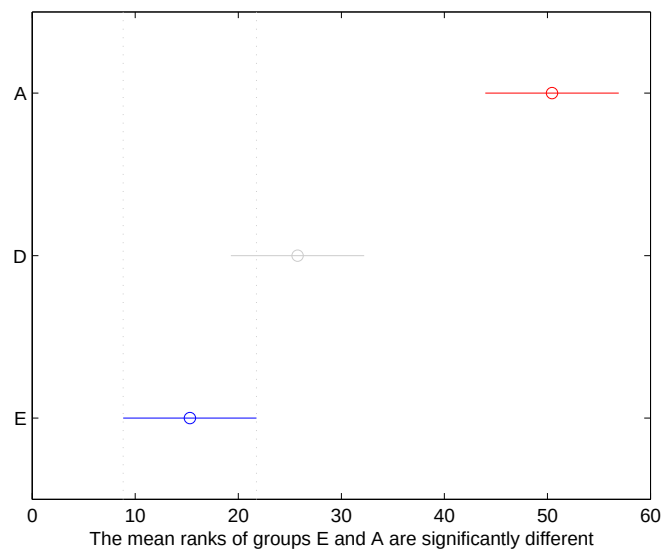
Obrázek 4.15: Tabulka analýzy rozptylu pro Higuchiho fraktální dimenzi

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Groups	66.6956	2	33.3478	70.37	4.01e-16
Error	27.0101	57	0.4739		
Total	93.7057	59			

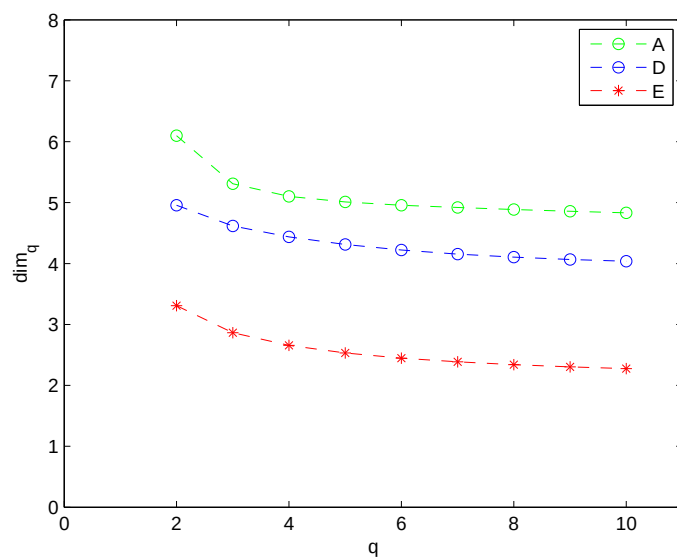
Obrázek 4.16: Tabulka analýzy rozptylu pro korelační dimenzi



Obrázek 4.17: Výsledky K-W testu pro Higuchiho fraktální dimenzi



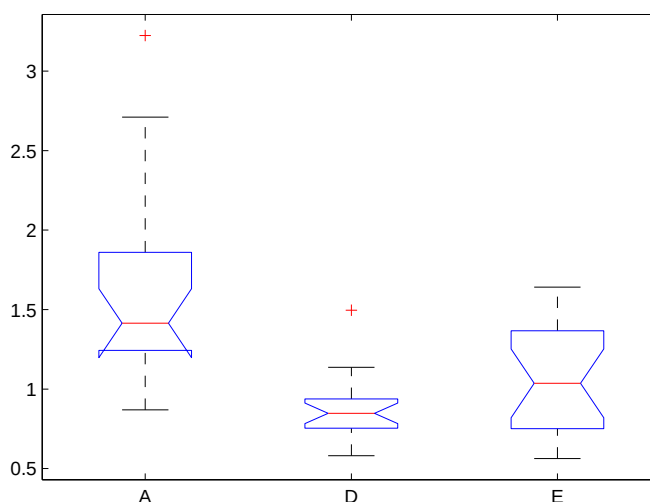
Obrázek 4.18: Výsledky K-W testu pro korelační dimenzi



Obrázek 4.19: Spektrum zobecněných fraktálních dimenzí řádů $q = 2, \dots, 10$ jednoho EEG z každé ze tří skupin

kantní rozdíl mezi korelačními dimenzemi záchvatových a epileptických klidových EEG ovšem nepotvrdily. Obě metody se však shodují na tom, že fraktální dimenze epileptických měření jsou nižší než u zdravých EEG.

