

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

Diplomová práce

Řezy rotačních těles v projekcích



Vedoucí diplomové práce:
Mgr. Marie Chodorová, Ph.D.
Rok odevzdání: 2010

Vypracovala:
Ludmila Eliášová
M-DG, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně za vedení Mgr. Marie Chodorové, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 29. srpna 2010

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí diplomové práce Mgr. Marii Chodorové, Ph.D. a RNDr. Lence Juklové, Ph.D. za čas, který mi věnovaly při konzultacích. Dále bych chtěla poděkovat svým blízkým za podporu při jejím zpracování. Poděkování si rovněž zaslouží tvůrci programů $\text{\LaTeX}$, AutoCAD, DesignCAD a Deskriptivní geometrie 1.32, které byly při psaní diplomové práce použity.

Obsah

Úvod	5
1 Obecné rotační plochy	7
1.1 Definice rotační plochy	7
1.2 Vlastnosti rotační plochy	8
2 Řezy obecných rotačních ploch	11
2.1 Obecný postup při sestrojování řezů rotačních ploch	11
2.2 Základní konstrukce používané při sestrojování řezů	14
2.3 Řešené příklady	20
3 Rotační kvadriky	29
3.1 Válcová plocha	29
3.2 Kuželová plocha	29
3.3 Elipsoid, kulová plocha	30
3.4 Kruhový paraboloid	30
3.5 Rotační hyperboloidy	31
3.5.1 Rotační dvojdílný hyperboloid	31
3.5.2 Rotační jednodílný hyperboloid	32
4 Řezy rotačních kvadrik	34
4.1 Válcová plocha	34
4.2 Kuželová plocha	35
4.3 Elipsoid, kulová plocha	38
4.4 Paraboloid	38
4.5 Hyperboloidy	38
4.5.1 Dvojdílný hyperboloid	39
4.5.2 Jednodílný hyperboloid	39
4.6 Řešené příklady	40
5 Anuloidy	69
6 Řezy anuloidů	72
6.1 Spirické křivky Perseovy	72
6.2 Obecné křivky řezu	73
6.3 Řešené příklady	75
Závěr	80
Přílohy	81
Příloha 1: Zadání k příkladu 2.3.1	81
Příloha 2: Zadání k příkladu 2.3.2	82
Příloha 3: Zadání k příkladu 2.3.3	83
Příloha 4: Zadání k příkladu 4.6.9	84
Příloha 5: Zadání k příkladu 4.6.10	85

Úvod

Již na střední škole se studenti v základním kurzu deskriptivní geometrie setkávají s řezy kulových, rotačních válcových a kuželových ploch. V rozšířeném kurzu deskriptivní geometrie na vysokých školách se řezy zobecňují na libovolné rotační plochy a anuloidy. K řezům rotačních kvadrik známých ze středních škol přibývají řezy elipsoidů, paraboloidů a dvojdílných a jednodílných hyperboloidů.

Vzhledem k obtížnosti zobrazování rotačních ploch ve většině promítacích metod dochází v dostupné literatuře k řešení řezů pouze v Mongeově promítání. Doposud chybějící materiály z oblasti řešených příkladů v různých zobrazovacích metodách daly podnět ke vzniku této sbírky příkladů.

První kapitola je věnována základním definicím rotačních ploch. Popisuje vznik rotačních ploch a definuje názvy jejich prvků. Seznámí nás s křivkami a typy bodů na plochách. Pro konstrukce řezů budou výhodné vlastnosti tečen a normál v těchto bodech.

Druhá kapitola je zaměřena na popis základních konstrukcí při sestrojování řezů rotačních ploch obecnou rovinou. V závěru kapitoly nalezneme několik komplexních příkladů na řezy obecných rotačních ploch v různých projekcích (u řešených příkladů není uváděn rozbor — byl by shodný s *2.1 Obecný postup při sestrojování řezů rotačních ploch*).

