

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně



Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Horymír Netuka, Ph.D.**

Vypracoval: **Michala Manová**

Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika

Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovníctví

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2015

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Michala Manová

Název práce: Řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Horymír Netuka, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2015

Abstrakt: Bakalářská práce se zaměřuje na řešení algebraických rovnic třetího a čtvrtého stupně. Práce začíná historií těchto typů rovnic. Dále jsou zde odvozeny Cardanovy vzorce pro řešení kubických a bikvadratických rovnic. Protože algebraické řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně je poněkud těžkopádné, je tato práce doplněna numerickými metodami, které jsou vhodné pro určování kořenů polynomu. Takových metod existuje spousta, zde jsou popsány tři metody: Graeffova – Lobačovského metoda, Laguerova metoda a metoda regula falsi. Pro názornost je každá metoda doplněna vypočítanými příklady s grafy, které jsou vykresleny v matematickém programu MATLAB.

Klíčová slova: Girolamo Cardano, kubická rovnice, bikvadratická rovnice, Graeffova - Lobačovského metoda, Laguerova metoda, metoda regula falsi

Počet stran: 36

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Michala Manova

Title: Solution of the third and fourth degree equations

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Horymir Netuka, Ph.D.

The year of presentation: 2015

Abstract: The bachelor thesis concentrates on solving algebraic equations of the third and the fourth degree. The work starts with history of these equation types. Further there are derived Cardan formulae for solving cubic and biquadratic equations. As algebraic solving of the equations of the third and the fourth degree is a bit laboured, this work is completed by numerical methods suitable for determination of polynomial roots. There are a lot of these methods, in this work I describe three of them: Graeffe – Lobachevsky method, Laguerre method and regula falsi method. For better clearness each method is completed by calculated problems with graphs drawn in a mathematical program called MATLAB.

Key words: Girolamo Cardano, cubic equations, biquadratic equations, Graeffe - Lobachevsky method, Laguerre method, regula falsi method

Number of pages: 36

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně, pod vedením pana RNDr. Horymíra Netuky, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne
.....
podpis

Obsah

Seznam použitých označení a symbolů	7
Úvod	8
1 Historie řešení algebraických rovnic třetího a čtvrtého stupně	9
2 Řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně	13
2.1 Základní pojmy	13
2.2 Řešení obecné kubické rovnice	15
2.2.1 Příklad	18
2.3 Řešení obecné bikvadratické rovnice	21
3 Numerické metody řešení algebraických rovnic	24
3.1 Hornerův algoritmus	24
3.2 Graeffova-Lobačovského metoda v případě reálných kořenů	25
3.3 Laguerrova metoda	27
3.4 Metoda regula falsi	31
Závěr	35
Literatura	36

Poděkování

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu práce RNDr. Horymíru Netukovi, Ph.D.,
za ochotu, rady, čas a pomoc při zpracování této bakalářské práce

Seznam použitých označení a symbolů

$\mathbb{R}$	...	množina reálných čísel
$\mathbb{N}$	...	množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0$	...	množina přirozených čísel včetně nuly
$\mathbb{C}$	...	množina komplexních čísel
$\mathbb{I}$	...	množina iracionálních čísel
$\mathbb{Z}$	...	množina celých čísel

Úvod

Hlavním cílem mé bakalářské práce je seznámit se s problematikou řešení algebraických rovnic, které lze vyřešit pomocí vzorců. Již na základní škole jsem se seznámila s vzorci na řešení algebraických rovnic prvního a druhého stupně. S problematikou rovnic vyššího stupně jsem se doposud nezabývala, a proto jsem si jako téma své bakalářské práce vybrala Řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně. Díky tomuto tématu můžu prozkoumat metody jejich řešení. Rovnice vyššího stupně pomocí vzorců nelze řešit. To dokázali v 19. století matematici Niels Henrik Abel a Évariste Galois.

V první řadě jsem se zaměřila na historii řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně. Postupy vedoucí k nalezení kořenů těchto typů algebraických rovnic byly velmi důležité pro další vývoj matematiky. Největší pokroky ohledně řešení kubických rovnic nastaly v první polovině 16. století. Nejvíce se o ně zasloužili italští matematici Scipione dal Ferro, Niccolò Fontana zvaný Tartaglia a Girolamo Cardano o jejichž přínosu je více napsáno v první kapitole.

Druhá kapitola je věnována řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně právě pomocí vzorců. Jsou zde popsány Cardanovy vzorce pro řešení kubických rovnic (rovnice třetího stupně), a také pro řešení bikvadratických rovnic (rovnice čtvrtého stupně). Vzorce pro kubické rovnice jsem doplnila o řešený příklad. Algebraické řešení bikvadratických rovnic má význam pouze teoretický, a proto zde příklad neuvádím.

Poslední kapitola je věnována numerickým metodám pro hledání reálných kořenů polynomů. Existuje mnoho numerických metod, které se zabývají touto problematikou. Já jsem si pro určování reálných kořenů polynomů třetího a čtvrtého stupně zvolila Graeffovo-Lobačovského metodu, Laguerrovu metodu a jako poslední se věnuji metodě regula falsi. U každé metody uvádím algoritmus jejího řešení, který je doplněn o příklad.

Každý řešený příklad je pro názornost doplněn grafem, který je vykreslen v matematickém programu MATLAB.

1. Historie řešení algebraických rovnic třetího a čtvrtého stupně

Úlohy, související s algebraickými rovnicemi, řešili již nejstarší civilizace. Nejednalo se však o algebraické rovnice v podobě, které je známe. Problémy, se kterými se potýkali, řešili pomocí slovně popsanych postupů, které dnes obvykle řešíme pomocí algebraických rovnic.

Nová fáze matematiky začala v Itálii, kolem roku 1500. Františkánský mnich Luca Pacioli (1445-1514?), který vyučoval matematiku v Římě, Perugii, Neapoli, Florencii, Bologni a Benátkách, v roce 1494 vydal italsky psanou knihu *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita* (Souhrn znalostí z aritmetiky, geometrie, poměrů a úměr), která je nyní známá jako *Suma*. Jedná se o jednu z prvních tištěných matematických knih. Neukazuje však žádné nové postupy, neboť se jedná spíše o shrnutí dosud známých poznatků z aritmetiky, účetnictví, algebry, kupeckých počtů, geometrie a trigonometrie. Přispěla však k rozvoji symboliky a také k postupnému uznání záporných čísel. Kniha končí pesimistickou poznámkou, že rovnice typu

$$x^3 + mx = n \quad \text{a} \quad x^3 + n = mx \quad (1)$$

ani kvadraturu kruhu zatím neumíme řešit.

Největší pokroky ohledně řešení kubických rovnic nastaly v první polovině 16. století. Nejvíce se o ně zasloužili italští matematici Scipione dal Ferro¹, Niccolò Fontana zvaný Tartaglia² a Girolamo Cardano³ (čerpáno z [1],[2]).

Scipione dal Ferro se narodil 6. února 1465 v Bologni v rodině papírníka. Vystudoval Univerzitu v Bologni, na které po ukončení studia působil jako profesor matematiky. Zabýval se zde algebraickým řešením kubických rovnic.

Počátkem 16. století se mu podařilo přijít na metodu řešení kubické rovnice

¹Jeho jméno se také vyskytuje ve tvaru Scipione del Ferro, Scipio Ferro, Scipio Ferreus.

²Tartaglia v překladu znamená "Koktal". Niccolò Fontana tuhle přezdívku získat proto, že v dětství utrpěl těžký úraz hrtanu od úderu mečem a při mluvě zadržával.