Všimněme si ještě, že pokles zobecněných fraktálních dimenzí s rostoucím q v Obrázku 4.19 nemusí být u všech skupin stejně strmý. Prozkoumala jsem proto rozmezí zobecněných fraktálních dimenzí, kde jsem $dim_{-\infty} - dim_{\infty}$ approximovala² $dim_2 - dim_{10}$. Šíře spektra fraktálních dimenzí vypovídá o fraktální heterogenitě zkoumaných dat. Kvartilový graf rozmezí fraktálních dimenzí je na Obrázku 4.20, výsledky anovy a K-W testu najdete v Obrázcích 4.21 a 4.22.



Obrázek 4.20: Kvartilový graf šíří spekter zobecněných korelačních dimenzí EEG sledovaných skupin

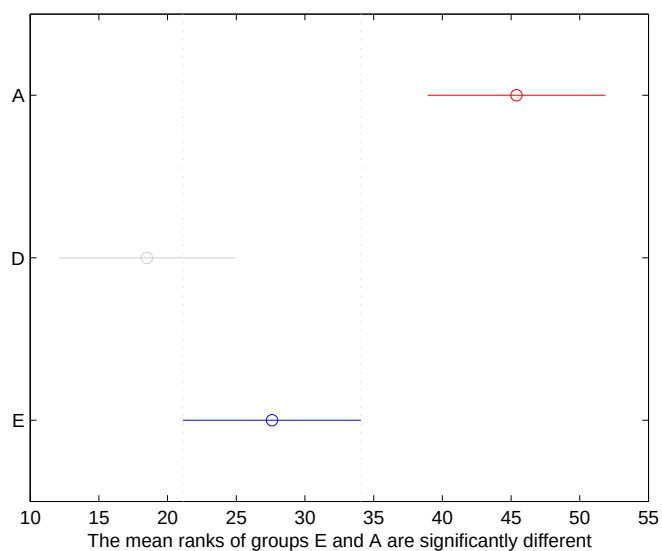
Rozmezí hodnot zobecněných fraktálních dimenzí řádů $q = 2, \dots, 10$ potvrdil na hladině 0,05 signifikantní rozdíl mezi normálním a epileptickými EEG, ovšem mezi epileptickými EEG je rozdíl stále nepatrný.

Ovládání výše zmíněných funkcí v prostředí Matlabu je předvedeno na jednom EEG a zaneseno do příloženého skriptu *PostupHigZobkor.m*.

²Zobecněnou korelační dimenzi lze vypočítat pro $q > 1$ a od $q = 10$ se dimenze již příliš nemění. Inspirace plyne z [15].

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Groups	6.6494	2	3.32468	17.77	1.00537e-06
Error	10.6651	57	0.18711		
Total	17.3144	59			

Obrázek 4.21: Tabulka analýzy rozptylu rozmezí spekter zobecněných fraktálních dimenzí pro všechny tři skupiny



Obrázek 4.22: Výsledky K-W testu pro rozmezí spekter zobecněných fraktálních dimenzí pro všechny tři skupiny

4.4. Zhodnocení výsledků

Důležitým předpokladem při stanovování fraktálních dimenzí je lineární vztah mezi logaritmem počítaných „objemů“³ a logaritmem parametrů. Tato linearita je dána množinou, na které je fraktální dimenze počítána, zvolenou metodou výpočtu a rovněž zvoleným rozmezím škálovacích parametrů. Z tohoto důvodu byly u všech metod vykresleny grafy potvrzující tento vztah a dle mého soudu je u každé z použitých metod s příslušnou volbou rozmezí škálovacích parametrů více či méně tento předpoklad splněn. Každá použitá metoda má svůj specifický způsob výpočtu, proto není divu, že se výsledné hodnoty fraktálních dimenzí liší. Ovšem zajímavá je protichůdná změna činnosti z epileptické klidové na epileptickou záchvatovou aktivitu. Fraktální dimenze (Higuchiho, příp. pokrývací) křivky EEG, která je shrnutím veškeré mozkové činnosti z dané oblasti, mohou zjevně vnímat tuto změnu jako posílení složitosti s jakou je signál přijímán. Je-li však EEG rozloženo do 22-rozměrného fázového prostoru činnosti dané oblasti mozku, tato změna může být interpretována jako zmírnění složitosti tohoto dynamického systému. Důvodem mohou být jednak razantně odlišná mocninná pravidla (užívající průměrnou délku křivky u Higuchiho a relativní četnosti vzdáleností mezi body fázového prostoru u zobecněných fraktálních dimenzí) a také odlišný objekt zkoumání (Higuchiho fraktální dimenze se zajímá o EEG výhradně jako o křivku, proti tomu zobecněné korelační dimenze popisují fázový prostor). Při zkoumání grafů EEG dosahuje sice záchvatová epileptická aktivita vyšší amplitudy, ovšem tato aktivita je pravidelnější než klasická činnost mozku. I z tohoto důvodu se přikláním k interpretaci, kterou poskytuje korelační dimenze. Zobecněná korelační dimenze navíc nabízí zhodnocení heterogenity dat ve formě širšího intervalu hodnot, kterých korelační dimenze různých řádů q nabývají. Tyto výsledky ovšem statisticky potvrzují výsledky korelační dimenze.

