

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Vendula Tomanová

Matematika aneb cesta k myšlení a řešení
problémů

Olomouc 2017

vedoucí práce: RNDr. Martina Uhlířová, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jen
uvedených pramenů a literatury.

V Olomouci dne 6. 4. 2017

.....

Vendula Tomanová

Děkuji RNDr. Martině Uhlířové, Ph.D. za odborné vedení a vstřícný přístup, za poskytování cenných rad a připomínek. Také bych ráda poděkovala studentům oboru Učitelství pro 1. stupeň základních škol Univerzity Palackého v Olomouci za jejich ochotu a zapojení do výzkumného šetření. Velké díky patří i ZŠ Horka nad Moravou a učitelům, kteří mi umožnili účastnit se výuky a poskytli mi cenné rady.

Obsah

Úvod.....	6
TEORETICKÁ ČÁST	8
1 Konstruktivismus	8
1.1 Pedagogický konstruktivismus.....	8
1.2 Konstruktivismus ve vyučování matematice	10
1.3 Desatero didaktického konstruktivismu	11
1.4 Pět tezí popisujících konstruktivistickou výuku	13
1.5 Formální a neformální znalosti	14
2 Teorie generických modelů	16
2.1 Motivace.....	17
2.2 Izolované modely	18
2.3 Generický model	19
2.4 Abstraktní poznatek a krystalizace.....	20
2.5 Schéma	21
3 Vyučování orientované na budování schémat	23
3.1 Vývoj Hejného metody	24
3.2 12 klíčových principů.....	25
3.3 Pět zásad Hejného metody	31
3.4 Učebnice matematiky podle Hejného metody	32
4 Didaktická matematická prostředí	34
4.1 Prostředí sémantická	35
4.2 Prostředí strukturální.....	40
4.3 Prostředí geometrická 2D.....	45
4.4 Prostředí geometrická 3D.....	47
PRAKTICKÁ ČÁST	50
5 Dotazníkové šetření	51

5.1	Cíle výzkumného šetření	51
5.2	Metody výzkumného šetření	51
5.3	Výzkumný vzorek	52
5.4	Vyhodnocení dotazníků	52
5.4.1	Vyhodnocení faktografických údajů	52
5.4.2	Vyhodnocení otázek dotazníku	55
5.5	Závěr výzkumného šetření	71
6	Ukázkové hodiny matematik prof. Hejného	72
6.1	Ukázková hodina č. 1	73
6.2	Ukázková hodina č. 2	78
6.3	Ukázková hodina č. 3	84
6.4	Shrnutí	90
	Závěr	91
	SEZNAM LITERATURY	93
	SEZNAM PRAMENŮ	95
	SEZNAM POUŽITÝCH SKRATEK A SYMBOLŮ	99
	SEZNAM TABULEK, GRAFŮ, SCHÉMAT A PŘÍLOH	100
	ANOTACE	

Úvod

Tématem diplomové práce je matematika prof. Hejného neboli vyučování orientované na budování schémat, často nazývané Hejného metoda. Jedná se o alternativní metodu výuky matematiky, jejíž základem je 12 klíčových principů. Tyto principy se prolínají a nelze je od sebe odloučit, a proto je třeba tuto problematiku chápat jako jeden celek. Hlavním cílem metody je nahradit ve vyučování matematiky často převládající memorování a pamětní osvojování poznatků a vnést do něj nejen porozumění, ale zaměřit se v něj také na rozvoj žákovy osobnosti a jeho kognitivních schopností a dovedností. Podstatnou částí této metody ve vyučování jsou diskuse, práce s chybou, kooperace a práce v netradičních prostředích.

Když jsem poprvé o matematice prof. Hejného slyšela, měla jsem ji ve své mysli spojenou pouze s myšlenkou, že se jedná o netradiční výuku matematiky, ve které si na vše žáci přicházejí sami, učitel žákům nic neříká a že rychlost zde není ani tak důležité jako tvořivé myšlení. Tehdy mě tento velice úzký pohled na věc vedl k tomu, abych se o této problematice dověděla víc. Psát tedy diplomovou práci na toto téma pro mě bylo velice motivující. Již na základní škole jsem v matematice neměla ráda soutěživost a hodnocení nejlepších počtářů podle rychlosti. V tom jsem totiž nikdy nedominovala. Postupem času jsem zjistila, že matematika prof. Hejného ve vyučování prosazuje opak, a to kooperaci, což mé rozhodnutí v psaní diplomové práce na toto téma utvrdilo.

Jedním z cílů diplomové práce je shrnout teoretická východiska a poznatky, které jsou klíčové pro pochopení podstaty Vyučování orientovaného na budování schémat. Dalším cílem diplomové práce je prostřednictvím dotazníkového šetření zjistit postoj studentů oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ k této koncepci. Posledním cílem je uvést ukázkové hodiny matematiky prof. Hejného a podat tak obraz výuky, v němž jsou zachyceny podstatné prvky této koncepce.

Diplomová práce je rozdělena na dvě části, část teoretickou a část praktickou. Teoretická část je členěna do čtyř hlavních kapitol s názvy Konstruktivismus, Teorie generických modelů, Vyučování orientované na budování schémat a Didaktická matematická prostředí. První kapitola je zaměřena na vymezení konstruktivismu, z jehož myšlenek vychází metoda VOBS. Tato kapitola se zabývá převážně pedagogickým konstruktivismem, dále didaktickým konstruktivismem a s ním spjatým desaterem

konstruktivismu. V kapitole se pojednává o pěti tezích konstruktivismu a problematice formalismu, jakožto příčině transmisivního přístupu ve vyučování. Druhá kapitola objasňuje uchopování matematických vědomostí v mysli žáka, které je konkrétně popsáno skrze teorii generických modelů, která se stala východiskem pro vznik učebnic vydané k této koncepci výuky. Třetí kapitola pojednává o vyučování orientovaném na budování schémat, o jeho vzniku, vývoji a jeho základních pilířích. Poslední kapitola je věnována didaktickým matematickým prostředím, která jsou pro tuto koncepci typická a v nichž žáci ve výuce pracují. V kapitole je uvedeno rozdělení jednotlivých prostředí a jejich charakteristika, zavádění v jednotlivých ročnících a význam pro rozvoj žákových dovedností a schopností.

Praktická část diplomové práce je členěna do dvou kapitol. První kapitola zkoumá postoj studentů oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ k Hejného metodě prostřednictvím dotazníkového šetření. Dílčími cíli je zjistit, zda jsou studenti připraveni vyučovat matematiku Hejného metodou, zda jsou dostatečně informováni o metodě a zda by ve své budoucí praxi chtěli matematiku Hejného metodou vyučovat. Součástí je také vyhodnocení výzkumného šetření. Druhá část je věnována ukázkovým hodinám matematiky prof. Hejného, které byly vedeny na základní škole Horka nad Moravou, kde jsem vykonávala souvislou pedagogickou praxi. Jsou zde uvedeny tři hodiny, 1., 3., a 4. ročníku. Cílem této části je poskytnout ucelený obraz výuky matematiky prof. Hejného vedených v různých ročnících, nastínit práci žáků v didaktických matematických prostředích a přiblížit, jak probíhá komunikace mezi žáky a učitelem a žáky navzájem.

TEORETICKÁ ČÁST

1 Konstruktivismus

Konstruktivismus je pedagogicko - psychologický směr 20. století, který není dosud jednoznačně vymezený a v odborné literatuře se můžeme setkat s různými definicemi. Například podle Pedagogického slovníku je konstruktivismus definován jako „*široký proud teorií ve vědách o chování a sociálních vědách, zdůrazňující jak aktivní úlohu subjektu a význam jeho vnitřních předpokladů v pedagogických a psychologických procesech, tak důležitost jeho interakce s prostředím a společností.*“ (Průcha kol., 2013, s. 132). V Psychologickém slovníku se uvádí, že je konstruktivismus „*v psychologických a sociálních vědách směr druhé poloviny 20. století, který zdůrazňuje aktivní úlohu člověka, význam jeho vnitřních předpokladů a důležitost jeho interakce s prostředím a společností.*“ (Hartl, Hartlová, 2000, s. 271). Dále je v Pedagogickém slovníku konstruktivistická pedagogika označena jako „*pedagogické hnutí, které prosazuje ve výuce řešení problémů ze života, tvořivé myšlení, práci dětí ve skupinách a méně teorie a drilu.*“ (Průcha a kol., 1995). Přestože se definice konstruktivismu liší šířkou svého pojetí, vyplývají z nich hlavní principy konstruktivismu, kterými je aktivní účast jedince a jeho interakce s okolím.

Nejenže se konstruktivismus různí v definicích, existuje uvnitř něj mnoho proudů, které se liší převážně svým zaměřením na roli jedince a sociálních aspektů. Všechny proudy se však shodují v odmítání pasivity jedince při procesu učení (Smejkalová, 2014). Například Hejný a kol. člení konstruktivismus na radikální, kognitivní, sociální a pedagogický konstruktivismus (Hejný, Novotná, Stehlíková). Ve vztahu k vyučování matematice dále hovoří o didaktickém a realistickém konstruktivismu, kterými se budeme zabývat v dalších kapitolách.

1.1 Pedagogický konstruktivismus

Mezi zakladatele konstruktivismu patří Jean Piaget, který svou prací ovlivnil jak vývojovou psychologii, tak pedagogický výzkum. Piagetova evropská genetická epistemologie a kognitivní psychologie se staly základem pro vznik konstruktivismu. Jeho práce a výzkumy také výrazně ovlivnily pronikání konstruktivismu do pedagogiky (Kalhous, Obst a kol., 2002).

Podle (In Kalhous, Obst a kol., 2002) pedagogický konstruktivismus usiluje o překonání transmisivního přístupu k výuce, při kterém je obsah učení jedinci předáván v jeho konečné podobě a žák se tedy stává pasivním příjemcem.

Konstruktivisté zastávají názor, že takto jednosměrně předávané znalosti nikdy nemohou být transmitovány s hlubším porozuměním jejich významu a proces učení tak zůstává pouze v rovině pamětního přijímání a reprodukování hotových poznatků (Kalhous, Obst a kol., 2002). Výuka postavená pouze na transmissi poznatků je tedy orientovaná pouze na holá fakta a výsledky, bez porozumění a rozvoje tvořivosti a myšlení žáků (Hejný, Kuřina, 2015).

Pro hlubší porozumění, které je pro konstruktivistickou výuku podstatné, je důležitá aktivní činnost žáka, při které poznatky sám objevuje a konstruuje. Učení je tedy podle konstruktivistů aktivní proces, při kterém je důležité, aby žák mohl s učivem aktivně pracovat. Zásadní roli v tomto konstrukčním procesu mají žákovy dosavadní znalosti, dovednosti, zkušenosti a mentální struktury, které proces učení ovlivňují (Kalhous, Obst a kol., 2002).

Dle Smitha (In Molnár, Schubertová, Vaněk, 2008) je výchozím bodem pro konstruktivismus žákovy ucelené představy o světě, tzv. prekonceptu, který se stává základem pro vytváření nových poznatků. Ty se konstruují (resp. re-konstruují) při procesu interakce mezi novými informacemi a dosavadním poznáním a zkušeností žáka. Dochází tedy k rekonstrukci a rozvoji prvotních prekonceptů žáků (Kalhous a kol., 2002). Pro tuto modifikaci a konstrukci svého poznání je však nutné vytvořit takové prostředí, ve kterém bude žák vykonávat aktivity spojené s životem a zkušeností, bude řešit problémové úlohy, vyhledávat informace, bude bádát, objevovat, klást otázky apod. (Mazáčová, 2008). Můžeme říci, že poznání, které je založené na zkušenosti, vlastní konstrukci a prekonceptech žáků je kvalitnější, jelikož jak jsme zmínili, dochází zde k propojování nového a existujícího a uvádění daných informací do vzájemných souvislostí (Hejný, Novotná, Vondrová, 2004).

1.2 Konstruktivismus ve vyučování matematice

Podle Hejného a Kuřiny (1998, 2015) vede transmisivní přístup ve vyučování k formalismu ve vzdělávání. Tento edukační styl má převážně informativní charakter a je zaměřen na kvantitu naučených znalostí a výkon žáků, nikoliv na rozvoj jeho osobnosti. Učitel předkládá hotová fakta a mechanické algoritmy, které si žák musí uložit do své paměti a následným procvičováním a opakováním je upevnit. Jedná se tedy převážně o paměťové osvojování informací, které nejsou spojeny s dosavadními zkušenostmi žáků. Přestože je tato cesta podávání hotových znalostí nejrychlejší a nejsnadnější, často mají tyto znalosti krátkodobý charakter a žáci je brzy zapomenou. V paměti si je udrží do nejbližšího zkoušení a testování. Žáci si naučené vědomosti neuvádí ve své mysli do vzájemných souvislostí a nevytváří si o nové informaci představu, kterou by uložili do svých poznatkových struktur (Hejný, Novotný, Vondrová, 2004). Mechanickým učením je u žáků rozvíjena převážně jen paměť a žáci tedy úlohy mnohdy vyřešit umí, avšak bez jejich porozumění, přičemž jednotlivé kroky svých postupů už nedokáží odůvodnit (Molnár, Schubertová, Vaněk, 2008). Je však nutné zmínit, že paměť a její formování je v matematice velice podstatná, a to ne z potřeby drilu a biflování, ale pro zapamatování podstatných jevů a souvislostí (Hejný, Kuřina, 2004).

Hejný a Kuřina (2015) kladou větší důraz na rozvoj matematických schopností a dovedností žáků, které mají trvalý charakter. Za cíl vzdělávání kladou kultivaci žákova duševního světa, ve kterém probíhají procesy porozumění, vznikají představy, krystalizují se pojmy. Podle autorů má při této kultivaci podstatnou roli motivace. Jestliže totiž žák nebude dostatečně motivován, nelze od něj očekávat aktivitu, která je potřebná ke konstruování vlastních poznatkových struktur. V hodinách matematiky takovou motivaci mohou představovat nejrůznější problémové úlohy, otázky, vlastní nápady, názory apod.

Ve vztahu k vyučování matematice autoři Hejný a Kuřina (1998, 2015) přetvářejí obecný konstruktivistický přístup k vyučování v tzv. *didaktický konstruktivismus*, jakožto jeden ze směrů konstruktivismu. Hlavním cílem je „vytváření matematiky“ v myslích jednotlivých žáků, přičemž zásadní roli zde má jejich aktivní a tvůrčí činnost. Autoři M. Hejný a F. Kuřina zformulovali deset zásad, tzv. *Desatero didaktického konstruktivismu*.

1.3 Desatero didaktického konstruktivismu

I. Aktivita

Matematika je chápána jako specificky lidská aktivita, nikoliv jako její pouhý výsledek, který je formulován do souboru definic, vět a důkazů.

II. Řešení úloh

Zásadní složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení problémů a úloh, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování. Tento proces může probíhat nejen v matematice samotné, ale také v jiných oblastech lidského poznání, jehož součástí je pak i tvorba matematických modelů.

III. Konstrukce poznatků

Nejen matematické poznatky jsou nepřenosné. Přenosné jsou pouze informace, které můžeme získat například z různých médií, přednášek apod. Poznatky jsou individuální konstrukty, které vznikají v mysli poznávajícího člověka.

IV. Zkušenosti

Vytváření poznatků, např. v oblasti pojmů, představ, tvrzení apod., je opřeno o informace, je však závislé na zkušenostech poznávajícího. Žák zkušenosti získává prostřednictvím kontaktu s realitou svého života, měl by však mít dostatek příležitostí nabývat zkušeností i ve škole (experimentování, řešení úloh, apod.).

V. Podnětné prostředí

Prostředí podněcující tvořivost je základem konstruktivistického vzdělávání matematiky. Nutnou podmínkou je však i tvořivý učitel a dostatek vhodných podnětů (otázky, úlohy, problémy, apod.), dále také sociální klima třídy příznivé tvořivosti.

VI. Interakce

Přestože je konstrukce poznatků individuálním procesem, podporuje jeho rozvoj sociální interakce ve třídě prostřednictvím diskusí, srovnávání výsledků, konstrukcemi příkladů apod.

VII. Reprezentace a strukturování

Pro konstruktivistický přístup k vyučování je typické vytváření nejrozličnějších druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa. Jednotlivé

zkušenosti a poznatky jsou různě zaměřeny, tříděny, hierarchizovány, vznikají obecnější a abstraktnější pojmy.

VIII. Komunikace

Komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky má pro konstruktivistické vyučování v matematice zásadní význam. Jedním z jazyků je neverbální vyjadřování, jiným matematická symbolika. Dovednosti vyjadřovat vlastní myšlenky a rozumět jazyku druhých je nutné se soustavně věnovat.

IX. Vzdělávací proces

Pro vzdělávací proces v matematice je podstatné porozumění matematice, a to pomocí vytváření představ, pojmů a postupů, uvědomování si souvislostí. Důležitou roli také představuje zvládnutí matematického řemesla, jehož rozvíjení vyžaduje trénink a případně i paměťové osvojení daných pravidel, algoritmů a definic. Podstatné jsou poté samotné aplikace matematiky, které nepředstavují jen vyvrcholení vzdělávacího procesu, mohou hrát roli i motivační.

X. Formální poznání

Vyučování, které má charakter předávání informací nebo návodů (vyučování transmisivní či instruktivní), vede zejména k ukládání informací do paměti. Přestože takto uchopené informace umožňují jejich rychlou reprodukci, dochází k jejich brzkého zapomínání. Takové poznání je pseudopoznáním, je poznáním formálním (Hejný, Kuřina, 2015).

F. Kuřina (In Hejný, Novotná, Stehlíková, 2004) dále hovoří o tzv. *realistickém konstruktivismu*, který jednak vychází z výše uvedených zásad, připouští však i využití transmise informací, které lze žákům předávat při řešení problémů a problémových situací. Zdůrazňuje potřebu doplňujících informací, které mohou být žákům zprostředkovány z učebnic, encyklopedií, internetu a jiné literatury.

Vyučování tedy může být vhodně doplňováno o transmisivní přístup, který je potřebný k předávání faktů, u kterých není možná vlastní konstrukce. To vše se děje v harmonii s utvářením matematiky v mysli žáka (Kalhous, Obst a kol., 2001).

1.4 Pět tezí popisujících konstruktivistickou výuku

Autorky Stehlíková, Cachová (2006) stanovily pět zásad, podle kterých by se měl učitel ve vyučování řídit, aby měla výuka konstruktivistický charakter.

1. Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání.

Velmi důležitou roli zde sehrává motivace, zejména vnitřní, která podněcuje jak žákův zájem, tak výkonnost a je předpokladem pro úspěšnost učení (Hejný, Novotná, Vondrová, 2004).

2. Učitel žákům předkládá podnětná prostředí (úlohy a problémy) a vhodně s nimi pracuje.

Prostředí, které je ve třídě vytvářeno, by mělo nabízet podněty, které žáky vede k samostatné práci a zvyšování zájmu o matematiku a poznání. Dostatečně podnětné prostředí může žákovi dopřát pocit sociální seberealizace a pocit radosti z objeveného. Za nevhodnější jsou považovány ty podněty, které žákům umožní propojit nové poznatky s již získanými a s jejich dosavadními zkušenostmi. Důležitým předpokladem úspěšnosti těchto podnětů je sám učitel, který úlohy a problémy žákům předkládá. Stejně jak lze z uzavřené úlohy vytvořit otevřenou, tak z otevřené úlohy lze vytvořit instruktivním způsobem úlohu uzavřenou. Záleží tedy na učiteli, jak s daným podnětem pracuje (Hejný, Novotná, Vondrová, 2004).

3. Učiteli jde především o žákovu aktivní činnost.

Jak už jsme zmiňovali v dřívějších kapitolách, žákova činnost ve výuce by neměla být pasivní, ale měla by směřovat ke konstrukci vlastních poznatků. Žák by tedy měl mít možnost s učivem aktivně pracovat a ne ho pouze přijímat od učitele bez dostatečného porozumění (Hejný, Novotná, Vondrová, 2004).

4. Učitel nahlíží na chybu jako na vývojové stádium žákova chápání matematiky a impuls pro další práci.

Ve vyučování je často chyba považována za nežádoucí jak u učitele tak u žáků, kteří se bojí chybovat. Na druhé straně je však potřeba brát chybu jako přirozenou součást žákova učení, jelikož to může učiteli pomoci k zjištění žákovy dosavadní zkušenosti s daným problémem. Chyby tedy mohou být podkladem pro učitelovu další práci s žákem a pojmy. Je tedy zapotřebí k nim přistupovat pozitivně (Hejný, Novotná, Vondrová, 2004).

5. Učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění spíše než na reprodukci odpovědi.

Podstatným znakem konstruktivisticky vedené výuky je porozumění. U jednosměrného předávání poznatků od učitele směrem k žákům často dochází k mechanickému osvojení daných pouček a algoritmů. Žák dokáže poznatky a kroky svého postupu reprodukovat, ale nedokáže je již odůvodnit, popř. aplikovat na praktických příkladech. Proto je důležité, aby žákovo poznání bylo založené na jeho dosavadních znalostech a prekonceptech, které jsou základem pro nové znalosti a jejich následné porozumění (Hejný, Novotná, Vondrová, 2004).

1.5 Formální a neformální znalosti

Jak už jsme zmiňovali dříve, Hejný a Kuřina upozorňují na formalismus ve vzdělávání, který je často zapříčiněn transmisním přístupem. Tento formalismus autoři považují za velký problém, který je třeba ve vzdělávání řešit (Hejný, Kuřina, 2015). Abychom plně porozuměli problematice formalismu, uvedeme si nejprve dva základní přístupy žáků k učení (Mareš, 1998):

povrchový přístup je založen na mechanickém „biflování“ a memorování učiva. Žák si přitom získané informace neuvádí do souvislostí, nepátrá po jejich smyslu, a tudíž učivu nerozumí. Takové učení vede k formálním poznatkům, které žáci brzy zapomenou,

hloubkový přístup je opakem povrchového. Žáci učivu rozumí, uvádí dané informace do vzájemných souvislostí a chápou smysl učiva. Takový přístup k učení vede k neformálním poznatkům, které jsou kvalitnější a mají trvalý charakter.

Zde je velice podstatný přístup učitele, jelikož jeho pojetí výuky může ovlivnit přístup žáků. Jestliže učitel bude ve své výuce trvat převážně na pamětním osvojování učiva a bude po žácích vyžadovat, aby dané poučky a definice uměli pouze odříkat nazpaměť, lze očekávat, že žákovo poznání bude spíš formální a povrchové. Naproti tomu učitel, který žáky ve svých hodinách povede k analytickému a kritickému myšlení a bude klást důraz na porozumění učivu víc než na pamětní osvojování, bude podporovat hloubkový přístup k učení (Hejný, Kuřina, 2015).

Formalismus je ve vzdělávání hlavní příčinou, proč jsou žáci v matematice neúspěšní. Problém spočívá v transmissi hotových myšlenkových produktů do mysli žáků v podobě definic, tvrzení, návodů či důkazů, které se žák mechanicky naučí a uloží jako izolované informace do své paměti bez porozumění. Tento proces vede žáka k formálnímu poznání. Porozumění je přitom velice podstatnou složkou poznávacího procesu a je základem pro poznání neformální (Hejný, Novotná, Stehlíková, 2004).

Hejný a Kuřina ve své knize *Dítě, škola a matematika* uvádějí, že je potřeba, aby si žák nejprve vytvořil o budoucí znalosti konkrétní představy, které vedou žáka k jejímu porozumění. Aby si žák tyto představy vytvářel, je zapotřebí vlastního objevování a konstruování poznatků. Důležitá je přitom znalost poznávacího procesu a jeho jednotlivých etap, ve kterých dané představy žáků vznikají. Autoři zmiňují, že hlavní příčinou vzniku formalismu spařují v nedostatečném čase, který je jednotlivým etapám věnován. Žáci si tak nevytvoří potřebné představy o daném abstraktním poznatku, které představují jeho oporu a jsou nuceni si je vštípit do paměti memorováním. Jako východisko autoři vidí v konstruktivistickém přístupu vyučování v matematice a v hlubším porozumění jednotlivých etap poznávacího procesu (Hejný, Kuřina, 2015). Těmito etapami se budeme blíže zabývat v následující kapitole.

2 Teorie generických modelů

Teorie generických modelů popisuje poznávací proces žáka, tedy postup jak si žák matematiku a její jednotlivé poznatky uchopuje. Tato teorie vznikala postupně na základě dlouholetých výzkumů, které byly zaměřeny na zkvalitnění vyučovacího procesu a eliminaci formálních poznatků žáků (Hejný, Novotná, Stehlíková, 2004).

Teorie částečně vychází z metody J. Piageta (1989), která popisuje kognitivní vývoj člověka a jeho jednotlivá vývojová stádia. Dále také vychází z myšlenek L. P. Vygotského (1970, 1976) o pojmovém učení, zákonech vnitřní nervové činnosti a vnitřní řeči.

Její základy vytvořil Vít Hejný, který zdůrazňoval myšlenku, že kvalitní poznání žák nezíská učitelovým předáním, ale musí k němu dojít sám. Toto tvrzení je v současné době základním principem konstruktivismu (Hejný, Novotná, Stehlíková, 2004). K této práci V. Hejného vedly otázky, proč velký počet žáků nerozumí matematice a proč si místo přemýšlení učivo osvojují nazpaměť. V. Hejný usiloval o zlepšení tohoto stavu a snažil se najít způsob, jak budovat žakovy správné představy pojmů, porozumění vztahům a znalosti procesů.

Na tuto myšlenku navázal jeho syn Milan Hejný, který díky svým výzkumům vytvořil model mechanismu poznávacího procesu, pomocí kterého můžeme lépe pochopit myšlenkové pochody žáků. Představuje také velkého pomocníka ve výuce, jehož znalost může učitelům pomoci nejen odhalit chyby žáků, ale také pomoci zvolit ve výuce takové strategie a postupy, díky kterým se lze vyvarovat formálnímu poznání žáků a tím zvýšit efektivitu výuky matematiky.

Teorie rozděluje žákův poznávací proces do pěti etap - *hladin* (viz schéma č. 1), přičemž základ tvoří dva kognitivní postupy, které nazýváme *mentální zdvihy*. První zdvih vede od izolovaných modelů ke generickým a je nazýván *zobecněním*. Druhý zdvih vede od generických modelů k abstraktním znalostem a je nazýván *abstrakcí*. Stěžejním pojmem celého procesu je generický model. Ten představuje konkrétní jev, který považujeme za obecný a slouží žákovi jako nástroj jeho myšlení, jelikož na základě stejných znaků spojuje žakovy zkušenosti. Ty označujeme jako izolované modely. Začátek procesu je motivace. Po vytvoření nových poznatků, dochází k tzv. krystalizaci (strukturizaci), kdy jsou jednotlivé poznatky zařazovány do struktury již vytvořených poznatků (Hejný, 2014), (Hejný, Kuřina, 2015).

Z popsaného postupu nám vyplývá, že v poznávacím procesu žák nejprve porozumí konkrétním příkladům, u kterých si všímá jejich společných znaků a tím dojde k poznatkům, které jsou obecnější a abstraktnější (Hejný, Kuřina, 2015). Žákovo poznání lze tedy brát jako mentální strukturu, která neustále prochází velkými změnami (Hejný, 2014).

Teorie generických modelů prošla postupem času značným rozšířením a prohloubením, přičemž byla mnohokrát aplikována ve výuce na všech stupních škol. Součástí jejího vývoje byly také terminologické změny, které vznikly díky překladu teorie do angličtiny. Taky je třeba zmínit, že tato teorie se stala jedním z východisek, které vedly ke vzniku učebnic matematiky pro 1. až 5. ročník vydané nakladatelstvím Fraus (Hejný a kol. 2007 – 2011) (Hejný, 2014).

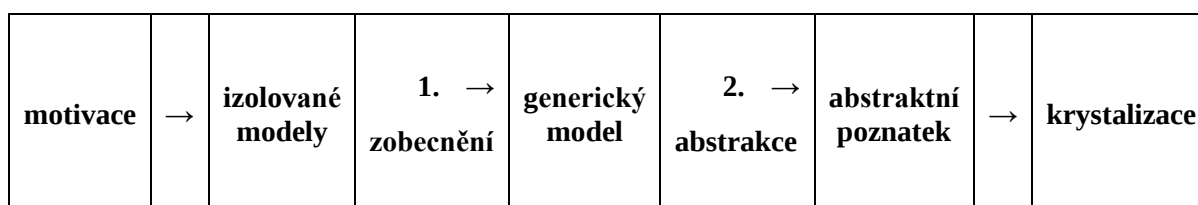


Schéma č. 1

(Hejný, 2014, str. 40)

2.1 Motivace

Motivace stojí na počátku celého poznávacího procesu žáka a hraje velice důležitou roli jak pro jeho kvalitu, tak pro úspěšný začátek celého učení. Jestliže přitom učení chápeme jako „*proces konstruování poznatkových struktur u jednotlivých žáků*“ (Stehlíková, Ulrychová, 2011, s. 39), v němž dochází ke kultivaci žákova duševního světa, motivace v něm sehraje klíčovou úlohu. Hovoříme přitom o motivaci vnitřní. V případě že žák nebude mít o učení zájem a nebude k němu motivován, žádné poznatkové struktury si nevytvoří, jelikož k jejich budování je potřeba žákova aktivita (Hejný, Kuřina, 2015).

Dítě je přirozeně zvědavé a má velkou potřebu objevovat a získávat nové zkušenosti. Žákovy poznávací potřeby mají své charakteristiky, kterými se odlišují od potřeb a motivace dospělého člověka. Žákovy potřeby jsou velice intenzivní, různorodé a proměnlivé. Pokud tedy žákův zájem nedokážeme v danou chvíli uspokojit a podpořit, s největší pravděpodobností se jeho pozornost přesune po chvíli někam jinam a jeho potřeba zůstane nenaplněna.