³Též Gerolamo Cardano, Geronimo Cardan, Hieronymus Cardanus.

ve tvaru

$$x^3 + mx = n, \quad \text{kde } m, n > 0 \quad (2)$$

O tom, zda uměl řešit i ostatní typy rovnic, se vedly dlouhé spory, jednoznačná odpověď však nebyla nikdy nalezena. Ve skutečnosti na tom ale nezáleží, protože každou obecnou kubickou rovnicí tvaru

$$y^3 - by^2 + cy - d = 0 \quad (3)$$

je možno pomocí substituce $y = x + \frac{b}{3}$ převést na redukovaný tvar

$$x^3 + mx = n, \quad (4)$$

kde $m = c - \frac{b^2}{3}$ a $n = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}$.

Dal Ferro objevil řešení kubické rovnice v roce 1515, ale utajoval ho. Až těsně před svou smrtí, v roce 1516, prozradil metodu řešení svému studentovi Antoniovii Fiorovi.

Fiore však existenci metody nechtěl držet v tajnosti, a proto se po Bologni brzy začala šířit zpráva, že kubické rovnice byly vyřešeny. Konec všem dohadům, fámám a spekulacím o kubických rovnicích učinil Niccolò Fontana zvaný Tartaglia, když se mu podařilo objevit metodu řešení kubické rovnice tvaru

$$x^3 + mx^2 = n, \quad \text{kde } m, n > 0 \quad (5)$$

a o její existenci informoval veřejnost.

Dne 12. března 1535 se Tartaglia utkal s Fiorem ve veřejné soutěži, kde pravidla stanovila, že jeden druhému připravili třicet odlišných úloh, na jejichž řešení měl každý 40 - 50 dní. Tartaglia prý vyřešil všechny během dvou hodin a Fiore nevyřešil ani jednu úlohu. Druhý den po soutěži Tartaglia našel i metodu řešení kubické rovnice typu

$$x^3 = mx + n, \quad \text{kde } m, n > 0 \quad (6)$$

V roce 1536 se dozvěděl Girolamo Cardano, že Tartaglia zná metodu řešení kubických rovnic. Proto, když začal uvažovat o sepsání matematické knihy, která měla být encyklopedií algebry a aritmetiky, napsal v roce 1539 Tartagliovi dopis

s prosbou, zda by mu neprozradil metodu řešení kubických rovnic. Tartaglia mu sice odpověděl, metodu mu však neprozradil. Cardano ho proto pozval na návštěvu do Milána a po dlouhém přesvědčování ho přiměl, aby ho s metodou seznámil. Cardano přísahal, že metodu nikomu neprozradí, a tak mu Tartaglia sdělil návod, který měl formu básně. Cardano však z básně metodu nepochopil, a proto se obrátil na Tartaglia s žádostí o podrobnější vysvětlení. Po té, co mu Cardano opět slíbil, že dokud ji on sám nevydá, nebude ji publikovat mu Tartaglia metodu prozradil. Cardano však slib nedodržel a v roce 1545 popsal podrobně metodu řešení kubických rovnic v knize *Ars Magna* (Veliké umění), která byla vydána v Norimberku a byla věnována hlavně problematice řešení algebraických rovnic prvního až čtvrtého stupně.

Cardanovo řešení rovnice $x^3 + mx = n$ v moderním značení bylo následující: Všiml si, že platí

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3 \quad (7)$$

a pokud a, b vyhovuje vztahům

$$3ab = m \quad \text{a} \quad a^3 - b^3 = n \quad (8)$$

potom $(a - b)$ je řešením rovnice

$$x^3 + mx = n. \quad (9)$$

Protože musí platit vztahy (8) tedy

$$b = \frac{m}{3a} \quad (10)$$

$$a^3 - \frac{m^3}{27a^3} = n \quad (11)$$

a rovnici (11) je možno přepsat na tvar

$$a^6 - na^3 - \frac{m^3}{27} = 0, \quad (12)$$

který je kvadratickou rovnicí proměnné a^3 a pro její řešení použijeme klasickou formuli pro kvadratické rovnice. Hodnotu a potom vypočítáme jako třetí odmocninu z kořenů rovnice (12) a hodnotu b ze vztahu (10).

Cardano si při aplikaci jeho vzorců pro určité typy kubických rovnic všiml něčeho zvláštního. Když řešil rovnici $x^3 = 15x + 4$ získal výraz zahrnující $\sqrt{-121}$. Cardano věděl, že není možné vypočítat druhou odmocninu ze záporného čísla, ale také věděl, že řešením dané rovnice je $x = 4$. Napsal Tartagliovi dopis, ve kterém ho žádal o pomoc s řešením daného problému. Tartaglio s ním však přerušil kontakty, nejspíše proto, že si uvědomil, že Cardano jíž zná více, než on. V Ars Magna Cardano uvedl výpočty takových typů rovnic s komplexními čísly, kde imaginární část se při výpočtu nakonec zruší. Tento případ byl nazýván tzv. casus irreducibilis. Ve skutečnosti mu však nerozuměl a pochyboval, že takové výsledky mají nějaký smysl.

Po té, co Tartaglio ukázal Cardanovi, jak řešit kubické rovnice, Cardano podporoval svého žáka Lodovica Ferrari, aby prozkoumal řešení rovnic čtvrtého řádu. Ferrari daný problém vyřešil nejelegantněji ze všech metod, které se daným problémem zabývaly. Cardano publikoval ve své knize veškerých dvacet případů bikvadratických rovnic.

Ferrarovo řešení rovnice $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ v moderním zápise bylo následující:

Jako první zkompletoval čtverec a obdržel

$$x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r - p^2 \quad (13)$$

tj.

$$(x^2 + p)^2 = px^2 - qx - r + p^2. \quad (14)$$

Dále vycházel z toho, že pro libovolné y platí

$$\begin{aligned} (x^2 + p + y)^2 &= px^2 - qx - r + p^2 + 2y(x^2 + p) + y^2 = \\ &= (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2) \end{aligned} \quad (15)$$

a tím na pravé straně obdržel kvadratickou rovnici s proměnou x a diskriminant této rovnice položil roven nule (pro kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ je diskriminant $D = b^2 - 4ac$). V tomto případě

$$(-q)^2 - 4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) = 0. \quad (16)$$

Rovnici (16) je možno přepsat na tvar

$$(q^2 - 4p^3 + 4pr) + (-16p^2 + 8r)y - 20py^2 - 8y^3 = 0, \quad (17)$$

který je kubickou rovnicí proměnné y a tu již uměl řešit. Vyřešením kubické rovnice a dosazením hodnot y na pravou stranu rovnice (15) získal kvadratickou rovnici, jejímž vypočítáním obdržel řešení dané bikvadratické rovnice.

Cardanův spis *Ars Magna* inspiroval spousty matematiků, kteří se řešením kubických a bikvadratických rovnic dále zabývali. Například Viète, Harriot, Tschirnhaus, Euler, Bezout a Descartes odvodili své vlastní postupy řešení (viz. [2]). Také případ *casus irreducibilis* byl pro mnohé matematiky velice inspirativní, vedl jak k postupnému uznávání záporných čísel, tak také ke studiu druhých odmocnin ze záporných čísel. Studium odmocnin se zabýval Rafael Bombelli v roce 1572 v knize *Algebra*, avšak teprve v roce 1837 francouzský matematik Pierre Laurent Wantzel dokázal, že pokud nastane *casus irreducibilis* není možné vyjádřit reálné kořeny kubické rovnice algebraicky pouze v reálném oboru.

V 19. století potom byla dokázána tzv. Abelova věta, která říká, že algebraicky řešitelná je každá algebraická rovnice stupně menšího nebo rovného čtyřem. Tuto větu dokázali matematici Niels Henrik Abel a Évariste Galois (viz. [5]).

2. Řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně

Tato kapitola je věnována řešení rovnic třetího a čtvrtého řádu pomocí vzorců. Nejprve jsem zde definovala základní pojmy, jejichž neznalost by bránila čtenáři v pochopení dalšího textu. Tyto definice jsou převzaty ze zdrojů [4],[9], [12], [13]. Dále je v této kapitole podrobně popsán postup k nalezení kořenů kubických a bikvadratických rovnic. Vzorce pro řešení rovnic jsme čerpala ze zdrojů [8], [11].