Ve třetí kapitole jsou představeny rotační kvadriky. Dozvíme se o základních vlastnostech válcové a kuželové plochy, elipsoidu, kulové plochy, paraboloidu a rotačních hyperboloidů.

Ve čtvrté kapitole se naučíme klasifikovat jednotlivé typy řezů rotačních kvadrik. V závěru nalezneme opět několik příkladů na řezy rotačních kvadrik rovinami v různých projekcích.

Pátá kapitola se věnuje popisu dalších speciálních rotačních ploch - anuloidům.

V poslední kapitole rozebereme typy řezů na anuloidech vzhledem k počtu bodů dotyku roviny řezu s anuloidem a počtu průsečíků hlavního meridiánu a otočené spádové přímky roviny řezu. Na závěr opět sestrojíme několik příkladů v různých projekcích.

Ve sbírce příkladů je předpokládáno, že čtenář je seznámen se základními typy zobrazovacích metod [10], dokáže aplikovat ohniskové vlastnosti kuželoseček při jejich sestrojování [10], ovládá Rytzovu konstrukci [10], je seznámen se způsobem zobrazování rotačních těles a ploch v různých projekcích [9] a dokáže sestřit mez vlastního stínu vrženého směrem promítání [9]. Rovněž se předpokládá znalost projektivní geometrie [1][6].

V příkladech není dodržena shodná barevnost jednotlivých konstrukcí a popis prvků jimi získaných.

1 Obecné rotační plochy

1.1 Definice rotační plochy

Definice 1.1.1 *Otáčení kolem přímky o je shodné zobrazení v E_3 , které je určeno velikostí (orientovaného) úhlu. Přímka o se nazývá osa otáčení. Obraz $\bar{A}$ bodu $A \notin o$ je na kružnici se středem $S \in o$, procházející bodem A a ležící v rovině kolmé k ose o . Všechny body osy o jsou při otáčení samodružné. Množinu všech otáčení kolem osy o nazýváme rotací nebo rotačním pohybem kolem osy o .*

(Machala, 1986, s. 19)

Definice 1.1.2 *Mějme danu přímku o a křivku k , která není částí přímky o ani žádné trajektorie při rotaci kolem o . Rotací křivky k kolem osy o vzniká rotační plocha. Přímka o je osa a k je tvořící křivka rotační plochy, kterou budeme stručně zapisovat symbolem $\Phi(o, k)$.*

(Machala, 1986, s. 19)

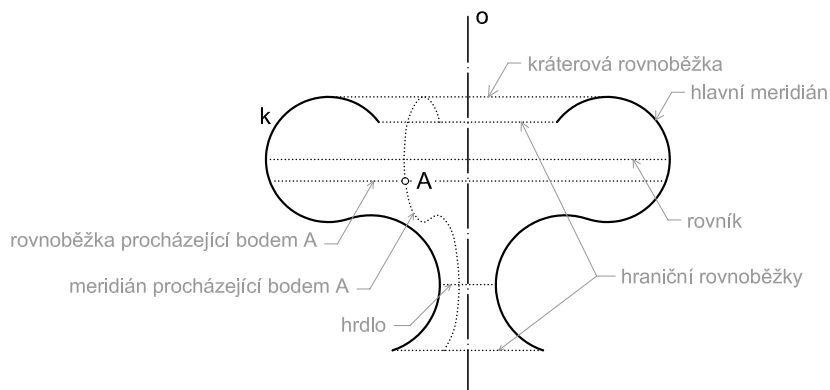
Speciálním případem takovéto rotační plochy je rovina nebo její část.

Každý bod rotující křivky k kolem osy o opisuje tzv. rovnoběžkovou kružnici, nebo-li rovnoběžku. Je-li tečná rovina rotační plochy Φ v bodě $A \in \Phi$ kolmá k ose rotace o , nazýváme ji kráterovou rovnoběžkou. Jestliže je v jistém okolí bodu A na tvořící křivce k vzdálenost bodu A od osy nejmenší, resp. největší, nazývá se rovnoběžka hrdlo, resp. rovník. Rovnoběžky, které vznikají rotací koncových bodů tvořící křivky, nazýváme hraničními rovnoběžkami.

