UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Aplikace křivkových integrálů

Vedoucí bakalářské práce:
Doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.
Rok odevzdání: 2013

Vypracovala:
Zuzana Bělašková
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že tuto bakalářskou práci jsem vytvořila samostatně pod vedením doc. Mgr. Karla Pastora, Ph.D. a že seznam literatury obsahuje veškeré použité zdroje, jež jsem při psaní této práce využila.

V Olomouci dne 17. března 2013

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala doc. Mgr. Karlu Pastorovi, Ph.D. za cenné rady a připomínky při psaní mé bakalářské práce. Dále za jeho ochotu a čas, který mi na konzultacích věnoval a také za jeho obětavou spolupráci.

Obsah

Úvod

Cílem této práce je seznámit čtenáře s křivkovými integrály a ukázat jejich praktické využití ve fyzice. Potřeby fyziky jsou totiž jedním z hlavních důvodů, proč vůbec tyto integrály spatřily světlo světa. S jejich pomocí můžeme vypočítat různé fyzikální veličiny jako je hmotnost, práce, apod. Rozlišujeme dva druhy křikových integrálů - *křivkový integrál prvního druhu* a *křivkový integrál druhého druhu*. Při čtení této práce se s oběma variantami integrálů seznámíte a poznáte rozdíly, kterými se od sebe navzájem odlišují.

Křivkové integrály nejsou ve „světě matematiky“ žádným nováčkem. Jejich historie sahá až do 18. století, kdy se poprvé vyskytly v práci francouzského matematika *Alexise Claude Clairauta* (1713 - 1765), jenž pomocí křivkového integrálu popsal tvar Země.

V první polovině práce se zaměříme na tzv. *neorientované křivkové integrály*, tedy na křivkové integrály prvního druhu. Jak už jejich název napovídá, nejsou závislé na orientaci křivky. To je jeden z hlavních rozdílů, kterými se od sebe křivkové integrály prvního a druhého druhu odlišují. Druhá polovina práce se věnuje *orientovaným křivkovým integrálům*, pod kterými se skrývají křivkové integrály druhého druhu. Obě tyto kapitoly obsahují nejprve teorii, jež je k pochopení integrálů nezbytná a také sady řešených příkladů, kterými jsem se snažila přiblížit čtenářům křivkové integrály v praxi.

Při psaní mé bakalářské práce jsem se zaměřila na Riemannův integrál. Pro některé pojmy či definice to může znamenat určité omezení, proto jsem do práce zařadila také poznámky ve kterých naznačím, jak by se postupovalo v případě Lebesgueova integrálu.

1 Křivkový integrál prvního druhu

1.1 Křivkový integrál prvního druhu v $\mathbf{R}^2$

Jako první se zaměříme na křivkové integrály prvního druhu v R^2. Prostorem R^2 rozumíme dvourozměrný vektorový prostor reálných čísel. U těchto integrálů, jak již bylo řečeno, budeme integrovat po křivce. Proto je ještě nutné si vyjasnit, co budeme křivkou rozumět.

Definice 1.1. Nechť $g = (\varphi, \psi)$ je vektorová funkce z R do R^2, jejímž definičním oborem je uzavřený interval $\langle a, b\rangle$. Předpokládejme, že vektorová funkce g je na intervalu $\langle a, b\rangle$ prostá a že pro každé $t \in \langle a, b\rangle$ je $g^{'}(t) \neq 0$. Potom množinu $k = g(\langle a, b\rangle) \subset R^2$ nazýváme *hladkým obloukem* (stručně *obloukem*) a body $g(a)$, $g(b)$ jeho krajními body. Rovnice

$$x = \varphi(t),$$

$$y = \psi(t),$$

kde $t \in \langle a, b\rangle$, jsou *parametrické rovnice hladkého oblouku k.*

Víme-li, jakým způsobem je hladký oblouk orientován (tj. známe-li jeho počáteční a koncový bod), můžeme si tyto body označit. Například, je-li orientován z bodu a do bodu b, jeho počáteční bod si označíme $pb(k) = a$ a jeho koncový bod jako $kb(k) = b$.
Protože již víme, co to hladký oblouk je a jak vypadají jeho parametrické rovnice, můžeme přejít k definici samotného křivkového integrálu prvního druhu.

Definice 1.2. Nechť k je hladký oblouk v R^2 popsaný parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$ a nechť f je spojitá funkce (dvou proměnných x, y) definovaná na množině k. Potom integrál

$$\int_k f(x,y)ds = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\{[\acute{\varphi}(t)]^2 + [\acute{\psi}(t)]^2\}}dt$$

nazýváme *křivkovým integrálem prvního druhu funkce f podél oblouku k* a označujeme jej symbolem $\int_k f(x,y)ds$.

Křivkový integrál prvního druhu můžeme značit více způsoby. Mezi nejrozšířenější potom patří $\int_k f(x,y)ds$, $\int_k fds$ a $\int_k f$. Pro tento integrál je typické, že vždy existuje a to díky tomu, že integrovaná funkce je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Dále platí, že hodnota výsledného integrálu je dána funkcí f a hladkým obloukem k, nezávisí tedy na jeho parametrizaci. [1, strana 288]

Jsou ovšem i případy, kdy si nevystačíme pouze s hladkým obloukem a proto je zapotřebí pojem hladkého oblouku zobecnit. Z tohoto důvodu si zavedeme pojem *po částech hladká křivka*.

Definice 1.3. Množinu $k \subset R^2$ nazveme *po částech hladkou křivkou* (stručně *křivkou*), jestliže existuje konečná posloupnost hladkých oblouků $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ v R^2 taková, že platí:

1. Každé dva oblouky k_i, k_j, kde $i \neq j$, mají společné nejvýše krajní body.
2. Jednotlivé oblouky k_i lze orientovat tak, že $\forall i \in \{1,2,\ldots,m-1\} : kb(k_i) = pb(k_{i+1})$.
3. $k = \bigcup_{i=1}^{m} k_i$.

Jestliže $kb(k_m) = pb(k_1)$, pak říkáme, že k je *uzavřená křivka*. Pokud každý bod prostoru R^2 je krajním bodem nejvýše dvou oblouků k_i, nazýváme k *jednoduchou (tj. „neprotínající se“) křivkou. Změnu orientace křivky k* označíme jako $-k$.

Pokud je křivka k složená z více hladkých oblouků, tak výslednou hodnotu křivkového integrálu vypočteme podle následující definice.

Definice 1.4. Nechť k je po částech hladká křivka v R^2 a f je spojitá funkce (dvou proměnných x, y) definovaná na množině k. Nechť $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ je rozklad křivky k na hladké oblouky, kdy rozkladem křivky rozumíme konečnou posloupnost oblouků v R^2. Potom *křivkový integrál prvního druhu funkce f podél křivky k* definujeme předpisem

$$\int_k f(x,y)ds = \sum_{i=1}^{m} \int_{k_i} f(x,y)ds.$$

Poznámka 1.1. Kromě uvedeného způsobu zavedení křivkových integrálů jej můžeme definovat také pomocí integrálních součtů. Křivkový integrál prvního druhu by byl v takovém případě roven limitě

$$\int_k f ds = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\pi_i) s_i \right],$$

kde π_i nám představuje libovolný bod na každém z oblouků, na které je jednoduchá hladká křivka rozdělená a s_i je potom délka daného oblouku. [11, strana 4]

Hodnota výsledného integrálu nezávisí na tom, jakým způsobem si křivku k rozložíme na hladké oblouky. Tato vlastnost plyne z aditivity křivkového integrálu uvedené v kapitole 1.2. Pokud máme totiž dva různé rozklady křivky, podél které integrujeme, na hladké oblouky a provedeme-li jejich společné zjemnění, tak toto zjemnění nebude mít na výslednou hodnotu integrálu žádný vliv.

Poznámka 1.2. Při definování pojmu křivkový integrál prvního druhu jsme se omezili pouze na spojité funkce. Tento fakt pro nás představuje výrazné omezení. Proto zde uvedu, podle jakého vzorce by se křikový integrál prvního druhu řešil v případě Lebesgueova integrálu.