2.1. Základní pojmy

Definice 1. Rovnici ve tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

kde $a_n \neq 0$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ jsou komplexní koeficienty a $n \in \mathbb{N}$, nazýváme algebraickou rovnicí n -tého stupně s jednou neznámou $x \in \mathbb{C}$.

Definice 2 (Diskriminant polynomu). [Dostupný z [4]].

Nechť je dán polynom $f(x) \in \mathbb{I}[x]$ ve tvaru

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; a_n \neq 0, n \geq 1.$$

Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou kořeny tohoto polynomu. Diskriminantem polynomu $f(x)$, resp. diskriminantem algebraické rovnice $f(x) = 0$, budeme rozumět výraz

$$a_n^{2n-2} D_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

tj.

$$a_n^{2n-2} \prod_{i < j}^n (x_i - x_j)^2.$$

Definice 3. Nechť a, b, c, d jsou reálná čísla, kde $a \neq 0$. Potom rovnici ve tvaru $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ nazýváme kubickou rovnicí s neznámou $x \in \mathbb{C}$.

Definice 4. Nechť a, b, c, d, e jsou reálná čísla, kde $a \neq 0$. Potom rovnici ve tvaru $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ nazýváme kvartickou rovnicí s neznámou $x \in \mathbb{C}$.

Poznámka 1. U kvartických rovnic se používá následující terminologie:

- ax^4 - kvartický člen
- bx^3 - kubický člen
- cx^2 - kvadratický člen
- cx -lineární člen
- e - absolutní člen

Definice 5. Nechť a, b, c, d jsou reálná čísla, kde $a \neq 0$. Potom rovnici ve tvaru $ax^4 + bx^2 + c = 0$ nazýváme bikvadratickou rovnicí s neznámou $x \in \mathbb{C}$.

Věta 1. (Základní věta algebry)

Nechť $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ je polynom s koeficienty $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$ stupně $n \geq 1$. Pak existuje číslo $a \in \mathbb{C}$, že $P(a) = 0$

Věta 2. (Viètova věta)

Každý polynom n -tého stupně (pro $n \geq 1$) $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ s koeficienty $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, kde $a_n \neq 0$ má dle základní věty algebry nejvýše n komplexních kořenů $x_1, \dots, x_n$. Viètovi vzorce potom předepisují n rovnic, které vedou k řešení n kořenů:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n &= \frac{-a_{n-1}}{a_n} \\(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n) + (x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_2 x_n) + \dots + x_{n-1} x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\&\vdots \\x_1 x_2 \dots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.\end{aligned}$$

2.2. Řešení obecné kubické rovnice

Kubická rovnice, algebraická rovnice 3. stupně, píše se obvykle ve tvaru

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (18)$$

Kubickou rovnici s reálnými koeficienty lze převést zavedením nové proměnné y , kde $x = y - \frac{a}{3}$ na tzv. rovnici bez druhého členu (bez kvadratického členu), tj. na rovnici

$$y^3 + (b - \frac{a^2}{3})y - (\frac{ab}{3}) + c + \frac{2a^3}{27} = 0 \quad (19)$$

pomocí substituce $p = b - \frac{a^2}{3}$ a $q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$ obdržíme rovnici tvaru

$$y^3 + py + q = 0 \quad (20)$$

Originální Cardanova metoda řešení rovnice (20) spočívá v předpokladu, že můžeme nalézt dvě neznámé u, v , splňující $y = u + v$. Dosadíme-li $y = u + v$ do

rovnice (20) dostaneme vztah

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 \quad (21)$$

Dále požadujeme, aby platilo

$$3(uv) + p = 0 \quad \text{tj. } uv = -\frac{p}{3} \quad (22)$$

Aplikováním požadavku (22) do vztahu (21) a umocněním rovnice (22) na třetí získáme tuto soustavu rovnic

$$u^3 + v^3 = -q \quad (23)$$

$$u^3 v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 \quad (24)$$

V případě, že na prvky u^3 a v^3 budeme nahlížet jako na kořeny kvadratické rovnice, budou vztahy (23), (24) představovat zápis Vietových vzorců pro kořeny u^3 a v^3 kvadratické rovnice

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (25)$$

Jejími kořeny jsou čísla

$$u^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3} \quad (26)$$

$$v^3 = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3} \quad (27)$$

Rovnici (20) jsme tak algebraicky převedli na řešení kvadratické rovnice (25) (tzv. kvadratická rezolventa kubické rovnice) a na řešení jedné binomické rovnice 3. stupně. Pro kořeny y_1, y_2, y_3 kubické rovnice (20) platí tzv. Cardanovy vzorce

$$y_1 = u + v \quad (28)$$

$$y_2 = \epsilon u + \epsilon^2 v \quad (29)$$

$$y_3 = \epsilon^2 u + \epsilon v \quad (30)$$

kde ϵ je primitivní třetí odmocnina z jedné tj. $\epsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, u je kterákoliv hodnota třetí odmocniny z (26) a v je ta hodnota třetí odmocniny z (27), pro kterou platí $3uv = -p$.

Cardanovy vzorce můžeme také psát ve tvaru

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} \quad (31)$$

$$y_2 = \epsilon \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \epsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} \quad (32)$$

$$y_3 = \epsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \epsilon \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} \quad (33)$$

kde $D_3 = -4p^3 - 27q^2$ je diskriminant kubické rovnice (20) bez kvadratického členu, diskriminant kubické rovnice (18) je $D_3 = -4(b - \frac{1}{3}a^2)^3 - 27(c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3)^2$.

Hodnota obou diskriminantů je stejná.

Vzorce pro kořeny x_1, x_2, x_3 kubické rovnice tvaru (18) se získají pomocí vztahů mezi kořeny rovnic (18) a (20) a vztahů mezi koeficienty tak, že do Cardanových vzorců ve tvaru (31), (32), (33) dosadíme za q výraz $c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$ a výrazy, které nám takto vzniknou dosadíme do rovnosti $x = y - \frac{a}{3}$.

Mezi kořeny x_1, x_2, x_3 a koeficienty a, b, c , rovnice (18) platí vztahy

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0 \quad (34)$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = p \quad (35)$$

$$y_1y_2y_3 = -q \quad (36)$$

Platnost těchto vztahů vyplývá z následujících výpočtů.

Pokud $1 + \epsilon + \epsilon^2 = 0$ potom

$$y_1 + y_2 + y_3 = u(1 + \epsilon + \epsilon^2) + v(1 + \epsilon + \epsilon^2) = 0 \quad (37)$$

$$\begin{aligned} y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 &= y_1(y_2 + y_3) + y_2 y_3 = (u + v)(-u - v) + \\ &+ \left[\frac{1}{4}(u + v)^2 + \frac{3}{4}(u - v)^2 \right] = -\frac{3}{4}(u + v)^2 + \frac{3}{4}(u - v)^2 = \\ &= -3uv = p \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} y_1 y_2 y_3 &= (u + v) \left[\frac{1}{4}(u + v)^2 + \frac{3}{4}(u - v)^2 \right] = (u + v)(u^2 - uv + v^2) = \\ &= u^3 + v^3 = -q \end{aligned} \quad (39)$$

Pro kubické rovnice s reálnými koeficienty platí, že rovnice má jeden reálný kořen a dva imaginární kořeny komplexně sdružené v případě, že diskriminant $D_3 < 0$. Je-li $D_3 > 0$, má rovnice tři odlišné reálné kořeny. Je-li $D_3 = 0$, pak má rovnice jeden kořen dvojnásobný nebo trojnásobný. Cardanovy vzorce mají malý význam pro číselné výpočty kořenů kubické rovnice s reálnými koeficienty, protože např. při kladném diskriminantu dostaneme reálné kořeny v imaginární formě a jejich použití při výpočtu je nevhodné. I v případě záporného nebo nulového diskriminantu není tento postup nejvhodnější a je lepší použít jinou metodu výpočtu.