Definice 1.1.3 *Množinu všech společných bodů rotační plochy Φ a roviny ρ nazveme řezem rotační plochy Φ rovinou ρ .*

Definice 1.1.4 *Řez rotační plochy rovinou, která prochází její osou, nazývá se meridián (poledník) rotační plochy.*

(Urban, 1967, s. 93)



Obr. 1: Základní prvky rotační plochy.

Meridián ležící v rovině rovnoběžné s průmětnou nazýváme hlavním meridiánem. Část meridiánu ležícího v jedné polovině určené osou o společně s body křivky na ose nazýváme polomeridiánem.

1.2 Vlastnosti rotační plochy

Každým bodem plochy neležícím na ose o prochází právě jedna rovina kolmá k ose o a právě jedna rovina obsahující osu o . Tedy každým bodem prochází právě jedna rovnoběžka a právě jeden meridián.

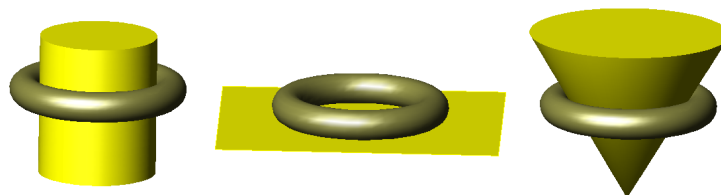
Tečny meridiánu a rovnoběžky v bodě, který neleží na ose plochy, jsou navzájem kolmé a vytvářejí dotykovou rovinu rotační plochy v daném bodě. Pokud je meridián regulární křivkou, vytváří rovnoběžky a meridiány pravoúhlou síť na ploše.

Tečna meridiánu v bodě, který neleží na ose plochy, vytvoří při rotaci kolem osy rotační plochu dotýkající se původní plochy podél rovnoběžky procházející bodem dotyku tečny.

Věta 1.2.1 *Tečny všech meridiánů rotační plochy v bodech téže rovnoběžky tvoří buď dotykovou rotační kuželovou plochu, nebo rotační válcovou plochu, nebo rovinu.*

(Urban, 1967, s. 94)

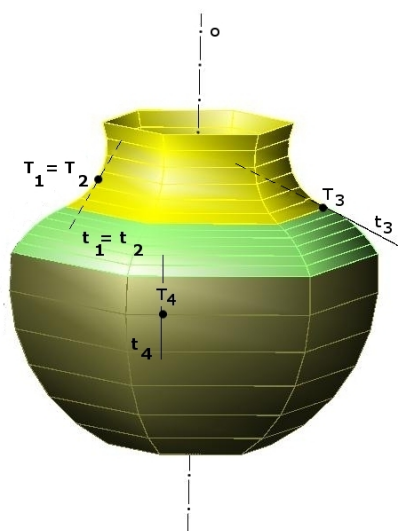
Výše popsanou plochu budeme nazývat dotykovou kuželovou plochou příslušnou k rovnoběžce b a označíme ji Ω . Vrchol dotykové kuželové plochy leží na ose rotace.



Obr. 2: Zleva: dotyková rotační válcová plocha, dotyková rovina, dotyková rotační kuželová plocha.