Předpokládejme tedy, že k je hladký oblouk popsaný parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ a že f je funkce dvou proměnných x a y. Pak pro křivkový integrál prvního druhu bude platit:

$$\int_k f(x,y)ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\}}dt,$$

pokud integrál na pravé straně existuje jako vlastní Lebesgueův integrál. [7, strana 138]

Pomocí křivkových integrálů je také možné spočítat délku samotné křivky, podél které integrujeme. Pokud bychom chtěli tuto délku spočítat, tak použijeme jednoduchý vzorec:

$$s = \int_k 1\ ds$$

kde s nám bude značit délku křivky a k potom bude po částech hladká křivka. [2, strana 237]

1.2 Základní vlastnosti křivkových integrálů prvního druhu

Při výpočtech křivkových integrálů je dobré mít na paměti tato základní pravidla: [3, strana 31]

1. Máme-li orientovanou křivku k, kterou si rozložíme na křivky k_1 a k_2, potom platí

$$\int_k f(x,y)ds = \int_{k_1} f(x,y)ds + \int_{k_2} f(x,y)ds$$

2. Máme-li na k definované funkce $f_1(x,y)$ a $f_2(x,y)$, tak potom pro libovolké $c_1 \in R$, $c_2 \in R$ bude platit

$$\int_k [c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)]\, ds = c_1 \int_k f_1(x,y)ds + c_2 \int_k f_2(x,y)ds$$

3. Při změně orientace křivky z k na $-k$ se znaménko u křivkového integrálu prvního druhu nemění, tj.

$$\int_{-k} f(x,y)ds = \int_k f(x,y)ds$$

1.3 Fyzikální aplikace křivkových integrálů 1. druhu v $\mathbf{R}^2$

Hlavním důvodem, proč se vůbec těmito křivkovými integrály zabýváme, jsou potřeby fyziky. Díky křivkovým integrálům můžeme spočítat nejen hmotnost či těžiště křivky, ale jsme schopni určit také její statické momenty a momenty setrvačnosti. Pod pojmy hmotnost či těžiště si zajisté každý z nás umí představit co znamenají. Zbylé dva pojmy mohou být problematické a proto by bylo dobré naznačit, co nám vůbec tyto veličiny udávají.

Pod pojmem *statický moment hmotného bodu* si představíme součin hmotnosti daného bodu a jeho vzdálenosti od přímky (v trojrozměrném vektorovém prostoru reálných čísel R^3 od roviny). *Momentem setrvačnosti* potom rozumíme veličinu, která nám udává míru setrvačnosti tělesa při otáčivém pohybu.

Definice 1.5. Nechť k je po částech hladká hmotná křivka v R^2, jejíž (délková) hustota je popsána spojitou nezápornou funkcí h definovanou na k. Potom hmotnost $m(k)$ křivky k je dána vzorcem

$$m(k) = \int_k h(x,y)ds.$$

Pro výpočet statických momentů $S_x(k)$, $S_y(k)$ vzhledem k souřadnicovým osám hmotné křivky k použijeme vzorce

$$S_x(k) = \int_k yh(x,y)ds,$$

$$S_y(k) = \int_k xh(x,y)ds.$$

Pokud tyto statické momenty $S_x(k)$ a $S_y(k)$ dosadíme do vzorce

$$T(k) = \left(\frac{S_y(k)}{m(k)}, \frac{S_x(k)}{m(k)} \right),$$

získáme tím souřadnice těžiště dané křivky k.
Momenty setrvačnosti $I_x(k)$, $I_y(k)$ vypočítáme vzhledem k souřadnicovým osám hmotné křivky k pomocí těchto vzorců

$$I_x(k) = \int_k y^2 h(x,y)ds,$$

$$I_y(k) = \int_k x^2 h(x,y)ds.$$

1.4 Křivkový integrál prvního druhu v $\mathbf{R}^3$

Nyní jsme se celou dobu zabývali pouze křivkovými integrály v R^2. Můžeme se setkat ale i s případy, kdy nám přibude třetí nezávislá proměnná a tím se dostaneme do prostoru R^3. Teorie křivkových integrálů prvního druhu v R^3 a R^2 se liší pouze přidáním třetí nezávislé proměnné. Proto by bylo nerozumné opisovat zde celou teorii křivkových integrálů prvního druhu, jen s minimálními změnami ještě jednou. Zaměřím se tedy pouze na to hlavní a to jakým způsobem se změní parametrické rovnice a vzorec, pomocí něhož křivkové integrály prvního druhu v R^3 počítáme.

Parametrické rovnice hladkého oblouku $k \subset R^3$ budeme nyní zapisovat ve tvaru:

$$x = \varphi(t),$$

$$y = \psi(t),$$

$$z = \xi(t),$$

kde $t \in \langle a, b \rangle$.

Stejně tak i vzorec pro výpočet křivkového integrálu prvního druhu funkce f v R^3 rozšíříme o jednu proměnou. Dostaneme tedy

$$\int_k f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \xi(t)) \sqrt{\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\xi'(t)]^2\}} dt.$$

1.5 Fyzikální aplikace křivkových integrálů 1. druhu v $\mathbf{R}^3$

Samozřejmě i v R^3 lze počítat pomocí křivkových integrálů dříve zmíněné fyzikální veličiny. Opět je jediný rozdíl v tom, že do vzorců přidáme třetí nezávisle proměnnou.

Definice 1.6. Nechť k je po částech hladká hmotná křivka v R^3, jejíž (délková) hustota je popsána spojitou nezápornou funkcí h definovanou na k. Potom hmotnost $m(k)$ křivky k je dána vzorcem

$$m(k) = \int_k h(x, y, z) ds.$$

Pro statické momenty $S_{yz}(k)$, $S_{zx}(k)$, $S_{xy}(k)$ použijeme vzorce

$$S_{yz}(k) = \int_k x h(x, y, z) ds,$$

$$S_{zx}(k) = \int_k y h(x, y, z) ds,$$

$$S_{xy}(k) = \int_k z h(x, y, z) ds.$$

Těžiště křivky k získáme dosazením statických momentů do vzorce

$$T(k) = \left(\frac{S_{yz}(k)}{m(k)}, \frac{S_{zx}(k)}{m(k)}, \frac{S_{xy}(k)}{m(k)} \right).$$

Vzorce pro momenty setrvačnosti $I_x(k)$, $I_y(k)$, $I_z(k)$ mají potom tvar

$$I_x(k) = \int_k (y^2 + z^2) h(x, y, z) ds,$$

$$I_y(k) = \int_k (z^2 + x^2) h(x, y, z) ds,$$

$$I_z(k) = \int_k (x^2 + y^2) h(x, y, z) ds.$$

Poznámka 1.3. Je patrné, že R^3 není posledním prostorem, ve kterém se tyto křivkové integrály prvního druhu a jejich fyzikální aplikace dají počítat. Tímto způsobem rozšiřování, tedy přidáváním dalších nezávisle proměnných, bychom mohli pokračovat až do R^n, kde n je libovolné přirozené číslo.

1.6 Příklady ke křivkovým integrálům 1. druhu

Příklad 1 Určete celkovou hmotnost oblouku paraboly $y^2 = x$, $0 \leq x \leq 1$, kde $f(x, y) = |y|$ je hustota oblouku paraboly.

Řešení:

Platí:

$$y^2 = x \quad \rightarrow \quad x = y^2 \quad y \in \langle -1, 1 \rangle$$

Parametrizace:

$$\begin{aligned} x &= t^2 \rightarrow x^{'}(t) = 2t\ dt \\ y &= t \ \ \rightarrow y^{'}(t) = 1\ dt \end{aligned}$$

$$ds = \sqrt{(2t)^2 + 1^2} = \sqrt{4t^2+1}\ dt$$

Dosadíme do integrálu, který řešíme pomocí substituce:

$$\int_c |t|\ \ ds = \int_{-1}^{1} |y|\sqrt{4t^2+1}\ dt = 2\int_0^1 t\sqrt{4t^2+1}\ dt = \left| \begin{array}{l} u = 4t^2+1 \\ t = 0 \to u = 1 \\ t = 1 \to u = 5 \\ du = 8t\ dt \\ \frac{1}{8}du = t\ dt \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_1^5 \frac{1}{8} du\sqrt{u} = \frac{1}{4}\int_1^5 \sqrt{u}\ du = \frac{1}{4}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^5 = \frac{1}{6}\left[5^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

Příklad 2 Vypočítejte momenty setrvačnosti vzhledem k souřadnicovým osám jednoho závitu homogenní šroubovice s parametrizací $\psi(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Předpokládáme, že hustota $h(x,y,z) = 1$.