2.2.1. Příklad

Příklad 1. Řešíme rovnici tvaru

$$x^3 - 9x^2 + 36x - 28 = 0 \quad (40)$$

nejprve pomocí substituce $x = y + 3$ odstraníme z rovnice člen s x^2 a získáme rovnici ve tvaru

$$y^3 + 9y + 26 = 0 \quad (41)$$

Poté si vypočítáme diskriminant pomocí vzorce $D_3 = -4p^3 - 27q^2$. V našem případě se $p = 9$ a $q = 26$.

$$D_3 = -4p^3 - 27q^2 = -4 * 9^3 - 27 * 26^2 = -2916 - 18252 = -21168 \quad (42)$$

Diskriminant také můžeme počítat z rovnice s kvadratickým členem a to pomocí vzorce $D_3 = -4(b - \frac{1}{3}a^2)^3 - 27(c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3)^2$. V našem případě se $a = -9$, $b = 36$ a $c = -28$.

$$\begin{aligned} D_3 &= -4(b - \frac{1}{3}a^2)^3 - 27(c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3)^2 = \\ &= -4(36 - \frac{1}{3}(-9)^2)^3 - 27(-28 - \frac{1}{3}(-9 * 36) + \frac{2}{27}(-9)^3)^2 = \\ &= -2916 - 18252 = -21168 \end{aligned} \quad (43)$$

Nyní jsme si ukázali, že nezáleží na tom, který vzorec k výpočtu diskriminantu použijeme, neboť nám vždy vyjdou stejné hodnoty. Protože nám diskriminant vyšel záporný, tak již nyní víme, že budeme mít jeden reálný kořen a dva imaginární kořeny komplexně sdružené.

K výpočtu kořenů y_1 , y_2 a y_3 můžeme použít vzorce ve tvaru (28), (29) a (30) nebo vzorce ve tvaru (31), (32) a (33)

Ukážeme si použití vzorců v prvním tvaru. Nejprve si musíme vypočítat hodnoty u a v pomocí vzorců (26) a (27).

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}26 + \sqrt{(\frac{1}{2}26)^2 + (\frac{1}{3}9)^3}} = \\ &= \sqrt[3]{-13 + \sqrt{13^2 + 3^3}} = \sqrt[3]{-13 + \sqrt{196}} = \sqrt[3]{-13 + 14} = 1 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{2}q)^2 + (\frac{1}{3}p)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}26 - \sqrt{(\frac{1}{2}26)^2 + (\frac{1}{3}9)^3}} = \\ &= \sqrt[3]{-13 - \sqrt{13^2 + 3^3}} = \sqrt[3]{-13 - \sqrt{196}} = \sqrt[3]{-13 - 14} = -3 \end{aligned} \quad (45)$$

Hodnotu v bychom také mohli vypočítat pomocí vztahu $3uv = -p$.

Nyní si již můžeme vypočítat kořeny y_1 , y_2 a y_3 .

$$y_1 = u + v = 1 - 3 = -2 \quad (46)$$

$$y_2 = \epsilon u + \epsilon^2 v = \epsilon u - 3\epsilon^2 = 1 + 2i\sqrt{3} \quad (47)$$

$$y_3 = \epsilon^2 u + \epsilon v = \epsilon^2 u - 3\epsilon = 1 - 2i\sqrt{3} \quad (48)$$

V případě, že bychom chtěli použít vzorce ve tvaru (31), (32) a (33) nemusíme počítat hodnoty u a v , pouze dosadíme do vzorců a hodnoty kořenů y_1 , y_2 a y_3 nám vyjdou stejné jako v našem případě.

Pro výpočet kořenů x_1 , x_2 a x_3 můžeme použít Cardanovy vzorce ve tvaru (31), (32) a (33) avšak místo hodnoty q dosadíme výraz $c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$ a výrazy, které nám takto vzniknou dosadíme do rovnosti $x = y - \frac{a}{3}$. Anebo je můžeme vypočítat pomocí substituce $x = y + 3$, kterou jsme si zavedli na začátku. Kořeny x_1 , x_2 a x_3 jsou potom rovny

$$x_1 = y_1 + 3 = -2 + 3 = 1 \quad (49)$$

$$x_2 = y_2 + 3 = 1 + 2i\sqrt{3} + 3 = 4 + 2i\sqrt{3} \quad (50)$$

$$x_3 = y_3 + 3 = 1 - 2i\sqrt{3} + 3 = 4 - 2i\sqrt{3} \quad (51)$$

Abychom si ověřili, zda jsme počítali správně, použijeme vztahy (34), (35), (36) mezi kořeny x_1 , x_2 , x_3 a koeficienty a , b , c .

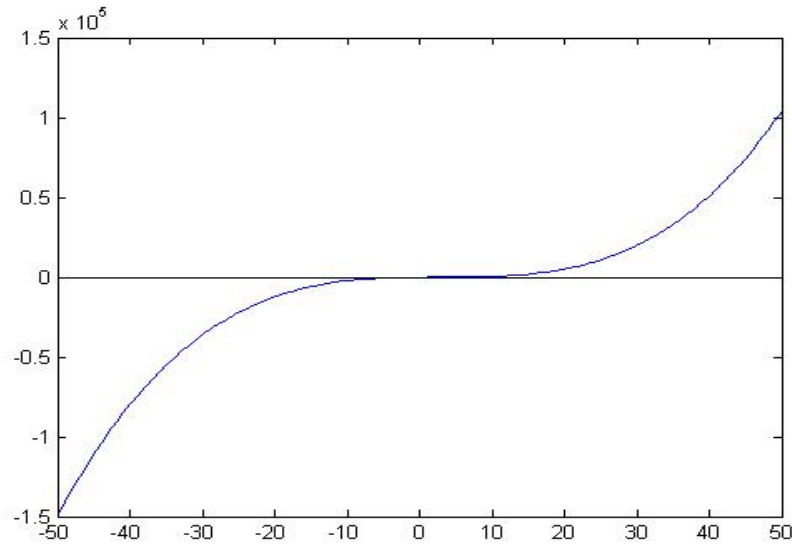
V našem případě, po dosazení do vzorců získáme

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 4 + 2i\sqrt{3} + 4 - 2i\sqrt{3} = 9 = -a \quad (52)$$

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 1 * (4 + 2i\sqrt{3}) + 1 * (4 - 2i\sqrt{3}) + (4 + 2i\sqrt{3}) * \\ &\quad * (4 - 2i\sqrt{3}) = 8 + 16 - 8i\sqrt{3} + 8i\sqrt{3} - 4i^2 3 = \\ &= 8 + 16 + 12 = 36 = b \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3 &= 1 * (4 + 2i\sqrt{3}) * (4 - 2i\sqrt{3}) = 16 - 8i\sqrt{3} + 8i\sqrt{3} - \\ &\quad - 12i^2 = 16 + 12 = 28 = -c \end{aligned} \quad (54)$$

Nyní jsme si ověřili, že hodnoty kořenů x_1 , x_2 , x_3 jsme vypočítali správně. Graf je vykreslen na obrázku 1.



Obrázek 1: Graf rovnice $x^3 - 9x^2 + 36x - 28 = 0$.