Rozlišujeme tři typy bodů dotyku tečných rovin:

- je-li T izolovaným bodem, nazýváme ho eliptickým bodem
- jestliže v bodě T existují dvě tečny ke křivce řezu tečnou rovinou jedná se o dvojnásobný bod, nazýváme ho hyperbolickým
- jedná-li se o rovinu dotýkající se v inflexním bodě plochy, nazýváme bod dotyku parabolickým

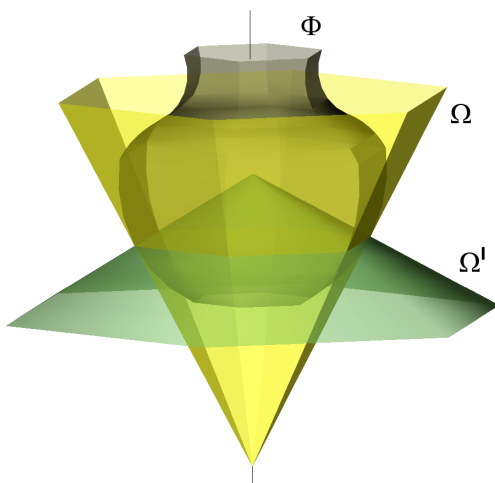


Obr. 3: Bod $T_{1,2}$ je případem hyperbolického bodu, T_3 parabolického a T_4 eliptického bodu.

Věta 1.2.2 *Normály rotační plochy v bodech téže rovnoběžky tvoří buď rotační kuželovou plochu, nebo rotační válcovou plochu, nebo rovinu.*

(Urban, 1967, s. 95)

Výše popsanou plochu budeme nazývat normálovou kuželovou plochou příslušnou k rovnoběžce b a označíme ji $\Omega^{\perp}$. Vrchol normálové rotační plochy leží na ose rotace.



Obr. 4: Tečná a normálová kuželová plocha

2 Řezy obecných rotačních ploch

K sestrojení rotační plochy budeme nejčastěji užívat polomeridiánu. Osu otáčení budeme volit ve speciální poloze.

Vztah mezi skutečným a zdánlivým obrysem rotační plochy:

„Skutečným obrysem rotační plochy při pravouhlém promítání na rovinu kolmou k její ose jsou hrdla, rovníky, hraniční kružnice a singulární body plochy; zdánlivým obrysem jsou jejich průměty v téže směru.“

„Skutečným obrysem rotační plochy při pravouhlém promítání na rovinu rovnoběžnou s její osou je meridián, který leží v rovině rovnoběžné s průmětnou (hlavní meridián), kráterové kružnice a hraniční kružnice plochy, zdánlivým obrysem jsou jejich průměty v téže směru.“

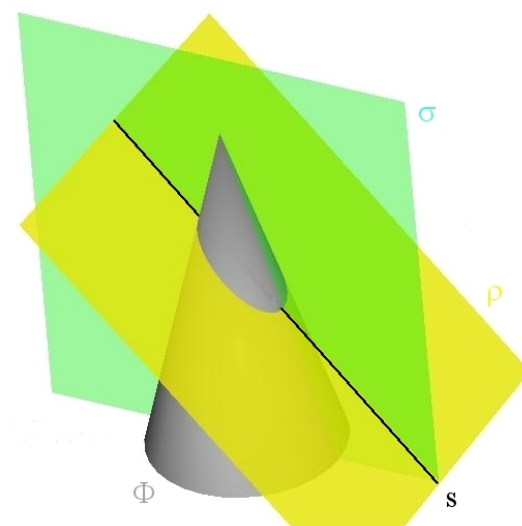
(Urban, 1967, s. 95)

2.1 Obecný postup při sestrojování řezů rotačních ploch

Obecně při sestrojování řezu rotační plochy $\Phi(o, k)$ rovinou ρ postupujeme takto:

1. sestrojíme nejnižší a nejvyšší body řezu

- využijeme roviny souměrnosti řezu σ , tj. rovinu souměrnosti rotační plochy (procházející osou), která je zároveň rovinou souměrnosti roviny řezu ($\sigma \perp \rho$)
- sestrojíme průsečnici s roviny souměrnosti σ a roviny řezu ρ , tím získáme osu souměrnosti řezu
- průsečnice s protne rotační plochu $\Phi(o, k)$ v nejnižším a nejvyšším bodě řezu