Touha po poznávání se projevuje i ve školním prostředí, kde vnitřní motivace vychází z žákovy rozporu mezi „nevím“ a „chtěl bych vědět“. Pokud je však žák k poznání nucen a nevychází tedy z jeho touhy a potřeb, hovoříme o stimulaci nikoliv o motivaci. V klasické výuce matematiky však převládá stimulace. Žákovo učení často vychází ze snahy získat dobrou známku, nebo naopak strachem ze špatné známky či ve snaze získat si oblibu učitele. Vnitřní motivace vycházející z žákových úspěchů a radosti ze samotného objevování matematiky je ve školním prostředí spíše výjimkou.

Učitelé často volí jako motivaci soutěže, které mohou být pro některé žáky lákavé, pro druhé zase frustrující. Nevýhoda soutěží je spatřována v časovém limitu, kdy se pomalejší žákům snižuje možnost úspěchu. V hodnocení matematického poznání navíc není důležitá rychlost, nýbrž kvalita myšlenek. Učitelé také volí jako motivaci matematické úlohy, jejichž obsah je atraktivní a do jisté míry účinný. Tento způsob motivace má však krátkodobý charakter.

Jako nejvhodnější motivace se jeví žákův úspěch a radost z vyřešených úloh. Takové úlohy by však měly být pro žáka přiměřené, tudíž ani ne příliš jednoduché a zároveň ani příliš náročné. V matematice, kde jsou žáci slabší i více zdatní však může nastávat problém, kde je důležitá individualizace výuky. Východiskem tohoto problému mohou být vhodné učebnice, které nabízí úlohy různých obtížností (Hejný, 2014).

2.2 Izolované modely

Izolované modely představují konkrétní zkušenosti budoucí znalosti. Izolovanými modely čísla 2 jsou například 2 jablka, 2 auta, 2 lízátka. Jsou to modely, které reprezentují obecnější a abstraktnější pojem (Hejný, Kuřina, 2015). S čím větším počtem modelů se žák setká, tím bude jeho konečné poznání pevnější, jelikož tvoří jeho základ a oporu (Hejný, Novotný, Stehlíková, 2004).

Tato etapa však nemusí být pouhým sbíráním konkrétních zkušeností, ale i vyjasňováním terminologie a problémů jednotlivých případů, které mohou souviset s modely zdánlivými, překvapivými či s nemodely. Překvapivý model je ten, který se tváří, že jím není, ale ve skutečnosti je. Za zdánlivý považujeme ten, který se jako daný model může jevit, ale není jím. Nemodel je jev, který je opakem daného modelu (Hejný, Novotný, Stehlíková, 2004).

Délka této etapy se odvíjí od náročnosti problémů a můžeme ji rozdělit do čtyř podetap (Hejný, 2014):

1. Setkání s první konkrétní zkušeností, zárodkem příštího poznání.
2. Setkání s dalšími izolovanými modely, popř. nemodely, modely zdánlivými, překvapivými. Nedochází však ještě k jejich propojení.
3. Poznání souvislostí některých modelů a vytváření jejich shluků. Žák už zde tuší, že modely dané skupiny jsou „stejné“.
4. Zjištění podstaty tušené „stejnosti“ a vytvoření komunity.

2.3 Generický model

V okamžiku, kdy se jednotlivé separované modely začnou seskupovat a strukturovat, dochází k prvnímu mentálnímu zdvihu - k zobecnění neboli generalizaci této skupiny a ke vzniku modelu generického. Proces generalizace často vychází ze čtvrté podetapy izolovaných modelů, se kterou v mnoha případech splývá (Hejný, 2014).

Generický model má obecnější charakter než izolované modely a dává nám určitý vhled do této skupiny, jelikož vystihuje podstatu vztahů a vzájemných souvislostí mezi jednotlivými izolovanými modely (Hejný, Novotná, Stehlíková, 2004). Generický model můžeme považovat za zástupce všech nebo skupiny izolovaných modelů a může tedy zastupovat kterýkoliv z těchto prvků. Přestože je generický model obecnějšího charakteru, je stále vázán na názornost (Hejný, 2008). Pro počítání mohou být generickým modelem například prsty na ruce či počítadlo, pro zlomky čokoláda, počet, tyč, ciferník, pro záporná čísla teploměr, výtah, krokování (Hejný, 2014). Generickým modelem mohou být také obecné návody, grafy, vzorce, algoritmy apod. (Kuřina, Hejný, 2015).

Zobecnění neboli objev generického modelu je nejdůležitějším momentem celého poznávacího procesu. Dochází při něm k odhalení nové abstraktnější skutečnosti a je často doprovázen tzv. AHA-efektem, který představuje náhlé uzavření společné podstaty skupiny izolovaných modelů (Hejný, 2004). Odhalení něčeho nového přináší novou energii a podporuje vnitřní motivaci žáků při procesu učení. Žák při takovém odhalení může pociťovat radost z objevu a bude usilovat o opakování tohoto prožitku (Hejný, Novotná, Stehlíková, 2004).

Soubor izolovaných i generických modelů je ukazatelem kvality osvojení daného pojmu, vztahu, operace nebo situace. Jestliže tedy chceme zjistit, do jaké míry žák tyto znalosti ovládá, zjišťujeme o kolik generických modelů je jeho znalost opřena. Jestliže však žák nemá vybudované žádné konkrétní představy, bude jeho poznání s největší pravděpodobností formální (Hejný, 2014). Je proto potřeba věnovat dostatečný čas propedeutice budoucích znalostí a tyto představy u žáků budovat (Hejný, Kuřina, 2015).

2.4 Abstraktní poznatek a krystalizace

Přechod mezi generickým modelem a abstraktním poznatkem nazýváme *abstrakčním zdvihem*. Jedná se o restrukturalizaci souboru izolovaných a generických modelů, která přináší nový, abstraktnější, vzhled. Tento proces přináší mnoho změn a je pro žáky velmi náročný. Zatímco generický model je stále opřen o předmětnou představu, abstraktní poznatek je této reálnosti zbaven a opírá se o matematický jazyk a symboliku. Pokud tedy žák dokáže daný poznatek vyjádřit slovy či symbolikou, je jeho poznání abstraktní (Hejný, Novotná, Stehlíková, 2004). Abstrakce je nejvyšší stupeň poznávacího procesu. Abstraktním poznatkem pro žáka 1. třídy může být rovnost $2 + 3 = 5$, slovo „dva“ nebo číslo „2“ (Hejný, 2014).

Ve chvíli, kdy vzniká nové poznání, dochází k propojování s předchozími, již existujícími poznatky. K tomuto propojování dochází nejdříve na úrovni modelů, posléze na úrovni abstraktního poznání (Hejný, 2004). Tomuto procesu říkáme krystalizace. Nové poznání se začleňuje do poznatkové struktury žáka a usazuje se v jeho vědomí. Při tomto procesu dochází k velkým změnám, při kterých se nové poznatky přizpůsobují již existujícím (Hejný, Kuřina, 2015). Žákovo matematické poznání je tedy neustále rekonstruováno a jeho jednotlivé poznatky jsou propojovány, rozšiřovány a prohlubovány. Přestože je tato etapa znázorněna jako poslední fáze procesu, je krystalizace procesem dlouhodobým a permanentním, který začíná již při objevení generického modelu popř. izolovaných modelů (Hejný, 2014).

Abstraktní poznatky, které jsou tedy výsledkem konkrétního poznávacího procesu, se mohou později stát izolovanými či generickými modely jiného poznávacího procesu. Zda se tedy jedná o konkrétní model či abstraktní poznatek se odvíjí od jeho funkce v daném poznávacím procesu či poznatkové struktuře (Hejný, Kuřina, 2015)

2.5 Schéma

Matematické poznání žáka můžeme dělit do dvou rozsáhlých oblastí: *schopnosti* a *obsah*. Dle Hejného a kol. (2004) není oblast schopností v rámci didaktiky matematiky dostatečně utříbená, a to hlavně z toho důvodu, že jednotlivé schopnosti přesahují oblast matematiky a jsou součástí rozsáhlejší intelektuální a kognitivní složky člověka. Autoři přitom hovoří o schopnostech jako experimentování, analyzování situace, objevování, argumentace, hledání řešitelské strategie, formulování myšlenek apod. Naproti tomu je oblast obsahu daleko víc propracovaná a soubor poznatků je rozdělen do čtyř skupin:

- objekty (kružnice, zlomek, součet),
- vztahy (tvrzení a vzorce),
- postupy (algoritmy, návody, řešitelské strategie, argumentace),
- schémata.

Hranice tohoto rozdělení však nejsou ostré a jednotlivé poznatky mohou být do jednotlivých skupin zařazovány podle kontextu, ve kterém se objevují. Rozdělení je spíše jen orientační (Hejný, Novotná, Stehlíková, 2004).

Schéma dále definují jako „*ucelené představy, které se ve vědomí člověka vytvářejí na základě mnohanásobně opakované zkušenosti a jsou nositelem mnoha konkrétních poznatků, které člověk přímo neví, ale které z nich může vyvodit*“ (Hejný; Novotná, Stehlíková, 2004, s. 25).

Mentální matematické schéma objektu je souborem jak jednotlivých generických, někdy i izolovaných modelů daného objektu, tak jejich vzájemných vztahů a souvislostí. Izolované modely a jejich shluky tvoří základ pro vznik schématu, ke kterému však dochází až ve chvíli vytvoření prvního generického modelu. Ty se stávají opěrnými body celého schématu. Matematická schémata vznikají v žakově vědomí postupně a spontánně, a to v závislosti na frekvenci činností a řešení různorodých úloh (Hejný, 2014).

Mentální matematické schéma je dynamická paměťová struktura, která se neustále mění a vyvíjí. Ke změnám dochází jak na úrovni jednotlivých prvků, tak vzájemných vazeb. Přitom k proměnám nemusí docházet pouze v rámci jednoho schématu, ale i mezi nimi navzájem, kdy jedno velké schéma může vzniknout propojením několika menších. Vzájemně se tedy mohou propojovat a prolínat. K nejrychlejším změnám schématu objektu ve vědomí žáka dochází ve chvíli, kdy se jedinec daným objektem zabývá. K proměnám

však může docházet i ve chvíli, kdy se danému objektu nevěnuje, a to v souvislosti se změnami jiných schémat, se kterými je dané schéma propojeno (Hošpesová, Vondrová, Tichá, 2007).

Jestliže jsme tvrdili, že bohatost generických modelů daného objektu určuje kvalitu žákova poznání, můžeme toto tvrzení v souvislosti se schématy prohloubit a rozšířit:

„Kvalitu matematického poznání žáka určuje kvalita jeho matematických schémat.“
(Hošpesová, Vondrová, Tichá, 2007, s. 82).

Přitom víme, že kvalita jednotlivých matematických schémat je dána počtem a rozmanitostí generických modelů schématu. Důležité je rozlišit pojem schéma a pojem struktura. Dle Hejného (2014) je schéma *„nositелеm intuitivního porozumění matematice a struktura je nositелеm porozumění axiomatického“*. Zatímco je tedy schéma opřeno o předmětné modely a nese hluboké porozumění daného jevu, struktura se již orientuje v abstraktní rovině definic, tvrzení a důkazů. Tyto pojmy jsou přesně definovány a vyslovovány ve formalizovaném jazyce (Hejný, 2008).

Schéma tedy můžeme pokládat za předstupeň struktury. K tomuto přechodu nejčastěji dochází ve chvíli, kdy žák z prvního stupně přechází na druhý a objeví se u něj potřeba abstrakce a organizace znalostí. Ke strukturaci schémat však může docházet již na prvním stupni, kdy žák začne zkoumat pravidla a hledat argumenty. Jedná se převážně o zárodky strukturace, která je dlouhodobým procesem, který může být v jednotlivých oblastech matematiky různě rozvinutý (Hejný, 2014).

Z následujících odstavců nám vyplývá, že je schéma důležitým předpokladem pro budování budoucí struktury poznatků. Nejenže nese hluboké porozumění danému jevu, ale je také předpokladem pro orientaci práce s tímto jevem (Hejný, 2008). Pro matematický rozvoj žáků prvního stupně je tedy důležité budování matematických schémat, které jsou v daném období stěžejní. Pro jejich budování je důležitá systematická práce a činnosti, které vedou k vytváření schémat. Takové činnosti a úlohy lze poskytnout skrz matematická prostředí, která se podílí na rozvoji matematických schémat (Hošpesová, Vondrová, Tichá, 2007).

3 Vyučování orientované na budování schémat

Metoda vyučování matematiky orientované na budování schémat, zkráceně VOBS, je metoda založená na konstruktivistickém přístupu, jejímž autorem je prof. Milan Hejný, známá jako „Hejného metoda“.

Jedná se o ucelený koncept, jehož cílem je autonomní poznávací proces žáka, který se zaměřuje na budování matematických schémat a práci v prostředích. Taková práce má zajistit celostní přístup k učení a prolínání a napojování poznatků v různých kontextech tak, aby nedocházelo k učení izolovaných faktů.

Metoda je orientovaná na tvořivou a vlastní činnost žáků, rozvoj intelektuálních dovedností, rozvoj myšlení, komunikace a sociálního chování. Vede žáky k formulaci vlastních myšlenek, k naslouchání myšlenkám druhých a k jejich kritickému posuzování. Práce je založena na demokratickém přístupu, který vede k diskusím a k řešení problémů, přičemž má žák objevovat matematiku sám a s radostí. Samostatné objevování žáků je tedy hlavní tezí této metody. Učitel žákům nic nevysvětluje, neopravuje, podporuje je v komunikaci a nechává jim prostor, aby úlohy vyřešili sami. Všechny výše zmíněné schopnosti a činnosti jsou rozvíjeny pomocí různých prostředí, ve kterých žák pracuje, přičemž v nich podstatnou roli hraje žakova zkušenost (Hejný, 2014).

M. Hejný v této koncepci zdůrazňuje, že v matematice nejde ani tak o rychlé a správné počítání, ale o kvalitní myšlení, řešení problémů a komunikaci. Hejného metoda je tedy postavena na této myšlence a prostřednictvím netradičních učebnic a přístupu učitele se žáci tyto schopnosti učí. Metoda také vychází z autorova názoru, že je potřeba u žáků budovat kvalitní matematické poznání, které by mělo být založeno na porozumění, nikoliv na „biflování“ pravidel. M. Hejný (2014) tvrdí, že zapomínání učiva je zapříčiněno přesvědčením, že se matematika ukládá do paměti, které pokládá za chybné. Podle něj se má matematika ukládat do schopností, které se nezapomínají, ale naopak narůstají (Hejný a kol., 2012).

Metoda je podporována a šířena pomocí společnosti H-mat, jejímž cílem je rozvoj matematické gramotnosti žáků a studentů. K Hejného metodě jsou také vydána ucelená řada učebnic pro 1. stupeň ZŠ, která má doložku MŠMT (Slezáková, Sobolová, 2015). Metoda VOBS stojí na dvou pilířích, které představují roli učitele a roli učiva. Učivo je přitom zachyceno v sítích úloh vložených do didaktických matematických prostředí (Hejný, 2014).

Cíle, jenž tato metoda následuje, nejlépe vystihují slova arabského básníka:

„Učitel, který se prochází mezi svými žáky ve stínu chrámu, nedává ani tak ze své moudrosti jako spíše ze své víry a láskyplnosti. Je-li opravdu moudrý, nevyzývá vás, abyste vstoupili do příbytku jeho moudrosti, ale spíše vás vede k prahu vašeho vlastního myšlení.“

Chalíl Džibrán (1990, s.50)

3.1 Vývoj Hejného metody

„Škola si myslí, že vím jen to, co jsem se naučil. Omyl. Umím to, co jsem zažil.“

Milan Hejný

Základy Hejného metody položil pedagog a matematik Vít Hejný, který se snažil hledat důvody nízké efektivity vyučování v matematice. Zajímalo ho, proč se žáci nesnaží porozumět matematice a místo toho se raději učí učivo a vzorečky nazpaměť tak, že zvládají vyřešit pouze standardní úlohy. Začal tedy s experimentováním, při kterém žákům a svému synovi předkládal nestandardní úlohy. Zjistil, že efektivitu vyučování zvyšuje samostatné řešení úloh žáky a jejich vlastní úsilí. Upozorňoval však, že s takovým edukačním stylem je nutno začít co nejdříve, jelikož od starších žáků, kteří jsou zvyklí na transmissi hotových poznatků, můžeme stěží očekávat tvořivou činnost. Jeho poznatky se však kvůli politické situaci neměly jak dál rozšířit (Hejný, 2014).

Jeho syn Milan Hejný se narodil roku 1936 v Martině na Slovensku. Jelikož se stal součástí otcova testování, dostával od svého otce zajímavé úlohy, které ho, na rozdíl od matematických úloh ve škole, bavily. Ačkoliv neměl s matematikou ve škole dobrou zkušenost a měl spíš horší známky, vybudoval si k ní pozitivní vztah, díky kterému se stala matematika součástí jeho budoucího života. V roce 1959 vystudoval Matematicko-fyzikální fakultu Univerzity Karlovy v Praze. Nejenže působil na vysokých školách v Praze a v Žilině, byl také hostujícím profesorem na Concordia University v Montreálu a na Central Michigan University v USA. Během své pedagogické praxe také vyučoval matematiku na základních školách. V současné době působí jako profesor na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v Praze, a to od roku 1992.

K rozpracování otcových myšlenek vedla Milana Hejného nespokojenost s výukou matematiky jeho syna v roce 1974. Tehdy se dostal do rozporu se synovou učitelkou a rozhodl se matematiku v jejich třídě vyučovat sám a to v duchu myšlenek svého otce. V hodinách aplikoval jeho přístupy k výuce. Díky zkušenostem z praxe začal v Bratislavě s několika spolupracovníky dále rozpracovávat otcovy poznatky. V roce 1987 publikovali knihu Hejný a kol. (1990), která zahrnovala poznatky o nové výuce matematiky, která tvořila ucelený pohled nového přístupu.

Po přestěhování do Prahy v 90. letech na Pedagogické fakultě UK buduje Milan Hejný svůj tým, s kterým vypracovává teorii generických modelů a metody a principy nové metody nazývané „Vyučování matematice orientované na budování schémat“, zkráceně „VOBS“. V letech 2007 - 2012 tým vydává učební materiály pro první stupeň ZŠ vydané nakladatelstvím Fraus. Ty jsou tvořeny jedno až třídílnou učebnicí pro každý ročník, dále zahrnují pracovní sešity a příručky pro učitele. Ty obsahují metodické pokyny, učební plány a CD. V roce 2013 zakládá Milan Hejný společnost H-mat, o.p.s., která sdružuje jeho spolupracovníky. Tato společnost dále rozvíjí a rozšiřuje metodu pomocí kurzů, seminářů a zakládá internetové stránky, které nabízí informace nejen učitelům, ale také rodičům a dalším zájemcům o metodu. Hejného metoda je součástí vysokoškolské přípravy budoucích učitelů. O metodu mají zájem i v zahraničí, například v Itálii, Řecku, Polsku, Švédsku, Finsku nebo v Kanadě (Vývoj Hejného metody, 2017).

3.2 12 klíčových principů

Společnost H-mat, o.p.s. na svých webových stránkách uvádí 12 klíčových principů, které tvoří pilíře Hejného metody. Představují ucelený koncept, ve kterém žák objevuje matematiku sám a s radostí. Všechny principy na sebe navzájem poukazují a prolínají se (12 klíčových principů, 2016).

1. Budování schémat

Budování mentálních schémat matematických pojmů, procesů a jevů v mysli žáka je hlavním principem metody. Schéma představuje souhrn znalostí, které jsou navzájem propojené a které se vztahují ke známému prostředí. Budování schémat spočívá v činnostech v daném prostředí. Tento princip vychází z přesvědčení, že každé dítě má ve svém vědomí uloženu řadu schémat týkajících se běžného života, ze kterých by se mělo ve vyučování

vycházet. Žák si tedy pomocí řešení matematických problémů spjatých s životní zkušeností vytváří pomocí uvědomování souvislostí svá schémata matematického pojmu či problémů a dochází k vlastnímu poznání. V Hejného metodě se můžeme setkat se schématy autobus, rodina, schody apod.

2. Práce v prostředích

Tento princip úzce souvisí s budováním schémat. Pojem prostředí v této koncepci představuje sérii úloh se stejným námětem, ve kterých jsou zakomponovány různé matematické jevy a problémy. Náměty jsou přitom pro žáky známé nebo alespoň jednoduše představitelné, a to z toho důvodu, že vychází z žakových zkušeností, týkajících se běžného života nebo představují oblíbenou činnost. Tyto zkušenosti se zde dále přeměňují na matematické úlohy. Náměty na žáky působí motivačně a lákají žáky k činnosti. Hlavním rysem prostředí je, že úlohy, které se v nich vyskytují, se týkají různých matematických jevů. Žáci se tedy nezabývají izolovanými fakty a principy, naopak se s danými matematickými problémy setkávají opakovaně v různých prostředích. Tento princip umožňuje žákům pracovat s daným matematickým jevem v různých kontextech a na různé úrovni obtížnosti. Nejprve se jedná o jednoduché úlohy, které postupně gradují, rozšiřují se a obohacují. S jednotlivými prostředími se žáci setkávají opakovaně, tudíž se pro ně stávají známými. V takto známých prostředích žáci ztrácí strach a nejistotu z abstraktních a neznámých jevů.

3. Prolínání témat

Jak už bylo řečeno v předchozím principu, různá prostředí, úlohy a činnosti nám umožňují se s danými matematickými jevy a pojmy setkávat opakovaně. Nedochází tak k jejich odtrhávání a izolovanému předávání, ale naopak k jejich ukládání do známého schématu. Tento princip umožňuje žákovi uvádět si daná témata do souvislostí, což je předpoklad pro jejich pochopení. Poznatky uložené ve schématu si žák dokáže kdykoliv odvodit a vybavit. Díky různým činnostem, aktivitám a práci v různých prostředích dochází ke skládání střípků dílčích poznatků. Jedna aktivita tak může rozvíjet více oblastí, stejně tak různé aktivity v různých prostředích mohou přispívat k tvorbě jednoho poznatku. Žák tedy poznává daný poznatek v různých souvislostech a používá přitom různé strategie řešení.

4. Rozvoj osobnosti

Školní prostředí je místo, kde žáci tráví velkou část svého života a kde se formulují základy jejich sociálního a pracovního chování a návyků. Vedle osvojování vědomostí tak

hraje rozvoj sociálních kompetencí ve výuce důležitou roli. Hejného metoda proto využívá potenciál osobnosti žáka a podporuje, usměrňuje a motivuje jeho rozvoj a to nejen osobnostní, ale i psychický. Metoda vychází ze zákonitostí žákova vývoje a snaží se dostat do souladu vzdělávání a výchovu, školní povinnosti a zájmy žáků, cíle učitele a potřeby žáků. Sociální stránka je rozvíjena prostřednictvím komunikace a spolupráce, které jsou zde klíčové. Ve výuce dochází ke konfrontaci názorů a postojů žáků. Žáci se učí kultivovaně a věcně argumentovat, diskutovat, rozhodovat a vyhodnocovat. Jsou samostatní a méně vázáni na autoritu učitele. Samotní žáci poznávají, co je správné a dokáží respektovat ostatní spolužáky. Prostřednictvím vzájemného vysvětlování, jsou vedeni k porozumění a přemýšlení. Názory a nápady jsou v Hejného metodě pokládány za podnět k další činnosti a rozvoji myšlenek. K tomuto formování je však důležitá role učitele, která se oproti běžnému vyučování liší.

5. Skutečná motivace

V Hejného metodě se předpokládá vnitřní motivace žáků, která vychází z jejich přirozených potřeb objevovat. Ta oproti motivaci, která přichází zvenčí, žáka do učení nenutí a dává jeho vzdělávacímu procesu energii a orientaci. Úlohy v Hejného metodě jsou vytvořeny tak, aby u žáků tuto přirozenou motivaci probouzely a jejich řešení je bavilo, a to bez potřeby vnější stimulace. Díky vlastní snaze a radosti z úspěchu žák řeší úlohy a je vnitřně povzbuzován k další činnosti. Motivace k dalším činnostem také vychází ze známých prostředí a zkušeností, které postupně vedou žáka do světa abstraktních pojmů a jevů.

6. Reálné zkušenosti

Výuka dle Hejného metody je postavena na vlastních zkušenostech žáků, které ho dovedou k obecnému úsudku. Matematické zkušenosti žáci získávají vlastní činností a řešením úloh. Nestačí žákům zkušenost předat, musí si ji sami vybudovat. Žák si potřebuje dané matematické situace prožít a získat co nejvíc zkušeností, aby si vytvořil představu, o kterou bude posléze opřen onen abstraktní pojem. Jen takové zkušenosti mohou vést k jejich porozumění. Pokud však budeme žákovu cestu k poznání zkracovat, nebo mu budeme dokonce znalosti sdělovat, bude poznatek formální.

Všechny matematické oblasti, které se v jednotlivých prostředích učebnic nachází, jsou proto vytvořeny na principu tvorby vlastních zkušeností. Zkušenosti získané z neúspěchu jsou přitom také přínosné, jelikož žák zjistí, že je potřeba vydat se jinou cestou a co všechno k ní potřebuje.

7. Radost z matematiky

Radost z matematiky přichází z pocitu úspěchu, který žák v matematice zažívá. Když žák správně vyřeší přiměřeně náročný úkol, má radost a je motivován k dalšímu řešení úloh ve snaze zažít další úspěch a překonat další překážku. Radost z pokroku, vlastního objevu a uznání spolužáků a učitele je ve výuce matematiky tou nejúčinnější vnitřní motivací. Ve třídě jsou však žáci s různými úrovněmi dovedností, vědomostí a schopností. Prostředí a úlohy v učebnicích jsou proto koncipovány tak, aby každý žák v matematice mohl zažít úspěch. Úlohy jsou různě náročné a dávají prostor pro objevování i slabším žákům. Nikdo tedy nemá „blok z matematiky“, jelikož každý žák najde prostředí, ve kterém může zažít úspěch a stejně tak přiměřeně náročnou úlohu, která bude tak lehká, aby ji vyřešil, ale zároveň tak obtížná, aby musel vynaložit určité úsilí, které ho bude motivovat k další činnosti.

Žáci, kteří naopak nebudou mít prostor pro vlastní objevování, zažívání úspěchu a budou jim předkládány hotové poznatky, které budou imitovat, nebudou ani v budoucnu schopni vynaložit úsilí pro získání znalostí.

8. Vlastní poznatek

V Hejného metodě je pro získávání matematických vědomostí důležitý vlastní poznatek, ke kterému žák dojde vlastním objevováním matematiky. Nejedná se tedy o poznatek předaný učitelem, ale o poznatek, který žák získal vlastní úvahou a vlastní cestou a přemýšlením. Žák dospěje k matematickému objevu přes řadu zkušeností, které ho dovedou až k samotnému pojmu. Na této myšlence jsou sestaveny učebnice matematiky. Žák si nejprve vytváří své vlastní teorie skrz zkušenosti, o těch hovoří a konzultuje je se spolužáky. Navzájem si své teorie vysvětlují a následně ověřují na dalších úlohách. Těchto konzultací a diskusí se spolužáky lze využít i ve chvílích, kdy se žákovi nedaří objevu dosáhnout. V takových situacích jsou zde spolužáci, kteří daného žáka dokáží navést správných směrem a pomohou mu dojít k danému objevu. Taková rada od spolužáka může

být daleko účinnější a srozumitelnější než od učitele, jelikož jsou si svými myšlenkami daleko blíží.

Formulace vlastních úvah, myšlenek a teorií, kterým žák rozumí, ho vede k snazšímu přijetí matematického jazyka. Cestu, kterou žák v matematice objevuje lze vyjádřit následující implikací:

$$\text{ZKUŠENOST} \Rightarrow \text{MATEŘSKÝ JAZYK} \Rightarrow \text{MATEMATICKÝ JAZYK}$$

9. Role učitele

Porozumění roli učitele v Hejného metodě je velice důležité, neboť se oproti roli učitele v běžné výuce liší. Nejenže je velice náročná, ale samotná změna role a učitelského přesvědčení by se dala pokládat za nejobtížnější. V Hejného metodě není učitel autoritou, která vykládá a předává žákům návod k řešení nové situace. Naopak jsou zde hlavními aktéry žáci a učitel zaujímá roli organizátora, moderátora a průvodce vyučovacích hodin matematiky. Plánuje a realizuje hodinu, pobízí žáky k práci, řídí diskuse, klade otázky a zadává žákům přiměřené úkoly a individualizuje. Podle aktuálních potřeb žáků jim předkládá úlohy buď obtížnější či jednodušší. Nikdy však nevysvětluje ani nedává odpovědi. K poznání a pochopení vede žáky prostřednictvím dobře promyšlených úloh. Žáci nad nimi přemýšlí, diskutují a navrhují postupy řešení. Učitel musí být v takových chvílích trpělivý, neboť jsou mnohdy žákovy postupy mylné či neúplné. Tyto situace jsou však klíčové pro žákovo poznání a učitel musí vydržet, aby žákovi nevyzradil správnou cestu.

10. Práce s chybou

V tradičním vyučování se na chybu nahlíží jako na nežádoucí a negativní jev. Nejen žáci, ale i učitelé mají z chybovosti strach. Práce s chybou proto většinou spočívá v jejím nalezení a v co nejrychlejším opravení. Žák ale ve většině případů neví, proč se dané chyby dopustil a s největší pravděpodobností ji bude opakovat i nadále. Analýza, hledání příčin a odstraňování chyb by přitom měli být součástí vyučování.

V Hejného metodě je chyba chápána jako přirozený jev, který se vyskytuje v běžném životě. Navíc je ve vyučování vítána, jelikož žáky vede k hlubším zkušenostem a porozumění. Je považována za prostředek k vlastnímu poznání. Žák je proto veden k nalezení vlastní chyby, k uvědomění si, proč danou chybu udělal a k vysvětlení její příčiny.

Zkušenosti, které žák takovou analýzou získá, přispívají nejen k odstranění opětovného chybování, ale také k hlubšímu zapamatování a porozumění poznatku.