2.3. Řešení obecné bikvadratické rovnice

Bikvadratická rovnice, algebraická rovnice 4. stupně, píše se obvykle ve tvaru

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (55)$$

Podobně jako rovnici kubickou, tak i rovnici bikvadratickou lze převést pomocí vztahu $x = y - \frac{1}{4}a$ na tzv. rovnici bez druhého členu (bez kubického členu), tj. na rovnici tvaru

$$y^4 + (b - \frac{3}{8}a^2)y^2 + (c - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}a^3)y + d - \frac{1}{4}ac + \frac{1}{16}a^2b - \frac{3}{256}a^4 = 0 \quad (56)$$

pomocí substituce $p = b - \frac{3}{23}a^2$, $q = c - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{23}a^3$, $r = d - \frac{1}{22}ac + \frac{1}{24}a^2b - \frac{3}{28}a^4$ obdržíme rovnici tvaru

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \quad (57)$$

Budeme předpokládat (podobně jako u kubické rovnice), že lze nalézt tři neznámé u, v, w , pro které platí $y = u + v + w$. Dosadíme-li $y = u + v + w$ do rovnice (57),

kterou jsme vynásobili číslem 16, dostaneme vztah

$$\begin{aligned} & (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(uv + vw + uw)(u^2 + v^2 + w^2 + 2p) + \\ & + 4p(u^2 + v^2 + w^2) + 8(uvw + q)(u + v + w) + \\ & + 4(u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2) + 16r = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

Dále požadujeme, aby platilo

$$u^2 + v^2 + w^2 = -2p \quad (59)$$

$$uvw = -q \quad (60)$$

Aplikováním požadavků (59) a (60) do rovnice (58) a umocněním požadavku (60) na druhou, získáme tuto soustavu rovnic

$$u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2 = p^2 + 4r \quad (61)$$

$$u^2v^2w^2 = q^2 \quad (62)$$

Obdobně jako u rovnice 3. stupně, budeme-li na prvky u^2 , v^2 a w^2 nahlížet jako na kořeny kubické rovnice, budou vztahy (59), (61) a (62), představovat zápis Vietových vzorců pro kořeny u^2 , v^2 a w^2 kubické rovnice

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0 \quad (63)$$

Jejími kořeny jsou čísla

$$u^2 = z_1 \quad (64)$$

$$v^2 = z_2 \quad (65)$$

$$w^2 = z_3 \quad (66)$$

Rovnici (57) jsme tak algebraicky převedli na řešení kubické rovnice (63) (tzv. kubická rezolventa bikvadratické rovnice) a na řešení dvou binomických rovnic 2. stupně. Pro kořeny y_1 , y_2 , y_3 , y_4 bikvadratické rovnice (57) platí

$$2y_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \quad (67)$$

$$2y_2 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \quad (68)$$

$$2y_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \quad (69)$$

$$2y_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \quad (70)$$

kde z_1, z_2, z_3 jsou kořeny kubické rezolventy (63). Dvě hodnoty z druhých odmocnin $\sqrt{z_1}, \sqrt{z_2}, \sqrt{z_3}$ můžeme zvolit libovolně, ale hodnotu zbývajících odmocnin musíme zvolit tak, aby nám platilo $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -q$.

Hodnota diskriminantu bikvadratické rovnice (57) bez kubického členu je dána vzorcem

$$D_4 = \frac{4}{27}(p^2 + 12r)^3 - \frac{1}{27}(2p^3 - 72pr + 27q^2)^2 \quad (71)$$

a diskriminant bikvadratické rovnice (55) je dán vztahem

$$D_4 = \frac{4}{27}(12d + b^2 - 3ac)^3 - \frac{1}{27}(27c^2 - 72bd + 2b^3 - 9abc + 27a^2d)^2. \quad (72)$$

Hodnota obou diskriminantů je stejná.

Obdobně jako u kubické rovnice i zde mezi kořeny x_1, x_2, x_3, x_4 a koeficienty a, b, c, d , rovnice (55) platí vztahy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a \quad (73)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b \quad (74)$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -c \quad (75)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = d \quad (76)$$

Pro binomické rovnice s reálnými kořeny a diskriminantem D_4 , který není roven nule platí, že binomická rovnice má dva kořeny reálné a dva imaginární kořeny komplexně sdružené v případě, že $D_4 < 0$. Je-li $D_4 > 0$ a dále platí, $p < 0$, $p^2 - 4r > 0$, potom má rovnice čtyři reálné kořeny. Je-li $D_4 > 0$ a není-li splněna alespoň jedna z podmínek $p < 0$, $p^2 - 4r > 0$, potom má rovnice dvě dvojice imaginárních komplexně sdružených kořenů.

Algebraické řešení má význam pouze teoretický, k číselnému řešení se nehodí, a to ani v případě, že jsme schopni číselně vyřešit kubickou rezolventu. Mnohem kratší a přesnější je řešit bikvadratické rovnice pomocí numerických metod.

3. Numerické metody řešení algebraických rovnic

Použití algebraických postupů pro nalezení kořenů polynomu třetího a čtvrtého stupně je velmi často zdlouhavé a ne vždy nás dovede k výsledku. Proto je mnohdy výhodnější užití numerických metod. Nejprve zde uvádím Hornerovo schéma, které není metodou pro hledání kořenů polynomu, ale můžeme ho při výpočtech také využít, neboť se jedná o nástroj k dělení polynomů. Z metod k určení kořenů polynomu jsem si vybrala Graeffovo-Lobačovského metodu, Laguerrovu metodu a jako poslední se zde věnuji metodě regula falsi. U každé metody je popsán algoritmus jejího řešení, který je následně použit při výpočtu. V této kapitole jsem nejvíce využila zdroje [6], [7],[10].

Uvádím zde algoritmy pouze pro nalezení reálných kořenů, a proto, pokud bychom níže uvedené postupy chtěli použít i v případě komplexních kořenů, postupovali bychom tak, že pomocí těchto algoritmů bychom vypočítali reálné kořeny polynomu. Následně bychom pomocí Hornerova schématu snížili stupeň polynomu a z kvadratické rovnice bychom pomocí vzorců dopočítali poslední dvojici komplexních kořenů.

3.1. Hornerův algoritmus

Hornerovo schéma bylo pojmenováno po britském matematikovi Williamu Georgi Hornerovi, který ho poprvé popsal roku 1819, avšak bylo známo již ve 13. století čínskému matematikovi Ch'in Chiu-Shao.

Nechť je dán polynom

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \quad (77)$$

kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, a $n \in \mathbb{N}_0$. Naším cílem je stanovit hodnotu $p(x_0)$, kde x_0 je dané číslo. Polynom (77) je možno přepsat na ekvivalentní tvar

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots x(a_{n-1} + a_nx) \dots)). \quad (78)$$

Chceme-li určit hodnotu $p(x_0)$, získáme ji postupným vypočítáním členů v jednotlivých závorkách (začínáme od vnitřních závorek), pro $x = x_0$. Tj. postupně vypočteme hodnotu b_i

$$b_n := a_n \quad (79)$$

$$b_{n-1} := x_0 b_n + a_{n-1} \quad (80)$$

$$\vdots$$

$$b_0 := x_0 b_1 + a_0 \quad (81)$$

hodnota b_n je rovna hodnotě $p(x_0)$ a je to výsledek, který nás zajímá.

Výpočty je možno zapsat do tabulky, které se říká Hornerovo schéma.

	b_n	b_{n-1}	$\dots$	b_0
x_0	a_n	$x_0 b_n + a_{n-1}$	$\dots$	$x_0 b_1 + a_0$

3.2. Graeffova-Lobačovského metoda v případě reálných kořenů

Graeffova-Lobačovského metoda slouží k přibližnému stanovení polohy kořenů polynomu.