Řešení:

Platí:

$$\begin{array}{lll} x = \cos t & \to & x' = -\sin t\ dt \\ y = \sin t & \to & y' = \cos t\ dt \\ z = 2t & \to & z' = 2\ dt \end{array}$$

$$ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 2^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4} = \sqrt{5}\ dt$$

Dosazením do vzorců, na výpočet momentů setrvačnosti, dostaneme:

$$I_x = \int_k (y^2+z^2)\ h(x,y,z)\ ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + 4t^2)\sqrt{5}\ dt = \sqrt{5}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\ dt +$$

$$+4\sqrt{5}\int_0^{2\pi} t^2\ dt = \sqrt{5}\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} + 4\sqrt{5}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \sqrt{5}\left[\left(\pi - \frac{1}{4}\sin 4\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\sin 0\right)\right] + \frac{4\sqrt{5}}{3}\left[(2\pi)^3 - 0\right] =$$

$$= \sqrt{5}\pi + \frac{8\pi^3 4\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}\pi\frac{3+32\pi^2}{3}$$

$$I_y = \int_k (x^2+z^2)\ h(x,y,z)\ ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 4t^2)\sqrt{5}\ dt =$$

$$= \sqrt{5}\int_0^{2\pi} cos^2 t\ dt + 4\sqrt{5}\int_0^{2\pi} t^2\ dt = \sqrt{5}\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} + 4\sqrt{5}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \sqrt{5}\left[\left(\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{4}\sin 0\right)\right] + 4\sqrt{5}\left[\frac{(2\pi)^3}{3} - 0\right] =$$

$$= \sqrt{5}\pi + \frac{8\pi^3 4\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}\pi\frac{3+32\pi^2}{3}$$

$$I_z = \int_k (x^2+y^2)\ h(x,y,z)\ ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\sqrt{5}\ dt = \sqrt{5}\int_0^{2\pi} dt =$$

$$= \sqrt{5}\,[t]_0^{2\pi} = 2\sqrt{5}\pi$$

Postup výpočtu $\int \sin^2 t\ dt$ a $\int \cos^2 t\ dt$ je následující:

$$\int \sin^2 t\ dt = \int \frac{1}{2}\ dt - \frac{1}{2}\int \cos 2t\ dt = \begin{vmatrix} u = 2t \\ u' = 2\ dt \end{vmatrix} = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\int \cos u\ du =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t + c$$

$$\int \cos^2 t\ dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\ dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\ dt = \frac{1}{2}\int\ dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int \cos 2t\ dt = \left| \begin{array}{l} u = 2t \\ u^{'} = 2\ dt \end{array} \right| = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\int \cos u\ du = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin u + c =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + c$$

Příklad 3 Vypočítejte statický moment S_y (vzhledem k ose y) křivky C. Křivka C je složena z oblouku $A_1(y = 2x^2)$ a z úsečky $A_2(y = 4x)$, kde $x \in \langle 0, 2\rangle$ a má hustotu $f = 1$.

Řešení:

Parametrizace:

$$\begin{array}{l} A_1 : \varphi_1(t) = (t, 2t^2) \rightarrow \varphi_1^{'} = (1, 4t), \quad t \in \langle 0, 2\rangle \\ A_2 : \varphi_2(t) = (t, 4t) \ \ \rightarrow \varphi_2^{'} = (1, 4), \quad t \in \langle 0, 2\rangle \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ds_1 = \sqrt{1^2 + (4t)^2} = \sqrt{1 + 16t^2}\ dt \\ ds_2 = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}\ dt \end{array}$$

Statický moment vypočítáme dosazením do následujícího vzorce a spočítáme jej s využitím substituce:

$$S_y = \int_c x\ ds = \int_0^2 t\sqrt{1+16t^2}\ dt + \int_0^2 t\sqrt{17}\ dt = \left| \begin{array}{l} u = 1 + 16t^2 \\ u^{'} = 32t\ dt \\ t = 0 \rightarrow u = 1 \\ t = 2 \rightarrow u = 65 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{32}\int_1^{65} \sqrt{u}\ du + \sqrt{17}\int_0^2 t\ dt = \frac{1}{32}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^{65} + \sqrt{17}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{32} * \frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^{65} +$$

$$+\sqrt{17}\left[\tfrac{t^2}{2}\right]_0^2 = \tfrac{2}{96}\left[65^{\frac{3}{2}}-1\right]+\sqrt{17}\left[\tfrac{2^2}{2}-0\right] = \tfrac{\sqrt{65^3}-1}{48}+2\sqrt{17}$$

Příklad 4 Vypočítejte hmotnost křivky C s parametrizací $\psi(t) = \left(1, t, \frac{t^2}{2}\right)$, kde $t \in \langle 0, 1\rangle$, jestliže její hustota v každém bodě je $h(x, y, z) = \sqrt{2z}$.

Řešení:

$$\begin{array}{l} x = 1 \ \rightarrow x' = 0\ dt \\ y = t \ \rightarrow y' = 1\ dt \\ z = \frac{t^2}{2} \rightarrow z' = t\ dt \end{array}$$

$$ds = \sqrt{0+1+t^2} = \sqrt{1+t^2}\ dt$$

Pro hmotnost křivky C bude platit:

$$m = \int_c h(x,y,z)\ ds = \int_0^1 \sqrt{2\frac{t^2}{2}}\sqrt{1+t^2}\ dt = \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\ dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = 1+t^2 \\ u' = 2t\ dt \\ t = 0 \rightarrow u = 1 \\ t = 1 \rightarrow u = 2 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{\frac{1}{2}}\ du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{6}\left[\sqrt{2^3}-1\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

Příklad 5 Po bytě si chceme rozvést internet pomocí kabelu. Zjistili jsme, že kabel bude ležet na křivce s parametrizací $\psi(t) = (3t^3, 2t^3)$, kde $t \in \langle 0, 4\rangle$ a cena tohoto kabelu je 27 Kč/ 3 metry. Bude nám na jeho rozvedení stačit 2000 Kč?

Řešení:

$$\begin{array}{l} x = 3t^3 \rightarrow x' = 9t^2\ dt \\ y = 2t^3 \rightarrow y' = 6t^2\ dt \end{array}$$

$$ds = \sqrt{(9t^2)^2 + (6t^2)^2} = \sqrt{81t^4 + 36t^4} = \sqrt{117t^4} = 3\sqrt{13}t^2$$

Nyní vypočítáme délku křivky, na které bude kabel ležet:

$$\int_0^4 3\sqrt{13}t^2\ dt = 3\sqrt{13}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^4 = 3\sqrt{13}\left[\frac{64}{3}\right] = \sqrt{13} * 64 \doteq 230,76$$

Cenu kabelu vypočítáme tímto způsobem:

3 m = 27 Kč ⇒ 1 m = 9 Kč

230, 76 * 9 $\doteq$ 2077 Kč

Na nákup kabelu nám 2000 Kč stačit nebude.

Příklad 6 Najděte hodnotu $\int_K (x^2 + 8xy)\ ds$, kde K je obvod trojúhelníka s vrcholy $V_1 = (0,0)$, $V_2 = (0,2)$ a $V_3 = (1,0)$.

Řešení:

Parametrizace:

$$\begin{array}{lll}
\varphi_1(t) : x = 0 & y = 2t & \rightarrow \quad ds_1 = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2\ dt \\
\varphi_2(t) : x = t & y = 2 - 2t & \rightarrow ds_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}\ dt \\
\varphi_3(t) : x = 1 - t & y = 0 & \rightarrow \ ds_3 = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1\ dt \\
t \in \langle 0, 1 \rangle & &
\end{array}$$

Hodnoty dosadíme do integrálu:

$$\int_0^1 (0^2 + 8 * 0 * 2t)\ 2dt + \int_0^1 (t^2 + 8t(2 - 2t))\ \sqrt{5}dt +$$

$$+ \int_0^1 \left[(1-t)^2 + 8(1-t) * 0\right]\ dt = 0 + \int_0^1 (16t - 15t^2)\ \sqrt{5}dt +$$

$$+ \int_0^1 (1-t)^2\ dt = \left[8t^2 - 5t^3\right]_0^1 \sqrt{5} + \left[t - t^2 + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 =$$

$= (8\text{-}5)\sqrt{5} + (1 - 1 + \frac{1}{3}) = 3\sqrt{5} + \frac{1}{3} = \frac{9\sqrt{5}+1}{3}$

Příklad 7 Vypočítejte souřadnice těžiště homogenní půlkružnice $(x-1)^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$. Hustota půlkružnice je konstantní a rovna jedné.

Řešení:

Parametrizace:

$$\begin{array}{ll} x = 1 + r\cos t & \rightarrow x^{'} = -r\sin t\ dt \\ y = r\sin t & \rightarrow y^{'} = r\cos t\ dt, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle \end{array}$$

$$ds = \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} = \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{r^2} = r\ dt$$

Abychom získali souřadnice těžiště, musíme si nejprve spočítat hmotnost půlkružnice m a její statické momenty S_x a S_y.

$$m = \int_c ds = \int_0^\pi r\ dt = r\,[t]_0^\pi = r(\pi - 0) = r\pi$$

$$S_x = \int_c y\ ds = \int_0^\pi (r\sin t)\ r\ dt = r^2 \int_0^\pi \sin t\ dt = r^2\,[-\cos t]_0^\pi =$$
$$= r^2(1+1) = 2r^2$$

$$S_y = \int_c x\ ds = \int_0^\pi (1 + r\cos t)r\ dt = \int_0^\pi r\ dt + \int_0^\pi r\cos t\ dt =$$
$$= r\,[t]_0^\pi + r^2\,[\sin t]_0^\pi = r(\pi - 0) + r^2(0-0) = r\pi$$

Nyní vypočítané hodnoty dosadíme do vzorce $T = \left(\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m}\right)$:

$$\frac{S_x}{m} = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2r}{\pi}, \qquad \frac{S_y}{m} = \frac{r\pi}{r\pi} = 1$$

Souřadnice těžiště jsou tedy ve tvaru $T = \left(1, \frac{2r}{\pi}\right)$.