Strach z chyb naopak vede žáky k útlumu ve výuce a k bloku. Chyba by měla naopak být pro žáka užitečnou zkušeností, díky které se poučí. Učitel by proto měl žáky podporovat v hledání chyb, k jejich analýze, nikoliv je za ně kárat a trestat. Sám by měl žákům ukázat, že i on sám se chyb může dopustit a jak se k nim postavit.

V Hejného metodě se žáci učí analyzovat chyby prostřednictvím diskusí, kde se učitel žáků ptá, zda s návrhem řešení úlohy souhlasí či nikoliv a z jakého důvodu. Takto žáci analyzují chyby nejen vlastní, ale i chyby spolužáků.

11. Přiměřené výzvy

Úspěch žáků ve vyučování pramení z přiměřených výzev, které žáci dokáží zvládnout. Takové výzvy v Hejného metodě představují úlohy, které jsou v učebnicích koncipovány tak, aby obsahovaly všechny úrovně obtížnosti. Úlohy jsou rozděleny do částí a) nejjednodušší – f) nejobtížnější. Ať už se tedy jedná o žáka slabšího či nadaného, každý si najde svoji přiměřenou výzvu a vždy nějaké úlohy vyřeší. U slabších žáků tak můžeme předcházet frustraci z neúspěchu a ti nejlepší žáci se naopak nebudou nudit.

Úloha učitele je přitom velice důležitá, jelikož on sám pozná, co které dítě potřebuje a podle toho úlohy ve třídě může rozdělovat. Dobrý učitel zároveň dokáže ocenit a pochválit i slabší žáky za jejich kreativní myšlenky, popřípadě i za špatně vyřešené příklady.

Prostřednictvím volby obtížnosti úloh nejen v učebnicích ale také v gradovaných testech samotných žáků je u nich rozvíjeno sebehodnocení. Sami odhadují své schopnosti a podle toho si volí přiměřeně obtížnou úlohu.

12. Podpora spolupráce

V Hejného metodě je důležité, aby mezi sebou žáci neměli vystavěné bariéry, které by jim bránily v přirozené komunikaci. Ta je rozvíjena různými formami práce ve třídě a jejich vzájemnou spoluprací. Žáci v hodinách pracují jednak samostatně, ale také ve dvojicích či ve skupinkách. Jelikož každému žákovi vyhovuje jiná forma práce, má každý v Hejného matematice možnost volby a může si vybrat, zda chce pracovat ve skupině či samostatně.

Nezbytné jsou diskuse, které jsou potřebné ať už při nabývání nového poznatku, tak při ověřování výsledků. Žáci si rádi sdělují své výsledky, které se učí vhodně formulovat a obhajovat. Společně je porovnávají, vyjadřují své názory, popřípadě objevují správná řešení. Během diskusí žáci neustále přemýšlí a zvažují nejruznější možnosti, inspirují se od spolužáků a budují si vlastní poznatky. Hejného metoda vychází z přesvědčení, že se žák nejlépe matematiku naučí od spolužáků, se kterými si rozumí. Ve výuce jsou proto vedeni ke vzájemné spolupráci, kdy si navzájem úlohy vysvětlují a pomáhají si. Učitel zároveň do jejich debat příliš nezasahuje, pouze je udržuje.

3.3 Pět zásad Hejného metody

Hejný a kol. (2007) uvádí tzv. 5 zásad vyučování Hejného metodou, ve kterých jsou ukryty všechny výše zmíněné základní principy (Praktická příručka pro učitele, 2014).

1. Hierarchie cílů

V koncepci Hejného metody převažují výchovné cíle nad poznatkovými, a to z toho důvodu, že kvalita společnosti je určena hodnotami mravními, nikoliv hodnotami znalostními.

Učitelé by měli podporovat autonomii dítěte a věřit, že pod správným vedením je žák schopný objevit poznatky sám. Důležité je také včasné a přiměřené hodnocení.

2. Klima výuky

Vzájemná důvěra žáků a učitele je pro novou koncepci výuky podstatná, jelikož nenavozuje strach z projevu a chyb. Přátelská atmosféra dává prostor pro myšlení žáků, diskusi a vzájemnou spolupráci. Učitel se s žáky raduje z jejich úspěchů, ale zároveň bez emocí pomáhá žákům analyzovat a poučit se z chyb, které jsou zde vítány.

Ukazatelem úspěšnosti v matematice není výkon, který je dán co nejkratší dobou žákova řešení, ale radost z poznání a objevování. Učitel neopravuje chyby žáků, ale vede je k tomu, aby je objevil žák sám. Jsou totiž pokládány za nástroj žákova poznání.

3. Přiměřené možnosti pro každého

Žáci, převážně při nástupu do školy, se velice liší ve svých dosavadních matematických znalostech a schopnostech. Učebnice jsou proto této různorodosti přizpůsobeny a nabízí úlohy, aby i podprůměrní žáci učivu porozuměli a zároveň, aby

se šikovnější žáci dále rozvíjeli.

Úloha učitele je zde velmi náročná. Aby výuka probíhala v souladu s touto zásadou, je potřeba individualizace, která zaručí, že žádný žák nebude frustrován z neúspěchu a zároveň se nikdo nebude nudit.

4. Poznatek získaný vlastní úvahou je kvalitnější než poznatek převzatý

Jestliže učitel své žáky vede k tomu, aby sami hledali řešení, místo předkládání přesných postupů, bude žákův poznatek daleko kvalitnější. Tento přístup ovšem vyžaduje trpělivost a čas učitele. Přestože se jedná o cestu zdlouhavou a výsledky přicházejí pomaleji, jsou trvalé.

Z této zásady pro učitele plyne, že žákům předává co nejméně informací, co nejméně vysvětluje a snaží se je k poznatkům navést tak, aby je získali vlastní cestou.

5. Komunikace

Ve vyučování Hejného metodou je podstatná komunikace mezi žáky, která se uskutečňuje pomocí diskusí. Jejich prostřednictvím si žáci sdělují názory, představy a nejrůznější podněty, které se podílí na utváření žákových poznatků. Učitelova role je při diskusích pouze organizační a moderátorská.

Učitel by tedy neměl do diskusí víc zasahovat a omezit komunikaci směřující od žáka k učiteli. Naopak by měl podporovat komunikaci žák – žák, žák – skupina, žák – třída.

3.4 Učebnice matematiky podle Hejného metody

Autory učebnic určené k výuce Hejného metodou jsou prof. RNDr. Milan Hejný, CSc., doc. RNDr. Darina Jirotková, Ph.D., PhDr. Jana Slezáková-Kratochvílová, Ph.D. Všichni autoři působí na Pedagogické fakultě Karlovy univerzity v Praze. Spolupracují na výzkumech týkajících se matematického vzdělávání žáků na 1. stupni ZŠ a jsou také autory nové koncepce vysokoškolské přípravy budoucích učitelů matematiky 1. stupně ZŠ. Spoluautorkami učebnic jsou PhDr. Eva Bomeroová a PhDr. Jitka Michnová, které svými úspěchy v praxi potvrdily úspěšnost nových učebnic.

Učebnice jsou zpracovány dle požadavků RVP ZV a byly ověřovány v rámci pilotního vyučování na školách v celé ČR (Autorský tým, 2015).

Učebnice pro 1. stupeň ZŠ vydává od roku 2004 nakladatelství Fraus. V současné

době probíhá ověřování nových učebnice vydaných vlastním nakladatelstvím společnosti H- mat, o.p.s. Nové verze učebnic mají být vydány roku 2018. Řada učebnic pro 2. stupeň ZŠ je tvořena sedmi díly A – G, přičemž díl G je rozšiřující a je určen pro víceletá gymnázia a matematické třídy. Doposud byly vydány pouze první tři díly a na dalších se stále pracuje. Učebnice pro střední školy a gymnázia jsou prozatím v dlouhodobém plánu. K učebnicím jsou k dispozici také pracovní sešity, příručky pro učitele a didaktické pomůcky (Učebnice a pomůcky, 2017).

Cílem učebnic je rozvoj žakových intelektuálních a osobnostních schopností. U žáků jsou rozvíjeny schopnosti pracovat s daty, zkoumat určité situace, volit vhodné způsoby řešení problémů, organizovat si svoji práci apod. Tyto schopnosti jsou rozvíjeny prostřednictvím matematických didaktických prostředí, které spolu s netradičními úlohami žáky nabádají k tvořivému a logickému myšlení (Vysvětlení nové koncepce matematiky, 2015).

Jedná se tedy o netradiční učebnice, které vycházejí z přirozených potřeb žáků objevovat a zkoumat. Jsou vytvořeny na základě poznatků z psychologie o kognitivním vývoji žáků a jejich obsah vychází z již zmiňované teorie generických modelů. Autoři učebnic zároveň upozorňují, že učebnice a jejich použití vyžaduje změnu edukačního stylu učitele (Hejný, 2014). Společnost H-mat o.p.s. na svých webových stránkách nedoporučuje využívat učebnice při nezměněném edukačním stylu, jelikož nepřináší očekávaný efekt (Učebnice a pomůcky, 2017).

4 Didaktická matematická prostředí

O pojmu didaktické matematické prostředí se hovoří mnoho let. Přesněji ho však definoval až roku 2001 Erich Wittmann. Vymezil jej požadavkem, aby úlohy daného prostředí umožňovaly žákům objevovat podstatné matematické pojmy a zákonitosti. Podle jeho myšlenek, tak prostředím rozumíme soubor navzájem propojených pojmů, situací, procesů a vztahů. Tento soubor umožňuje vytvořit úlohy, které rozšiřují vlastnosti daných prostředí (Hejný, 2014).

E. Wittmann (In Hejný, 2014) uvádí další vlastnosti jako odhalování hlubokých matematických myšlenek, silné motivační schopnosti, přiměřenost žákům mladším i starším a možnost nastavení obtížnosti.

Práce v didaktických matematických prostředí je jedním z pilířů Hejného metody. V učebnicích jsou proto matematické poznatky vloženy do těchto prostředí, která rozvíjí u žáků matematické a osobnostní schopnosti. Prostředí jsou tvořeny sériemi úloh, které na sebe navazují a mají stejný námět. Vyskytují se v nich různé matematické jevy, které se v jednotlivých prostředích opakují, rozšiřují a prohlubují (Málková, 2014).

Prostředí přispívají k neformálním poznatkům, jelikož žáci s matematickými jevy přichází do kontaktu v různých souvislostech a na různých úrovních obtížnosti, které si žák může zvolit. Individualizace umožňuje žákovi, aby k vlastnímu poznatku došel vlastní cestou (Matematika prof. Hejného, 2015). Pokud žák získá matematický poznatek prostřednictvím své činnosti a objevování, vytváří si k matematickým jevům příslušné hluboké matematické myšlenky, s kterými je jev pevně spojen. Ty jsou předpokladem pro jeho porozumění a neformálnost poznatku (Hejný, 2014).

Jelikož se prostředí neustále opakují, žáci je již dobře znají. Při práci v nich se cítí dobře, ztrácí strach z matematiky, mají větší jistotu a nejsou rozptylováni neznámými věcmi. Znamá prostředí také umožňují učitelům stručnou formulaci úloh, které nemusí být žákům více vysvětlovány.

Většina prostředí a jejich námětů je vytvořena tak, aby vycházely z žakových zkušeností či oblíbených činností a byly jim tedy důvěrně známé. Zároveň jejich náměty lákají a motivují žáky. Ti poté mají pocit, že si spíše hrají, než že se učí (Matematika prof. Hejného, 2015).

Kromě prostředí, která vychází z žákových zkušeností, která nazýváme jako „sémantická“, jsou v učebnicích i matematická „strukturální“ prostředí. Strukturální prostředí později dovedou žáky k matematické znalosti opřené o axiomatické definice (Málková, 2014).

V Hejného metodě se pracuje s více než 26 matematickými didaktickými prostředími. Ty můžeme rozdělit do dvou velkých skupin, přičemž je každé z nich tvořeno dvěma podskupinami. První velkou skupinu představují prostředí aritmetická, která se dělí na sémantická a strukturální. Do druhé skupiny patří geometrická prostředí, která se dělí na dvourozměrná a třírozměrná prostředí. Všechna prostředí se navzájem prolínají a propojují jednotlivé poznatky z různých oblastí. Například geometrická prostředí mohou vycházet z vlastních zkušeností žáků a aritmetická prostředí mohou být spojena s geometrií (Slezáková, Šubrtová, 2015).

4.1 Prostředí sémantická

Prostředí sémantická vycházejí z životních zkušeností dítěte a ve vzdělávání mají velký význam. V sémantických prostředích mají nesou čísla určitý význam. Postupem času se však představy čísel desémantizují. Mezi tyto prostředí patří například prostředí Krokování, Schody, Autobus, Děda Lesoň, Rodina (Slezáková, Šubrtová, 2015).

Krokování

Prostředí Krokování vychází ze zkušenosti dětí a je klíčové pro aritmetiku na 1. stupni ZŠ. Krokování využívá rytmický pohyb chůze, který představuje soulad slova a pohybu (říkanka, tleskání, dupání). Buduje u žáků hluboké porozumění přirozenému číslu, porozumění číslům vyjadřujících změnu polohy nebo porovnávání poloh, číselným operacím a práci se znaménky. Seznamuje žáky s pomíjivými čísly, která se objevují u úloh spojených s časem, například úlohy o věku nebo o společné práci. Buduje u žáků schéma číselné osy, představ o absolutní hodnotě čísla a porozumění zákonů komutativnosti a asociativnosti. Žáci se skrz prostředí Krokování také seznamují s lineárními rovnicemi, které řeší v jazyku šipek, skrz který žáci přecházejí k písemnému zaznamenávání procesu (Matematika prof. Hejného, 2015).

V prostředí Krokování se žáci pohybují na krokovacím páse. Ten je tvořen řadou značek, které jsou přilepené na zemi a mohou mít mnoho podob, např. ve tvaru kolečka, čtverečků. Vzdálenost mezi každými dvěma je určena vzdáleností žákova kroku. Značky

jsou stejné, pouze výchozí značka je odlišena, často barvou. Žáci se pomocí povelů pohybují po páse a učí se sčítat a odčítat. Počet kroků představuje číslo, které je operátorem změny. Zápis pohybu je zaznamenáván pomocí šipek vpravo (dopředu) a vlevo (dozadu) (Hejný, 2014).

Schody

Prostředí Schody je podobné, a stejně tak důležité, jako prostředí Krokování. U žáků rozvíjí, stejně jako prostředí Krokování, porozumění přirozenému číslu, zápornému číslu a operacím s čísly. Hlavním rozdílem práce v prostředí Schody je, že se žáci pohybují již na očíslovaném krokovacím pásu, který představuje číselnou osu. Žáci sice pracují v rovině, ale využívají bez potíží slov nahoru a dolů. Číslo už zde nevystupuje jen jako operátor změny, ale i jako adresa schodu. Obě prostředí se zavádí v 1. ročníku, schody až v druhém pololetí (Hejný, 2014).

Prostředí Krokování a Schody rozvíjí orientaci v prostoru (vpřed a vzad), budují u žáků představy o čísle jako operátoru změny, operátorové úlohy a o čísle jako adrese. Budují u žáků představy o absolutní hodnotě. Budují představu o záporném čísle (krokováním dozadu, -1 jako označení patra) a operacích s nimi, zejména mínus před závorkou (čelem vzad). Žáci řeší jednoduché lineární rovnice v jazyku šipek. Při zapojení hracích kostek získávají žáci zkušenosti s pravděpodobností a náhodou. Prostředí Krokování a Schody je propedeutikou číselné osy.

Autobus

Prostředí Autobus je pro žáky známe prostředí a ve školním vyučování představuje hru, která simuluje cestování hromadných dopravních prostředků na pravidelných linkách. Hra Bus umožňuje žákům osobní prožitek. Žáci mají vytvořený třídní autobus z lepenkové krabice a cestující mohou být hračky či zátky od PET láhví. Ve třídě se určí zastávky, které se označí a pojmenují, např. U Okna, U Umyvadla, U Skříně apod. Autobus vyjíždí z výchozí zastávky na konečnou a řídí ho řidič. Na každé zastávce mohou vystupovat či nastupovat „cestující“. Vystupování a nastupování řídí výpravčí, který je u každé zastávky a s „cestujícími“ manipuluje, přičemž nejdřív nechá „cestující“ vystoupit a pak nastoupit. Ovšem na první zastávce „cestující“ pouze nastupují a na konečné zastávce všichni „cestující“ vystupují. Z krabice tak může vytáhnout zátku, nebo ji popřípadě vložit. Potřeba je tento proces komentovat a říkat, kolik cestujících vystoupilo či nastoupilo. Při nastupování

a vystupování je důležitá důkladná názornost, kdy výpravčí každého cestujícího zřetelně ukáže zvednutou rukou a poté po je po jednom vkládá do autobusu a hlasitě počítá: *jeden cestující, druhý cestující, další cestující apod.*

Žáci při jízdě autobusu vidí celý proces jízdy, ale nevidí do krabice. Jejich úkolem je zapamatovat si, popřípadě nějak zaznamenat tento proces. Po konci jízdy se učitel žáků ptá na otázky, např. *Kolik cestujících došlo na konečnou zastávku? Kolik cestujících nastoupilo na které zastávce? Na které zastávce vystoupilo nejvíc/nejméně lidí? Kolik cestujících jelo ze zastávky A do zastávky B?* Při hře Autabus je potřeba pokládat časem stále těžší otázky. Těžší variantu může také představovat rozdělení „cestujících“ na muže a ženy (Hejný, 2014).

Žáci se nejprve snaží údaje zapamatovat, když však zjistí, že paměť nestačí, začnou si zaznamenávat poznámky na papír či mazací destičky. Údaje si mohou zapisovat čísla, popřípadě pomocí čárek. Po čase a kladení náročnějších otázek, žáci pocítí potřebu zápis vylepšit a postupně vzniká tabulka a později harmonogram. Ty obsahují všechny údaje o jízdě, nejprve základní, později specifické a rozšiřující. Žáci se tak učí pracovat s daty. Prostředí je vede k tomu, aby se v tabulkách vyznali, dokázali si vytvořit své vlastní a uměli s nimi zacházet. Žáci tedy začínají pracovat s tabulkou, do které si zaznamenávají celý děj. Úlohy mohou být zadávány prostřednictvím tabulky, nebo ústně s různými podmínkami. Žáci tedy vytvářejí své tabulky, nebo doplňují již vytvořené, přitom úlohy řeší dramatizací, nebo jejím prostřednictvím ověřují svá řešení. Tabulky se mohou zadávat i neúplné. Když už žáci umí vytvářet tabulky, mohou si také vytvořit její šablonu, která se zalaminuje a žáci ji tak mohou opakovaně používat (H-MAT, O.P.S., 2015).

Prostředí se zavádí již v 1. ročníku a táhne se až do 5. ročníku, přičemž jsou úlohy čím dál těžší. Práce v tomto prostředí rozvíjí schopnost porozumět číslům, která vyjadřují změnu stavu, orientovat se v souboru dat, které jsou tvořeny stavy, změnami nebo porovnáním (Vysvětlení nové koncepce matematiky, 2015). Prostředí rozvíjí matematickou představivost a logické myšlení, trénuje paměť. Posiluje krátkodobou paměť, žáci si procvičují aditivní operace, které se řetězí, vede žáky k objevování různých zákonitostí a různých strategií řešení, např. metoda řešení od konce.

Prostředí se zavádí prostřednictvím dramatizace, kterou nejprve předvede učitel tak, aby nemusel nic vysvětlovat. Později předává všechny role žákům, kteří vytvářejí vlastní úlohy.

Děda Lesoň

Matematické prostředí je zakomponováno do příběhu o dědovi Lesoňovi, který má spoustu zvířátek, o které se rád stará a pořádá pro ně hry. Nejoblíbenější hrou je přitom přetahovaná, kdy mezi sebou zvířátka soutěží a přetahují se v družstvech. Děda Lesoň se stará o myši, psy, kozy, husy, kočky, berany, krávy a koně (Slezáková, Šubrtová, 2015). Každé zvířátko má přitom svůj obrázek, ikonu, znak (písmeno) a hodnotu (sílu). Například $M = \text{Myš} = 1$, $K = \text{kočka} = 2$ apod.

Prostředí se zavádí ve 2. ročníku, a to bez číselných hodnot. Ty žáci po čase objeví sami. Hodnoty jsou zaváděny pomocí vztahů, které jsou zapsány pomocí ikon v tabulce (Hejný, 2014). Žáci řeší úlohy pomocí manipulace s kartičkami, na kterých jsou zapsány ikony zvířat (H-MAT, O.P.S., 2015). Nejprve jsou u Lesovně tři druhy zvířátek, ale postupně k němu přicházejí další.

Při práci s ikonami žáci vnímají číslo v jedné situaci nejen jako počet, ale také jako veličinu. Řeší modelové rovnice a připravuje se tak na porozumění složitějších rovnic. Postupně také žák odhaluje pravidla na ekvivalentní úpravu rovnic a soustav rovnic (Hejný, 2014). Struktura pro práci s rovnicemi a soustavami rovnic je budována prostřednictvím myšlenkových pochodů, které u žáků proběhnou, než se žák rozhodne doplnit, odebrat či nahradit určitou ikonu. Žáci tak běžně využívají základní ekvivalentní úpravy rovnic, např. když vyměňují obě strany rovnic, když odečítají stejné číslo (ikonu), od obou stran rovnic, když vynásobí obě strany rovnice stejným číslem různý od 0, nebo když upravují výrazy na jednotlivých stranách rovnice (př. Vyměnit psa za dvě kočky a nic se nestane.).

V prostředí mohou žáci zjišťovat, které družstvo je silnější, přidávat k slabšímu družstvu zvířátko, tak aby byly obě družstva stejně silná, nebo které musí naopak odejít. Úlohy jsou také zaměřeny na vytváření družstev z předem určeného souboru zvířátek, při kterých mohou žáci hledat různé způsoby řešení. Další aktivitou může být hra na kapitána, kdy žáci určí dva kapitány, kteří si ze zvířátek vybírají zvířátka do svého družstva. Úkolem žáků je pak určit, kterému kapitánovi se povedlo vytvořit silnější družstvo. Žáci mohou v prostředí Děda Lesoň pracovat i tak, že mají vytvořená dvě silná družstva, přičemž jsou některá zvířátka zamaskována a za maskami se v jedné úloze skrývají stejná zvířátka. Úkolem žáků je najít zvířátka, která se skrývají za maskou. Nejprve se jedná o jednu masku, později přibývají další.

Žáci zpočátku využívají metodu pokus – omyl a experimentování je nahodilé. Postupem času se zdokonaluje a žáci experimentují systematicky a promyšleně. Žáci také získají vhled do rovnic a jejich řešitelský proces se urychlí a zdokonalí. K číslům a neznámým se žáci dostávají postupně a jedná se o proces zdlouhavý. Někteří žáci si začnou přepočítávat zvířátka na myši ($M=1$). Někteří začnou používat rovnou čísla a postupně začnou místo masek používat x a seznámí se s pojmem neznámá.

Rodina

Prostředí Rodina je důvěrně známé pro každého žáka. Jelikož však může být pro některé žáky citlivým tématem, je potřeba, aby k němu učitel takto i přistupovat a znal rodinné zázemí každého žáka. K těmto potřebám jsou v učebnicích vytvořeny fiktivní rodiny, se kterými žáci pracují.

Prostředí se zavádí ve 2. ročníku a rozvíjí u žáků jednak početní dovednosti prostřednictvím věku osob v rodokmenu, ale také prohlubuje porozumění vztahům a událostem v rodině (svatba, narození). Všechny aktivity mají propedeutický charakter, který žáky připravuje na jazyk množin, relací a zobrazení (Hejný, 2014).

Biland

S prostředím Biland se žáci seznamují prostřednictvím pohádky, která je zavede do světa dvojkové soustavy, jenž je jazykem počítačů. S prostředím se žáci seznamují již ve 2. ročníku. V Bilandu představují groše mocniny čísla 2 a každý groš je tedy dvojnásobkem groše předchozího, tedy $A_g = 1$, $B_g = 2$, $C_g = 4$, $D_g = 8$ apod.

V úlohách mohou žáci vyjádřit každé přirozené číslo tak, že každý groš použijí nejvýše jednou. Ve dvojkové soustavě pak číslo píše tak, že na místě jednotek je počet Agrošů, na místě desítek počet Bgrošů (dvojek), na místě stovek Cgrošů (čtyřek) apod. (Málková, 2014).

Cyklotrasy – autobusové linky

Jedná se o prostředí, ve kterém dochází k propojování aritmetické a geometrické situace. Zavádí se v 1. ročníku. Úlohy znázorňují plánec, který zobrazuje trasu. Žáci vyhledávají trasu podle pokynů, ukazují si ji nebo zapisují do učebnic. Práce s plány žáky vede k systematickému prohledávání všech možností a k odhalování nových vztahů vyvozených z již známých (Málková, 2014).

4.2 Prostředí strukturální

Strukturální prostředí jsou aritmetická prostředí, která nejsou spojena s životními zkušenostmi dětí. Patří zde prostředí Součtové trojúhelníky, Hadí, Pavučiny, Sousedé, Stovková tabulka, Výstaviště, Násobilkové čtverce apod. (Slezáková, Šubrtová, 2015).

Algebrogramy

Prostředí Algebrogramy je pro žáky 1. stupně jedno z nejnáročnějších prostředí, a proto se zavádí až ve 3. ročníku. Žáci v něm pracují s písmeny, ve kterých jsou zašifrované číslice. Algebrogramy představují zápis písmen a číslic např. ve tvaru $AB + B = 42$. V zápise se za stejnými písmeny skrývá stejná číslice a za různými písmeny různé číslice. Žáci při řešení algebrogramů hledají zašifrované číslice a všechna možná řešení, kterých může být u některých algebrogramů více.

Práce v tomto prostředí u žáků rozvíjí kombinatorické myšlení, argumentační myšlení a dává žákům vhled do desítkové soustavy (Hejný, 2014).

Násobilkové obdélníky

Násobilkové obdélníky jsou pro žáky grafickým prostředím, ve kterém si žáci procvičují nejen násobilku, ale také postupně odhalují vztahy mezi čtyřmi základními operacemi a závislostmi.

Prostředí se zavádí ve 2. ročníku. Žáci pracují se čtverci, které mají čtyři rohová čísla, čtyři středová čísla, která jsou součinem rohových a tzv. „deváté číslo“, které se do tabulky nepíše a je součtem čtyř středových čísel. Označuje se písmenem S. V učebnicích se tyto tabulky vyskytují v různých podobách, které odkrývají různá rohová čísla, některá středová čísla nebo číslo S.

Součtové trojúhelníky

Prostředí Součtové trojúhelníky je známé a můžeme se s ním setkat v mnoha učebnicích matematiky. Jedná se o trojúhelníky složené z několika řádů. S tímto prostředím se žáci setkávají již v 1. ročníku. Podoba součtových trojúhelníků je však přizpůsobena schopnostem žáků, kteří ještě neumí psát číslice. Počty, které vyjadřují obrázky, tak zaznamenávají pomocí čárek nebo teček. Postupem času žáci pracují se složitějšími úlohami,

trojúhelníky se rozšiřují a zadání úloh si kladou čím dál náročnější podmínky (H-MAT, O.P.S., 2015). Prostřednictvím tohoto prostředí žák poznává širší soubor aritmetických vztahů, vede žáky k odhalení závislostí, rozvíjí u žáků schopnost řešit soustavu dvou rovnic pomocí metody pokus – omyl. Také rozvíjí zkušenosti se zápornými čísly a se zlomky (Hejný, 2014).

Hadi

V tomto prostředí jsou „Hadi“ úlohy, které jsou zaměřené na procvičování matematických operací sčítání, odčítání, násobení a dělení. Prostředí se zavádí v 1. ročníku a žáci v něm pracují s čísly, která zde vystupují buď jako stavy a jsou umístěna v bílých kruzích, nebo jako operátory, kteří jsou umístěny ve žlutých čtvercích nad šipkami určující směr.

Žáci při práci v prostředí poznávají vazby souborů čísel, rozvíjí schopnosti řešit soustavu dvou rovnic metodou pokus – omyl. Jestliže žáci v prostředí Hadi počítají s kroky, pracují s pomíjivými čísly. Žáci se také připravují na úlohy o věku a další náročné úlohy vyžadující práci s časem. (Málková, 2014).

Cílem prostředí Hadi je provádění jednoduchých početních operací s přirozenými čísly z paměti. Dále také prohlubování žakových vhladů do číselných vztahů, práce se zadanými podmínkami. Dále to jsou cíle jako řešení jednoduchých rovnic v různých prostředích, převádění úloh z různých prostředí do matematického jazyka a naopak. Prostředí se zavádí tak, že se žákům ukáže vyřešený příklad a pokládají se žákům otázky. Pozornost je ze začátku směřována také na šipky, které mají dva směry a je třeba je s žáky rozebrat a mluvit o nich (H-MAT, O.P.S., 2016).

Pavučiny

Prostředí Pavučiny je tvořeno propletenými „vlákny“ s barevnými šipkami. Zavádí se v 1. ročníku. Šipky se stejnými barvami mají stejnou hodnotu a šipky různých barev mají různou hodnotu. Žáci nejenže procvičují aditivní operace, které se řetězí, dále také žáci odhalují vazby mezi šipkami, které jim pomohou k vyřešení úlohy (Málková, 2014).

V tomto prostředí žáci získávají zkušenosti s rovnicemi, rozvíjí se u nich logické myšlení, prostředí je vede k porozumění obtížnějším pojmům aritmetiky, jako jsou aritmetická posloupnost a aritmetická řada. Jedná se o propedeutiku lineárních rovnic (H-MAT, O.P.S., 2015).