Nechť jsou kořeny $x_1, x_2, \dots, x_n$ rovnice n -tého stupně

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (82)$$

reálné a různé v absolutní hodnotě. Kořeny si očíslováme podle klesající hodnoty, tj.

$$|x_1| > |x_2| > \dots > |x_{n-1}| > |x_n|. \quad (83)$$

Provedeme-li postupně k -krát umocnění kořenů, dostaneme polynom

$$P^{(k)}(x) = a_0^{(k)} x^n + a_1^{(k)} x^{n-1} + \dots + a_{n-1}^{(k)} x + a_n^{(k)}. \quad (84)$$

Prostřednictvím vztahů pro koeficienty ($a_i^{(0)} = a_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$), které jsou odvozeny z požadavku, aby kořeny polynomu $P^{(k)}$ byly druhými mocninami kořenů

polynomu $P^{(k-1)}$.

$$a_0^{(k)} = (a_0^{(k-1)})^2 \quad (85)$$

$$-a_1^{(k)} = (a_1^{(k-1)})^2 - 2a_0^{(k-1)}a_2^{(k-1)} \quad (86)$$

$$a_2^{(k)} = (a_2^{(k-1)})^2 - 2a_1^{(k-1)}a_3^{(k-1)} + 2a_0^{(k-1)}a_4^{(k-1)} \quad (87)$$

$$-a_3^{(k)} = (a_3^{(k-1)})^2 - 2a_2^{(k-1)}a_4^{(k-1)} + 2a_1^{(k-1)}a_5^{(k-1)} - 2a_0^{(k-1)}a_6^{(k-1)} \quad (88)$$

$\vdots$

$$(-1)^n a_n^{(k)} = (a_n^{(k-1)})^2 \quad (89)$$

můžeme odvodit (viz [10]), že

$$|x_j| \approx \sqrt[2^k]{\frac{a_j^{(k)}}{a_{j-1}^{(k)}}}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (90)$$

Pomocí vztahu (90) jsme si vypočítali absolutní hodnoty kořenů x_j . Pokud nám ani jedno z čísel $|x_j|$, $-|x_j|$ nedává uspokojivě malou hodnotu rovnice (82), signalizuje nám to, že nebyly splněny předpoklady metody, tj. v rovnici se vyskytují kořeny se stejnou absolutní hodnotou.

Příklad 2. Pomocí Graeffovy metody řešíme rovnici tvaru

$$x^3 - 5x^2 - 17x + 21 = 0 \quad (91)$$

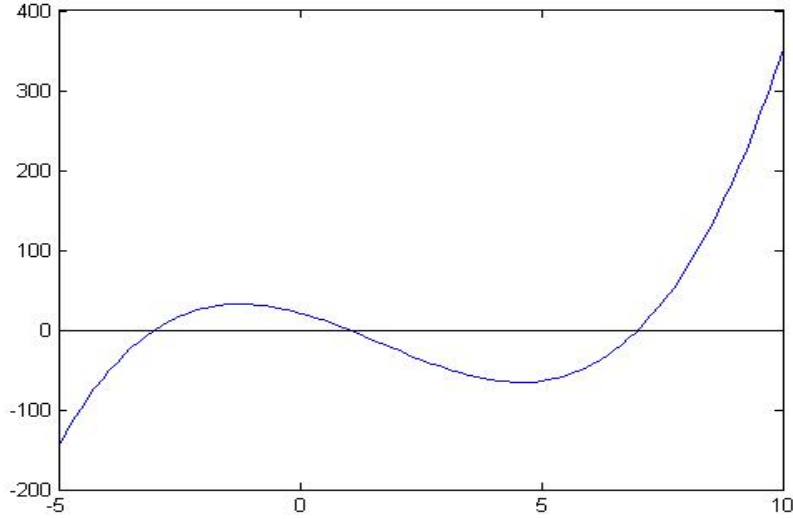
Použijeme-li vztahy pro koeficienty, obdržíme

k	$a_0^{(k)}$	$a_1^{(k)}$	$a_2^{(k)}$	$a_3^{(k)}$
0	1	-5	-17	21
1	1	-59	499	-441
2	1	-2483	196963	-194481
3	1	-5771363	37828630723	-37822859361

Nyní si již pomocí vztahu (90)můžeme vypočítat absolutní hodnoty kořenů x_1, x_2, x_3 , tj.

k	x_1	x_2	x_3
1	7.68	2.91	0.94
2	7.06	2.98	0.997
3	7.001	2.999	0.99998

Znaménka kořenů určíme tak, že si vypočítané hodnoty dosadíme do rovnice (91), anebo z grafu (viz obrázek 2).



Obrázek 2: Graf rovnice $x^3 - 5x^2 - 17x + 21 = 0$.

Z grafu je zřejmé, že hodnoty x_1 a x_2 jsou kladné a hodnota x_3 je záporná.

3.3. Laguerrova metoda

Tato metoda je zvlášť účinná pro řešení algebraických rovnic, které mají reálné a jednoduché kořeny.

Předpokládejme, že polynom $P(x)$ má reálné různé kořeny, které si uspořádáme podle velikosti tak, že

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n. \quad (92)$$

Dále si definujeme $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$ a označme interval $I_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$, $i = 0, 1, \dots, n$. Potom pro každé $x \neq x_j, j = 0, 1, \dots, n+1$, existuje právě jedno i takové, že platí $x \in I_i$.

Hlavní myšlenkou Laguerrovy metody je sestavit parabolu, která bude protínat osu x co nejblíže koncům intervalu I_i . Tím dostáváme iterační formuli

$$x_{k+1} = x_k - \frac{nP(x_k)}{P'(x_k) \pm \sqrt{H(x_k)}}, \quad (93)$$

kde n je stupeň polynomu a

$$H(x_k) = (n-1)[(n-1)(P'(x_k))^2 - nP(x_k)P''(x_k)] \quad (94)$$

Znaménko před odmocninou volíme takové, aby souhlasilo se znaménkem $P'(x_k)$, platí-li $P'(x_k) = 0$, potom znaménko volíme libovolně (viz [10]).

Příklad 3. Pomocí Laguerrovy metody řešíme rovnice tvaru

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \quad (95)$$

Jako počáteční aproximace si zvolíme čísla 1, -1 a -2, 4. Výpočet zastavíme, jakmile hodnota $P(x_k) < 10^{-6}$. Jednotlivé aproximace a funkční hodnoty v těchto bodech jsou uvedeny v tabulkách.

k	x_k	$P(x_k)$
0	1	3
1	0.5358984	0.01546439
2	0.5320891	0.0000009

Z tabulky je zřejmé, že hodnota prvního kořene je $x_1 \approx 0.5320891$.

k	x_k	$P(x_k)$
0	-1	1
1	-0.6666667	0.0370371
2	-0.6527048	$3.04795 * 10^{-6}$
3	-0.6527036	$-1.17835 * 10^{-7}$

Po čtyřech iteracích jsme obdrželi hodnotu druhého kořene $x_2 \approx -0.6527036$.

k	x_k	$P(x_k)$
0	-2.4	2.456
1	-2.8781817	$9.1342575 * 10^{-3}$
2	-2.8793852	$3.158 * 10^{-7}$

Poslední kořen je $x_3 \approx -2.8793852$.

Rovnici 95 je také možno počítat s využitím Hornerova schématu. Potom postupujeme tak, že si vypočítáme kořen rovnice pro první aproximaci, tj. $x_0 = 1$.

k	x_k	$P(x_k)$
0	1	3
1	0.5358984	0.01546439
2	0.5320891	0.0000009

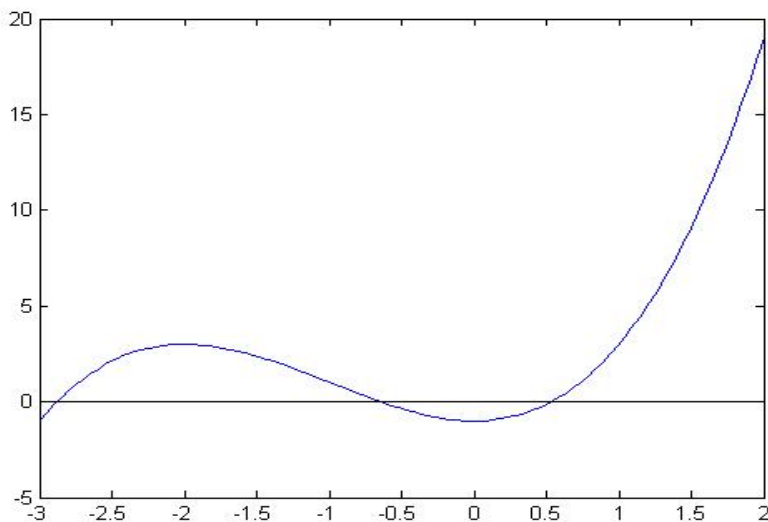
Následně pomocí Hornerova schématu snížíme stupeň polynomu.