Příklad 8 Vypočítejte obsah válcové plochy

$$\left\{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{4x^2 + \frac{y^2}{4}}\right\}.$$

Řešení:

Pro elipsu platí: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Z toho vyplývá, že pro námi uvažovanou elipsu $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, kterou si označíme k, bude $a = 1$ a $b = 2$.

Parametrizace elipsy k:

$$\begin{array}{l} x = a\cos t \to x = \cos t \;\; \to x' = -\sin t\ dt \\ y = b\sin t \;\; \to y = 2\sin t \to y' = 2\cos t\ dt \\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{array}$$

$$ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}\ dt$$

Nyní dosadíme do vzorce:

$$\int_k \sqrt{4x^2 + \frac{y^2}{4}}\ ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 t + \frac{4\sin^2 t}{4}} \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}\ dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(4\cos^2 t + \sin^2 t)(\sin^2 t + 4\cos^2 t)}\ dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\ dt +$$
$$+4\int_0^{2\pi} \cos^2 t\ dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} + 4\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \pi + 4\pi = 5\pi$$

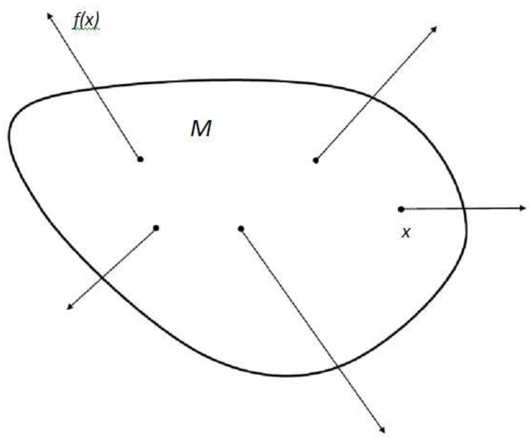
Výpočty $\sin^2 t$ a $\cos^2 t$ jsou řešeny stejným způsobem, jako tomu bylo u příkladu 2.

2 Křivkový integrál druhého druhu

2.1 Křivkový integrál druhého druhu v $\mathbf{R}^2$

Dalším typem křivkových integrálů, se kterými se seznámíme, jsou křivkové integrály druhého druhu. Jeden z hlavních rozdílů mezi křivkovým integrálem prvního a druhého druhu je, že následující křivkový integrál je závislý na orientaci křivky. Jinými slovy řečeno, je tzv. *orientovaný*. Orientovanou křivku k budeme značit symbolem (k). Stejně tak, jako tomu bylo v předešlé části, je nutné si i zde nejdříve ujasnit některé pojmy, které ke křivkovým integrálům druhého druhu patří. Prvním z těchto pojmů je *vektorové pole*.

Definice 2.1. Nechť $M \subset R^n$ a nechť $\boldsymbol{f} : M \to R^n$ je vektorová funkce. Tuto vektorovou funkci $\boldsymbol{f}$ někdy nazýváme *vektorovým polem na množině* M. Vektorové pole $\boldsymbol{f}$ názorně zobrazujeme tak, že do každého bodu $x \in M$ umístíme vektor $\boldsymbol{f}(x)$.



Obrázek 1 - Vektorové pole

Když nyní víme, co si pod vektorovým polem představit, můžeme si zavést další pojem a tím je *práce konstantního vektorového pole*.

Definice 2.2. Nechť (k) je orientovaná úsečka v R^2 s počátečním bodem c a s koncovým bodem d. Nechť na množině k je definováno konstantní vektorové pole $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{f}_0$, kde $\boldsymbol{f}_0 \in R^2$ je konstantní vektor. Práce W vektorového pole $\boldsymbol{f}$ podél orientované úsečky (k) je dána vzorcem:

$$W = \boldsymbol{f}_0(d - c).$$

Křivkový integrál druhého druhu nám také umožňuje počítat práci vykonanou nekonstantním vektorovým polem po křivce, která nemusí být úsečkou.

Stejně tak jako tomu bylo u křivkových integrálů prvního druhu, i zde budeme nejprve uvažovat, že (k) je orientovaný hladký oblouk v R^2, pro jehož parametrické rovnice platí:

$$x = \varphi(t),$$

$$y = \psi(t),$$

kde $t \in \langle a, b \rangle$.

Nyní známe vše potřebné k tomu, abychom si mohli křivkový integrál druhého druhu nadefinovat.

Definice 2.3. Nechť (k) je orientovaný hladký oblouk v R^2 popsaný parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ a nechť $\boldsymbol{f} = (f, g)$ je spojité vektorové pole definované na množině k. Potom integrál

$$\int_a^b \Big[f(\varphi(t), \psi(t))\varphi^{'}(t) + g(\varphi(t), \psi(t))\psi^{'}(t) \Big] \, dt$$

nazýváme *křivkovým integrálem druhého druhu vektorového pole* $\boldsymbol{f}$ *podél orientovaného oblouku* (k) a označujeme jej symbolem $\int_{(k)} f(x, y) \, dx + g(x, y) \, dy$ nebo stručně $\int_{(k)} \boldsymbol{f}(x, y) \, d\boldsymbol{s}$. Píšeme tedy

$$\int_{(k)} f(x,y)\ dx + g(x,y)\ dy = \int_a^b \Big[f(\varphi(t),\psi(t))\varphi^{'}(t) + g(\varphi(t),\psi(t))\psi^{'}(t) \Big]\ dt.$$

Z předpokladu definice křivkového integrálu druhého druhu vyplývá, že integrovaná funkce je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, proto tento integrál vždy existuje. Také u křivkového integrálu druhého druhu platí, že výsledná hodnota nezávisí na parametrizaci orientovaného oblouku. [1, strana 298]
V literatuře se můžeme setkat s různým značením těchto křivkových integrálů, mezi nejrozšířenější potom patří $\int_{(k)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{s}$, $\int_{(k)} f\ dx + g\ dy$, $\int_{(k)} \boldsymbol{f}\ d\boldsymbol{s}$ nebo také $\int_{(k)} \boldsymbol{f}$.

Poznámka 2.1. Stejně tak, jako tomu bylo u křivkových integrálů prvního druhu, tak i zde se zabýváme pouze Riemannovým integrálem. Pro Lebesgueův integrál by platilo následující:
Předpokládejme, že (k) je orientovaný hladký oblouk popsaný parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ a $\boldsymbol{f}$ je vektorové pole definované na množině k. Pak křivkový integrál druhého druhu definujeme předpisem:

$$\int_{(k)} f(x,y)\ dx + g(x,y)\ dy = \int_a^b \Big[f(\varphi(t),\psi(t))\varphi^{'}(t) + g(\varphi(t),\psi(t))\psi^{'}(t) \Big]\ dt,$$

pokud integrál na pravé straně existuje jako vlastní Lebesgueův integrál. [7, strana 139]

Při výpočtech křivkových integrálů druhého druhu se můžeme dostat ale i do situací, kdy si nevystačíme pouze s orientovaným hladkým obloukem. Například když se ve vektorovém poli pohybuje bod, který se stejnou cestou vrací i zpět. Z tohoto důvodu je nutné křivku, podél které integrujeme, zobecnit. Zavedeme si tedy nový pojem, *orientovaná cesta*.

Definice 2.4. Nechť (k) je konečná posloupnost hladkých orientovaných oblouků $((k_1),(k_2),\ldots,(k_m))$ v R^2 taková, že

$$\forall i \in 1,2,\ldots,m-1 : kb(k_i) = pb(k_{i+1}).$$

Potom píšeme

$$(k) = (k_1) + (k_2) + \ldots + (k_m)$$

a (k) nazýváme *orientovanou cestou v* R^2. Orientované oblouky (k_i) jsou tzv. *úseky cesty* (k). Jestliže $kb(k_m) = pb(k_1)$ nazýváme cestu (k) *uzavřenou*. Množinu

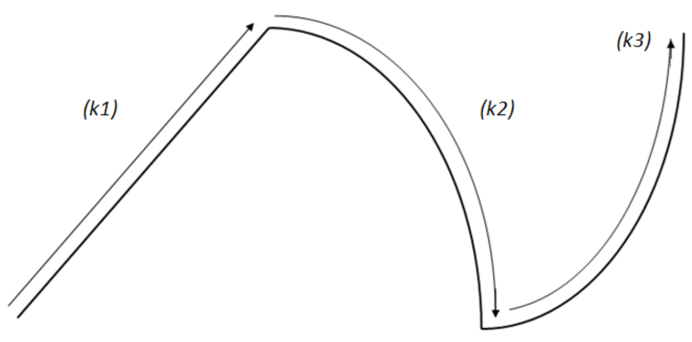
$$\bigcup_{i=1}^{m} k_i$$

nazýváme *trajektorií cesty* (k).