Neposedové

Neposedové je prostředí, ve kterém jsou úlohy s narušenou číselnou strukturou. Prostředí se zavádí v 1. ročníku a úkolem žáků v něm je vrátit „Neposedy“ na svá místa. Úlohy řeší metodou pokus – omyl, kdy zkoušejí dosazovat čísla a následně prověřují správnost. Prostředí u žáků rozvíjí schopnost rekonstruovat takto narušenou číselnou strukturu, která se nejprve objevuje v prostředí součtových trojúhelníků, poté také v prostředí hadi či v prostředí běžných číselných vztahů (Málková, 2014).

Barevné trojice

Barevné trojice je prostředí, ve kterém hraje barva důležitou roli a zavádí se již v 1. ročníku. Při řešení úloh žáci musí vytvořit trojice ze sady čísel, přičemž každý musí mít jednu ze tří barev a musí odpovídat určené podmínce, např. součet čísel bude 6.

Žáci si pomocí úloh opakují početní operaci sčítání, rozvíjí logické myšlení, rozvíjí řešitelské strategie aritmetických úloh, které jsou obohacené o parametr barvy (Málková, 2014).

Bludiště

S „bludišti“ se žáci setkávají již v 1. ročníku a při jejich řešení hledají správnou cestu ven pomocí metody pokus – omyl, čímž se u žáků rozvíjí meta-kognitivní schopnost žáků tuto metodu účelně používat. Rozvíjí také schopnost rozhodovat se (Málková, 2014).

Sousedé

Prostředí Sousedé představuje obdélník, který je rozdělen do několika polí. Některá z nich jsou vyplněná a některá prázdná. Žáci tak podle zadání, která stanovují podmínky, doplňují čísla. S prostředím se žáci setkávají v 1. ročníku a dává jim vhled do základní vazby aritmetiky vztahu mezi sčítáním, součtem, odčítáním a rozdílem (Hejný, 2014).

Vývojové diagramy

S vývojovým diagramem se žáci seznamují ve 3. ročníku. Jedná se o grafický záznam procesu, který žáky vede k porozumění práce počítačů. Žáci následují grafický zápis a postupují podle jeho pokynů. Zápis začíná polem *začni* a končí polem *konec* (Málková, 2014).

Šipkové diagramy

Šipkové grafy jsou graficky ztvárněné rovnice, v nichž se žák orientuje pomocí šipek, které ho vedou k nalezení neznámého čísla experimentováním. Prostředí se zavádí ve 3. ročníku a vede žáky k objevu lineárních výrazů $ax + b$, k řešení lineárních rovnic a rozvíjí schopnost systematicky evidovat výsledky formou tabulek (Hejný, 2014).

Indické násobení

Indické násobení můžeme pokládat za pozměněné klasické písemné násobení, které se zavádí ve 3. ročníku. Žáci při něm však nepoužívají známý algoritmus, ale využívají tabulky, které si snadno mohou načrtnout na papír. Sloupečky vytvoří podle počtu cifer jednoho činitele a řádky podle počtu cifer druhého činitele. Každé okénko tabulky se přitom rozdělí úhlopříčkou na dva trojúhelníky. Do každého okénka se poté píše součin dvou cifer, které náleží do příslušného sloupce a řádku. Pokud vyjde součin menší jak deset, výsledek se píše do spodního trojúhelníku, pokud větší nebo roven deseti, napíší se jednotky do spodního trojúhelníku a desítky do horního. Na závěr se sečtou všechna výsledná čísla zprava doleva podél uhlopříček, přičemž jednotky zapisujeme a desítky “přenášíme“ (Málková, 2014).

Výstaviště

Prostředí Výstaviště obsahuje úlohy, ve kterých žák hledá cestu výstavištěm neboli polyminem, který má nejčastěji tvar pravoúhelníku. Polymino se skládá z jednotkových čtverců, které představují místnosti výstaviště. Ty jsou očíslovány od 1 do n , přitom místnosti, které jsou od sebe o 1 místo, jsou nazývány sousední a mají společnou stranu. Cesta výstavištěm je čára, která jím prochází od místnosti 1 k místnosti n v pořadí 1, 2, 3, n .

V úlohách jsou však některá čísla místností vymazaná a úkolem žáků je daná čísla doplnit. Žák přitom musí chodit jen vodorovně a svisle, přičemž do místnosti může vstoupit jen jednou.

S prostředím se žáci seznamují již v 1. ročníku a práce v něm u žáka rozvíjí orientace v prostředí, které propojuje geometrii a číselnou řadu. U žáka se také rozvíjí schopnost vzájemně propojovat různé řešitelské strategie (Málková, 2014).

Myslím si číslo

Prostředí „Myslím si číslo“ se zavádí v 1. ročníku a je založené na mentálních výpočtech, kdy žák počítané předměty nebo čísla nevidí. Žák, kterému dělají mentální výpočty problém, si může zaznamenat čísla nebo obrázek na papír. Úlohy spočívají v početních úkonech, které musí žák udělat, aby odhalit neznámé číslo. Nejprve se začíná s lehkými úlohami, jejichž obtížnost se postupně zvyšuje. Žák tak nejprve pracuje s celými čísly, poté se objevují i poloviny, zlomky či rovnice.

Prostředí „Myslím si číslo“ rozvíjí krátkodobou paměť a schopnost pracovat s číselnými vztahy pouze v paměti (H-MAT, O.P.S., 2015).

Stovková tabulka

Stovková tabulka je prostředí, které se do výuky zavádí ve 3. ročníku. V učebnicích Fraus se pracuje se dvěma tabulkami, z nichž jedna začíná číslem 0 a končí číslem 99, druhá začíná číslem 1 a končí číslem 100. Žáci se s tabulkou nejprve seznamují a zkoumají její strukturu a posloupnost. Poté žáci hledají cesty v tabulce, které jsou vyznačeny šipkami. Určují součty čísel cesty, doplňují čísla do cesty, rozhodují o správnosti či nesprávnosti tvrzení o cestách nebo do nich vnášejí útvary, s kterými dále pracují (H-MAT, O.P.S., 2015).

Stovková tabulka, neboli tabulka N je také nástrojem k výuce násobilky. Žáci se násobilku a vazby učí jejím častým používáním. Žáci si tak neučí násobilku nazpaměť. Prostřednictvím tabulky žáci vidí násobení jako obsah obdélníka nebo čtverce, vidí komutativitu násobení a setkávají se s jevem symetrie. Tabulka N žáky připravuje na práci se souřadnicemi. Tabulku žáci mohou využívat podle potřeb, přičemž se s ní a násobilkou setkávají v různých prostředích a v různých typech úloh.

Kombinatorika – pravděpodobnost a statistika

Úlohy, při nichž žáci hledají různé možnosti řešení, vede žáky k systematické práci. Již v 1. ročníku mohou žáci využít své zkušenosti z nakupování a hledat způsoby, jak např. zaplatit čokoládu, která stojí 24 Kč, když má žák v peněžence pětikorunu a dvoukorunu. Příklady podobných typů žáci řeší pomocí tabulky, kterou si vytvoří a doplní.

Ve vyšších ročnících můžeme nechat žáky tipovat o výsledcích. Takové úlohy mohou představovat házení kostkami nebo mincí. Taktéž si žáci mohou vytvářet poznámky a zkoumat, například která strana mince padne vícekrát. Házení mincí nebo kostkou slouží jako manipulativní příprava na témata pravděpodobnost a statistika, s kterými se žáci setkají ve vyšších ročnících. Prostřednictvím těchto činností žáci získávají zkušenosti s náhodnými jevy, rozvíjí schopnost porozumění zákonitostem v oblasti pravděpodobnosti a získávají zkušenosti s prací se statistickými údaji. Práci s mincemi žák také získává zkušenosti s rozdílem mezi počtem a hodnotou (H-MAT, O.P.S., 2015).

4.3 Prostředí geometrická 2D

Prostředí se týká rovinné geometrie a je založeno na manipulativní činnosti. Patří zde prostředí Geoboard a mříž, Origami, Dřívka a Parkety. Pro žáky jsou to prostředí, která jsou pro ně přirozená, jelikož navazují na jejich zkušenosti s nejrůznějšími stavebnicemi. Práce v těchto prostředích rozvíjí u žáků jemnou motoriku a představy o rovinných útvarech. (Slezáková, Šubrtová, 2015).

Geoboard a mříž

Geoboard je deska s několika kolíky, které jsou rozmístěny do čtverce různých velikostí. S deskou žáci pracují již od 2. ročníku. Žáci natahují na kolíky barevné gumičky a vytvářejí různé obrazce podle určených podmínek. Žák získává zkušenosti s geometrickými útvary, jejich vlastnostmi a vztahy mezi nimi. Práce s geoboardem je doprovázena diskusí, kdy žáci argumentují a prezentují své závěry.

Ve 3. třídě se od geoboardu přechází k čtvercové mříži, kde kolíky zastupují mřížové body a obrazce jsou zde tzv. mřížové trojúhelníky apod. Ty žáci postupem času zapisují pomocí šipek, které znají z krokování (H-MAT, O.P.S., 2015). Žáci nevytvářejí jen obrazce, ale hledají i nejrůznější cesty podle pokynů. Jazyk šipek připravuje žáky na porozumění

souřadnicové soustavě (Málková, 2014).

Prostřednictvím Geobordu se žáci seznamují s geometrickými útvary, jejich prvky a vlastnostmi. Seznamují se s obvody a obsahu geometrických útvarů, s osovou a středovou souměrností, se shodností mnohoúhelníků či se zlomky. Prostředí Geoboardu je propedeutikou čtvercové mříže.

Aktivita v prostředí Geoboardu mohou mít podobu hádání obrázků, kopírování z obrázků nebo z jednoho geoboardu na druhý, kopírování z geoboardu na čtverečkovaný papír nebo kopírování ze čtverečkovaného papíru na geoboard.

Význam čtverečkovaného papíru je důležitý, neboť jeho zavedení do geometrie dává žákům příležitost k jednoduchému a názornému experimentování. Zároveň také umožňuje modelovat téměř všechny matematické pojmy na 1. stupni ZŠ. Čtverečkovaný papír propojuje geometrii s procesuální aritmetikou. Žáci se s čtverečkovaným papírem (mříží) setkávají již v 1. ročníku prostřednictvím osových souměrností.

Dřívka

V prostředí Dřívky jsou úlohy zaměřené na manipulativní činnosti, při které žák poznává rovinnou geometrii. Prostředí se zavádí v 1. ročníku. V hodinách mohou být využívány špejle, pastelky, tužky, zápalky nebo jiná, stejně dlouhá dřívka. Žáci tvoří a přeměňují tvary podle zadaných podmínek.

Prostřednictvím činnosti s dřívky žáci získávají první zkušenosti s obsahem, obvodem, jednoduchými zlomky a posloupnostmi, dále pak rozvíjejí logické myšlení (Málková, 2014).

Parkety

Prostředí Parkety se zavádí v 1. ročníku a žáci v něm pracují se čtverečkovou podložkou a vystříhanými parketami. Žák podle zadání úlohy na podložku překreslí tabulku a zvolí si vhodné parkety, které na podložku pokládá, popřípadě je zakresluje do učebnice. Všechny parkety mají v učebnicích svá jména, s nimi se však seznamují až ve 2. ročníku.

V prostředí žáci získávají zkušenosti s analýzou a syntézou skupiny rovinných tvarů, které mohou být obohaceny o číselné údaje (Málková, 2014). Žáci se v tomto prostředí

seznamují s překlápěním, otáčením, souměrností, shodností či s obsahem útvarů. Prostředí Parkety dává žákům velké zkušenosti, které později využijí při další práci v geometrii. Při práci v prostředí Parkety žáci například hledají jedno řešení, více řešení, všechna řešení a dokazují, zda jsou všechna.

Papírové tvary (origami)

Skládání a stříhání papíru je pro žáky přirozenou činností, která je velice baví a můžeme ji využít i v jiných předmětech, jako je výtvarná výchova nebo pracovní činnosti. Prostředí je v učebnicích zaváděno v 1. ročníku. Žáci nejprve začínají skládat jednoduché tvary dle obrázků či pokynů učitele. Vzniklé útvary následně porovnávají a hledají podobnosti.

Žáci nejenže rozvíjí jemnou motoriku, ale činnosti v tomto prostředí je přirozeným způsobem seznamují s pojmy osová souměrnost, úhlopříčka, polovina, čtvrtina, střed apod. (Málková, 2014).

4.4 Prostředí geometrická 3D

Prostředí se týká prostorové geometrie a je žákům blízké. Mohou zde uplatnit zkušenosti, které mají již z útlého věku, kdy si stavěli z kostek. (Slezáková, Šubrtová, 2015).

Krychlové stavby

Prostředí navazuje na zkušenosti žáků s kostkami, které znají z dětství. Žáci se prostřednictvím manipulativní činnosti seznamují s vlastnostmi krychlí a zjišťují, které objekty se z nich dají stavět. Žáci sledují vlastnosti jako počet krychlí, počet podlaží, počet krychlí v jednotlivých podlažích, barevnost, strukturu stavby apod. Při stavění musí žáci přikládat stěnu krychle přesně na stěnu krychle tak, aby se krychle dotýkaly celými stěnami (Málková, 2014).

Prostředí se zavádí v 1. ročníku. Žáci si nejprve s krychlemi hrají, staví krychlové stavby, popř. přetvářejí stavby podle pokynů a hovoří o nich. Nejdříve žáci o objektu zjišťují co nejvíc informací a manipulativní činností jej poznávají. Diskutují o objektu se spolužáky a snaží se daný pojem vymezit. Postupem času žáci své vymezení upřesňují a s pomocí učitele dojdou k formulaci dobré definice. Činnost v tomto prostředí zahrnuje i popisování

stavby a celého procesu stavění, a to různými způsoby. Žáci činnostmi v tomto prostředí poznávají prostorovou geometrii a zároveň se u nich rozvíjí schopnost překládat z jednoho jazyka zápisů do druhého. U žáků se rozvíjí prostorová představivost (Vysvětlení nové koncepce, 2015).

V Hejného metodě nalezneme i prostředí, která nelze přímo zařadit do jedné z výše uvedených skupin, jelikož jsou průřezová. Za taková prostředí považujeme například prostředí Zlomky, Slovní úlohy, Míra 2D a 3D geometrie, Osová souměrnost nebo hra Sova. (Slezáková, Šubrtová, 2015).

Slovní úlohy

Slovní úlohy se v učebnicích vyskytují od 1. ročníku a představují úlohy běžného života, pro jejichž vyřešení žáci potřebují porozumět jazyku. Zápis tedy musí být žákům přiměřený, přičemž se matematická náročnost postupně zvyšuje a do popředí se časem dostává matematický jazyk (H-MAT, O.P.S., 2015).

Slovní úlohy rozvíjí u žáků schopnost pochopit slovní popis situace pomocí dramatizace, manipulace, obrázkem, grafem, tabulkou nebo souborem číselných vztahů. Žák se seznamuje s úlohami, které mají větší počet řešení a rozvíjí u nich schopnost podílet se na tvorbě slovních úloh. Žáci dále poznávají úlohy s parametrem a antisignálem (Vysvětlení nové koncepce, 2015).

Zlomky a ciferník

Zlomky se v Hejného metodě zavádějí již v 1. ročníku. Do konce 3. ročníku je však žáci nepojmenovávají ani nezapisují, jelikož je učivo nejprve zaměřeno na porozumění. Žáci nejprve pracují s polovinou, kdy rozdělují a půlí proužek papíru nebo hledají jeho střed, čímž propojují aritmetiku s geometrií. Dále rozdělují zvířátka do družstev nebo pracují se zlomky v souvislosti s hodinami či kalendářními měsíci. K vyznačení zlomků žáci využívají tyč, podle které mohou měřit a ověřovat výpočty. Ve 4. ročníku už se zlomky zapisují čísly a žáci nejprve pracují se zlomky kmenovými a učí se rozkládat zlomek na součet kmenových zlomků. Při sčítání a odčítání zlomků je velkým pomocníkem model čokolády. V 5. ročníku se pro sčítání zlomků používá i ciferník. Další pomůckou je číselná osa, pomocí které žáci propojují zlomky s desetinnými čísly.

Přestože se ciferník primárně využívá k určování času, můžeme jej využít i k jiným

činností v matematice. Kromě pomůcky při sčítání zlomků, jej můžeme využít i v geometrii. Jelikož jsou jeho čísla pravidelně rozmístěna, žáci na něm mohou konstruovat různé obrazce, podobně jako na geoboardu. Později žáci počítají v ciferníkové aritmetice, která obsahuje čísla 1 – 12, ověřují správnost rovnosti, doplňují čísla do příkladů. Další činností, kterou lze pomocí ciferníku dělat je zkoumání úhlů (H-MAT, O.P.S., 2015).

Míra 2D a 3D geometrie – Oblékání krychle

Prostředí Oblékání krychle využívá životní zkušenosti žáků a je zaváděno ve 2. ročníku. Žáci pomocí manipulativní činnosti poznávají síť krychle a propojují 2D a 3D geometrii. Činnosti jsou nejprve zaměřeny na přilepování čtverců na krychli a jejich slepování. Žáci tak poznávají, že se čtverec může stát stěnou krychle a že pro ni lze vyrobit „střih“. Postupem času dochází k poznání, že střih se může vytvořit tak, aby zůstal vcelku a naleznout tak síť krychle. „Paní Krychle“, kterou žáci zprvu oblékali, je časem nahrazena pojmem krychle a do popředí se dostává matematický jazyk (H-MAT, O.P.S., 2015).

Hra Sova

Hra Sova se může hrát jak v prostředí aritmetickém, tak geometrickém. V učebnicích se tyto úlohy objevují ve 2. ročníku. Hra je založena na odpovědích ano – ne. Jeden hráč je „sova“ a myslí na některý předmět ve třídě, tvar, číslo apod. Úkolem žáků je zjistit, o jaký předmět se jedná a pokládají „sově“ otázky. Ta může odpovídat pouze ano – ne. Žáci se zároveň nemůžou ptát přímo na konkrétní předmět, ale musí se ptát na jeho vlastnosti. Žák, který splete odpověď, vypadává ze hry. Žák, který naopak uhodne, stane se „sovou“ (Málková, 2014).

Při hře se propojuje oblast logického a kauzálního myšlení a oblasti, ze kterých je daný objekt vybrán, např. rovinné či prostorové geometrie, objekty běžného života (Vysvětlení nové koncepce, 2015).

PRAKTICKÁ ČÁST

Praktická část této diplomové práce je rozdělena na dvě části. První část je zaměřena na výzkumné šetření, které bylo realizováno prostřednictvím dotazníkového šetření. Dotazníkové šetření zkoumá postoj studentů 4. a 5. ročníku oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ k matematice prof. Hejného.

Druhá část diplomové práci je věnována ukázkovým hodinám matematiky prof. Hejného na 1. stupni ZŠ. Hodiny byly realizovány na ZŠ Horka nad Moravou ve třídách 1., 3. a 4. ročníku. Soubor vyučovacích hodin byl získán pomocí pozorování v jednotlivých třídách. Cílem souboru hodin bylo přiblížit a popsat práci žáků v didaktických matematických prostředích, práci s jednotlivými úlohami v učebnicích, dále také přiblížit interakci mezi učitelem a žáky a žáky navzájem v hodinách matematiky prof. Hejného.

5 Dotazníkové šetření

5.1 Cíle výzkumného šetření

Hlavním cílem výzkumného šetření bylo zjistit postoj studentů 4. a 5. ročníků oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ v prezenční i kombinované formě k výuce matematiky prof. Hejného.

Díličními cíli výzkumného šetření bylo zjistit:

- zda jsou studenti dostatečně informováni o matematice prof. Hejného,
- zda jsou studenti připraveni vyučovat matematiku prof. Hejného,
- zda by studenti chtěli vyučovat matematiku prof. Hejného v rámci jejich budoucí pedagogické praxe.

5.2 Metody výzkumného šetření

V této diplomové práci byla pro sběr dat zvolena metoda dotazníkového šetření. Dotazník (příloha č. 1) byl vytvořen v dokumentu Microsoft Word a byl zprostředkován studentům v tištěné podobě. Vyplňovali jej v hodinách didaktiky matematiky a v pedagogickém semináři.

Dotazník byl anonymní a byl složen z 13 otázek, přičemž většina z nich byla uzavřeného typu, jedna otázka byla otevřeného typu a závěr dotazníku obsahoval škálované položky. Druhá část dotazníku byla rozdělena do tří oblastí, které směřovaly k dílčím cílům výzkumného šetření.

První část položek dotazníku byla zaměřena na faktografické údaje, které zjišťovaly pohlaví, formu studia a ročník studentů. Jedna otevřená otázka *Co si představujete pod pojmem konstruktivistická výuka matematiky?* směřovala k zjištění, jaké povědomí mají studenti o konstruktivistické výuce matematiky, jelikož se jedná o podstatu koncepce výuky matematiky prof. Hejného. Další položky dotazníku zjišťují, do jaké míry jsou studenti informováni o matematice prof. Hejného a co vše o ní ví. Dále zjišťuje připravenost studentů vyučovat matematiku prof. Hejného a jejich názor a postoj k této koncepci. Poslední část položek je tvořena škálovanými položkami, jejichž cílem je zpětně zhodnotit odpovědi studentů a jejich znalost této problematiky.

5.3 Výzkumný vzorek

Dotazníkové šetření bylo zaměřeno na studenty oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ Univerzity Palackého v Olomouci. Dotazník byl zprostředkován v tištěné podobě studentům 4. a 5. ročníku ve formě jak prezenční tak kombinované v rámci výuky na VŠ. Jako výzkumný vzorek jsme zvolili studenty 4. a 5. ročníku jednak z toho důvodu, že mají za sebou předmět didaktiku matematiky, ale také proto že už mají zkušenosti z praxí, na kterých měli možnost matematiku na 1. stupni ZŠ sami vyučovat.

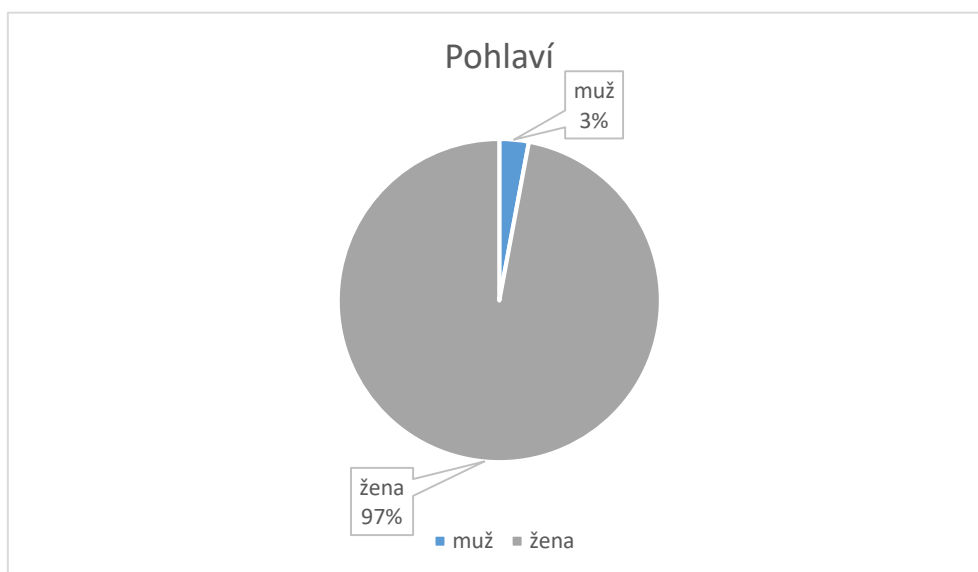
5.4 Vyhodnocení dotazníků

Dotazníky byly studentům 4. ročníku prezenční i kombinované formy a studentům 5. ročníku prezenční formy studia zprostředkovány ve výuce na VŠ a vyplnili je všichni, kteří se výuky zúčastnili. Návratnost je tedy 100 %. Studentům 5. ročníku kombinované formy studia byly dotazníky zprostředkovány prostřednictvím emailů. Z 20 dotazovaných je vyplnilo 12 studentů. Návratnost tedy činí 60 %.

5.4.1 Vyhodnocení faktografických údajů

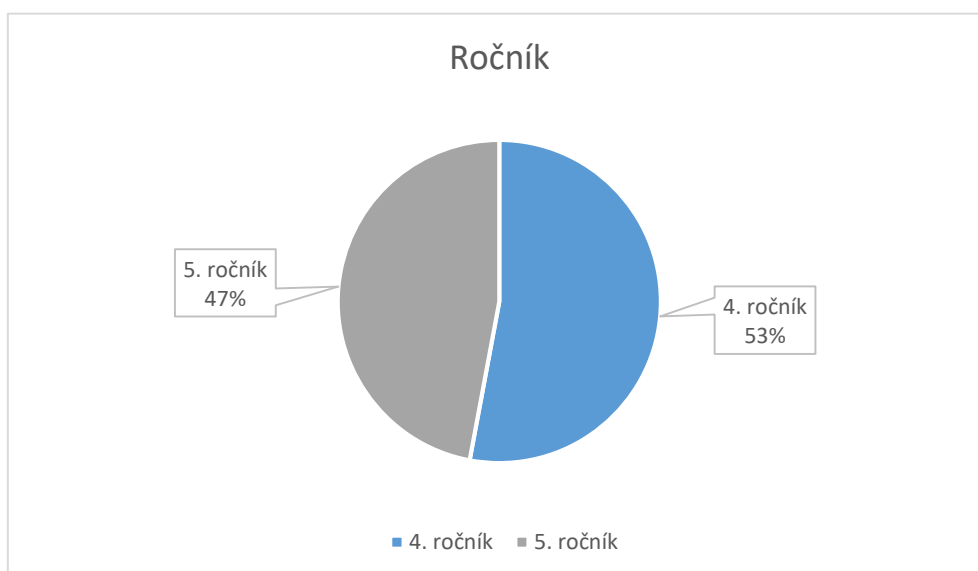
Faktografické údaje zaměřené na pohlaví, ročník a formu studia respondentů (viz položky č. 1 až č. 3) jsme zjišťovali z důvodu, zda by některé z nich mohly mít u respondentů vliv při výběru dalších položek dotazníku. Vyhodnocení faktografických údajů je zachyceno na grafech č. 1 až č. 3. Graf je vždy doplněn příslušným komentářem.

Graf č. 1: Genderové složení respondentů



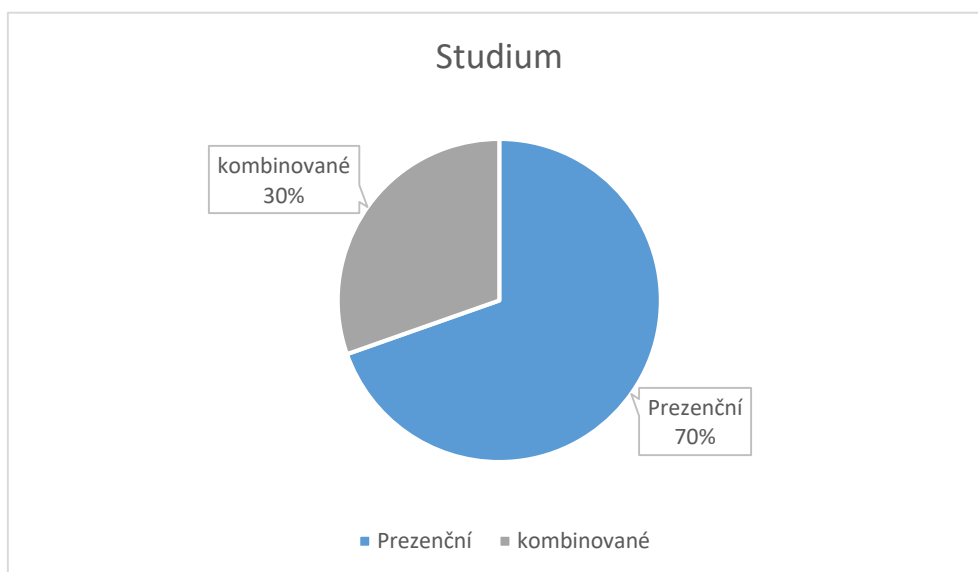
Dotazník vyplnilo 102 studentů, z toho 99 žen (97 %) a 3 muži (3 %). Všichni studenti studují obor Učitelství pro 1. stupeň ZŠ. Nízké zastoupení mužů v dotazníkovém průzkumu je očekávané, a to vzhledem k celkově nízkému počtu studujících mužů oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ. Průzkumu se tedy převážně účastnily ženy.

Graf č. 2: Zastoupení respondentů v jednotlivých ročnících

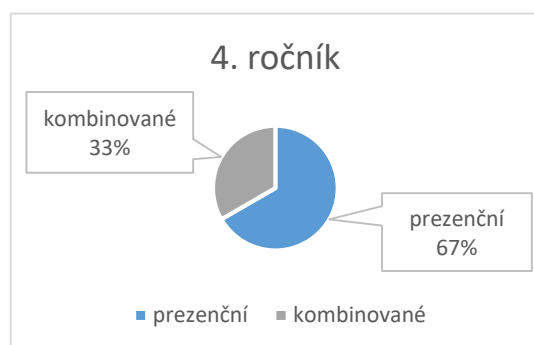


Graf č. 2 nám uvádí, že z celkového počtu respondentů dotazník vyplnilo 48 studentů 5. ročníku (42 %) a 54 studentů 4. ročníku (58 %). Z grafu vyplývá, že zastoupení obou ročníků je poměrně vyrovnané.