Na výsledky fraktální analýzy EEG má vliv jak použitá metoda výpočtu fraktální dimenze, tak kvalita dat. Znehodnocení dat může zapříčinit velké množ-

³obecně je tak nazván $N(r)$ u pokrývací dimenze, $L(s)$ u Higuchiho či obvodové dimenze a $C(r)$ u korelační dimenze

ství faktorů. Jedním z nich je „čistota“ signálu, EEG snímané nitrolebně totiž neobsahuje tolik šumu jako povrchové. Rovněž nezachycuje činnost tak velkého počtu neuronů, což znamená, že příčina statistické odlišnosti zdravého a epileptického EEG nemusí pocházet z rozdílnosti charakteru mozkové činnosti obou stavů. Navíc, při nesprávném filtrování dat mohou být zahlazeny či naopak zůstat skryty v šumu důležité projevy jednotlivých skupin. Velký vliv má rovněž délka uvažovaných záznamů. Příliš krátká měření EEG mají za následek soubory velice různorodých a tím také nepoužitelných fraktálních dimenzí. Také z tohoto důvodu jsem po dlouhodobé analýze dat získaných z Fakultní Nemocnice v Olomouci nakonec ustoupila a použila všechny nabyté zkušenosti na datech Epileptologické kliniky v Bonnu.

Při porovnávání záznamů EEG nehledě na oblast, ze které pocházejí, bychom měli vědět, že pro každou oblast mozku je typický určitý režim mozkové aktivity, viz. [32]. Na kvalitu EEG má vliv mimo jiné také stáří, psychický stav, účinky chemických látek a další. Sběr a předběžné zpracování dat tak má na analýzu zásadní vliv, v zájmu vyšetřovatele je tedy znalost všech těchto a dalších faktorů a minimalizace jejich působnosti na ovlivnění výsledků.

Závěr

Tato diplomová práce představuje část teorie fraktálů využitelnou dále k popisu elektroencefalogramů, a to zejména metod výpočtů fraktálních dimenzí. Následně jsou použita volně přístupná data z Epileptologické kliniky v Bonnu [18] k prozkoumání činnosti zdravého mozku a mozku postiženého epilepsií.

Z výsledků je zřejmé, že fraktální dimenze nabízí zajímavou teoreticky podloženou možnost popisu EEG. U obrázkových metod je příliš mnoho negativně působících vlivů, proto nejsou do hlavní analýzy EEG zapojeny. V případě Higuchiho fraktální dimenze je rozdílnost mezi zdravými, epileptickými klidovými a epileptickými záchvatovými EEG statisticky potvrzena na rozdíl od zobecněné korelační dimenze, která staticky nerozlišila epileptická klidová a epileptická záchvatová měření.

Tyto metody jistě mají potenciál pro využití v praxi, a to při nejmenším k poskytnutí doplňující informace při stanovování diagnózy. Neschopnost plně rozlišit epileptická klidová a epileptická záchvatová EEG korelační dimenzí může být vyřešena zapojením a zhodnocením obou představených dimenzí. Důležitým aspektem při této analýze je však samo EEG. Když pomineme fakt, že každý člověk je individuální bytost, která může mít při snímání EEG různé pocity a nálady, na jeho vypovídací hodnotu má stále vliv nesčetné množství faktorů. Proto popis elektroencefalogramu nemusí být vždy tak úplně jednoznačný a vyžaduje znalost všech těchto vlivů.