Cestu

$$(-k) = (-k_m) + (-k_{m-1}) + \ldots + (-k_1)$$

nazýváme *opačnou cestou k cestě* (k).



Obrázek 2 - Orientovaná cesta

Definice křivkového integrálu podél orientované cesty bude mít následující znění:

Definice 2.5. Nechť (k) je orientovaná cesta z def. 2.4 a $\boldsymbol{f}$ je spojité vektorové pole definované na trajektorii cesty (k). Potom křivkový integrál druhého druhu vektorového pole $\boldsymbol{f}$ podél cesty (k) definujeme předpisem

$$\int_{(k)} \boldsymbol{f}(x,y)\ d\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^{m} \int_{(k_i)} \boldsymbol{f}(x,y)\ d\boldsymbol{s}.$$

Výsledná hodnota integrálu není závislá na tom, jakým způsobem rozložíme (k) na jednotlivé úseky (k_i). Toto tvrzení plyne z aditivity křivkového integrálu, viz. kapitola 2.3. Pokud je orientovaná cesta (k) uzavřená, označujeme někdy integrál z def. 2.5 symbolem $\oint$. Píšeme potom tedy

$$\oint_{(k)} f(x,y)\ dx + g(x,y)\ dy.$$

Takto značený integrál nazýváme *cirkulací vektorového pole* $\boldsymbol{f} = (f,g)$ *podél uzavřené* (orientované) *cesty* (k).

2.2 Křivkový integrál druhého druhu v $\mathbf{R}^3$

Také u křivkových integrálů druhého druhu platí, že R^2 není jediným prostorem, ve kterém můžeme výpočty provádět. Postupným přidáváním dalších nezávislých proměnných se můžeme dostat do prostoru R^3, R^4 a samozřejmě můžeme dojít až k R^n, kde n je libovolné přirozené číslo. Přitom teorie těchto křivkových integrálů se bude lišit pouze minimálně, v případě R^3 definice doplníme o třetí nezávisle proměnnou z a stejným způsobem rozšiřování bychom pokračovali i v dalších prostorech.

Parametrické rovnice orientovaného hladkého oblouku (k) v R^3 budeme zapisovat ve tvaru:

$$x = \varphi(t),$$

$$y = \psi(t),$$

$$z = \xi(t),$$

kde $t \in \langle a, b\rangle$.

Při výpočtu křivkového integtálu vektorového pole $\boldsymbol{f} = (f, g, h)$ podél orientovaného oblouku (k) použijeme vzorec:

$$\int_{(k)} f(x,y,z)\ dx + g(x,y,z)\ dy + h(x,y,z)\ dz =$$

$$\int_a^b \Big[f(\varphi(t), \psi(t), \xi(t))\ \varphi^{'}(t) + g(\varphi(t), \psi(t), \xi(t))\ \psi^{'}(t) + h(\varphi(t), \psi(t), \xi(t))\ \xi^{'}(t) \Big]\ dt$$

Stejně tak orientovaný hladký oblouk (k) v R^3 bychom zobecnili na orientovanou cestu v R^3, apod.

2.3 Základní vlastnosti křivkových integrálů druhého druhu

Tyto vlastnosti vychází opět z vlastností Riemannova integrálu. Pouze u změny orientace křivky dochází také ke změně znaménka ve výsledném integrálu. [3, strana 46]

1. Vlastnosti křivkového integrálu druhého druhu vyplývají z Riemannova integrálu, zejména pak jeho aditivita a linearita. Platí tedy

   $$\int_{(k)} (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})\ d\boldsymbol{s} = \int_{(k)} \boldsymbol{f}\ d\boldsymbol{s} + \int_{(k)} \boldsymbol{g}\ d\boldsymbol{s},$$

   $$\int_{(k)} c\boldsymbol{f}\ d\boldsymbol{s} = c \int_{(k)} \boldsymbol{f}\ d\boldsymbol{s}.$$

   za předpokladu, že funkce $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ a $c\boldsymbol{f}$ jsou integrovatelné na (k), kde $c \in R$.

2. Máme-li dva orientované hladké oblouky (k_1) a (k_2) takové, že $kb(k_1) = pb(k_2)$ a zároveň platí-li, že $k = k_1 \cup k_2$, tak potom pro křivkový integrál druhého druhu bude platit, že

$$\int_{(k)} \boldsymbol{f}(x,y)\ d\boldsymbol{s} = \int_{(k_1)} \boldsymbol{f}(x,y)\ d\boldsymbol{s} + \int_{(k_2)} \boldsymbol{f}(x,y)\ d\boldsymbol{s}.$$

3. Změna orientace křivky z (k) na $(-k)$, se nám odrazí také ve výsledné hodnotě křivkového integrálu:

$$\int_{(-k)} \boldsymbol{f}(x,y)\ d\boldsymbol{s} = -\int_{(k)} \boldsymbol{f}(x,y)\ d\boldsymbol{s}.$$

2.4 Fyzikální aplikace křivkových integrálů druhého druhu

Také křivkové integrály druhého druhu můžeme využít k výpočtu fyzikálních veličin. Zaměříme se zde především na *mechanickou práci.*

Nechť (k) je orientovaná cesta v R^2 a $\boldsymbol{f} = (f, g)$ spojité vektorové pole definované na trajektorii cesty (k). Ze způsobu, jakým jsme definovali křivkový integrál je jasné, že práci W vektorového pole $\boldsymbol{f}$ podél cesty (k) vypočteme pomocí vzorce

$$W = \int_{(k)} f(x,y)\ dx + g(x,y)\ dy.$$

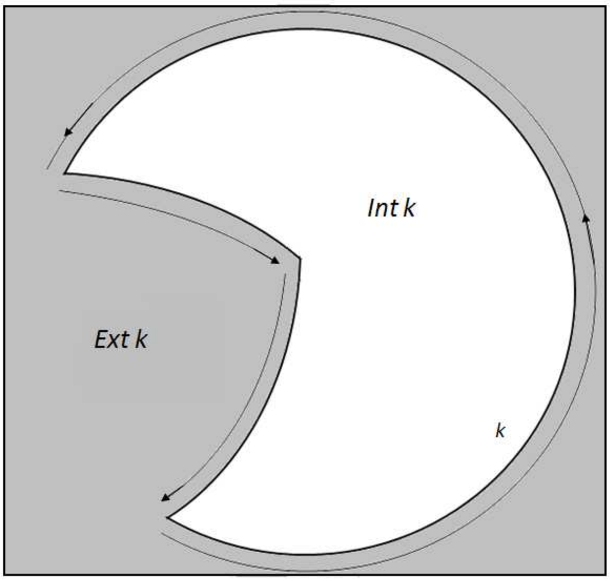
Přidáním třetí nezávisle proměnné z můžeme tuto definici rozšířit také pro prostor R^3. Zde budeme předpokládat, že (k) je orientovaná cesta v R^3 a že spojité vektorové pole je ve tvaru $\boldsymbol{f} = (f, g, h)$. Výslednou práci tedy spočítáme pomocí vzorce

$$W = \int_{(k)} f(x,y,z)\ dx + g(x,y,z)\ dy + h(x,y,z)\ dz.$$

2.5 Greenova věta

Souvislost mezi dvojným integrálem na rovinné oblasti a křivkovým integrálem druhého druhu podél její hranice nám vysvětluje Greenova věta. Předtím, než si znění samotné věty uvedeme, je nutné zavést si nový pojem, a to *orientaci uzavřené křivky.*

Předpokládejme, že k je jednoduchá, hladká a uzavřená křivka v R^2, jak jsme si ji zavedli v Definici 1.3. Tato křivka dělí rovinu R^2 na dvě části - $Int\ k$ a $Ext\ k$, jak ukazuje následující obrázek. $Int\ k$ nám označuje omezenou oblast roviny a $Ext\ k$ její neomezenou část. Tato vlastnost vyplývá ze znění *Jordanovy věty.* Důkaz tohoto tvrzení najdeme v [8, strana 138].



Obrázek 3 - Omezená a neomezená oblast roviny

Pokud si na jakémkoliv oblouku křivky k zvolíme jeho orientaci, určíme tím zároveň i orientaci křivky k a tím tak můžeme vytvořit z k dvě různě orientované cesty. Tyto orientace mohou být buď kladné nebo záporné. Orientaci křivky určíme jednoduchým způsobem. Pokud křivka „probíhá“ proti směru hodinových ručiček, jedná se o *kladnou orientaci*, v opačném případě orientaci označíme za *zápornou.* Jak je vidět z předešlého obrázku, křivka na něm má kladnou orientaci.