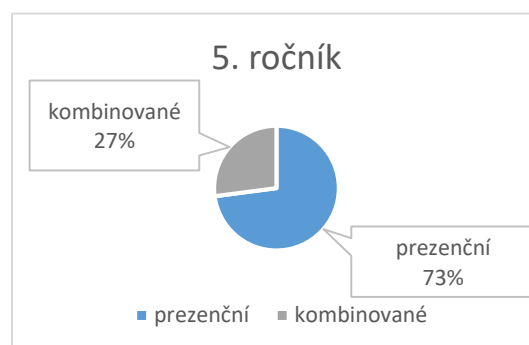
Graf č. 3: Složení respondentů dle formy studia



Graf č. 3/a: Složení respondentů ve 4. ročníku



Graf č. 3/b: Složení respondentů v 5. ročníku



První graf nám uvádí rozdělení respondentů podle formy studia. Z grafu nám vyplývá, že respondentů kombinovaného studia bylo 31 (30 %) a respondentů prezenční formy studia bylo 71 (70 %). Následující grafy 3/a, b nám uvádí zastoupení respondentů prezenční a kombinované formy studia v jednotlivých ročnících. Ze 4. ročníku tvořili respondenti kombinovaného studia 33% a respondenti prezenčního studia 67 %. Z 5. ročníku tvořili respondenti kombinovaného studia 27 % a respondenti prezenčního studia 73 %. Z grafů nám tedy vyplývá, že zastoupení respondentů kombinovaného a prezenčního studia v jednotlivých ročnících je procentuálně velice podobné.

5.4.2 Vyhodnocení otázek dotazníku

Otázka č. 1

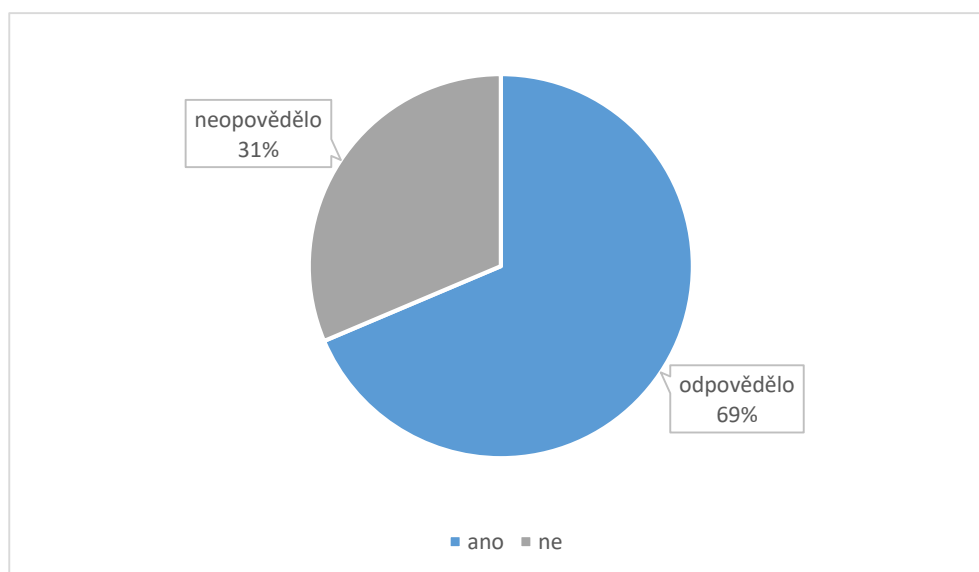
Co si představujete pod pojmem konstruktivistická výuka matematiky?

Položkou dotazníku č. 5 byla otevřená otázka s volnou odpovědí, kterou jsme chtěli zjistit povědomí studentů o konstruktivistické výuce matematiky, jelikož matematika prof. Hejného je konstruktivisticky založená výuka matematiky. Z grafu č 4. nám vyplývá, že na otevřenou otázku odpovědělo pouze 69 % ze všech respondentů. Do odpovědí jsem nezařazovala odpovědi typu *nevím* a *nevybavuji si nic*.

Většina respondentů, která zodpověděla otázku, má konstruktivistickou výuku matematiky spojenou s rolemi učitel x žák. Respondenti vnímají žáka v konstruktivistickém vyučování jako aktivního jedince, který na řešení úloh přichází sám vlastní cestou, poznatky sám objevuje a konstruuje, a to bez návodů a postupů ze strany učitele. V odpovědích se také objevil názor, že se jedná o opak transmisivního stylu vyučování. Roli učitele respondenti vnímají spíše jako poradce a facilitátora ve vyučování. Kromě převládajícího názoru o aktivitě žáka se v odpovědích také objevily názory, že se jedná o činnost žáka, která je založena na zkušenostech, reálném životě, praktických činnostech, manipulaci nebo řešení problémů ze života. V odpovědích jsme také našli ty, které spojují konstruktivismus v matematice s metodou Hejného (pouze 7% dotazovaných), dále pak konstruktivismus spojují s netradičním vyučováním a netradičními úlohami, s neexistencí jednoho způsobů řešení, s prací s tématy, které na sebe navazují a rozvíjejí se.

Ačkoliv otázku zodpovědělo pouze 69% respondentů a většina odpovědí nebyla nijak rozsáhlá, dá se říct, že studenti určité povědomí o konstruktivismu mají, ačkoliv není úplně jasné a jisté. Všechny odpovědi uvádím v příloze č. 2.

Graf č. 4: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 1

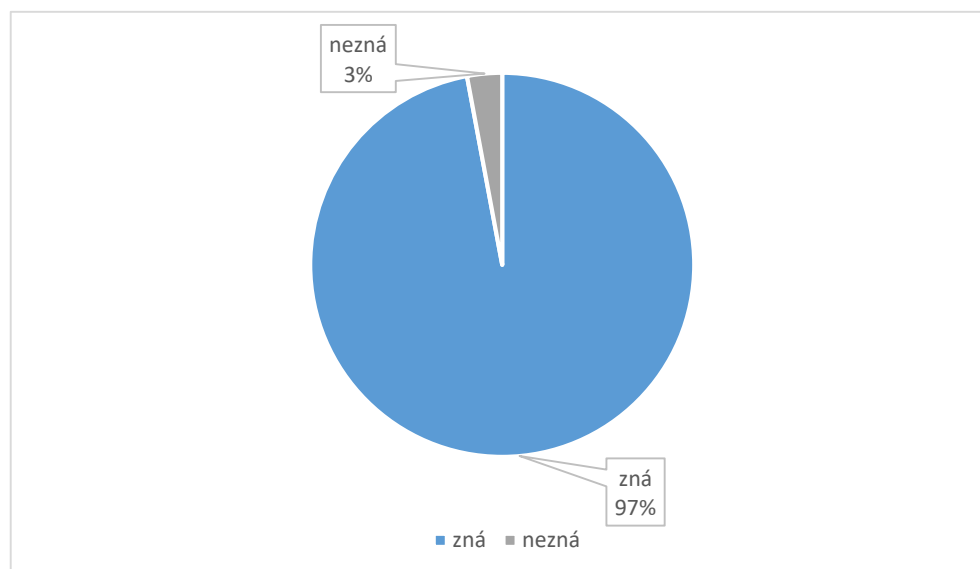


Otázka č. 2

Znáte výuku matematiky dle prof. Hejného, tzv. „Hejného metodu“?

Otázku zodpovědělo 100 % respondentů, z čehož 97 % z nich matematiku prof. Hejného zná nebo o ní má určité povědomí, 3 % respondentů metodu Hejného nezná vůbec. Je zarážející, že respondenti, kteří metodu neznají (3 %) jsou studenti 5. ročníku prezenční i kombinované formy studia.

Graf č. 5: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 2



Otázka č. 3

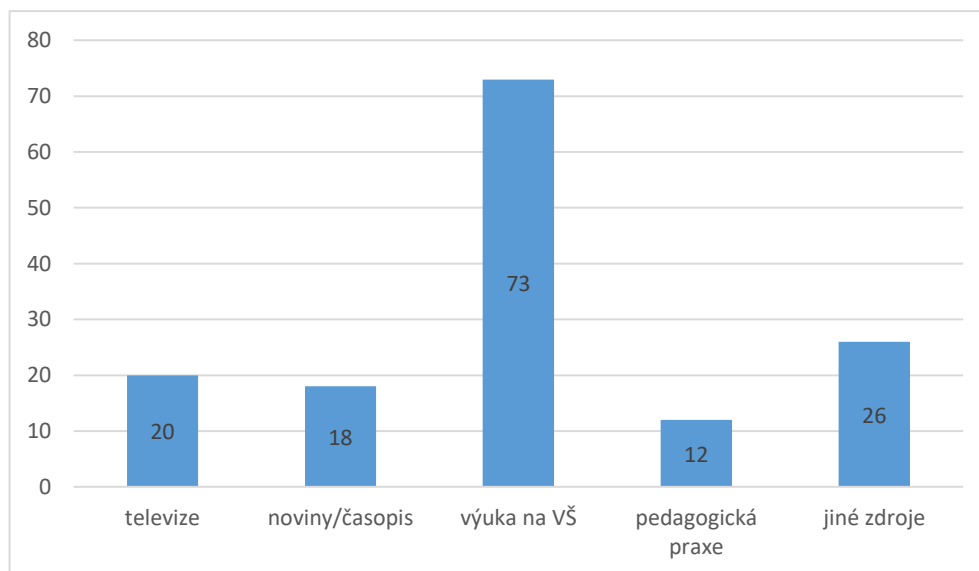
Z kterých zdrojů jste o této metodě získali informace?

Otázka č. 3 směřuje k zjištění zdrojů, ze kterých respondenti o Hejného matematice získali informace. Respondenti mohli vybírat více možností, přičemž poslední možností byla nabídka *z jiného zdroje*, kde studenti mohli psát volné odpovědi.

Graf č. 6 uvádí, že nejvíc informací o matematice prof. Hejného získali z výuky na vysoké škole. Tuto možnost vybralo 73 studentů (72%). Na pedagogické praxi o Hejného metodě získalo informace pouze 15 studentů (13%). Studenti znají matematiku prof. Hejného také prostřednictvím médií, jako TV, noviny, časopisy, webové stránky, z internetu, youtube. Studenti také uváděli, že matematiku prof. Hejného znají od kolegyně, učitelů a učitelek, z učebnic, knih a kurzů.

Z tabulky nám vyplývá, že nejvíc informací z výuky na vysoké škole o metodě Hejného získali studenti 4. ročníku prezenční formy studia, přičemž tuto odpověď vybralo 36 studentů, tedy 100%. Nejméně informací z výuky na VŠ podle grafu získali studenti 5. ročníku kombinovaného studia.

Graf č. 6: Odpovědi na otázku č. 3



Forma studia a ročník	Počet odpovědí na otázku	Počet respondentů
Prezenční 4. ročník	36	36
Prezenční 5. ročník	28	35
kombinované 4. ročník	8	18
kombinované 5. ročník	1	13
Celkem studentů	73	102

Tab. č. 1: Počet studentů, kteří se o metodě dověděli v rámci výuky na VŠ

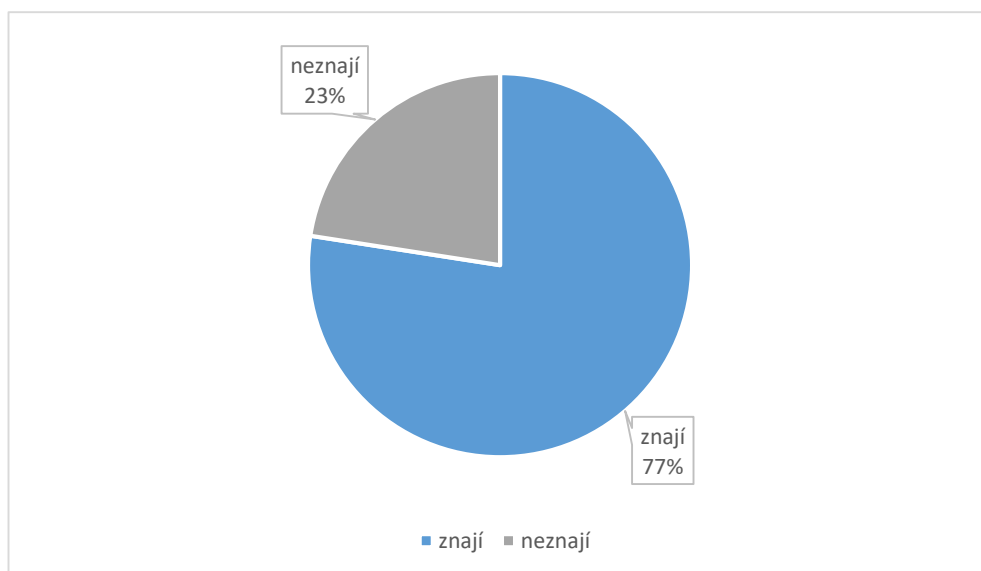
Otázka č. 4

Znáte učebnice matematiky Fraus, které jsou založené na matematice dle prof. Hejného?

Graf č. 7 nám uvádí, že z celkového počtu respondentů 102, 23 studentů (23 %) učebnice vůbec neznají a 79 studentů (77 %) učebnice Fraus znají. Přitom je zajímavé, že 97 % respondentů zná výuku matematiky prof. Hejného, přičemž učebnice této koncepce zná jen 77 % respondentů. Je možné, že studenti, kteří znají koncepci Hejného metody nemají učebnice Fraus s touto metodou nijak spojené, popř. znají Hejného matematiku velice okrajově.

Z tabulky č. 2 nám vyplývá, že nejvíc studentů, kteří učebnice matematiky Fraus znají, jsou studenti 4. ročníku prezenční formy studia.

Graf č. 7: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 4



Forma studia a ročník	Počet odpovědí na otázku	Počet respondentů
Prezenční 4. ročník	32	36
Prezenční 5. ročník	28	35
kombinované 4. ročník	8	18
kombinované 5. ročník	11	13
Celkem studentů	79	102

Tab. č. 2: Počet studentů, kteří znají učebnice Fraus

Otázka č. 5

Pracovali jste už s těmito učebnicemi?

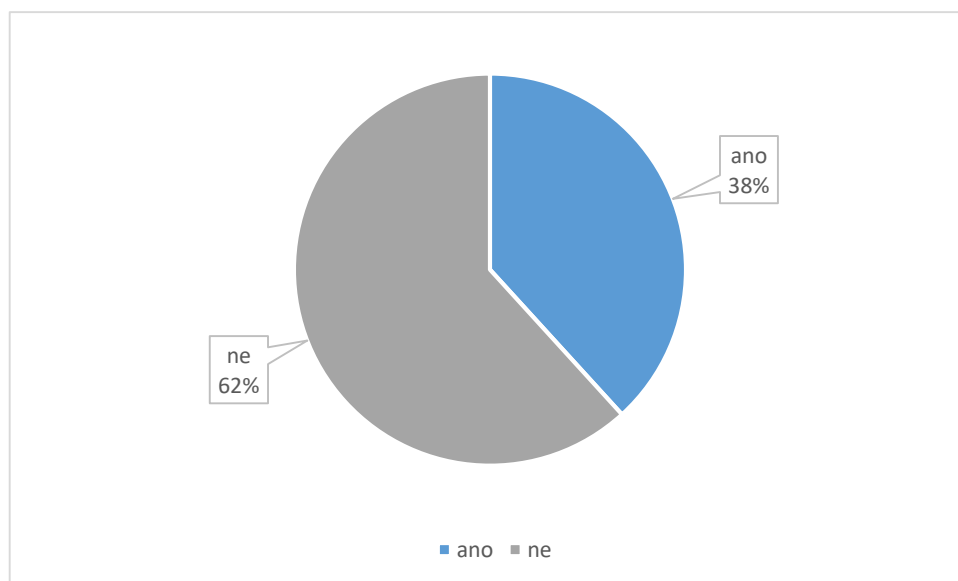
Touto otázkou jsme chtěli zjistit, zda studenti, kteří učebnice Fraus znají, s nimi přišli do styku ve větší míře a měli možnost s nimi, popř. úlohami v ní, blíže pracovat a pochopit tak víc koncepci metody. Na položenou otázku mohli studenti vybírat více odpovědí z nabídky nebo měli možnost uvést vlastní odpověď na položku *další*.

Graf č. 8 nám ukazuje, že 62 % studentů (63) s učebnicemi nikdy nepracovalo a pouze 38 % studentů (39) mělo možnost se s učebnicemi blíže setkat. Podle grafu č. 9 většina studentů přitom do styku s učebnicemi Fraus přišla v rámci výuky matematiky na VŠ.

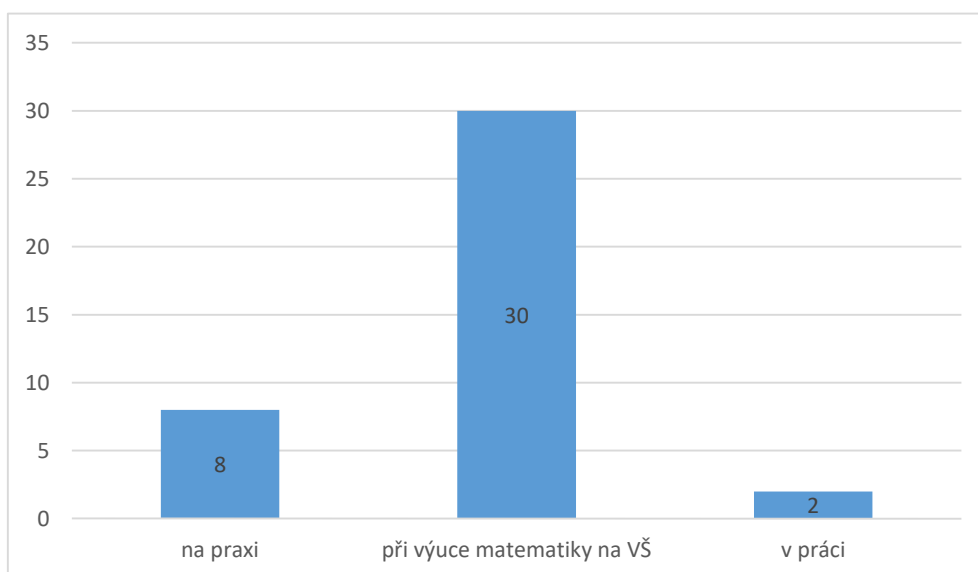
Z tabulky č. 3 nám vyplývá, že nejvíce studentů, kteří s učebnicemi pracovali a znají je, jsou studenti 4. ročníku prezenčního studia.

Když porovnáme grafy č. 7 a 8, ukazují, že 77 % respondentů zná učebnice matematiky Fraus dle Hejného metody a pouze 38 % respondentů s učebnicemi nějakým způsobem pracovalo, ať už ve výuce na VŠ nebo na praxi. Z těchto údajů nám vyplývá, že větší znalost učebnic je nízká, jelikož podle dat většina studentů učebnice nezná do hloubky a s největší pravděpodobností znají jen její podobu, popř. do ní jen nahlédli. Pro pochopení koncepce výuky dle prof. Hejného je však práce s učebnicemi a jednotlivými úlohami podstatná.

Graf č. 8: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 5



Graf č. 9: Způsob, kterým se studenti s učebnicemi setkali



Forma studia a ročník	Počet odpovědí	Počet respondentů
Prezenční 4. ročník	24	36
Prezenční 5. ročník	6	35
kombinované 4. ročník	5	18
kombinované 5. ročník	4	13
Celkem studentů	39	102

Tab. č. 3: Počty studentů, kteří s učebnicemi Fraus dle Hejného metody pracovali

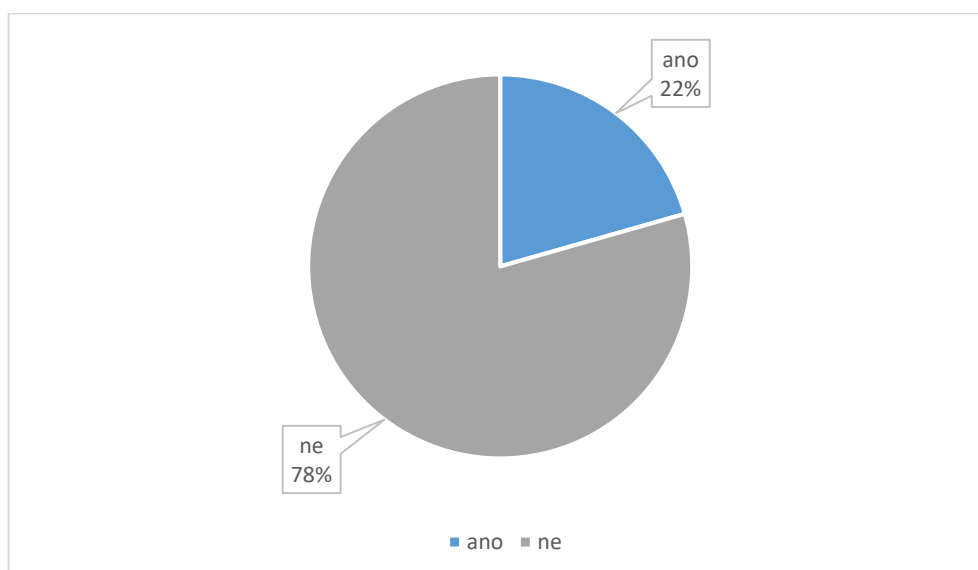
Otázka č. 6

Získali jste při studiu na vysoké škole dostatečné množství informací o výuce matematiky prof. Hejného?

Z celkového počtu respondentů si 22 % studentů myslí, že na vysoké škole získalo o metodě dostatečné množství informace a 78 % studentů si myslí, že dostatečné informace o Hejného metodě na VŠ nezískali.

Z tabulky č. 4 vyplývá, že studenti, kteří o Hejného metodě získali na VŠ dostatečné množství informací, jsou převážně studenti 4. ročníku prezenční formy studia. Jedná se však o 39% studentů této studijní skupiny. Když srovnáme odpovědi na otázky č. 2, 3, 4 a 5, tabulky nám ukazují, že studenti této studijní skupiny sice získali o Hejného metodě nejvíce informací na VŠ, znají nejvíc učebnice Fraus z hodin na VŠ, kde s nimi také nejvíc pracovali, jsou však podle nich informace nedostačující.

Graf č. 10: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 6



Forma studia a ročník	Počet odpovědí	Počet respondentů
Prezenční 4. ročník	14	36
Prezenční 5. ročník	4	35
kombinované 4. ročník	1	18
kombinované 5. ročník	3	13
Celkem studentů	22	102

Tab. č. 4: Informovanost studentů o matematice prof. Hejného

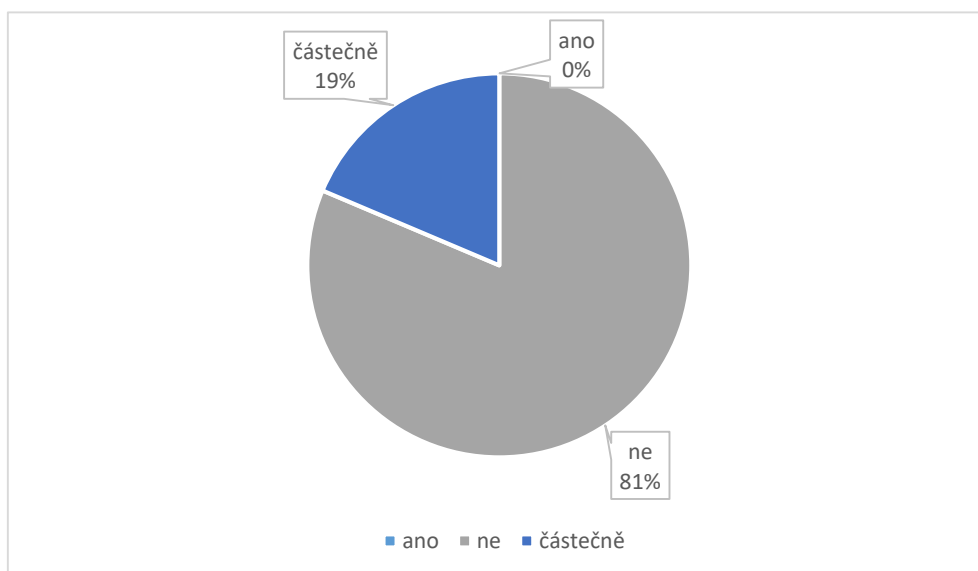
Otázka č. 7

Myslíte si, že jste připraveni vyučovat matematiku prof. Hejného?

Na tuto otázku odpověděli všichni respondenti, přičemž žádný student se necítí být připravený vyučovat matematiku prof. Hejného, 83 studentů (81 %) nejsou připraveni matematiku Hejného vyučovat a 19 studentů (19 %) jsou připraveni jen částečně.

Tabulka č. 5 nám ukazuje, že částečně připraveni se cítí být připraveni studenti 5. ročníku prezenční formy studia. Jedná se však o 23 % studentů této studijní skupin. Ze získaných údajů můžeme usoudit, že pocit připravenosti je zcela individuální a informovanost ve výuce na přitom nemá větší roli.

Graf č. 11: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 7



Forma studia a ročník	Počet odpovědí	Počet respondentů
Prezenční 4. ročník	5	36
Prezenční 5. ročník	8	35
kombinované 4. ročník	2	18
kombinované 5. ročník	4	13
Celkem studentů	19	102

Tab. č. 5: Připravenost studentů na výuku matematiky prof. Hejného

Otázka č. 8

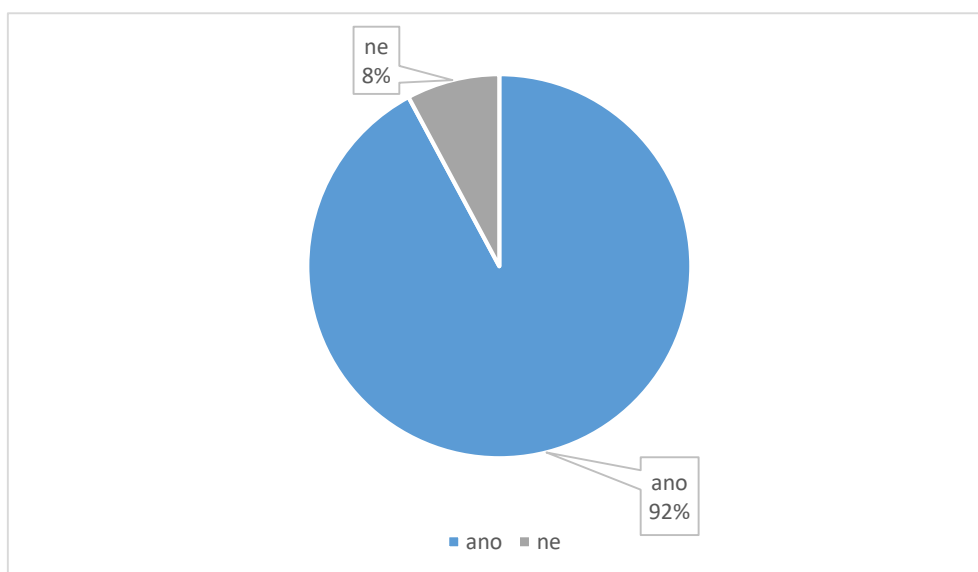
Myslíte si, že je pro Vás, jako pro budoucí učitele, důležité znát koncepci výuky matematiky dle prof. Hejného?

Tuto otázku jsem pokládala z důvodu, abych zjistila, zda studenti považují za důležité znát koncepci matematiky prof. Hejného, přestože o ní, třeba ve chvíli vyplňování dotazníků, nevěděli dostatek informací, popř. Hejného metodu neznali vůbec. Na otázku studenti mohli odpovídat výběrem z odpovědí *ano* a *ne*, přičemž k odpovědi *ano* měli na výběr z dalších možností jako *učitel by měl mít přehled o tom, jaké možnosti výuky se nabízejí*, nebo *roste poptávka ZŠ po výuce matematiky dle prof. Hejného*, jako další možnost mohli studenti uvést volnou odpověď k položce *jiné* a zdůvodnit tak, proč je pro ně důležité znát tuto koncepci. Respondenti mohli vybrat více odpovědí.

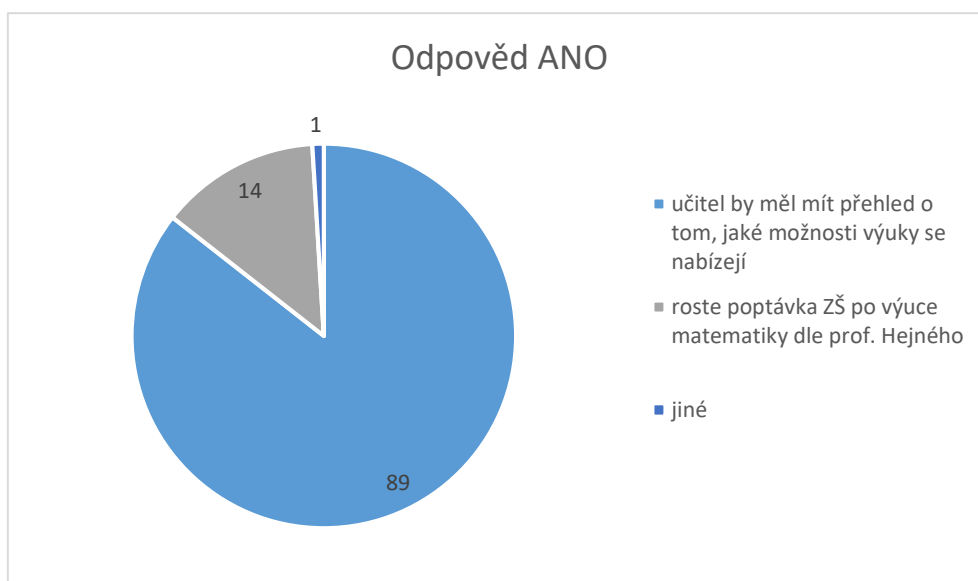
Z grafu č. 12 nám vyplývá, že 92 % (94) respondentů si myslí, že je pro ně, jako budoucí učitele, důležité znát koncepci Hejného metody a 8 % (8) respondentů tuto znalost nepovažují za důležitou.

V grafu č. 13 vidíme, jaké důvody studenti zvolili, jestliže pokládají za důležité znát koncepci Hejného metody. Ve většině případů zvolili důvod *ano, učitel by měl mít přehled o tom, jaké možnosti výuky se nabízejí*. Tuto možnost zvolilo 89 studentů z 94 (95 %). 14 studentů zvolilo možnost *ano, protože roste „poptávka“ ZŠ po výuce matematiky dle prof. Hejného*. K položce *jiné* uvedl jeden respondent odpověď *ano, je možné využít prvky metody i v běžných hodinách matematiky*.