Příloha na CD

`Higuchi.m`

Funkce Matlabu počítající Higuchiho fraktální dimenzi časové řady. Pozor! Při použití u Weierstrassova signálu je použito jiné k . Musí být odpoznámkovány řádky 8 a 30.

`ZobKorq.m`

Funkce Matlabu počítající Zobecněnou fraktální dimenzi q -tého řádu d_e -dimenzionálního fázového prostoru, který z dané časové řady rekonstruuje.

`PostupPok.m`

Názorný výpočet pokrývací dimenze EEG v prostředí Matlabu.

`Z110.bmp`

Testovací zdravá data pro názornou ukázkou výpočtu pokrývací dimenze v prostředí Matlabu.

`PostupHigZobkor.m`

Názorný výpočet Higuchiho a zobecněných fraktálních dimenzí v prostředí Matlabu.

`A1.mat`

Vyfiltrovaná testovací zdravá data pro názornou ukázkou výpočtu dimenzí v prostředí Matlabu.

`PostupZnameFraktaly.m`

Názorný výpočet obvodové, pokrývací a Higuchiho fraktální dimenze weierstrassovy kosinovy funkce v prostředí Matlabu.

`weih008.bmp`

Weierstrassův signál přiložen pro názornou ukázkou výpočtu pokrývací dimenze v prostředí Matlabu.

`weih008.jpg`

Weierstrassův signál přiložen pro názornou ukázkou výpočtu obvodové dimenze v prostředí Matlabu.

`HigADE.mat`

Higuchiho fraktální dimenze všech 60 EEG.

`ZobKorADE.mat`

Zobecněná korelační dimenze řádů $q = 2, \dots, 10$ všech 60 EEG.

Literatura

- [1] Andres, J., Fišer J., Rypka M.: *DYNAMICKÉ SYSTÉMY 3: Úvod do teorie deterministického chaosu a fraktální geometrie*. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2015.
- [2] Easwaramoorthy, D.: *Ph. D. Thesis: Fuzzy Fractal Analysis with Applications*. The Gandhigram Rural Institute - Deemed University, Dindigul, 2013.
- [3] Falconer, K. J.: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. J. Wiley, New York, 2013.
- [4] Falconer, K. J.: *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [5] Falconer, K. J.: *Techniques in Fractal Geometry*. Wiley, Sv. 16. Chichester, 1997.
- [6] Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D.: *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*. Springer, Berlin, 2004.
- [7] Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D.: *Fractals for the Classroom*. Springer, Berlin, 1991.
- [8] Palmer, K. J.: *Bifuractions, Chaos and Fractals*. Nonlinear Dynamics Views and Chaos, 91-134, 1992.
- [9] Rektor, I., Ošlejšková, H.: *Stručná epileptologie pro praxi*. Univerzitní centrum pro epileptologii a epileptochirurgii Brno, 1. neurologická klinika LF MU a FN u sv. Anny a Klinika dětské neurologie LF MU a FN Brno, Brno, 2010. Online dostupné z: <http://www.solen.sk/pdf/b3b51ff3f8c877ace0a97235d74eb8be.pdf>.
- [10] Rieger, J., Lhotská, L., Krajča, V.: *Zpracování dlouhodobých EEG záznamů*. Advances in electrical and electronic engineering 4.3 (2005), s. 151-156. Online dostupné z: <http://dspace.vsb.cz/bitstream/handle/10084/83686/ae-2005-4-3-151-rieger.pdf?sequence=1>.