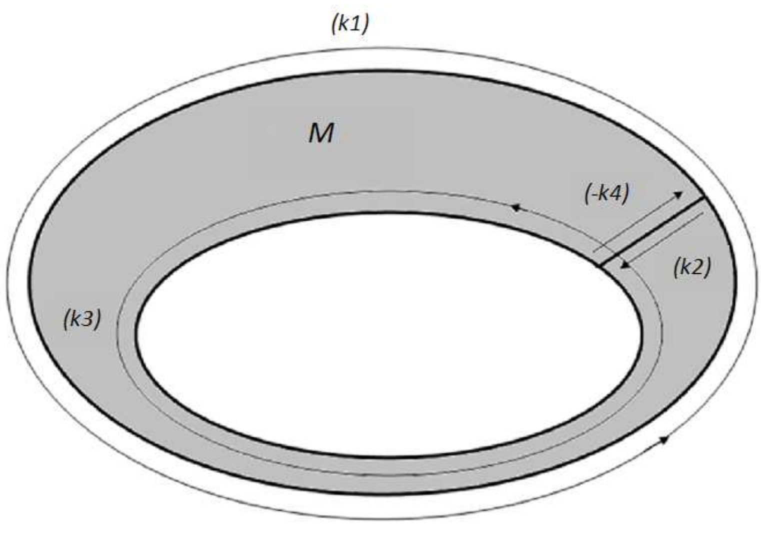
Greenova věta má následující znění:

Věta 2.1. *Nechť $M \subset R^2$ je omezená uzavřená oblast, jejíž hranicí je jediná jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka. Nechť $(hr\ M)$ je kladně orientovaná křivka hr M. Nechť $\boldsymbol{f} = (f, g)$ je vektorové pole, které je třídy C^1 na (otevřené) oblasti $G \subset R^2$, přičemž $M \subset G$. Potom platí tzv. Greenův vzorec:*

$$\iint_M \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) \, dxdy = \int_{(hr\ M)} f(x,y)\ dx + g(x,y)\ dy.$$

Důkaz: najdeme v [1, strana 304]

Greenovu větu můžeme použít také pro mnohem rozmanitější oblasti. I zde požadujeme, aby tyto oblasti byly uzavřené a jejich hranice tvořilo konečně mnoho jednoduchých uzavřených po částech hladkých křivek. Příkladem takové oblasti může být například oblast z následujícího obrázku:



Obrázek 4 - Rozmanitá oblast

Pro výsledný integrál oblasti M na obrázku 4 by např. platilo:

$$\iint_M \dots = \int_{k_1} \dots + \int_{k_2} \dots + \int_{k_3} \dots + \int_{-k_4} \dots$$

Pomocí této věty také počítáme obsahy rovinných oblastí. Budeme předpokládat, že $M \subset R^2$ je uzavřená oblast, která vyhovuje předpokladům Greenovy věty. Vezmeme-li si

$$\iint_M \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \, dxdy = \int_{(\mathrm{hr} \ M)} f(x, y) \, dx + g(x, y) \, dy$$

a položíme-li

$$f(x, y) = -\frac{1}{2}y \quad \text{a} \quad g(x, y) = \frac{1}{2}x,$$

bude integrál na levé straně ve tvaru $\iint_M dxdy$.

Vzhledem k tomu, že obsah měřitelné množiny $M \subset R^2$ se vypočítá pomocí vzorce $\mu(M) = \iint_M dxdy$, bude tomuto obsahu roven i křivkový integrál na její pravé straně.

Obsah P uzavřené oblasti M, kde hr M je kladně orientovaná hranice M vypočteme tedy podle vzorce:

$$P = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{hr} \ M} x \, dy - y \, dx.$$

Greenovu větu můžeme také použít k důkazu *Cauchyovy věty*. Její znění je následující:

Věta 2.2. [4, strana 76] *Nechť D je jednoduše souvislá oblast třídy C^1 neobsahující ∞ a nechť f je holomorfní funkce v oblasti D. Pak pro každou Jordanovu křivku φ konečné délky, pro niž $[\varphi] \subset D$, platí*

$$\int_{\varphi} f(z)\ dz = 0.$$

Pod Jordanovou křivkou si představíme uzavřenou a jednoduchou křivku, která rozděluje rovinu na dvě oblasti. S takovou jsme se již setkali např. u předpokladů pro Greenovu větu. Jednoduše souvislá oblast je taková oblast, která je podmožinou R^2 a ve které můžeme každou uzavřenou jednoduchou spojitou křivku „spojitě stáhnout" do bodu. Pojem holomorfní funkce může být problematičtější, proto zde uvedu jeho definici.

Definice 2.6. Nechť $G \subset C$ je otevřená množina. Řekneme, že komplexní funkce f je *holomorfní na* G, jestliže $f^{'}(z)$ existuje ve všech bodech množiny G. [5, strana 29]

Nyní můžeme přijít k samotnému důkazu Cauchyovy věty.

Důkaz: [4, strana 76] O f víme, že je holomorfní v D, z toho vyplývá, že pro každý bod $z \subset D$ existuje derivace $f^{'}(z)$. Předpokládáme, že tato derivace je spojitá. Platí-li, že $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, tak potom podle [4, strana 71] platí:

$$\int_{\varphi} f(z)\ dz = \int_{\varphi} u\ dx - v\ dy + i \int_{\varphi} v\ dx + u\ dy = I_1 + i\ I_2.$$

Z předpokladu, že $f^{'}(z)$ je spojitá nám vyplývá, že také všechny první parciální derivace funkcí u a v jsou spojité a podle [4, strana 34] pro ně platí:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

v každém bodě $[x, y] \subset D$.

Podle Greenovy věty nám potom pro integrály I_1 a I_2 vychází:

$$I_1 = \iint_{\mathrm{Int}\varphi} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0, \quad I_2 = \iint_{\mathrm{Int}\varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

a proto také $\int_{\varphi} f(z)\ dz = 0$.

2.6 Nezávislost křivkového integrálu druhého druhu na cestě

Dalším způsobem, jak vypočítat křivkový integrál druhého druhu, je pomocí jeho nezávislosti na integrační cestě. V takovémto případě výsledná hodnota integrálu závisí pouze na počátečním bodě $pb(k)$ a koncovém bodě $kb(k)$ křivky k, podél které integrujeme. Zároveň platí, že zmíněná nezávislost je vlastností integrované funkce, a ta musí splňovat určité podmínky.

Definice 2.7. Nechť $\boldsymbol{f} = (f, g)$ je spojité vektorové pole definované na oblasti $G \subset R^2$. Řekneme, že *křivkový integrál druhého druhu vektorového pole* $\boldsymbol{f}$ *nezávisí v oblasti* G *na cestě*, jestliže pro libovolné dvě orientované cesty (k_1), (k_2) v oblasti G o stejném počátečním a koncovém bodě platí

$$\int_{(k_1)} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \int_{(k_2)} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy.$$

Věta 2.3. *Křivkový integrál druhého druhu vektorového pole* $\boldsymbol{f}$ *nezávisí na cestě v oblasti* $G \subset R^2$ *právě tehdy, když cirkulace vektorového pole* $\boldsymbol{f}$ *podél libovolné uzavřené cesty v* G *je rovna nule.*

Důkaz: najdeme v [6, strana 309]

Abychom mohli pochopit další větu spojenou s nezávislostí křivkového integrálu druhého druhu na jeho cestě, je potřeba se nejdříve seznámit s *potenciálem* a s *potenciálním vektorovým polem*.

Definice 2.8. Nechť $\boldsymbol{f}$ je spojité vektorové pole na oblasti $G \subset R^n$. Řekneme, že vektorové pole $\boldsymbol{f}$ *je potenciální na* G, jestliže existuje (reálná) funkce V definovaná na G taková, že pro každé $\boldsymbol{x} \in G$ platí

$$\mathrm{grad} V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Každou takovou funkci V nazýváme *potenciálem vektorového pole* $\boldsymbol{f}$ *na oblasti* G.

Poznámka 2.2. Pro každé potenciální vektorové pole platí, že má nekonečně mnoho potenciálů. Ty získáme tak, že k libovolnému z nich přičteme všechny možné konstanty.