	1	3	0	-1
0.5320891	1	3.5320891	1.87938611	0.0000009

Nyní jsme zjistili, že

$$x^3 + 3x^2 - 1 \approx (x - 0.5320891)(x^2 + 3.5320891x + 1.87938611) \quad (96)$$

Nakonec pouze vyřešíme kvadratickou rovnici $x^2 + 3.5320891x + 1.87938611$, a to buď pomocí Laguerovy metody anebo pomocí algebraických vzorců pro kvadratické rovnice. Použijeme-li výpočet pomocí vzorců, další hodnoty kořenů nám vyjdou $x_2 \approx -0.6527025$ a $x_3 \approx -2.8793866$. Graf je vykreslen na obrázku 3.



Obrázek 3: Graf rovnice $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$.

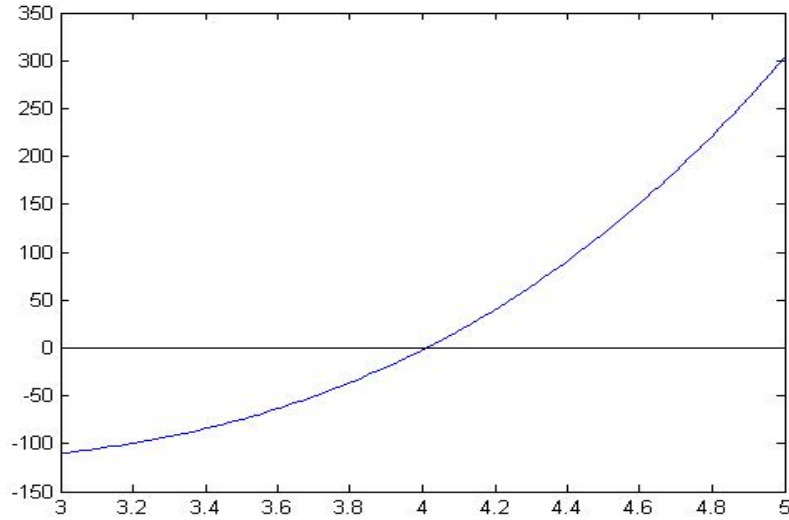
Příklad 4. Pomocí Laguerrovy metody hledáme kořen rovnice

$$x^4 + x^3 - 10x^2 - 34x - 26 = 0 \quad (97)$$

z intervalu $\langle 3, 5 \rangle$. Výpočet ukončíme, jakmile $P(x_k) < 10^{-5}$. Jako počáteční aproximaci si zvolíme krajní bod intervalu, tj $x_0 = 3$.

k	x_k	$P(x_k)$
0	3	-110
1	4.0120465	0.3030863
2	4.0104697	$4.753 * 10^{-6}$

Po třech iteracích jsme obdrželi hodnotu $x \approx 0.5320891$. Graf je vykreslen na obrázku 4.



Obrázek 4: Graf rovnice $x^4 + x^3 - 10x^2 - 34x - 26 = 0$.

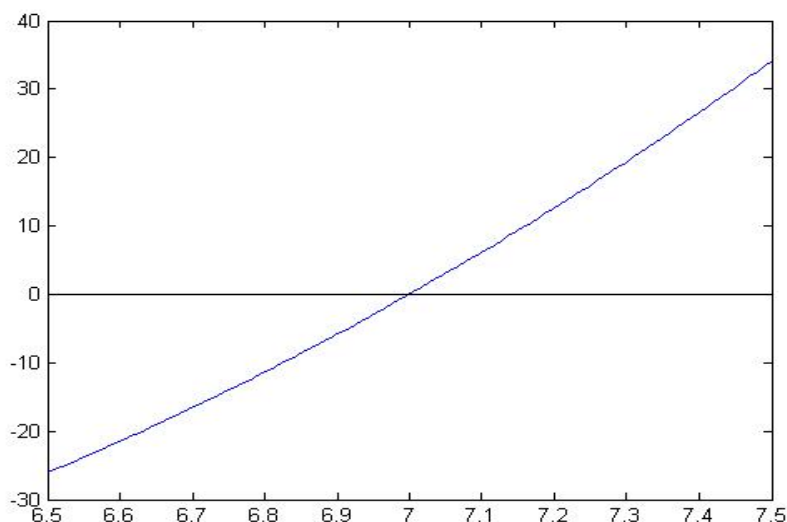
Příklad 5. Pomocí Laguerrovy metody hledáme kořen rovnice

$$x^3 - 5x^2 - 17x + 21 = 0 \quad (98)$$

z intervalu $\langle 6.5, 7.5 \rangle$. Výpočet ukončíme, jakmile $P(x_k) < 10^{-4}$. Jako počáteční aproximaci si zvolíme krajní bod intervalu, tj $x_0 = 6.5$.

k	x_k	$P(x_k)$
0	6.5	-26.125
1	6.9998292	-0.0102475
2	6.9999999	$-6 * 10^{-6}$

Kořen rovnice z intervalu $\langle 6.5, 7.5 \rangle$ je $x \approx 6.9999999$. Graf je vykreslen na obrázku 5.



Obrázek 5: Graf rovnice $x^3 - 5x^2 - 17x + 21 = 0$.

3.4. Metoda regula falsi

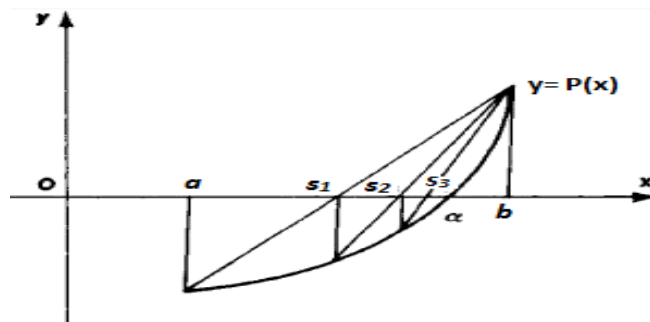
Tato metoda dříve byla uváděna jako startovací metoda, protože velmi pomalu konverguje, avšak v dnešní době s využitím počítačové techniky může být také velmi vhodnou metodou k určení kořenů polynomů.

Mějme polynom $P(x)$. Máme-li čísla a, b , pro která platí $P(a)P(b) < 0$, potom máme zaručeno, že v intervalu $I = \langle a, b \rangle$ existuje reálný kořen našeho polynomu.

Body $[a, P(a)]$, $[b, P(b)]$ vedeme přímkou, jejíž průsečík s osou x vypočítáme pomocí vzorce

$$s_1 = a - \frac{P(a)}{P(b) - P(a)}(b - a) \quad (99)$$

Jestliže je $P(a)P(s_1) < 0$, potom položíme $a := a, b := s_1$. Platí-li $P(b)P(s_1) < 0$, potom položíme $a := s_1, b := b$. Výpočet opakujeme tak dlouho, dokud nedosáhneme požadované přesnosti.



Obrázek 6: Schéma metody regula falsi.