- [11] Singh, A. N. : *The Theory and Construction of Non-differentiable Functions*. Lucknow University Studies, New York, 1953.
- [12] Kliková, B., Raidl, A.: *Reconstruction of Phase Space of Dynamical Systems Using Method of Time Delay*. WDS 11, 83-87, MATFYZPRESS, 2011.
- [13] Teplan, M.: *Fundamentals of EEG Measurement* Institute of Measurement Science, Bratislava, 2002.
- [14] Harte, D.: *Multifractals: Theory and Applications*. Chapman & Hall/CRC Press, 2001.
- [15] Gibowicz, S. J., Lasocki, S.: *Seismicity Induced by Mining: Ten Years Later*. Advances in Geophysics vol. 44, Academic Press, 2001.
- [16] Lapidus, M. L., van Frankenhuisen, M.: *Fractal Geometry and Number Theory: Complex Dimensions of Fractal Strings and Zeros of Zeta Functions*. University of California, Riverside, 2000.
- [17] Boltyanskij, V. G., Yefremovich, V. A.: *O topologii. II*. Pokroky matematiky, fiziky a astronomie 4.4 (1959), s. 394–421.
- [18] Andrzejak, R. G., Lehnertz, K., Rieke, C., Mormann, F., David, P., Elger, C. E.: *Indications of nonlinear deterministic and finite dimensional structures in time series of brain electrical activity: Dependence on recording region and brain state*, Phys. Rev. E, 64, 061907, (2001).
- [19] Burykin, A., Costa, M. D., Peng, C., Goldberger, A. L., Buchman, T. G.: *Generating Signals with Multiscale Time Irreversibility: The Asymmetric Weierstrass Function*. Complexity 16.4 (2011), s. 29-38.
- [20] Higuchi, T.: *Approach to an Irregular Time Series on the Basis of the Fractal Theory*. Physica D 31 (1988), s. 277-283.
- [21] Rohrbacker, N.: *Analysis of Electroencephalogram Data Using Time-Delay Embeddings to Reconstruct Phase Space*. Dynamics at the Horsetooth Vol. 1 (2009).
- [22] Kale, M., Butar, F. B. : *Fractal Analysis of Time Series and Distribution Properties of Hurst Exponent*. Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education, Vol. 5 No.1, 2011.
- [23] Theiler, J.: *Estimating the Fractal Dimension of Chaotic Time Series*. The Lincoln Laboratory Journal Vol 3 (1990).
- [24] El-Kishky, A.: *Assesing Entropy and Fractal Dimensions as Discriminants of Seizures in EEG Time Series*. Tandy School of Computer Science, University of Tulsa, Tulsa, 2012.

- [25] Lee, J. A., Verleysen, M. : *Nonlinear dimensionality reduction*. Université catholique de Louvain, Bruxelles, 2007.
- [26] Demir, B., Ozdemir, Y., Saltan, M. : *The Snowflake Curve as an Attractor of an Iterated Function System*. Anadolu University, Turkey, 2013.
- [27] Fractal explorer [online, cit. 9. 3. 2016]. Dostupné z: http://www.wahl.org/fe/HTML_version/link/.
- [28] Mathworks File Exchange [online, cit. 9. 3. 2016]. Dostupné z: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/13063-boxcount>.
- [29] Fractal Dimensions of Leaf Shapes [online, cit. 9. 3. 2016]. Dostupné z: http://www.math.tamu.edu/~mpilant/math614/StudentFinalProjects/SanPedro_Final.pdf.
- [30] Mathworks File Exchange [online, cit. 9. 3. 2016]. Dostupné z: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/30119-complete-higuchi-fractal-dimension-algorithm/content/hfd.m>.
- [31] Úvod do centrální nervové soustavy [online, cit. 22. 9. 2016]. Dostupné z: <http://www.cnsonline.cz/>.
- [32] Malmivuo, J., Plonsey, R.: *Bioelectromagnetism - Principles and Applications of Bioelectric and Biomagnetic Fields*. Oxford University Press, New York, 1995. [online, cit. 30.11. 2016] Dostupné z: <http://www.bem.fi/book/13/13.htm>.
- [33] Durrani, S.: *Kochova křivka* [online, cit. 22. 9. 2016]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/301-koch-m/content/Koch.m>.
- [34] M2-TUM, Offtermatt, J.: *Đáblovo schodiště* [online, cit. 22. 9. 2016]. Dostupné z: http://m2matlabdb.ma.tum.de/download.jsp?MC_ID=5&SC_ID=13&MP_ID=269.
- [35] Leontitsis, A.: *Chaotic Systems Toolbox* [online, cit. 22. 9. 2016]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/1597-chaotic-systems-toolbox>.
- [36] Salai Selvam, V.: *Complete Higuchi Fractal Dimension Algorithm* [online, cit. 9. 3. 2016]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/30119-complete-higuchi-fractal-dimension-algorithm>.

- [37] Konstrukce ďáblových schodišť [online, cit. 30. 11. 2016]. Dostupné z: <http://imagebank.osa.org/getImage.xqy?img=M3cubGFyZ2UsYW8tNTItMjMtNTgyMi1nMDAx>