Graf č. 12: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 8



Graf č. 13: Odpovědi vázané s odpovědí ano na otázku č. 8



Otázka č. 9

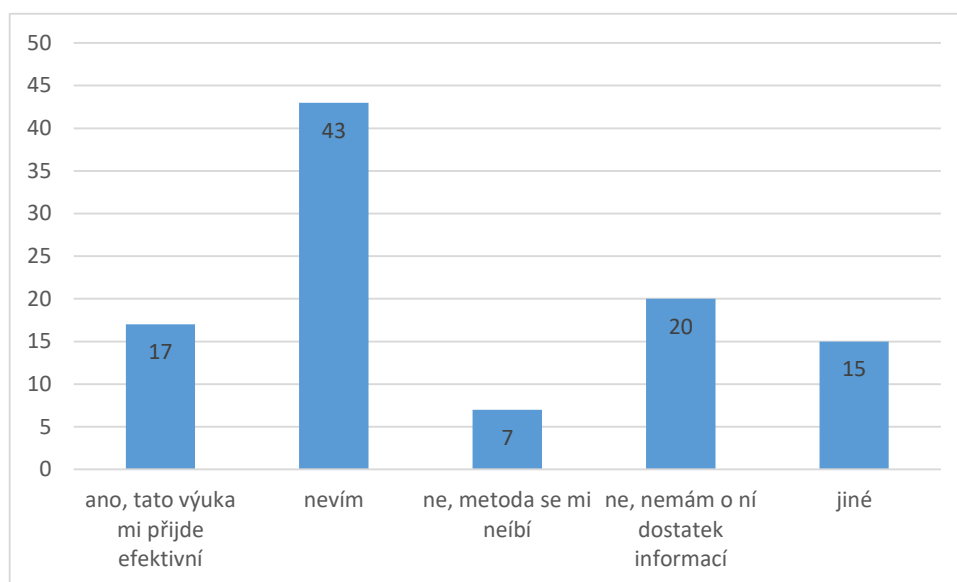
Chtěli byste ve své budoucí praxi vyučovat matematiku dle prof. Hejného?

Z grafu č. 14 nám vyplývá, že 43 studentů (42 %) neví, zda by chtěli ve své budoucí praxi touto metodou vyučovat. Tuto odpověď studenti volili nejčastěji. Vzhledem ke grafům uvedených výše, můžeme říct, že jedním z důvodů může být nízká připravenost studentů tuto metodu vyučovat, popř. nízká informovanost. Vzhledem k informovanosti, studenti (20 %) také volili možnost *ne, nemám o ní dostatek informací*. Nejméně (7 %) studenti volili

odpověď *ne, metoda se mi nelíbí*. Metodou by chtělo vyučovat pouze 17 % studentů, a to z důvodu, že jim metoda přijde efektivní. 17 % studentů odpověděli formou volné odpovědi. 13 studentů uvedlo, že by chtěli využívat pouze určité prvky a pomůcky z Hejného konceptu pro zpestření výuky. Studenti také uváděli, že metodu vyučovat nechtějí z důvodu velké náročnosti pro méně nadané žáky a z důvodu neefektivnosti metody ve velké skupině žáků.

Tabulka č. 6 ukazuje, jak odpovídali studenti jednotlivých ročníků a forem studia. Nejčastější odpověď *nevím* volili studenti 4. a 5. ročníku prezenční formy studia. Z toho lze usoudit, že přestože jsou studenti 4. ročníku prezenční formy studia podle údajů nejvíc informovaní a učebnice znají nejvíc, nejsou jejich informace o Hejného metodě dostačující natolik, aby dokázali posoudit stanovisko *já jako učitel a Hejného metoda*.

Graf č. 14: Odpovědi na otázku č. 9



Forma studia a ročník	Ano, tato výuka mi přijde efektivní	nevím	Ne, metoda se mi nelíbí	Ne, nemám o ní dostatek informací	jiné
Prezenční 4. r.	1 %	13 %	5 %	8 %	9 %
Prezenční 5. r.	6 %	15 %	1 %	8 %	5 %
kombinované 4. r.	5 %	7 %	1 %	4 %	1 %
kombinované 5. r.	5 %	8 %	0 %	0 %	0 %
Celkem studentů	17 %	42 %	7 %	20 %	15 %

Tab. č. 6: Procentuální vyjádření odpovědí studentů

Otázka č. 10

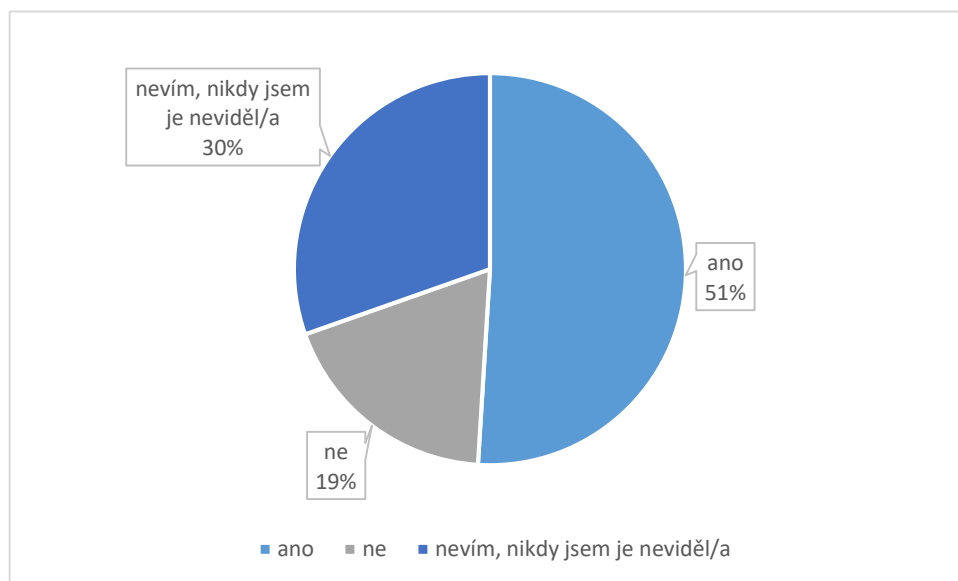
Líbí se Vám učebnice matematiky Fraus, které jsou založené na „Hejného metodě“?

Touto otázkou a po ní následujícíma dvěma jsme chtěli zjistit názor studentů na učebnice Fraus, které jsou vytvořeny ke koncepci Hejného matematiky. Již v otázkách výše jsme se studentů ptali, zda učebnice znají a zda s nimi pracovali. Zjistili jsme, že 77 % studentů učebnice zná a 38 % studentů s nimi nějakým způsobem více pracovalo.

Graf č. 15 nám ukazuje, zda se studentům, pokud je znají, učebnice líbí, či nikoliv. Z grafu vyplývá, že 51 % studentů se učebnice líbí a 19 % studentů se naopak nelíbí. Na otázku č. 8 však 23 % studentů odpovědělo, že učebnici Fraus podle Hejného metody neznají a na otázku č. 14 odpovědělo 30 % studentů, že neví, zda se jim učebnice líbí, jelikož je nikdy neviděli. Tato odchylka by mohla být zapříčiněna možností, že studenti sice znají podobu učebnice Fraus a ví tedy, o jakou učebnici se jedná, nikdy se však o ní blíže nezajímali, popř. do ní nenahlíželi, tudíž nemohou zhodnotit, zda se jim líbí či nikoliv.

Tabulka č. 7 ukazuje, že nejvíc se učebnice líbí studentům 4. ročníku prezenční formy studia, stejně tak studenti tohoto ročníku tvoří největší skupinu, které se učebnice nelíbí. Z tabulky tedy vyplývá, že 4. ročník prezenční formy studia učebnice Fraus podle Hejného metody zná víc než ostatní ročníky. Tyto data potvrzují údaje, které jsem získala u otázky č. 3, kdy studenti této studijní skupiny v 32 případech uvedli, že učebnice znají.

Graf č. 15: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 10



Forma studia a ročník	líbí	Nevím	nelíbí
Prezenční 4. ročník	21 %	4 %	11 %
Prezenční 5. ročník	14 %	15 %	6 %
kombinované 4. ročník	6 %	10 %	2 %
kombinované 5. ročník	11 %	2 %	0 %
Celkem studentů	51 %	30 %	19 %

Tab. č. 7: Názor studentů na učebnice Fraus podle ročníku a formy studia

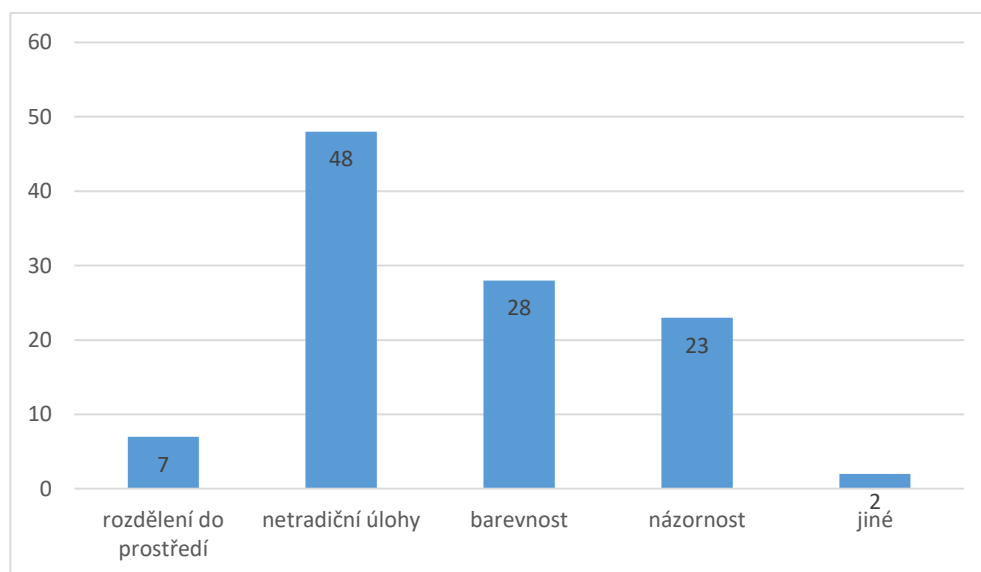
Otázka č. 11

Co konkrétního se Vám na učebnicích líbí?

Na tuto otázku respondenti vybírali odpověď z nabídky, přičemž měli možnost k položce *jiné* uvést jinou vlastnost učebnic, která se jim líbí. Respondenti mohli vybrat více položek. Odpovídali jen ti respondenti, kteří učebnice Fraus znají a viděli je, tj. 70 %.

Z grafu č. 16 nám vyplývá, že se nejvíc studentům líbí v učebnici Fraus netradiční úlohy. K položce *jiné* studenti uvedli přehlednost učebnic a propojenost učiva s praktickým životem.

Graf č. 16: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 11

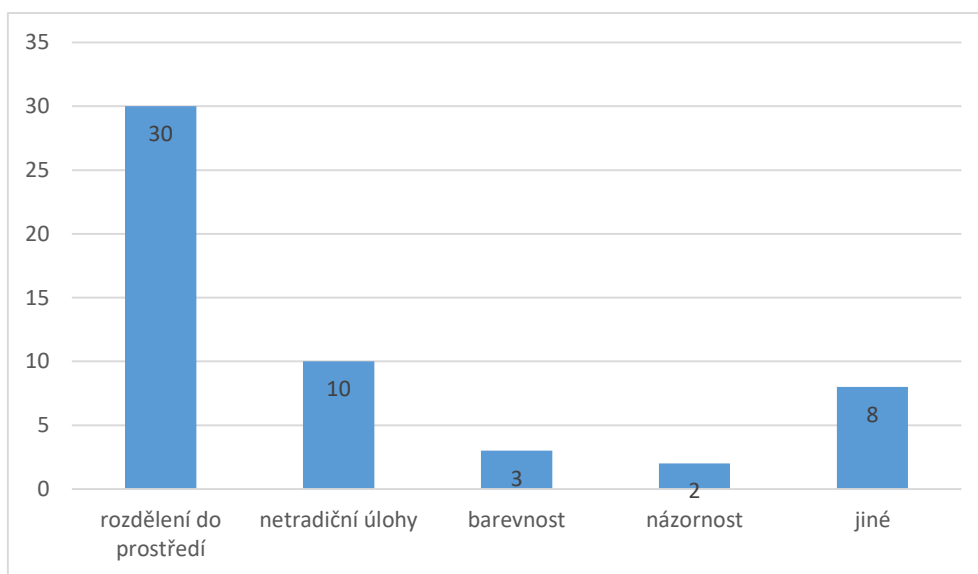


Otázka č. 12

Co konkrétního se Vám na učebnicích nelíbí?

Otázka č.12 byla strukturována stejně jako otázka č. 11. Respondenti měli vybírat z možností, co se jim na učebnicích nelíbí. Odpovídali opět jen ti respondenti, kteří učebnice Fraus znají a viděli je, tj. 70 %. Graf nám ukazuje, že nejméně oblíbené je rozdělení učebnic do prostředí. K položce *jiné* poté studenti dále uváděli jako neoblíbené vlastnosti, jako nepřehlednost, časté opakování úloh, složitost, překombinovanost či konkrétní prostředí Zvířátka dědy Lesoně. U otázek č. 11 a 12 nebyla odpověď povinná, tudíž někteří studenti nezvolili žádnou z možností.

Graf č. 17: Odpovědi na otázku č. 12



Otázka č. 13

Ohodnoťte podle důležitosti ve výuce matematiky (5 – nejdůležitější, 1 – nejméně důležité).

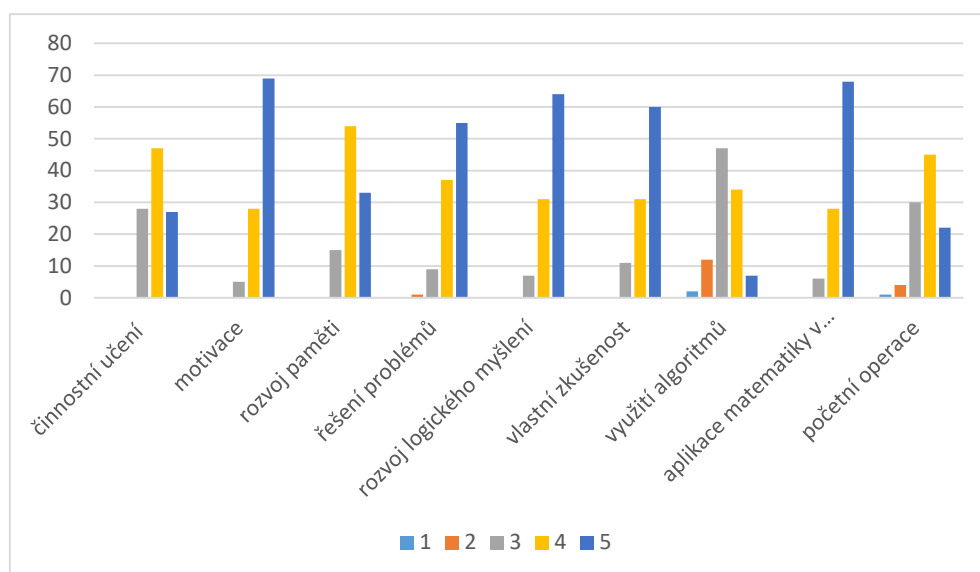
Poslední část dotazníku tvořily škálované položky, které měli studenti ohodnotit body 1 - 5 podle toho, jakou pro ně ve výuce matematiky mají hodnotu. Tímto hodnocením jsem chtěla zjistit preference studentů a porovnat výsledky hodnocení se zbylými položkami dotazníku.

Podle grafu můžeme usoudit, že studenti nejčastěji jednotlivé položky hodnotili body 3 – 5, přičemž nejméně využívali nejnižší body 1 a 2. Z grafu vyplývá, že pro studenty je v matematice nejdůležitější *motivace*, kterou studenti ohodnotili nejvyšším počtem bodů (5) 69 x. Hned po ní následuje položka *aplikace matematiky v reálných situacích*, které studenti dávali nejvyšší známku 68x. Nejvyšším počtem bodů byla také často hodnocena položka *rozvoj logického myšlení*, a to 64x, poté položka *vlastní zkušenost* 60x, či položka *řešení problémů* 55x. Nejnižší počet bodů získávaly položky *využití algoritmů a početní operace*, které byly jako jediné ohodnoceny i bodem 1. Z toho plyne, že pro studenty nemají ve vyučování matematiky takovou váhu, jako výše zmíněné položky.

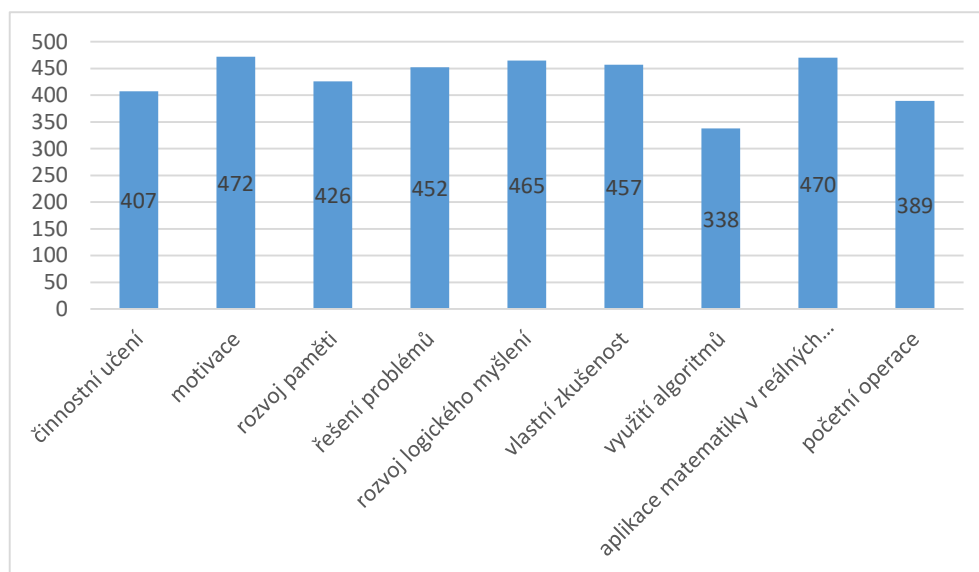
Nejvyšší bodové ohodnocení získaly položky *motivace*, *aplikace matematiky v reálných situacích*, *rozvoj logického myšlení*, *vlastní zkušenost* a *řešení problémů*. Všechna tato kritéria jsou podstatou koncepce Hejného metody, přičemž některé z nich tvoří základní pilíře Hejného metody. Je zřejmé, že studenti, kteří tato kritéria preferují, a zároveň se jim nelíbí učebnice a vůči Hejného matematice jsou nejistí, neznají tuto koncepci výuky matematiky natolik, aby si ji s výše zmíněnými kritérii spojili. Podle výsledků můžeme usoudit, že většina studentů o Hejného matematice ví velice málo a jejich znalosti týkající se této problematiky jsou spíše povrchní. Podle výsledků jsou jejich znalosti spojeny spíše s dílčími elementy Hejného metody, např. učebnice, úlohy v učebnicích, netradiční vyučování, aktivita žáka, žák si na vše přichází sám, než s koncepcí této výuky jako celek.

Nejnižší bodové ohodnocení získaly položky *využití algoritmů a početní operace*, které v Hejného metodě nemají stěžejní roli, stejně tak mechanické a rychlé počítání.

Graf č. 18: Odpovědi na otázku č. 13



Graf č. 19: Celková bodová skóre



5.5 Závěr výzkumného šetření

Hlavním cílem dotazníkového šetření bylo zjistit postoj studentů 4. a 5. ročníku prezenční i kombinované formy studia, přičemž byly stanoveny tři výzkumné otázky.

První výzkumnou otázkou bylo *Jsou studenti dostatečně informováni o matematice prof. Hejného?* Na základě zjištěných dat můžeme tvrdit, že téměř všichni respondenti znají Hejného metodu. Nejvíce informovaní jsou studenti 4. ročníku prezenční formy studia, přičemž největším zdrojem jejich informovanosti je výuka na VŠ. Studenti zároveň nepovažují míru informovanost za dostačující. Téměř všichni studenti, nehledě na to, zda Hejného metodu znají či nikoliv, však vnímají znalost této koncepce výuky matematiky jako důležitou, a to hlavně z hlediska učitelova všeobecného přehledu.

Druhá výzkumná otázka *Jsou studenti připraveni vyučovat matematiku prof. Hejného?* navazuje na závěry předešlé výzkumné otázky. Ačkoliv jsou studenti v rámci výuky na VŠ informovaní, nepokládají tyto informace za dostačující a necítí se být připraveni vyučovat matematiku prof. Hejného.

Odpověď na třetí výzkumnou otázku *Chtěli by studenti vyučovat matematiku prof. Hejného v rámci jejich budoucí praxe?* souvisí také se závěry předešlých otázek. Podle získaných dat se můžeme domnívat, že si valná většina studentů v roli učitele Hejného matematiky není jistá a toto stanovisko nedokáže posoudit. Příčinou by podle výsledků šetření mohla být nedostatečná informovanost a nedostatek zkušeností s touto výukou matematiky.

6 Ukázkové hodiny matematik prof. Hejného

Následující kapitola se zabývá ukázkovými hodinami matematiky prof. Hejného, které byly realizovány na ZŠ Horka nad Moravou v 1., 3. a 4. ročníku. Cílem kapitoly bylo přiblížit a popsat práci žáků v matematických didaktických prostředích, práci s jednotlivými úlohami v učebnicích, dále také přiblížit komunikaci a interakci mezi učitelem a žáky v hodinách matematiky prof. Hejného, které jsou zde klíčové a zároveň odlišné od klasicky vedených hodin. Pro získání dat byla zvolena metoda pozorování, která byla doplněna přímým dotazováním účastníků výzkumu.

ZŠ Horka nad Moravou byla vybrána záměrně. Hlavním důvodem bylo vyučování matematiky prof. Hejného, která se zde vyučuje již 4. rokem a vyučují ji zde čtyři učitelé. Pro realizaci výzkumného šetření bylo také významné autorčino působení na této škole v rámci souvislé pedagogické praxe, které jí umožnilo hlouběji porozumět jednak koncepci matematiky prof. Hejného z hlediska praktického, ale také hlouběji porozumět filozofii celé školy.

ZŠ Horka nad Moravou je plnoorganizovaná škola, která se nachází v okolí Olomouce v blízkosti chráněné krajinné oblasti Litovelské Pomoraví. Žáci tříd 1.A až 5. A jsou zde vzděláváni podle Školního vzdělávacího programu Naživo+ a třídy 1M až 5M pracují podle Školního vzdělávacího programu pro 1. stupeň Montessori. Ve školním roce 2016/2017 školu navštěvuje 420 žáků. Pedagogický sbor je složen z 28 učitelů, 7 asistentů pedagoga a 7 vychovatelek školní družiny, přičemž zde působí i školní psychologka.

Výše zvolená škola vede vyučování v souladu s konstruktivistickým přístupem k učení. Zaměřuje se na rozvoj osobnostních předpokladů každého dítěte, čemuž odpovídají školou zvolené metody vzdělávání. Hlavním rysem vyučování je kooperativní práce a propojování výuky s praktickými zkušenostmi žáků, například prostřednictvím metody projektového vyučování.

Významné je zapojení školy do projektu Pomáháme školám k úspěchu a to od roku 2012. Projekt je zaměřen na dosažení vysoké kvality výuky ve veřejných základních školách a na individuální přístup pedagogů k žákům. Tento projekt je vytvořen Nadací The Kellner family foundation, která je rodinnou nadací Renáty a Petra Kellnerových. Zapojení do projektu školy vytvořilo ideální podmínky pro změnu koncepce výuky matematiky a celkové zkvalitnění výuky. Projekt také umožňuje vzdělávání učitelů, práci školních

mentorů, školního psychologa, pedagogických asistentů, dále také podporuje komunikaci a spolupráci učitelů s rodiči apod.

6.1 Ukázková hodina č. 1

Pozorování hodiny matematiky probíhalo ve 4. ročníku. Přítomno bylo 27 žáků, 2 učitelé a asistentka pedagoga. Hodina byla vedena párově dvěma učiteli, kteří se během výuky doplňovali. Párové učení v hodinách matematiky je ve škole běžné díky zapojení školy do výše zmíněného projektu Pomáháme školám k úspěchu.

Žákům byla na začátku hodiny připomenuta aktivita z hodiny minulé, kdy měli žáci z jednoho papíru vytvořit spojený řetěz pomocí dvou děr (oken). Jedna žákyně výtvar předvedla ostatním žákům a prolezla dírou.

Učitel dále připomíná žákům, čemu se posledních pár hodin matematiky věnovali a vede je k uvědomění, že stojí kousek od dalšího objevu.

U: *Zjistili jsme, že ze čtyř stejně dlouhých dřívěk nám při pokusu o vytvoření trojúhelníku vychází tohle (na tabuli kreslí neúplný trojúhelník ze čtyř stejně dlouhých dřívěk), takže jde ze čtyř dřívěk vytvořit trojúhelník o obvodu 4 dřívěk?*

Ž: *Ne, ne, ne. Já jsem to doma zkoušela.*

U: *Ještě byl problém, že z šesti dřívěk, když chci udělat 3, 2, 1. A zase to samé.*

U: *Přemýšlel někdo nad tím? Vymyslel někdo nějaké pravidlo?*

Ž: *Nevím, jak to přesně říct, ale vím, jak to myslím...*

U: *Zkus to nějak říct a my to zkusíme přeložit.*

Ž: *No, že z těch stejně dlouhých tyček, nemůžeme udělat trojúhelník. Druhá žákyně ho ještě doplňuje: No a ze stejného počtu dřívěk.* Učitel na tabuli kreslí šest stejně dlouhých dřívěk a trojúhelník. S tím dále pracují.

=====

Ž: *Když skvrčíme jakoukoliv stranu, tak to nepůjde, protože se to bude zkracovat.*

U: *Můžeš mi ještě ukázat, co myslíš ze stejného počtu čeho? Jak to myslíš? Já jsem*

z toho zmatená. Pojd' k tabuli.

Ž: Z těchto všech. Z šesti. Tady vezmeme tři a dáme je takhle, tak už nám to nevyjde, protože tady to bude kratší. Žák ukazuje na tabuli tři horní dřívka (horní řadu dřívek).

U: Takže když vezmu tyhle tři horní tyčky, tak ty už mi z toho trojúhelník neudělají nad těmi třemi spodními, ano, rozumím tomu dobře?

Ž: Ano, když je zvedneme nahoru ty tři. Horní řadu dřívek zvedají a vytváří z nich ramena trojúhelníku.

U: Dobře. Takže co je vlastně tohle v trojúhelníku? Ta horní řada tyček? Jak se to nazývá? Co tvoří trojúhelník?

Ž: Základna a ramena.

U: A když tyhle tyčky zvedneš, tak to je co v tom trojúhelníku?

Ž: Ramena trojúhelníku. Vyznačují v trojúhelníku na tabuli.

U: Takže ty nám říkáš, že když vezmeš dvě ramena, která budou mít dohromady stejný počet dřívek jako základna, tak to nevytvoříme, protože to třeba bude kratší.

Ž: Když je základna stejně dlouhá jak ramena, tak to trojúhelník nevytvoří.

U: Takže se zeptám naopak, kdy to ten trojúhelník vytvoří?

Ž: Když je rameno plus rameno větší jak základna (ten součet), tak to půjde a když se to rovná, tak to nepůjde. Nebude to fungovat. Diskuse žáků u tabule, ostatní pozorují. Učitel píše na tabuli všechny případy.

U: Takže se podíváme na všechny tři případy, které nám mohou nastat. Když sečtu dvě ramena a jejich součet je větší jak základna, jde to. Kreslí fajfku k případu. Co když se to rovná? Když součet dvou ramen je stejný jako základna? Jak to bude?

Ž: To nefunguje. Nepůjde to. Učitel kreslí k případu křížek.

A: Co když jsou ramena menší jak základna?

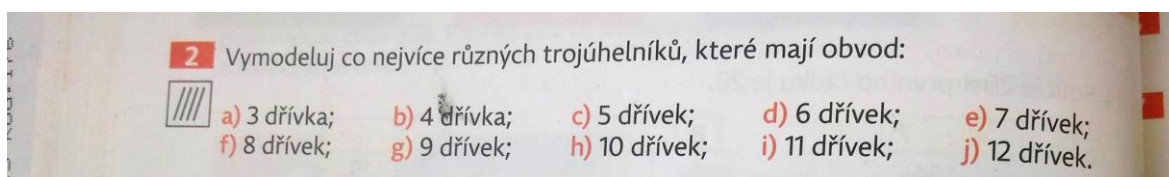
Ž: To nepůjde. Nefunguje.

U: Proč ne?

Ž: Když budou menší, tak to nebude fungovat. Z toho nebudeme moct udělat tu stříšku. Ono

to nedosáhne. Žáci jsou u tabule a ukazují na jednotlivé tyčky jak by to bylo, kdyby je posunuli a zvedli.

Učitel tleská a chválí žáky za objev, kterým je trojúhelníková nerovnost a její pravidlo. Žáci se touto problematikou zabývali již třetí hodinu matematiky. Tomuto objevu předcházela manipulativní činnost se špejlemi, diskuse, demonstrace vlastním tělem na koberci. Na obr. 1 je cvičení, se kterým žáci pracovali a zjišťovali, zda lze z daného počtu dřivek sestavit trojúhelník.