Věta 2.4. [1, strana 308] *Předpokládejme, že máme vektorové pole* $\boldsymbol{f} = (f, g)$ *na jednoduše souvislé oblasti* $G \subset R^2$. *Potom toto vektorové pole je potenciální na* G *právě tehdy, když pro každé* $(x, y) \in G$ *platí, že*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y).$$

Tvrzení z věty 2.4 můžeme dokázat následující větou:

Věta 2.5. *Předpokládejme, že definičním oborem funkcí* $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ *je jednoduše souvislá oblast* $\Omega \subset R^2$ *a že všechny tyto funkce jsou na* Ω *spojité. Potom diferenciální rovnice* $M(x, y)x' + N(x, y)y' = 0$ *je exaktní na* Ω *právě tehdy, když pro každé* $(x, y) \in \Omega$ *platí, že:*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y).$$

Rovnici nazýváme exaktní, jestliže existuje funkce V definovaná na Ω taková, že pro $\forall(x, y) \in \Omega$ platí:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = N(x, y).$$

Kdybychom uvažovali prostor R^3, tak bychom měli vektorová pole $\boldsymbol{f} = (f, g, h)$, které je třídy C^1 definované na oblasti $G \subset R^3$. budeme předpokládat, že existuje funkce V definovaná na G taková, že pro $\forall(x, y, z) \in G$ bude platit:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) = f(x,y,z),$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x,y,z) = f(x,y,z),$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}(x,y,z) = f(x,y,z).$$

Za předpokladu platnosti věty o „záměnnosti" smíšených vyšších parciálních derivací:

Věta 2.6. *Nechť f je funkce n proměnných, která má na otevřené množině $M \subset R^n$ spojité všechny parciální derivace až do k-tého řádu. Potom tyto parciální derivace (na M) nezávisí na pořadí proměnných, podle nichž derivujeme, ale závisí pouze na tom, kolikrát derivujeme podle jednotlivých proměnných.*

nám pak podle [1, strana 308] vyplývá, že pro $\forall(x,y,z) \in G$ platí:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z),$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z).$$

Nyní můžeme přejít k samotnému znění věty.

Věta 2.7. *Nechť $\boldsymbol{f} = (f,g)$ je spojité vektorové pole definované na oblasti $G \subset R^2$. Potom křivkový integrál druhého druhu vektorového pole $\boldsymbol{f}$ nezávisí v oblasti G na cestě právě tehdy, když vektorové pole $\boldsymbol{f}$ je na G potenciální. Je-li pole $\boldsymbol{f}$ na G potenciální a je-li V jeho potenciál, potom pro libovolnou orientovanou cestu (k) v G platí*

$$\int_{(k)} f(x,y)\ dx + g(x,y)\ dy = V(kb(k)) - V(pb(k)).$$

Důkaz: najdeme v [6, strana 310]

2.7 Příklady ke křivkovým integrálům 2. druhu

Příklad 1 Stanovte práci rovinného vektorového pole $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\frac{y}{2}, -3x\right)$ po oblouku paraboly $y = x^2$ z bodu $(0,0)$ do bodu (2, 2).

Řešení:

Pro parabolu $y = x^2$ platí:

$$\begin{array}{l} x = t \ \rightarrow x^{'} = dt \\ y = t^2 \rightarrow y^{'} = 2t\ dt, \quad t \in \langle 0, 2 \rangle \end{array}$$

Práci vektorového pole $\boldsymbol{F}$ vypočítáme následujícím způsobem:

$$\int F\ ds = \int_{(0,0)}^{(2,2)} \frac{y}{2}\ dx - 3xy\ dy = \int_0^2 \left(\frac{t^2}{2} - 6t^4\right)\ dt = \int_0^2 \left(\frac{t^2}{2} - 6t^4\right)\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 0\right) - 6\left(\frac{32}{5} - 0\right) = \frac{4}{3} - 6 * \frac{32}{5} = -\frac{556}{15}$$

Příklad 2 Vypočítejte integrál $\int_K (8xy - 3y)\ dx + (4x^2 + 6y)\ dy$, kde K je kladně orientovaná kružnice se středem $S(0,0)$ a poloměrem r.

Řešení:

Při řešení tohoto integrálu můžeme využít Greenovu větu, bude tedy platit:

$$\begin{array}{l} P(x,y) = 8xy - 3y \rightarrow P_y^{'} = 8x - 3 \\ Q(x,y) = 4x^2 + 6y \ \rightarrow Q_x^{'} = 8x \end{array}$$

Obsah kružnice S je roven πr^2.

A nyní dosadíme do integrálu:

$$\iint [8x - (8x - 3)]\ dxdy = \iint 3\ dxdy = 3 * S = 3\pi r^2$$

Příklad 3 Vypočítejte křivkový integrál druhého druhu $\int_{(k)}(y-1)\ dx + x\ dy$, kde k je „čtvrtelipsa“ daná parametrickými rovnicemi $x = 3\cos t, y = 2\sin t$, $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ orientovaná tak, že $pb(k) = (0,2), kb(k) = (3,0)$.

Řešení:

Parametrizace:

$$\begin{array}{l} x = 3\cos t \rightarrow x' = -3\sin t\ dt \\ y = 2\sin t\ \rightarrow y' = 2\cos t\ dt, \text{kde } t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \end{array}$$

„Čtvrtelipsa“ má obrácenou orientaci, proto před integrál dáme záporné znaménko:

$$\begin{aligned}
&-\int_{(k)} (y-1)\ dx + x\ dy = \\
&= -\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t - 1)(-3\sin t)\ dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t * 2\cos t\ dt \right) = \\
&= -\left(-6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\ dt + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\ dt + 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ dt \right) = \\
&= -\left(-6\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3\left[-\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 6\left[\frac{1}{2}(t + \sin t\cos t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \\
&= -\left(-6\frac{\pi}{4} + 3*1 + 6\left[\frac{1}{2} * \frac{\pi}{2} \right] \right) = -\left(-\frac{6\pi}{4} + 3 + \frac{6\pi}{4} \right) = -3
\end{aligned}$$

Řešení integrálů $\int \sin^2 t\ dt$ a $\int \cos^2 t\ dt$ bude stejné, jako tomu bylo u příkladu 2 v kapitole 1.6.

Příklad 4 S využitím potenciálu spočtěte $\int_C x\ dy + y\ dx$ přes křivku C začínající v bodě $(-2,2)$ a končící v bodě $(3,5)$.

Řešení:

Při řešení tohoto integrálu využijeme znalostí z nezávislosti křivkového integrálu 2. druhu na jeho cestě.

Pro úplný potenciál platí:

$$d(xy) = x\ dy + y\ dx$$

Díky tomu bude výsledný integrál roven hodnotě:

$$\int_C x\ dy + y\ dx = [xy]_{(-2,2)}^{(3,5)} = (3 * 5) - (-2 * 2) = 15 - (-4) = 19$$

Příklad 5 Vypočítejte křivkový integrálu 2. druhu v R^3
$\int_{(k)} x\ dx + y\ dy + (xz - y)\ dz$, kde (k) je orientovaný oblouk daný parametrickými rovnicemi: $x = t^2$, $y = 2t$, $z = 4t^3$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Řešení:

Platí:

$$\begin{array}{ll} x = t^2 & \to x' = 2t\ dt \\ y = 2t & \to y' = 2\ dt \\ z = 4t^3 & \to z' = 12t^2\ dt \\ t \in \langle 0, 1 \rangle & \end{array}$$

$$\int_0^1 t^2 2t\ dt + \int_0^1 2t * 2dt + \int_0^1 (t^2 * 4t^3 - 2t) 12t^2\ dt = \int_0^1 2t^3\ dt + \int_0^1 4t\ dt +$$

$$+ \int_0^1 (48t^7 - 24t^3)\ dt = 2\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 + 4\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[48\frac{t^8}{8} - 24\frac{t^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + 2 + \left(\frac{48}{8} - \frac{24}{4}\right) = \frac{1}{2} + 2 + 0 = \frac{5}{2}$$

Příklad 6 V rovině R^2 je dáno vektorové pole $\boldsymbol{f}(x,y) = (-x+y, 2x)$, $(x,y) \in R^2$. Vypočítejte práci tohoto vektorového pole podél kladně orientované (tj. proti smyslu pohybu hodinových ručiček) kružnice se středem v počátku a poloměrem $R > 0$.