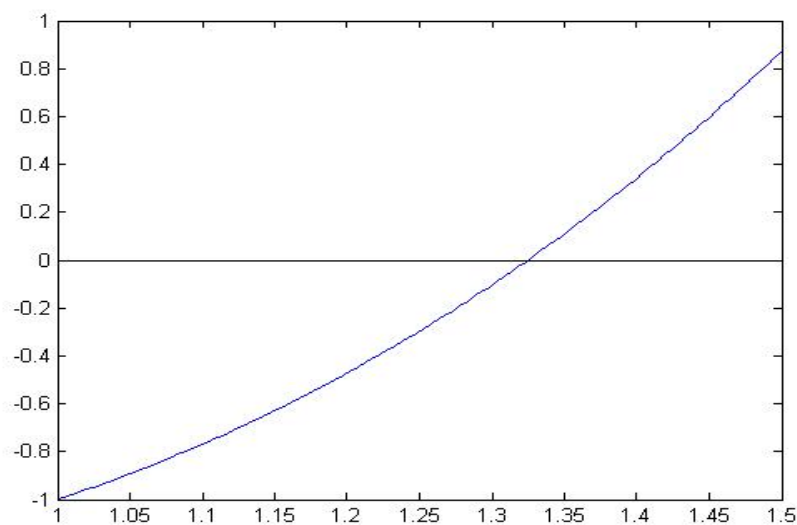
Příklad 6. Pomocí metody regula falsi hledáme kořen rovnice

$$x^3 - x - 1 = 0 \quad (100)$$

z intervalu $\langle 1; 1.5 \rangle$. Výpočet ukončíme, jakmile $P(s_k) < 10^{-4}$. Jednotlivé výpočty jsou zaznamenány v tabulce.

k	s_k	a_k	b_k	$P(s_k)$	$P(a_k)$	$P(b_k)$
0	-	1	1.5000000	-	-1	0.8750000
1	1.2666667	1.2666667	1.5000000	-0.2343702	-0.2343702	0.8750000
2	1.3159617	1.3159617	1.5000000	-0.0370382	-0.0370382	0.8750000
3	1.3234356	1.3234356	1.5000000	-0.0054622	-0.0054622	0.8750000
4	1.3245310	1.3245310	1.5000000	-0.0007972	-0.0007972	0.8750000
5	1.3246907	1.3246907	1.5000000	-0.0001162	-0.0001162	0.8750000
6	1.3247131			-0.0000207		

Po sedmé iteraci jsme obdrželi hodnotu $x \approx 1,3247131$. Graf je vykreslen na obrázku 7.



Obrázek 7: Graf rovnice $x^3 - x - 1 = 0$.

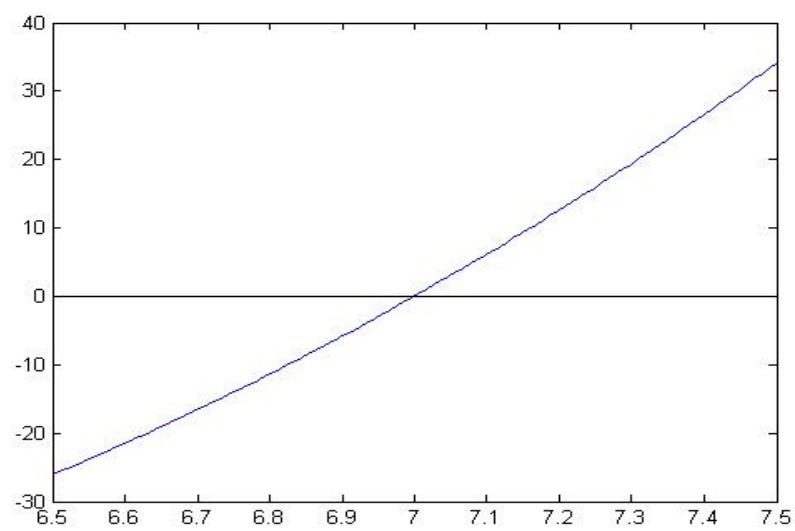
Příklad 7. Pomocí metody regula falsi hledáme kořen rovnice

$$x^3 - 5x^2 - 17x + 21 = 0 \quad (101)$$

z intervalu $\langle 6.5, 7.5 \rangle$. Výpočet ukončíme, jakmile $P(s_k) < 10^{-4}$. Jednotlivé výpočty jsou zaznamenány v tabulce.

k	s_k	a_k	b_k	$P(s_k)$	$P(a_k)$	$P(b_k)$
0	-	6.5000000	7,5000000	-	-26.1250000	34.1250000
1	6.9336099	6.9336099	7,5000000	-3.9131763	-3.9131763	34.1250000
2	6.9918773	6.9918773	7,5000000	-0.4863069	-0.4863069	34.1250000
3	6.9990167	6.9990167	7,5000000	-0.0589825	-0.0589825	34.1250000
4	6.9998811	6.9998811	7,5000000	-0,0071338	-0,0071338	34.1250000
5	6.9999856	6.9999856	7,5000000	-0,0008640	-0,0008640	34.1250000
6	6.9999983	6.9999983	7,5000000	-0,0001020	34.1250000	
7	6.9999998			-0.0000120		

Po osmé iteraci jsme obdrželi hodnotu $x \approx 6,9999998$. Graf je vykreslen na obrázku 8.



Obrázek 8: Graf rovnice $x^3 - 5x^2 - 17x + 21 = 0$.

Závěr

Úkolem této bakalářské práce bylo prozkoumat možnosti řešení rovnic třetího a čtvrtého řádu. Čtenář se zde mohl dozvědět zajímavé poznatky z historie, které stručně popisují jednotlivé pokroky v dané problematice.

Nejen, že jsou zde detailně popsány vzorce pro nalezení kořene rovnice třetího a čtvrtého řádu, ale také jsou zde uvedeny tři rozdílné numerické metody. Chtěla jsem zde poukázat na to, že studuje-li čtenář tuto problematiku v odborných textech, můžou zde některé metody být velmi vyzdvihovány, i když v dnešní době už nejsou zase tak oblíbené. To například dokazuje Graeffova-Lobačovského metoda, která v minulosti, díky svým jednoduchým výpočtům byla velmi uznávána. Avšak v dnešní době, díky počítačové technice, je možno použít i jiné metody, například metodu regula falsi, která naopak dříve byla považována za startovací, protože velmi pomalu konverguje.

Nejvíce se mi osvědčila Laguerova metoda, konverguje rychleji než metoda regula falsi, a také jsem podle ní získala přesnější výsledky.

Celá práce je doplněna vypočítanými příklady, které pomůžou čtenáři k lepšímu pochopení dané problematiky.

Literatura

- [1] BEČVÁŘ J. *Matematika v 16. a 17. století*, [online] [cit. 28-1-2015]. Dostupný z http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/401579/DejinyMat_12-1999-1_10.pdf
- [2] O'CONNOR J. J., ROBERTSON E., F. *History topic: Quadratic, cubic and quartic equations*, [online]. 1996 [cit. 28-1-2015]. Dostupný z http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Quadratic_etc_equations.html
- [3] DĚMIDOVIC B. P., MARON J. A. *Základy numerické matematiky*. 2. vydání. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1996.
- [4] HAŠEK R. *Diskriminant*, [online] [cit. 22-1-2015]. Dostupný z http://home.pf.jcu.cz/~hasek/Algebra5/ALG5_Diskriminant.pdf
- [5] HAŠEK R. *Algebraická řešitelnost algebraických rovnic*, [online] [cit. 22-3-2015]. Dostupný z http://home.pf.jcu.cz/~hasek/Algebra5/ALG5_Resitelnost_rovnic.pdf
- [6] HOROVÁ I., ZELINKA J. *Numerické metody*. 2. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2004.
- [7] MÍKA S. *Numerické metody algebry*. 2. vydání. Praha: Nakladatelství technické literatury, n. p., 1985.
- [8] NEČAS J. a kolektiv autorů. *Aplikovaná matematika 1 A-L*. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1977
- [9] PODHAJSKÁ K. *Rovnice vyšších stupňů*, [online] [cit. 28-1-2015]. Dostupný z http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/kristyna_podhajska_bp/rovnice/?page=title
- [10] RALSTON A. *Základy numerické matematiky*. 2. vydání. Praha: nakladatelství Československé akademie věd, 1978.
- [11] SCHWARZ Š. *Základy nauky o riešení rovníc*. 2. vydanie. Bratislava: Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied, 1968.
- [12] WIKIPEDIA *Základní věta algebry*, [online]. 2001 [cit. 07-04-2015]. Dostupný z http://cs.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A1kladn%C3%AD_v%C4%9Bta_algebry
- [13] WIKIPEDIA *Vièetovy vzorce*, [online]. 2013 [cit. 07-4-2015]. Dostupný z http://cs.wikipedia.org/wiki/Vi%C3%A8tovy_vzorce