Obr. 1: Modelování trojúhelníků ze dřivek

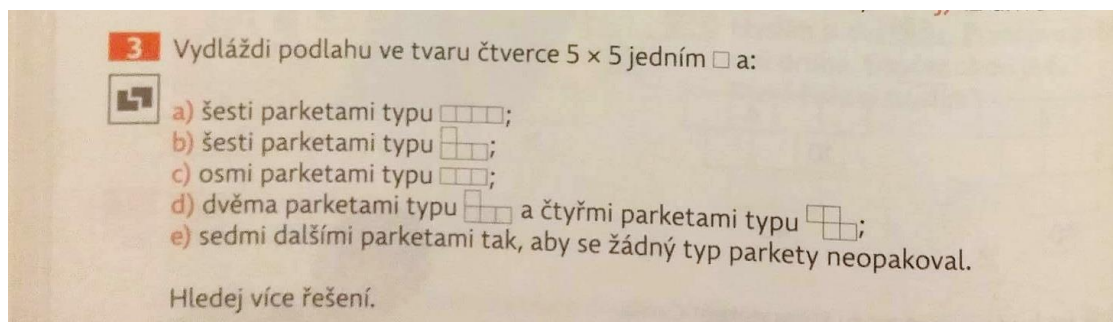
U: *To co jsme teď objevili se nazývá trojúhelníková nerovnost, kdy součet libovolných dvou stran trojúhelníku musí být větší než strana třetí. Je jedno, co je rameno a co je základna. Teď vás odzkouším. A jde sestavit tento trojúhelník?* Učitel na tabuli kreslí dřívka 3, 4, 1, které představují délku stran.

Ž: *Ne, tři plus jedna jsou čtyři a to se rovná.*

U: *Změň jedno číslo tak, aby to šlo.*

Ž: *Z jedničky uděláme dvojku.*

U: *Ano, tak máme uzavřenou tuhle kapitolu s velkým objevem a teď vás o něco poprosím. Neřeknu vám vůbec nic bližšího. Na tabuli máte napsáno, co máte udělat. Máte minutu na přečtení a poté se vás zeptám, co tedy budeme dělat dál?* Jedná se o cvičení z učebnice viz obr. 2.



Obr. 2: Dláždění podlahy

U: *Minuta uběhla. Kdo nám vysvětlí, jako učitel, co máme dělat?*

Ž: Máme vydláždit podlahu (čtverec 5x5).

U: Pojd'te někdo k tabuli. Kdo nám to dokáže vyznačit? U tabule je čtvercová síť na tabulce. Bára jde vyznačit.

Ž: To bude 25. Bude to obsah.

U: Co by mělo být 25? 25 čeho?

Ž: Kachlíků. Je to jeho obsah.

U: Souhlasíme, že máme vydláždit tuto podlahu? Máme to všechno? Nebo nám tu chybí nějaká definice? Ano Kláro?

Ž: Máme vydláždit podlahu ve tvaru čtverce 5x5 jedním čtvercem a za a) šesti parketami typu.....

U: Jedním čtvercem? Já tomu přesně nerozumím, kdo by mi to vysvětlil? Jak jedním čtvercem a šesti parketami typu čtyři I?

Žáci pracují samostatně, přičemž dva chlapci jdou na koberec a pracují společně a radí se. Úlohu žáci kreslí do svých sešitů. Mezitím chodí žáci řešit úlohy i k tabuli. Patrik přijde k tabuli s otázkou.

U: Děti, Patrik má otázku, můžeme dát tuhle parketu takhle? Co myslíte?

Ž: Ano, parketař může natáčet parketu jak chce. Všichni si připomenou, že parkety se smí otáčet, ale nesmí se překlápět.

Učitel se chodí dívat a vyzývá žáky k tabuli, kde si sdílí všechny výsledky a kontrolují správnost. Učitel se vždy žáků zeptá, zda s výsledkem souhlasí a zda to má někdo jinak. Hledají různá řešení. Učitel také připomíná učivo z 3. ročníku, kdy se seznamovali s názvy parket - mono, duo, elko, okle, růžek apod.

U: Jakmile první z vás udělá „éčko“, tak čas vypršel.

Po pár minutách se chlapci na koberci hlásí. Učitel je jde zkontrolovat. Končí se práce. Ještě jedna žákyně se hlásí. Kluci z koberce jí to jdou zkontrolovat a zjistí, že to nemá dobře, takže jsou jediní, kteří dodělali úlohu za e). Šlo o gradovanou úlohu, nebylo tedy třeba, aby všichni dokončili poslední část.

U: Zájemci si mohou úlohu dodělat doma. Všichni jdou do lavic a dávají pozor. Kdo

udělal „áčko“, zvedá ruku. Kdo se dostal do „béčka“? Kdo se dostal do „céčka“? Kdo do „déčka“? Do „éčka“ se dostali jen kluci a Natka – skoro, byla před cílem. Dobře.

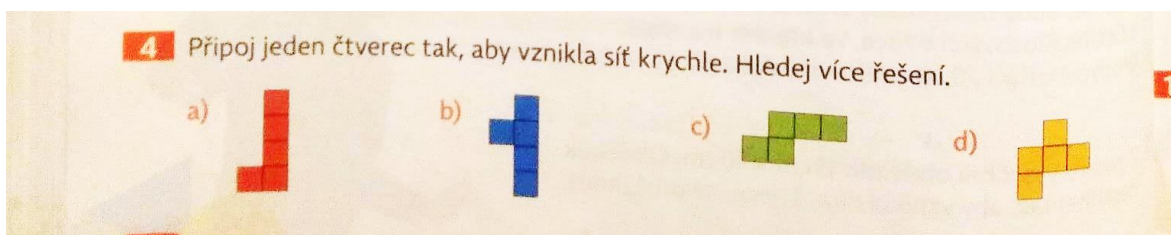
U: Pamatujete si, jak se dá obléct krychle?

Ž: Ano, ne, ano. Žáci se překřikují. Má šest stran.

U: Ano, má 6 stěn. Co to znamená? Šest čeho?

Ž: Čtverců.

U: Ano. A ty jsou záměrně sestaveny tak, aby vznikl nějaký stříh, který drží a nerozpadá se. Je to oblek pro krychli. A když to poskládáme, tak je z toho krychle. Když to rozložíme, tak je to nějaký tvar nějaký stříh. Ukazuje čtverečkovaný papír a skládá. V učebnici na str. 48/4 jsou nedokonalé stříhy krychle. Proč jsou nedokonalé? Kdo nám to vysvětlí? Podívejte se na ně. Viz obr. 3.



Obr. 3: Sít krychle

Ž: To nejde.

U: Někdo řekl že to nejde, proč? Proč jsou nedokonalé ty stříhy? Následuje diskuse, přičemž někdo tvrdí, že to jde, někdo že ne.

Ž: Aby to mělo šest stran. Máš doplnit čtverec a z toho má vzniknout krychle. Žáci se dohadují a překřikují. Někdo tvrdí, že to jde, jiní tvrdí opak.

U: Proč to nejde? Jsou to šaty pro paní krychli? Žáci se opět dohadují.

U: A proč bych tam připojoval jeden čtverec?

Ž3: Protože to je v zadání.

Ž4: Nejde to...

U: Proč? Ty ten čtverec můžeš připojit kdekoliv.... Dobře, tohle je pozvánka na zítřek. Zítřka se tím budeme zabývat. Kdo to chce názorně zkusit? Pojď k tabuli. Učitel ukazuje nedokonalý stříh. Proč je nedokonalý?

Ž: Má jen 5 stran a nejde to z toho udělat. Žákyně zkouší obléct krychli. Žáci se dohadují. Krychle je nahá! Druhá žákyně jde k tabuli a pomáhá. Obě ukazují, kde mohou připojit ještě jeden čtverec.

U: Co nám připomíná ta nedokonalá krychle? Kdo si vzpomene, jak jsme tomu říkali? Když to nemělo střechu. Žáci hádají, nakonec si vzpomenu, že tomu říkali „jeviště“.

U: Ano, je to jeviště, které má 4 stěny, potom máme pokojík, který má 5 stěn a krychle má 6 stěn. Budu se těšit na zítřek. Už jsme si tu něco naznačili a zítra v tom budeme pokračovat.

Žáci v této hodině matematiky objevili pravidlo trojúhelníkové nerovnosti, kterou se zabývali již třetí hodinu. K tomuto objevu vedly vlastní zkušenosti žáků prostřednictvím manipulativní činnosti se špejlemi. K objevu žákům také pomáhaly nákresy „dřívěk“ na tabuli, demonstrace vlastním tělem a diskuse ve třídě. Cesta k tomuto objevu odpovídá modelu objevování v matematice, který je součástí jednoho z hlavních principů Hejného metody, zkušenost – mateřský jazyk – matematický jazyk. Žáci prostřednictvím vlastní zkušenosti pochopili podstatu trojúhelníkové nerovnosti, kterou svými slovy dokázali vyjádřit. Učitelé pak jejich slova převedli do matematického jazyka a seznámili žáky s pojmem trojúhelníková nerovnost.

V poslední části hodiny se žáci věnovali „střihům krychle“ a měli zdůvodnit, proč jsou střihy v zadání nedokonalé. Žáci se překřikovali a nikdo nedokázal na otázku jasně odpovědět. Měli přijít na to, že jsou nedokonalé, protože krychle má šest stěn, na obrázcích je jich však jen pět. Ve chvíli, kdy žáci mohli manipulovat s nedokonalou sítí krychle a pokusit se krychli obléct, přišli na to, že má jen pět stěn, a proto z toho krychle nejde vytvořit. Tato demonstrace byla pozvánkou do další hodiny, která je měla motivovat. Žáci ještě nemají zcela ujasněnou terminologii, místo pojmu stěna čtverce užívali pojem strana čtverce.

6.2 Ukázková hodina č. 2

Tato ukázková hodina matematiky probíhala v 1. ročníku. Přítomno bylo 12 žáků a jedna učitelka. Nízký počet žáků byl umožněn díky výše zmíněnému projektu, který financuje přítomnost druhého učitele v jedné třídě. Učitelé si tak mohou žáky rozdělit na dvě skupiny, přičemž každý učí jednu z nich jiný předmět a poté se žáci „prohodí“. V této hodině se žáci seznamují s novým prostředím Barevné trojice.

Na začátku hodiny hráli žáci hru každý sám se sebou. Měli „drilové kartičky“ na počítání. Na jedné straně byl příklad, na druhé výsledek. Měli na to čas jedno přesýpání hodin. Když příklad spočítali dobře, dali si kartičku bokem. Číslo poté sdělili učitelce, která si výsledek zaznamenala. Žáci se po aktivitě sami hodnotili. Někteří žáci při řešení příkladu využívali počítadlo nebo prsty.

Poté zve učitelka žáky na koberec do květinářství. Zde jsou květiny různých barev s číselnými hodnotami viz obr. 4 (3x červená, 3x zelená, 3x modrá).



Obr. 4: Prostředí Barevné trojice

U: *Jaké barvy mají kytičky v našem květinářství?*

Ž: *Červená, zelená, modrá.*

U: *Já chci, abyste nakoupili tři kytičky, ale podmínka je, že nesmí být stejné barvy. Viki vybírá. Splnila jsi podmínku? Kolik by teď Viki zaplatila?*

Ž: *Ano, zaplatila by 6 Kč..*

U: *Jak jsi na to přišel Davidku?*

Ž: *$1+2+3 = 6$. Davídek počítá číselné hodnoty na květinách.*

Dále se žáci střídají a vybírají květiny, přičemž musí splnit podmínku, že ty tři květiny nesmí mít stejnou barvu. Následně spočítají, kolik by za květiny zaplatili dohromady.

U: *Ted' vám dám ještě jednu podmínku. Když jde paní nakupovat, tak kromě podmínek barvy, musí zaplatit jen 6 Kč za všechny květiny. To je další podmínka. Součet musí být 6.* Na koberec učitelka znázorňuje obě podmínky. Umístí zde tři kolečka s barvami a cedulku s daným číslem. Žáci tak mají podmínky před sebou. První nakupuje Eliška a splňuje obě podmínky. Květiny si nechává u sebe. Dále nakupuje Radunka.

U: *Splnila Radunka podmínky?*

Ž: *Ne, není to správně.*

U: *Proč? Tak počítejte.* Kuba počítá a vyjde mu, že je to nakonec správně. Radunka si nechá květiny taktéž u sebe. Dále nakupuje Vojta.

U: *Jsi spokojený se svým nákupem Vojti? Jde takový nákup udělat?*

Ž: *Ne. Já mu poradím. Žáci se překřikují.*

U: *Tak jak bys to upravil, Adame? Áďo, co se ti na tom nelíbí?*

Ž: *Tam měly být tři, ale jsou tam dvě.*

U: *Takže Vojta splnil jenom ..*

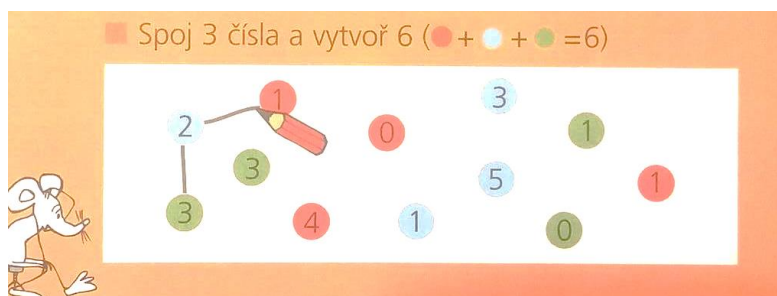
Ž: *.....můžu mu dát ještě jednu radu, kdyby odebral jedničku a vzal tohle a takhle.* Žákyně ukazuje Vojtovi květiny, které má zaměnit, aby podmínku splnil.

U: *A ted' jste spokojení, Vojto? Ale my jsme si neřekli, proč jste to Vojtovi neodsouhlasili, vždyť tam měl 6. Proč jste mu to neodsouhlasili předtím?*

Ž: *Protože byla podmínka, že tam musí být všechny tři barvy a on měl jen dvě.*

U: *Vojti, už víš? Splnil jsi jen tuhle podmínku, ale tuhle podmínku jsi neměl splněnou. A ted' už máš.* Žáci se dále střídají a nakupují květiny tak, aby splnili dvě podmínky.

U: *Ukážu vám učebnici. Co ted' budeme dělat? Kdo nám to řekne? Viz obr. 5.*



Obr. 5: Prostředí barevné trojice

Ž: *Tohle. Je to stejné.*

U: *To ti přijde stejné s tím, co jsme ted' dělali?*

Ž: *Ano to je úplně stejné. To je stejné jak kytky, akorát tu jsou místo kytiček puntíky.*

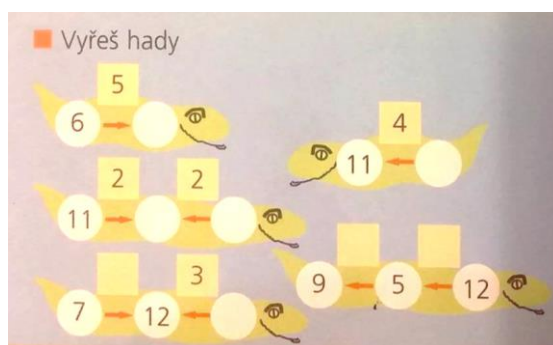
U: Co tu budeme dělat? Řekněte mi, Honziku?

Ž: Musí tam být 6.

U: Je to všechno? Není tam ještě nějaká podmínka?

Ž: Ještě nesmí být stejné barvy. Žáci dále pracují samostatně v učebnicích. Kdo bude hotový, jde na koberec tvořit své skupinky z květin. Po dokončení úlohy pokračují s dalším cvičením.

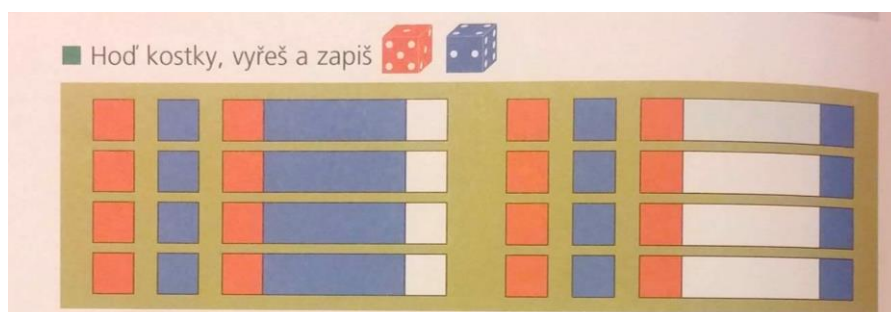
U: Ted' budeme pracovat samostatně s hady v učebnici. Viz obr. 6. Kdo bude hotov, přijde na koberec a zkontroluje si své výsledky s výsledky na koberci. Dáme si na to dvě přesýpání hodin. Kdo bude hotov dříve, vezme si drilové kartičky a bude si počítat sám v lavici.



Obr. 6: Prostředí Hady

Někdo pracuje s krokovacím pásem, někdo s počítadlem. Za hady žáci dostanou známky. Jakmile mají všichni dokončené „hady“, žáci z koberce se vrací do lavic a pokračují s dalším cvičením.

U: Ted' se pustíme do společné práce. Ve dvojicích budete házet kostkou. Čeho si při házení kostkou musíme všimnout? Řekněte mi. Jak to doplníme? Co je pro nás důležité? Co budete dělat? Kdo mi řekne?



Obr. 7: Prostředí Hod' kostkou

Ž: Budeme házet kostkou, co hodíme, tak to napíšeme do toho červeného prvního.

Při vysvětlování zrovna hází Kuba a Honza velkými kostkami.

U: Honza hodil 6 a Kuba hodil 6. Co uděláme teď? Mám dvě šestky. Viki diktuj.

Ž: Máme 6.

U: Kam to napíšu?

Ž: Do červeného rámečku.

U: Co udělám pak?

Ž: Pak 6 zapíšeme jako šipky jako 6 kroků dopředu. A teď skončíme na 12.

U: A jak víš, že je to 12? Jak víš, že jsme skončili na 12? Pojd'te dopředu za mnou. Vezmeme krokovací pás. Ověříme to. Děcka a jak mi to uděláme na tom krokovacím páse, když nám tam chybí 12? Pás máme jen do 10. Jak se o tom přesvědčíme?

Ž: Podíváme se na číselné ose na 6 a počítáme na prstech dalších 6. Skončíme na 12.

Ž: Já počítám jinak.

U: Jak?

Ž: Tak, že si řeknu 6 a pak ještě 6. Počítá po jednom a jde to odkrokovat. Na začátku si řekne 6 a krokuje, přičemž přičítá dalších 6 čísel po jedné 1, 2, 3, 4, 5, 6. Krokovací pás však nemá čísla. Když si na začátku řekne 6 a pak počítá od 1 do 6, tak neví, na kterém čísle nakonec skončil.

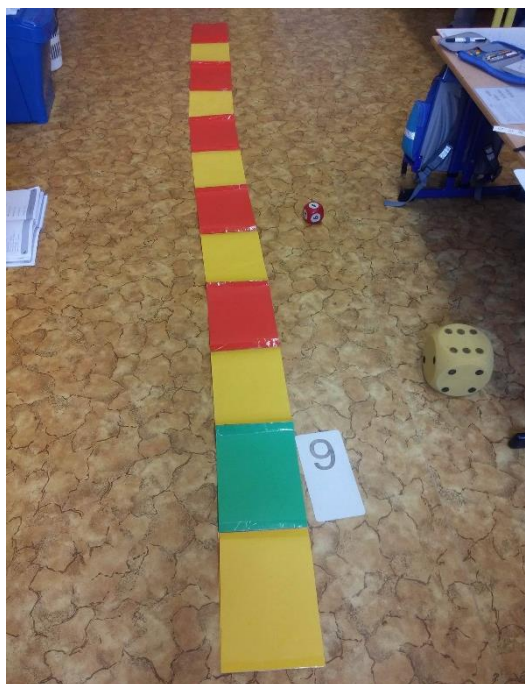
U: Aha, teď to nevychází. Ted' to nevidíme, to nám nepomohlo. Budeme počítat jinak. Jak?

Ž: Stoupneme si na 6 a počítáme 7, 8, 9, 10, 11, 12. Aby přičetl šest čísel, ukazuje si na prstech.

U: Je to děti 6 kroků? Spočítají si to. Děti, potřebujeme na krokovacím páse čísla? Podívejte. My když si stoupneme na adresu 6 (karta s číslem 6 se dá na start) a uděláme 6 kroků 7, 8, 9, 10, 11, 12, tak nepotřebujeme mít krokovací pás do dvanáctky. Dáme ke krokovacím pásu číslo 9 na start. A mám teď udělat $9 + 6$. Šlo by to děti? Jak to uděláme, když máme krokovací pás jen do 10?

Ž: Ne, nešlo.

U: *Jakto? Martine, pojd' sem a odpočítej nám to. Stoupni na 9 a počítej, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Při krokování si počítají jednotlivé kroky na prstech. Při krokování celá třída vytleskává kroky a počítá nahlas. Aha? Jde to krásně udělat. Řekneme si číslo 9 a připočítáváme si 6. Viz obr. 6. Žáci jdou poté pracovat do lavic a počítají první sloupeček ve dvojicích. Při počítání využívají v lavici svůj krokovací pás, popř. počítadlo. Viz obr. 7.*



Obr. 8: Krokovací pás



Obr. 9: Práce v prostředí Hod' kostkou

V první části hodiny se žáci seznámili s novým prostředím Barevné trojice. Příklady tohoto typu spočívají v tvorbě číselných trojic, které žák vybírá z předem

stanoveného souboru čísel. Při řešení úloh je nutné, aby vybraná čísla měla jinou barvu, přičemž musí být dodržena podmínka, např. v naší úloze musel být součet vybraných čísel 6. Zavádění tohoto prostředí odpovídalo principu vlastní zkušenosti, kdy si žáci představují, že jsou v květinářství. Každá květina přitom stojí nějaké peníze, kterým odpovídala číselná hodnota na každé květině. Žáci se nejprve seznámili s podmínkou, aby vždy vytvořili trojici, která je složená z různých barev. Jedna trojice musela obsahovat tři různě barevné květiny. Následně spočítali podle číselných hodnot, kolik by za kytici zaplatili. Jakmile byla žákům tato podmínka jasná, přidala se další. Kromě barev bylo nutné dodržet cenu kytice, kterou si paní chtěla koupit. V okamžiku, kdy žáci dokázali splnit obě podmínky, pracovali samostatně.

V další části hodiny žáci pracovali s hady. Prostředí již bylo žákům známé. Někteří žáci k výpočtům potřebovali krokovací pás nebo počítadlo. Výsledky si žáci ověřovali na koberci. Diskuse k této úloze neproběhla. Nefungovala interaktivní tabule a nebylo tedy možné, aby se všichni společně dívali na cvičení.

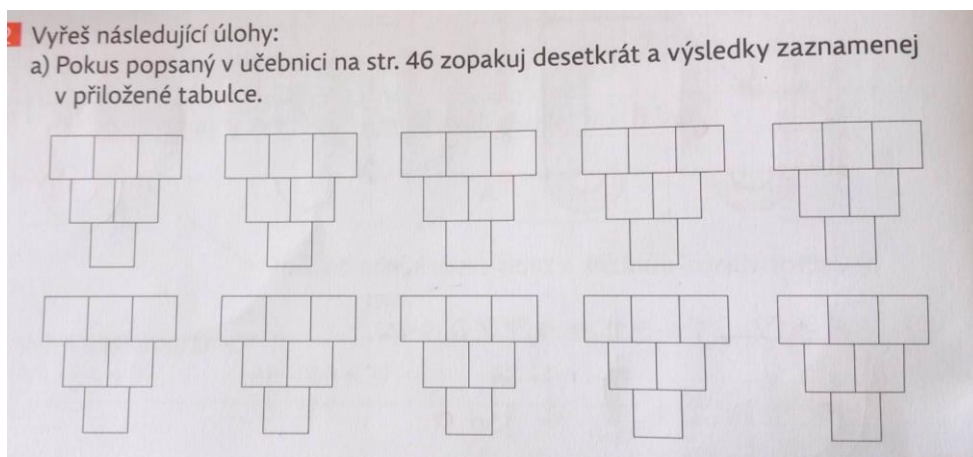
V poslední části si žáci uvědomili, že mohou jakoukoliv „adresu“ postavit na začátek krokovací pásu a mohou tak odkrokovat i vyšší čísla. Úlohy Hod' kostkou žáky seznamuje s náhodou a pravděpodobností. U těchto úloh je nutné dbát na barvy, které žákům určují, kam čísla zapsat a jak počítat.

6.3 Ukázková hodina č. 3

Tato vyučovací hodina matematiky probíhala ve 3. ročníku. Přítomni byli dva učitelé a 28 žáků. Jeden učitel vedl hodinu a druhý pouze přihlížel.

Učitel zvoní zvonkem, který signalizuje začátek hodiny a zvedá ruku, která je znamením toho, že se žáci mají ztišit a naslouchat. Rozdává jednu hrací kostku do lavice.

U: *Kdysi jsme přeskočili aktivitu, které se říká histogram. Dnes budeme zkoumat zvláštní jev. K tomu budeme potřebovat takový trojúhelník. Učitel jej kreslí na tabuli. Je to sčítací trojúhelník. Žáci mají v učebnici deset sčítacích trojúhelníků, do kterých budou zaznamenávat čísla, která jim padnou na kostce. Viz obr. 8.*



Obr. 10: Prostředí Sčítací trojúhelníky

U: *Každý udělá 10 pokusů. 10x ho vyplníte. Jak to bude vypadat? Já třeba hodím a padne mi 3, pak 4, potřetí padne 1. Doplníme nahoru do trojúhelníku. Co bude teď následovat?*

Ž: *Sečteme $3 + 4 = 7$, $4 + 1 = 5$. A pak to bude dohromady 12.*

U: *Výsledné číslo je velice důležité. Já si budu dělat statistiku. Ta vypadá tak, že budu mít tabulku od několik a do několika. Jaké nejmenší číslo tady může být?*

Ž: *Myslím, že 20.*

U: *Podívej se na tabuli. Vyšlo nám 12. Může být nejmenší 20?*

Ž: *Ne. Já si myslím, že 11, ostatní říkají 4 nebo 8. Učitel píše čísla na tabuli.*

U: *Proč 8 Kubo?*

Ž: *Když hodíme všude 1, tak $1 + 1 + 1$. Učitel zapisuje do trojúhelníku. Tak ne, to nevychází. Bude to 4.*

U: *Tak to teda rušíme. Škrtni 8 na tabuli. Přišel si na 4, i Roman. Proč? Pak to můžeš říct. Ještě se ale podíváme na tu Natálčinu 11. Proč 11? Natálka neví. Vychází ti to? Natálko, zkoušela sis to?*

Ž: Ne.

U: Dobře, podíváme se na tu 4, protože s tím souhlasí víc lidí a Roman nám vysvětlí, proč zrovna 4.

Ž: Protože když všude doplníme 1 tak, $1 + 1 = 2$, $1 + 1 = 2$ a $2 + 2 = 4$.

U: Opravdu menší nebude?

Ž: Ne, nemůže.

U: Může nám na kostce padnout 0?

Ž: Ne. To nejde. Kostka nemá 0.

U: Takže souhlasíte všichni se 4?

Ž: Ano.

U: A největší?

Ž: 18, 24. Děti se překřikují.

U: Kdo obhazuje 18? Ještě někdo? Ne a Lucka přechází z 18 na 24. Proč teda 24?

Ž: Když dáme všude 6, tak bude $6 + 6 = 12$, $6 + 6 = 12$ a $12 + 12 = 24$.

U: Takže my víme, že může být něco mezi 4 a 24. Rozhodně ne menší jak 4, protože jedničky jsou nejmenší a rozhodně ne větší jak 24, protože šestky jsou největší. Ted' potřebujeme tabulku. Najděte si v pracovním sešitě stranu 23 a 24. Uděláme 10 pokusů a poté potřebujeme tabulku, kterou máme na straně 23. Viz obr. 9. Podívejte se na ni. Jak to pak do ní budeme zaznamenávat? Pochopil ji někdo? Eliško?

Ž: Jak je dole ta tabulka, tak když třeba budeme mít 7, tak si ji jakoby zaškrtneme třeba a když padne dvakrát 7, tak si tam napíšeme dvojku.

U: Třeba když mi padne dvakrát 7, tak si k té 7 napíšeme dvojku, ano? Rozumím tomu dobře?

Ž: Ano.

U: A co když mi nepadne ani jednou 5? Co si k ní napíšu?

Ž: Nulu nebo to můžeme zaškrtnat. Když ale padne 5, tak si k ní budeme psát čísla.

U: Dobře, to je jedna možnost. Nebo si taky můžeme dělat čárky. Dáme si na to tak 10 min. Počítejte. Žáci počítají samostatně.

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Obr. 11: Tabulka

U: Uděláme to teď následovně. Někteří už mají totiž hotovo. Musíme si říct, co bude následovat. Nám jde teď o statistiku. Ta funguje nejlíp, když ji dělá hodně lidí. Tak my budeme pracovat po 4 lidech a dáte všechny vaše výsledky do tabulky. Do té druhé. Jedná se o stejnou tabulku jako byla předchozí. Viz obr. 9. Vytvoříte souhrnnou tabulku všech čtyřiceti čísel. To znamená, když tu máme třeba Míšu, Natálku, Dana a Klárku. Tak 7 padla Natálce jednou, Míšovi třikrát, Danovi dvakrát a Klárce ani jednou. Kolik napíše pod 7? Kolik dáme dohromady?

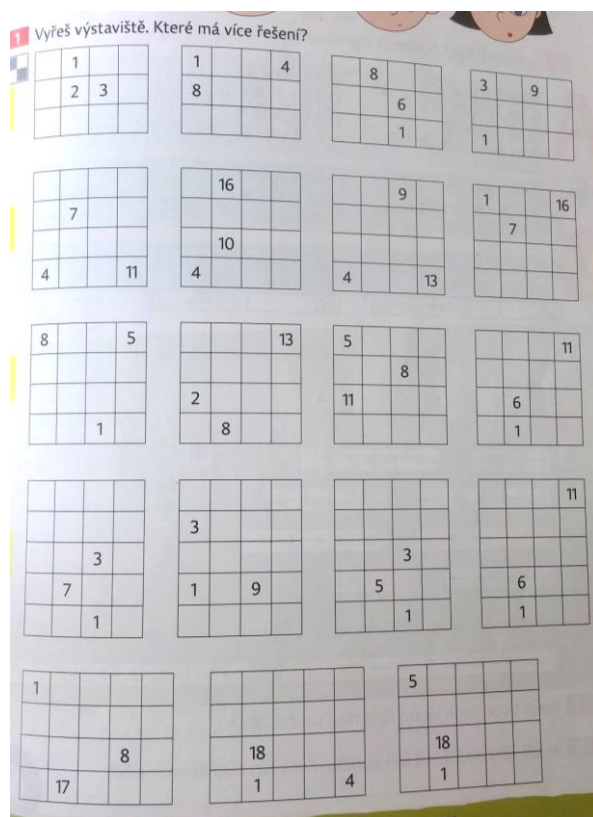
Ž: Dáme tam 6.