Řešení:

Pro kružnici platí:

$$\begin{aligned} x &= R\cos t \to x' = -R\sin t\ dt \\ y &= R\sin t \to y' = R\cos t\ dt, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \end{aligned}$$

$$W = \int_0^{2\pi} \left[(-R\cos t + R\sin t)(-R\sin t) + 2R\cos t R\cos t \right]\ dt =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(\cos t \sin t - \sin^2 t + 2\cos^2 t \right)\ dt =$$

Řešení integrálu $\int \cos t \sin t\ dt$:

$$\int_0^{2\pi} \sin t \cos t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t\ dt = \left| \begin{matrix} x = 2t \\ x' = 2\ dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin x \frac{dx}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\cos x \right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{4}\left[\cos 2t \right]_0^{2\pi} = 0$$

$\int \cos^2 t\ dt$ a $\int \sin^2 t\ dt$ počítáme stejným způsobem, jako v kapitole 1.6 u příkladu 2. Hodnoty nyní dosadíme do výpočtu W:

$$= R^2 \left\{ 0 - \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{2\pi} + 2\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{2\pi} \right\} =$$

$$= R^2(-\pi + 2\pi) = R^2\pi$$

Příklad 7 S využitím Greenovy věty vypočtěte $S = \int_K (x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy$ jestliže K je kladně orientovaný obvod trojuhelníka ABC, kde $A = (0,0)$, $B = (0,3)$ a $C = (3,3)$.

Řešení:

Pro Greenovu větu platí:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= x^2+y^2 \;\; \rightarrow P_y^{'} = 2y \\ Q(x,y) &= (x+y)^2 \rightarrow Q_x^{'} = 2(x+y) \end{aligned}$$

Nyní dosadíme do vzorce:

$$\begin{aligned} &S = \iint (2(x+y)-2y)\;dxdy = 2\int_0^3 x\left(\int_x^3 dy\right)\;dx = 2\int_0^3 x\,[y]_x^3\,dx = \\ &= 2\int_0^3 (3x-x^2)\;dx = 2\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 2\left[\frac{27}{2}-\frac{27}{3}\right]-0 = \\ &= 2\frac{81-54}{6} = \frac{27}{3} = 9 \end{aligned}$$

Příklad 8 Dostali jsme za úkol spočítat, kolik bude stát uklizení části města. Úklid bude provádět zametací vůz, u nějž 1 KJ práce stojí 15 Kč. Víme, že při své cestě zametací vůz pojede po lomené čáře, kterou určují body ABC, kde $A = (1,1)$, $B = (1,3)$ a $C = (3,3)$, přičemž vzhledem k rozmanitosti terénu bude na povrch silnice působit silou $\vec{F} = \left(\frac{x}{2}, x^3y\right)$.

Řešení:

Nejprve je nutné určit si parametrizaci křivek AB a BC:

$$\begin{aligned} AB: x &= 1 \rightarrow x^{'} = 0\;dt \\ y &= t \;\rightarrow y^{'} = dt, \quad t \in \langle 1,3\rangle \end{aligned}$$

$$BC: x = t \rightarrow x^{'} = dt$$
$$y = 3 \rightarrow y^{'} = 0\ dt, \quad t \in \langle 1, 3 \rangle$$

Integrál dostaneme ve tvaru:

$$\int_1^3 \frac{1}{2} * 0\ dt + 1^3 t\ dt + \int_1^3 \frac{t}{2} dt + 3t^3 * 0\ dt = \int_1^3 1^3 t\ dt + \int_1^3 \frac{t}{2} dt =$$
$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^3 + \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^3 = \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{2} + \frac{4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Víme, že 1 KJ práce stojí 15 Kč. Celkovou cenu práce tedy spočítáme jako $6 * 15 = 90$ Kč.

Příklad 9 Dokažte, že křivkový integrál druhého druhu vektorového pole $\boldsymbol{f} = (2xy, x^2 - 2z^2, 3 - 4yz)$ nezávisí v R^3 na cestě a vypočtěte

$$\int_{(1,2,3)}^{(-2,0,1)} 2xy\ dx + (x^2 - 2z^2)\ dy + (3 - 4yz)\ dz.$$

Řešení:

Nejprve ověříme splnění podmínek pro nezávislost křivkového integrálu 2. druhu na cestě.

$$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = -4z$$

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = 2x$$

Podle předpokladů platí že $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (2xy, x^2 - 2z^2, 3 - 4yz)$.

Platí tedy:

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = 2xy \quad \rightarrow \quad V(x, y, z) = x^2 y + \varphi_1(y, z)$$

Kde φ_1 je integrační konstanta funkcí y a z. Nyní funkci V zderivujeme podle proměnné y:

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial \varphi_1(y, z)}{\partial y}$$

Platí také ale tvrzení, že:

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = Q(x, y, z) = x^2 - 2z^2$$

Odtud plyne:

$$\frac{\partial \varphi_1(y, z)}{\partial y} = -2z^2 \quad \rightarrow \quad \varphi_1(y, z) = -2z^2 y + \varphi_2(z)$$

Kde $\varphi_2(z)$ je integrační konstanta funkce z a pro funkci V dostaneme:

$$V(x, y, z) = x^2 y - 2z^2 y + \varphi_2(z)$$

Stejným způsobem budeme postupovat při derivování podle proměnné z:

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = -4zy + \varphi_2'(z)$$

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = R(x, y, z) = 3 - 4yz$$

Z toho vyplývá, že $\varphi_2'(z) = 3z$ a pro funkci V platí:

$$V(x,y,z) = x^2y - 2z^2y + 3z$$

Nyní do funkce dosadíme body $A(1,2,3)$ a $B(-2,0,1)$ a dostaneme výslednou hodnotu integrálu:

$$V(-2,0,1) - V(1,2,3) = (0 - 0 + 3) - (2 - 36 + 9) = 28$$

Závěr

Hlavním tématem této práce bylo pojednat o křivkových integrálech a o jejich využití ve fyzice. Seznámili jsme se s křivkovými integrály prvního i druhého druhu, pochopili teorii k nim nezbytnou a ukázali si, jakým způsobem je můžeme využít při počítání různých fyzikálních veličin. A to jak teoreticky tak také prakticky. Jak jsme viděli, využití křivkových integrálů je opravdu široké a mohou nám při výpočtech značně usnadnit práci. Ať už se jedná o výpočty zmíněných fyzikálních veličin, kde stačí dosadit do uvedených vzorců a máme hotovo a nebo také, když při svých výpočtech využijeme Greenovu větu, která nám počítaný integrál značně zjednoduší a potom už není žádný problém jej vyřešit. Samozřejmě abychom mohli tohoto zjednodušení využít, je nutné aby daný integrál splňoval určité předpoklady, ale to už po přečtení této práce víme.

Aby vůbec mohla tato práce vzniknout, musela jsem si i já značně prohloubit své znalosti matematiky. Integrál jako takový jsem znala již dříve, ale křivkové integrály pro mě byly naprostou novinkou. Díky tomu jsem se snažila najít si takovou literaturu, kde byla tato, pro mě nová teorie srozumitelně popsána a ze které pochopím nejvíce. Nejlepší volbou se nakonec ukázala být kniha *Matematika II*, od B. Budinského a J. Charváta, jenž pro mě byla při psaní této práce velmi inspirativní a za které jsem čerpala nejvíce.

Matematika ale není jediná oblast, ve které jsem si při psaní své bakalářské práce rozšířila znalosti. Obrázky, které jsou inspirovány výše zmíněnou knihou, jsou vytvořené v programu Word a celá práce je vysázena topologickým systémem nazvaným TEX. Zejména seznámení se s tímto programem považuji za přínosné a to i do budoucna, kdy znalost tohoto programu mohu využít při psaní dalších odborných prací.

Literatura

[1] Budinský, B., Charvát, J.: *Matematika II.* Vyd. 2, Praha: SNTL, 1999.

[2] Burda, P., Doležalová, J.: *Matematika III* [online]. [cit. 2013-15-01]. Dostupné z: http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaIII/Matematika3_obsah.pdf.

[3] Došlý, O., Kuben, J.: *Křivkový integrál* [online]. [cit. 2013-04-02]. Dostupné z: https://www.math.muni.cz/~dosly/krivkovy_integral.pdf.

[4] Zeman, J.: *Úvod do komplexní analýzy.* 2. upr. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 1998.

[5] *Kapitola 2, Holomorfní funkce* [online]. [cit. 2013-19-02]. Dostupné z: http://math.feld.cvut.cz/tiser/kkap2.pdf .

[6] Budinský, B., Charvát, J.: *Matematika II.* Vyd. 1. Praha: SNTL, 1990.

[7] Kopáček, J.: *Matematická analýza pro fyziky III.* Vyd. 2. Praha: MATFYZPRESS, 2002.

[8] Černý, I.: *Analýza v komplexním oboru.* Vyd. 1. Praha: Academica, 1983.

[9] Kopáček, J. a kolektiv: *Příklady z matematiky nejen pro fyziky III.* 2. přeprac. vyd. Praha: MATFYZPRESS, 2006.

[10] Šibrava, Z.: *Příklady k matematice 3* [online]. [cit. 2013-02-03]. Dostupné z: http://mat.fsv.cvut.cz/sibrava/Vyuka/kriv_int.pdf.

[11] *3. Křivkové integrály* [online]. [cit. 2013-26-01]. Dostupné z: http://home.zcu.cz/~ullrich/zme3p312.pdf.