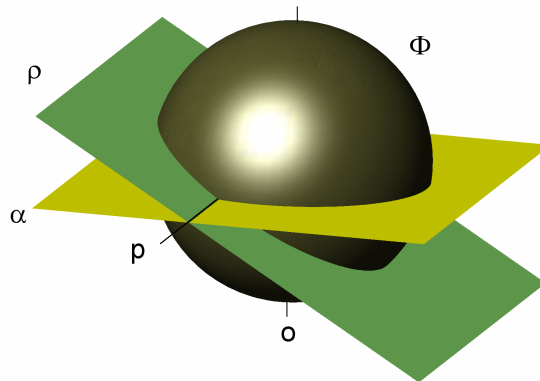
Obr. 5: Princip nalezení nejvýše a nejniže položených bodů řezu.

2. nalezneme body změny viditelnosti

- sestrojíme rovinu změny viditelnosti λ
- sestrojíme průsečnici l roviny změny viditelnosti λ a roviny řezu ρ
- průsečnice l protne rotační plochu v bodech změny viditelnosti, tj. v bodech řezu ležících na zdánlivém obrysu plochy

3. sestrojíme dostatečný počet dalších (libovolných) bodů řezu

- zvolíme libovolnou rovinu α kolmou k ose rotační plochy
- sestrojíme řez rotační plochy rovinou α (řezem bude rovnoběžka k)
- sestrojíme průsečnici p roviny řezu ρ a roviny α
- společné body kružnice k a průsečnice p jsou hledané body řezu
- tečnu v libovolném bodě řezu sestrojíme jako průsečnici tečné roviny plochy Φ v tomto bodě a roviny řezu ρ



Obr. 6: Princip sestavení potřebného počtu dalších bodů.

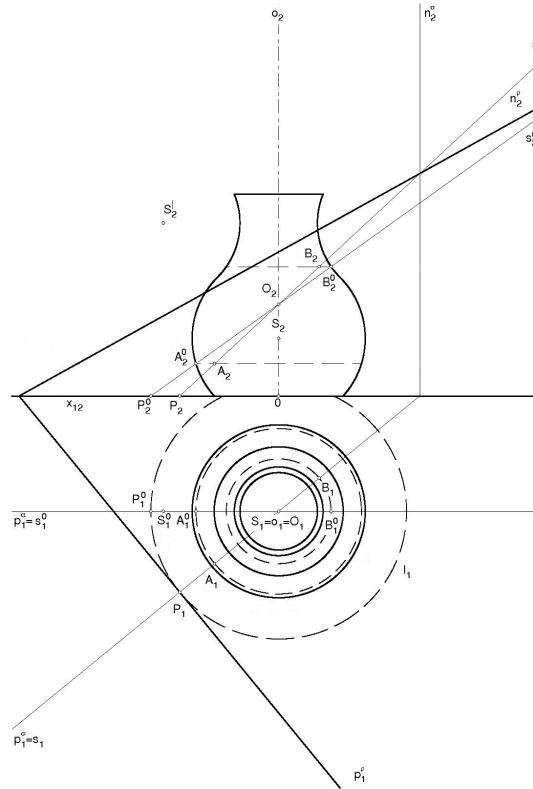
4. jestliže je rovina ρ navíc tečnou rovinou rotační plochy $\Phi(o, k)$, je nutno vyšetřit bod dotyku T
 - rovinu řezu ρ otočíme kolem osy o do polohy kolmé k příslušné průmětně, tj. zobrazí se jako přímka
 - (a) rovina se dotýká v izolovaném bodě rotační plochy, tj. jedná se o bod eliptický
 - (b) v bodě dotyku existují dvě různé tečny ke křivce řezu, tj. rovina se dotýká v hyperbolickém bodě, pak se jedná o dvojnásobný bod řezu
 - (c) bod dotyku je inflexním bodem plochy, tj. křivka příslušného meridiánu přechází z jednoho poloprostoru určeného rovinou ρ do druhého, pak se jedná o bod vratu křivky řezu