U: Proč?

Ž: Protože $2 + 1 + 3 = 6$.

U: Jak bude mít celá skupina hotovo, můžete to dávat dohromady. Kdo má hotovo, zkusí z učebnice na str. 107 výstaviště. Využijte tento čas na toto cvičení. Viz obr. 10.

Žáci pracují ve skupinách. Učitelé je obcházejí.



Obr. 12: Prostředí Výstaviště

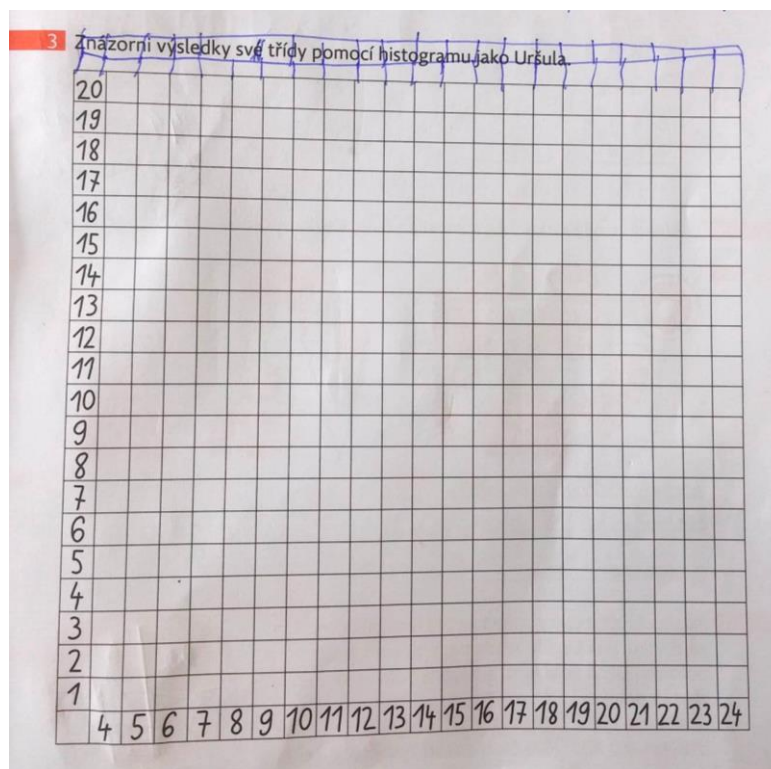
U: *Ted' to dáme úplně všechno dohromady. Vyberte si ve své skupince zástupce, svého mluvčího, který sdělí vaše výsledky. Ty si napíšeme do té třetí tabulky. Viz obr. 9.*

Na tabuli učitel píše čísla 4 - 24. Pod každé číslo se zapisuje celkový počet.

U: *Zvednou ruku mluvčí skupin. Každý si bude psát do tabulky to, co píšu já do tabulky na tabuli.*

Začínají číslem 4. Každá skupina řekne, kolikrát jim dané číslo padlo a součet se zapíše do tabulky. Tak pokračují až k číslu 24.

U: *Ted' se na to všechno podíváme. Možná už si někdo něčeho všimnul. Abychom si naše výsledky mohli dokonale prohlédnout, potřebujeme grafy. To bude vaším úkolem v závěru hodiny. Vytvořit graf a popsat, co jsme dnes objevili a vyzkoumali. Tady máte čísla od 4 do 24 a tady máte kolik vám vyšlo. Vybarvujeme čtverečky podle toho, kolikrát nám to číslo vyšlo. Například podíváme se na 4, kolikrát nám vyšla? 4x? Vybarvíme 4 čtverečky. Od spodu nahoru. Každý pracuje sám. Cvičení v učebnici viz obr. 12.*



Obr. 13: Histogram

U: *To co vytváříme se jmenuje histogram. Je to znázornění výsledku pomocí histogramu. Má někdo vysvětlení? Ty krajní výsledná čísla jsou nejmenší a ty prostřední jsou největší. A to přesně prostřední je úplně největší. Já se zeptám, dokázal by někdo zjistit, proč to tak je? Promyslete si to a dodělejte do zítřka. Dořešíme během 10 minut a pak budete psát klokana.*

Cílem celé hodiny bylo vytvoření statistiky na základě získaných dat. Žáci nejprve pracovali v prostředí součtových trojúhelníků obohacené o hody kostkou. Žáci tak pracovali také s náhodou. V hodině využívali tabulky, do kterých zaznamenávali získaná data nejen vlastní, ale také data skupiny a nakonec data celé třídy. Žáci tak pracovali samostatně i ve skupinách.

Jelikož je vytvoření grafů a práce se statistikou časově náročná, byla tomu věnována celá vyučovací hodina. Z vytvořených grafů měli žáci vypožorovat, která čísla se objevovala nejčastěji a která nejméně. Tento jev se zkoumal až v následující hodině. Žáci měli objevit, že výsledky, které se nejvíc přibližují levému či pravému okraji, tedy 4 nebo 24, padají nejméně. Naopak čísla uprostřed padají nejčastěji, zejména číslo přesně uprostřed. Tento jev je zapříčiněn tím, že je nižší pravděpodobnost, že kombinace čísel při hodu bude 1, 1, 1 nebo naopak 6, 6, 6.

6.4 Shrnutí

Na základě ukázkových hodin realizované v 1., 3. a 4. ročníku si lze všimnout, že v hodinách je velice důležitá role učitele a žáka a komunikace mezi nimi. Nejde pouze o práci v jednotlivých prostředích, nýbrž o celek, který je založen na 12 klíčových principech, které je třeba respektovat a řídit se jimi. Součástí je sociální aspekt, který je v hodinách matematiky patrný. Žáci jsou zde aktivní a sami objevují nové poznatky, ke kterým je učitel v roli moderátora vede skrze promyšlené otázky. Diskuse řízené učitelem jsou tedy velice podstatnou částí vyučování, a to již v 1. ročníku.

Závěr

Tvorba diplomové práce zabývající se problematikou vyučování orientované na budování schémat pro mě byla velkým přínosem. Obohatila mě nejen skrze teoretickou část, ve které jsem shrnula teoretická východiska vztahující se k metodě VOBS, ale také po stránce praktické. Během mého působení na ZŠ Horka nad Moravou, jsem získala rozmanité zkušenosti nejen s konstruktivistickým přístupem k výuce, ale také se samotnou matematikou prof. Hejného, kterou jsem měla možnost nejen pozorovat ale také vyučovat. Propojení teoretické a praktické části mi pomohlo k vytvoření ucelené představy o matematice prof. Hejného, které bych se ve své budoucí pedagogické praxi chtěla dále věnovat.

Cílem teoretické části bylo shrnout teoretické poznatky podstatné pro vyjasnění problematiky vyučování orientované na budování schémat. Vymezení konstruktivismu, teorie generických modelů a Hejného metody mělo za cíl vytvořit oporu a východiska pro jevy, jenž se vyskytují v praktické části diplomové práce. Stěžejní roli v teoretické části má Hejného metoda, její vývoj, principy a zásady. V práci jsem se také věnovala učebnicím, které byly k výuce matematiky prof. Hejného vytvořeny, dále jednotlivým prostředím, se kterými se v učebnicích můžeme setkat.

Praktická část diplomové práce byla rozdělena na dvě části. Cílem první části bylo zjistit postoj studentů oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého k Hejného metodě. Sběr potřebných dat jsem uskutečnila prostřednictvím dotazníkového šetření. Dílčími cíli této části bylo zjistit, zda jsou studenti dostatečně informováni o Hejného metodě, jaká je jejich připravenost tuto metodu vyučovat a zda by jí ve své budoucí pedagogické praxi chtěli matematiku prof. Hejného vyučovat. Výsledky výzkumného šetření mohu shrnout tak, že přestože mají studenti o matematice prof. Hejného určité povědomí, jejich informovanost o této problematice však není dostačující. Z toho vyplývá, že studenti nedokáží jednoznačně odpovědět, zda by ve své budoucí praxi Hejného matematiku chtěli vyučovat či naopak. Vzhledem k ne příliš ucelené představě o matematice prof. Hejného a nízké informovanosti, se studenti taktéž necítí být připraveni touto metodou matematiku vyučovat.

Druhá část je zaměřena na ukázkové hodiny matematiky prof. Hejného uskutečněné v 1., 3., a 4. ročníku. Cílem této části je přiblížit práci žáků jednotlivých ročníků v různých prostředích a komunikaci mezi učitelem a žákem. V ukázkových hodinách je zachyceno

nejen seznámení žáků s novým prostředím, ale také objev matematické zákonitosti a práce ve známých prostředích.

Tato diplomová práce může sloužit jako zdroj informací o matematice prof. Hejného a být pomocníkem pro tvorbu hlubšího a ucelenějšího vhledu do této problematiky.

SEZNAM LITERATURY

1. DŽIBRÁN, CH. *Prorok*. V tomto překladu vyd. 1. Praha: Academia, 2002, 116 s.,
čb. Obr. ISBN 8020010157.
2. HARTL, P., a HARTLOVÁ, H.. *Psychologický slovník*. Třetí, aktualizované vydání.
Praha: Portál, 2015. ISBN 978-80-262-0873-0.
3. HEJNÝ, M. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK.
Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-824-0.
4. HEJNÝ, M. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK,
ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-940-7.
5. HEJNÝ, M. Schéma – pilíř matematické znalosti. In HEJNÝ, M., KVASZ, L.,
VAGASKÝ, M. *Pytagoras 2007*. Zborník příspěvků, Bratislava : p-Mat, n.o.
Bratislava, 2008, s. 3-17, ISBN 978-80-89370-00-9.
6. HEJNÝ, M. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1.
stupně*. V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 978-80-
7290-776-2.
7. HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J.
Matematika pro 1. ročník základní školy: Příručka pro učitele. 1. vyd. Plzeň: Fraus,
2007. ISBN 978-807-2386-284.
8. HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J.
Matematika: pro 1. ročník základní školy. Ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň:
Fraus, 2007-. ISBN 978-80-7238-626-0.

9. HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika: pro 1. ročník základní školy*. Ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2007-. ISBN 978-80-7238-627-7.
10. HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika: pro 1. ročník základní školy*. Ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2007-. ISBN 978-80-7238-627-7.
11. HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Třetí vydání. Praha: Portál, 2001. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 978-80-262-0901-0.
12. HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Konstruktivní přístupy k vyučování matematice*. In: Matematika - fyzika - informatika, 7, 1998.
13. HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., VONDROVÁ, N. (eds.). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3.
14. HOŠPESOVÁ, A., VONDROVÁ, N., TICHÁ, M. ed. *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2007. ISBN 978-80-7394-052-2.
15. CHRÁSKA, Mi. *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu*. 2., aktualizované vydání. Praha: Grada, 2016. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-5326-3.
16. KALHOUS, Z., OBST, O. *Školní didaktika*. Vyd. 2. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-571-4.

17. MAZÁČOVÁ, N. *Vybrané pedagogické inovace v současné škole*. Praha : Pedagogická fakulta UK, 2008. ISBN 978-80-7290-373-3.
18. MOLNÁR, J., SCHUBERTO VÁ, S., VANĚK, V. *Konstruktivismus ve vyučování matematice: [učební text]*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2008. ISBN 978-80-244-1883-4.
19. PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŠ, J. *Pedagogický slovník*. 7., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Portál, 2013. ISBN 978-80-262-0403-9.
20. SMEJKALOVÁ, K. *K pojetí konstruktivismu jakožto modernímu paradigmatu vzdělávání. PAIDEIA: PHILOSOPHICAL E-JOURNAL OF CHARLES UNIVERSITY*. 2014, XI.
21. STEHLÍKOVÁ, N., CACHOVÁ, J. *Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe*. In: Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP. Praha: JČMF, 2006.
22. STEHLÍKOVÁ, N., ULRYCHOVÁ, M. *Žákovské konstrukce poznatků v matematice. Scientia in educatione*. 2011, 2(2). ISSN 1804-7106.

SEZNAM PRAMENŮ

1. 12 klíčových principů metody. *Hejného metoda: Zasloužená radost z poznání* [online]. 2017 [cit. 2017-01-23]. Dostupné z: <http://www.h-mat.cz/hejneho-metoda#vyvoj>
2. Bomero v á – webové stránky pro studenty i učitele [online]. [cit. 2017-01-21]. Dostupné z: <http://bomero va.cz/>

3. Fraus: Učebnice. *Matematika - metoda prof. M. Hejného: Autorský tým* [online]. Plzeň: Fraus, 2015 [cit. 2017-01-23]. Dostupné z: <https://ucebnice.fraus.cz/cs/nezavisle-stranky/matematika-metoda-prof.-hejneho>
4. Fraus: Učebnice. *Matematika - metoda prof. M. Hejného: Vysvětlení nové koncepce matematiky* [online]. Plzeň: Fraus, 2015 [cit. 2017-01-23]. Dostupné z: <https://ucebnice.fraus.cz/cs/nezavisle-stranky/matematika-metoda-prof.-hejneho>
5. Hejného metoda - pozvánka k prozkoumání principů. *In Youtube* [online]. 2014 [cit. 2017-01-23]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=lcC3bVx31SI>
6. Hejného metoda výuky matematiky. *In Youtube* [online]. 2015 [cit. 2017-01-20]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=Pi09g-gq-GE>
7. HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, M., SLEZÁKOVÁ, J., BOMEROVÁ, E., MICHNOVÁ, J. *Matematika - naučme děti myslet: Příručka pro rodiče* [online]. Fraus, 2012 [cit. 2017-01-23]. Dostupné z: <https://ucebnice.fraus.cz/cs/nezavisle-stranky/matematika-metoda-prof.-hejneho>
8. H-MAT,O.P.S. *Matematika, která baví* [online]. MF Dnes, 2015 [cit. 2017-01-26]. Dostupné z: <http://www.h-mat.cz/sites/default/files/kestazeni/hejnyMatematikaKteraBavi.pdf>
9. MÁLKOVÁ, P. *Příručka pro rodiče žáků s výukou matematiky podle metody prof. Milana Hejného* [online]. Ždírec nad Doubravou, 2014 [cit. 2017-01-24]. Dostupné z: <https://ucebnice.fraus.cz/cs/nezavisle-stranky/matematika-metoda-prof.-hejneho>

10. Matematika - metoda prof. M. Hejného: Autorský tým. In: *Fraus: Učebnice* [online]. 2015 [cit. 2017-01-23]. Dostupné z: <https://ucebnice.fraus.cz/cs/nezavisle-stranky/matematika-metoda-prof.-hejneho>
11. Matematika - metoda prof. M. Hejného: Vysvětlení nové koncepce matematiky. In: *Fraus: Učebnice* [online]. 2015 [cit. 2017-01-23]. Dostupné z: <https://ucebnice.fraus.cz/cs/nezavisle-stranky/matematika-metoda-prof.-hejneho>
12. Matematika 1. ročník, Hejného metoda, Prostředí autobus. In *Youtube* [online]. 2016 [cit. 2017-01-19]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=pJ-E4dnKu2w&t=140s>
13. Matematika prof. Hejného - Práce v prostředích. In: *ZŠ Eden* [online]. Praha, 2015 [cit. 2017-01-24]. Dostupné z: <http://www.zseden.cz/wp-content/uploads/2015/06/O-matematice-prof.-Hejn%C3%A9ho.pdf>
14. Milan Hejný: Výuka matematiky může přispět k rozvoji demokracie. In *Youtube* [online]. 2015 [cit. 2017-01-19]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=WB_uHG2Hg-w
15. *Praktická příručka pro učitele: Pět zásad výuky Hejného metodou* [online]. 2014 [cit. 2017-01-23]. Dostupné z: <http://www.h-mat.cz/pro-ucitele>
16. Rozhovor s prof. Milanem Hejným. In *Youtube* [online]. 2014 [cit. 2017-01-23]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=IQZHUlpVm-0>
17. Rozhovor s prof. Milanem Hejným. In *Youtube* [online]. 2014 [cit. 2017-01-23]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=IQZHUlpVm-0&t=757s>
18. SLEZÁKOVÁ, J., ŠUBRTOVÁ, E. *Matematika všemi smysly aneb Hejného metoda v MŠ: pokus o malou příručku pro kreativní pedagogy* [online]. Praha, 2015 [cit.

2017-01-24].

Dostupné

z:

http://www.hmat.cz/sites/default/files/kestazeni/Brozura_Hejneho_metoda-web.pdf

19. SLEZÁKOVÁ, J., SOBOLOVÁ, R. *Principy konstruktivisticky orientovaného vzdělávání dětí na ZŠ: Začít spolu a Hejného metoda metodická příručka* [online]. Praha, 2015 [cit. 2017-01-23]. Dostupné z: <http://zacitspolu.eu/sluzby/pro-inspiraci-a-studium>
20. Učebnice a pomůcky. *Hejného metoda: Zasloužená radost z poznávání* [online]. 2017 [cit. 2017-01-23]. Dostupné z: <http://www.h-mat.cz/ucebnice>
21. Vývoj Hejného metody. *Hejného metoda: Zasloužená radost z poznání* [online]. 2016 [cit. 2017-01-23]. Dostupné z: <http://www.h-mat.cz/hejneho-metoda#vyvoj>

SEZNAM POUŽITÝCH SKRATEK A SYMBOLŮ

atd.	a tak dále
tzn.	to znamená
tzv.	takzvaný
viz	imperativ od slovesa vidět
VŠ	vysoká škola
s.	strana
kol.	kolektiv
resp.	respektive
apod.	a podobně
VOBS	vyučování orientované na budování schémat
MŠMT	Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy
RVP ZV	Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání
ČR	Česká republika

SEZNAM TABULEK, GRAFŮ, SCHÉMAT A PŘÍLOH

Tab. č. 1: Počet studentů, kteří se o metodě dověděli v rámci výuky na VŠ

Tab. č. 2: Počet studentů, kteří znají učebnice Fraus

Tab. č. 3: Počty studentů, kteří s učebnicemi Fraus dle Hejného metody pracovali

Tab. č. 4: Informovanost studentů o matematice prof. Hejného

Tab. č. 5: Připravenost studentů na výuku matematiky prof. Hejného

Tab. č. 6: Procentuální vyjádření odpovědí studentů

Tab. č. 7: Názor studentů na učebnice Fraus podle ročníku a formy studia

Graf č. 1: Genderové složení respondentů

Graf č. 2: Zastoupení respondentů v jednotlivých ročnících

Graf č. 3, 3a, 3b: Složení respondentů dle formy studia

Graf č. 4: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 1

Graf č. 5: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 2

Graf č. 6: Odpovědi na otázku č. 3

Graf č. 7: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 4

Graf č. 8: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 5

Graf č. 9: Způsob, kterým se studenti s učebnicemi setkali

Graf č. 10: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 6

Graf č. 11: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 7

Graf č. 12: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 8

Graf č. 13: Odpovědi vázané s odpovědí ano na otázku č. 8

Graf č. 14: Odpovědi na otázku č. 9

Graf č. 15: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 10

Graf č. 16: Procentuální vyjádření odpovědí na otázku č. 11

Graf č. 17: Odpovědi na otázku č. 12

Graf č. 18: Odpovědi na otázku č. 13

Graf č. 19: Celková bodová skóre

Obrázek č. 1: Modelování trojúhelníků ze dřívěk

Obrázek č. 2: Dláždění podlahy

Obrázek č. 3: Síť krychle

Obrázek č. 4: Prostředí Barevné trojice

Obrázek č. 5: Prostředí Barevné trojice

Obrázek č. 6: Prostředí Hadi

Obrázek č. 7: Prostředí hod' kostky

Obrázek č. 8: Krokovací pás

Obrázek č. 9: Žáci v prostředí Hod' kostky

Obrázek č. 10: Prostředí Sčítací trojúhelníky

Obrázek č. 11: Tabulka

Obrázek č. 12: Prostředí Výstaviště

Obrázek č. 13: Histogram

Schéma č. 1 – 5 etap žákova poznávacího procesu

Příloha č. 1 – Dotazník k výzkumnému šetření

Příloha č. 2 - Odpovědi na otázku Co si představujete pod pojmem konstruktivistická výuka matematiky?

Příloha č. 1 – Dotazník k výzkumnému šetření

Dotazník

Vážené studentky/studenti, dovoluji si Vás požádat o spolupráci při výzkumu, který bude sloužit pro zpracování diplomové práce. Dotazník je anonymní, zjištěné údaje jsou důvěrné a budou sloužit pouze pro vědecké účely. Prosím Vás o pravdivé vyplnění. Děkuji za Váš čas i odpovědi.

Prosím zakroužkujte:

1. **Pohlaví:** muž x žena
2. **Studium:**

prezenční x kombinované
3. **Ročník:** _____

1. Co si představujete pod pojmem *konstruktivistická výuka matematiky*?
-

2. Znáte výuku matematiky dle prof. Hejného, tzv. „Hejného metodu“ ?
ano x ne

3. Z kterých zdrojů jste o této metodě získali informace?
 - a. televize
 - b. noviny / časopis
 - c. výuka na VŠ
 - d. pedagogická praxe
 - e. z jiného zdroje: _____

4. Znáte učebnice matematiky FRAUS, které jsou založené na matematice dle prof. Hejného?
ano x ne

5. Pracovali jste už s těmito učebnicemi?
 - a. ano
 1. na praxi
 2. při výuce matematiky na VŠ
 - b. ne
 - c. jiné: _____

6. Získali jste při studiu na vysoké škole dostatečné množství informací o výuce matematiky dle prof. Hejného?
ano x ne

7. Myslíte si, že jste připraveni vyučovat matematiku dle prof. Hejného?
 - a. ano

- b. částečně
- c. ne

8. Myslíte si, že je pro Vás, jako pro budoucí učitele, důležité znát koncepci výuky matematiky dle prof. Hejného?

- a. ano, protože:
 - 1. učitel by měl mít přehled o tom, jaké možnosti výuky se nabízejí
 - 2. roste poptávka ZŠ po výuce matematiky dle prof. Hejného
 - 3. jiné: _____
- b. ne

9. Chtěli byste ve své budoucí praxi vyučovat matematiku dle prof. Hejného?

- a. ano
 - 1. tato výuka mi přijde efektivní
 - 2. jiné: _____
- b. nevím
- c. ne
 - 1. metoda se mi nelíbí
 - 2. nemám o ní dostatek informací
 - 3. jiné: _____

10. Líbí se vám učebnice matematiky FRAUS, které jsou založené na „Hejného metodě“?

- a. ano
- b. nevím, nikdy jsem je neviděl/a
- c. ne

11. Co konkrétního se Vám na učebnicích líbí?

- a. rozdělení do prostředí
- b. netradiční úlohy
- c. barevnost
- d. názornost
- e. jiné: _____

12. Co konkrétního se Vám na učebnicích nelíbí?

- a. rozdělení do prostředí
- b. netradiční úlohy
- c. barevnost
- d. názornost
- e. jiné: _____

13. Ohodnoťte podle důležitosti ve výuce matematiky (5 – nejdůležitější, 1 – nejméně důležité).

- | | | | | | |
|--------------------|---|---|---|---|---|
| a) Činnostní učení | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------------------|---|---|---|---|---|

b) Motivace	1	2	3	4	5	
c) Rozvoj paměti		1	2	3	4	5
d) Řešení problémů	1	2	3	4	5	
e) Rozvoj logického myšlení	1	2	3	4	5	
f) Vlastní zkušenost	1	2	3	4	5	
g) Využití algoritmů	1	2	3	4	5	
h) Aplikace matematiky v reálných situacích		1	2	3	4	5
i) Početní operace	1	2	3	4	5	

Příloha č. 2 - Odpovědi na otázku č. 1: *Co si představujete pod pojmem konstruktivistická výuka matematiky?*

- Matematika, kde si žáci přichází na řešení, objevují, spolupracují, hledají postupy
- nepředkládáš mu hotové poznatky, ale nechá je dojít k nim samostatně, učitel je jen rádce, aktivní je žák
- výuka, kde je na prvním místě aktivita žáka, tříázový model učení, rozvíjí se kritické myšlení, žák je vyslyšen, výuka založená na pokusech a tvořivosti
- žák přichází na způsob řešení/postup sám. Učitel pouze připravuje vhodné prostředí
- žák sám na základě svých získaných zkušeností, konceptů a prekonceptů konstruuje teorii matematiky, pojmy, vztahy mezi nimi
- žáci přicházejí na řešení úlohy sami, bez návodu
- matematika, ve které jsou žáci aktivní, sami ji konstruují
- žáci řeší tvořivě matematické příklady a aktivity. přijdou si na vše sami
- aktivní žák, učení praxí, učitel rádce
- aktivní žák, přijde si na to sám, učitel pouze rádce
- žáci si přijdou na všechno sami, žáci tvoří
- učitel je poradcem, žák je aktivní
- učitel je poradce, žák pracuje aktivně, sám získává znalosti
- žák si vytváří znalosti sám
- žák objevuje sám, učitel je poradcem
- Hejného matematika
- žák je aktivní
- metoda Hejný, žák je aktivní
- učitel je poradce, žák je aktivní
- založená na vlastním poznání, praxi

- metoda Hejný
- výuka dle Hejného metody
- metoda Hejného, žák si hledá znalosti sám
- Učitel je poradce
- učitel je facilitátor
- Učitel je více poradce žákům
- učitel je poradcem pro děti
- netradiční výuka s aktivním zapojením žáků
- žák rozvíjí své poznání, je aktivní, zahrnuje to např. netradiční úlohy, ..
- metody výuky, kde se žák aktivně zapojuje, uplatňuje své zkušenosti
- samostatné objevování
- žák získává poznatky nějakou vlastní zkušeností
- Výuka MAT založená na zkušenosti
- matematika založena na praxi, zkušenosti. žák rozumí.
- aplikace reálného života na matematiku
- aplikace reálného života v matematice
- Využívají se běžné problémy ze života
- žáci využijí svých dovedností v běžném životě
- důležitost propojení s praktickými činnostmi
- výuka opřená o praktické zkušenosti s postupně stupňovanou náročností
- že mě bude obohacovat informacemi - vycházíme z praxe a ze života
- tvořivá, žák tvoří úlohy podle svých výsledků
- řešení problémů
- řešení problémů ze života (2x)
- matematické příklady použitelné v praxi - reálných situacích
- matematická situace v reálném životě
- nepodávání pouze teorie, ale pomocí problémů přijít na řešení
- učení vyzkoušením "prací"
- zaměřená na manipulativní činnost, tvorbu úkolů
- manipulace s pomůckami, předměty, smysluplná a praktická
- rozvoj tvořivého myšlení, méně teorie, méně drilu
- netradiční vyučování v matematice

- výuka matematiky netradičně
- netradiční úlohy, kritické myšlení, nestandardní úlohy
- něco netradičního
- Vede žáky k přemýšlení
- neexistuje pouze jeden způsob řešení
- názornost, posloupnost, logika
- že budeme vyučovat názorně
- Výuka s doplněním o hravé prvky, které zaujmou a navnadí děti
- opak transmisivního
- stavíme různá témata do celku
- podle určitého sestavení, souvislostí
- navazování a rozvíjení témat
- geometrie, planimetrie, stereometrie
- postupně vyučovaná matematika
- určitý typ výuky matematiky
- geometrie
- výuka, kde je daný pevně cíl a osnovy, které k němu vedou

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Vendula Tomanová
Katedra:	Matematiky
Vedoucí práce:	RNDr. Martina Uhlířová, Ph.D.
Rok obhajoby:	2017

Název práce:	Matematika jako cesta k myšlení a řešení problémů
Název v angličtině:	Mathematics as a Path to Thinking and Problem Solving
Anotace práce:	Diplomová práce pojednává o vyučování orientovaném na budování schémat. Teoretická část je tvořena čtyřmi hlavními kapitolami, které se zabývají konstruktivistickým přístupem ve vyučování matematiky, Teorií generických modelů a problematikou formalismu ve vyučování. Klíčovou roli v diplomové sehrává metoda VOBS, její vývoj, principy a zásady, dále také didaktická matematická prostředí, která jsou s metodou pevně spjata. Praktická část je rozdělena na dvě části, z nichž první zkoumá postoj studentů oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ k matematice prof. Hejného pomocí dotazníkového šetření. Druhá část je zaměřena na ukázkové hodiny matematiky prof. Hejného na 1. stupni ZŠ získané prostřednictvím pozorování.
Klíčová slova:	Konstruktivismus, Teorie generických modelů, Vyučování orientované na budování schémat, Hejného metoda, prostředí
Anotace v angličtině:	The diploma thesis deal with scheme - oriented education. The theoretical part consists of the main four parts, which includes the constructive ways of teaching mathematics, the theory of generic models and the issues 's formalism of education. The important part in this thesis concludes the methodology of VOBS, particularly the progress, principles and rules, and area of didactical mathematics, which are necessary. The practical part is divided into two chapters, the first of them explores the student's view of the subject of Teaching first grade in primary school with questionnaire form of prof. Hejny 's technique. Last but not least is the second part which focuses on the observing of mathematics lessons with prof. Hejny 's technique in the first grade of primary school.

Klíčová slova v angličtině:	Constructivism, Theory of generic models, Scheme - oriented education, Hejny method, environment
Přílohy vázané v práci:	Příloha č. 1 – Dotazník Příloha č. 2 – Odpovědi na otázku č. 1
Rozsah práce:	109
Jazyk práce:	Čeština