2.2 Základní konstrukce používané při sestrojování řezů

Příklad 2.2.1 Sestrojte nejvyšší a nejnižší body řezu rotační plochy Φ rovinou ρ . Osa plochy je kolmá k půdorysně a prochází počátkem soustavy souřadnic; tvořící křivka je tvořena částmi dotýkajících se kružnic: k^1 ($S = [0; 4; 2], r = 3$) a k^2 ($S^1 = [-4; 4; 6], r^1 < |SS^1|$); rotační plocha Φ je omezena rovinou π a rovinou $\omega = (\infty, \infty, 7)$; rovina řezu $\rho = (-9, 11, 5)$ (viz. Obr. 7).

Konstrukce (Obr. 7):

1. $\sigma; \sigma \perp \rho \wedge o \subset \sigma \dots$ rovina souměrnosti řezu
2. $s; s = \rho \cap \sigma \dots$ spádová přímka
3. $s^0; s^0 \dots$ přímku s otočíme kolem osy o do roviny hlavního meridiánu
4. $A; A = s \cap \Phi$

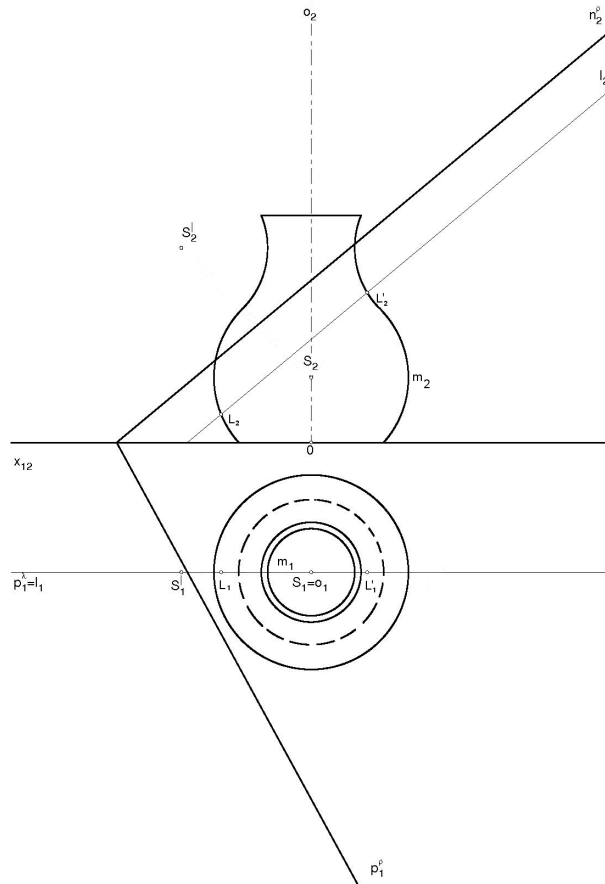


Obr. 7: Konstrukce nejvyššího a nejnižšího bodu řezu.

Příklad 2.2.2 Sestrojte body změny viditelnosti řezu rotační plochy Φ rovinou ρ . Osa plochy je kolmá k půdorysně a prochází počátkem soustavy souřadnic; tvořící křivka m (hlavní meridián) je tvořena částmi dotýkajících se kružnic: k^1 ($S = [0; 4; 2], r = 3$) a k^2 ($S^1 = [-4; 4; 6], r^1 < |SS^1|$); rotační plocha Φ je omezena rovinou π a rovinou $\omega = (\infty, \infty, 7)$; rovina řezu $\rho = (-9, 11, 5)$ (viz. Obr. 8).

Konstrukce (Obr. 8):

1. $\lambda; \lambda \parallel \nu \wedge o \in \lambda \dots$ rovina změny viditelnosti
2. $l; l = \rho \cap \lambda \dots$ průsečnice roviny ρ a λ
3. $\{L, L^1\}; \{L, L^1\} = l \cap m$

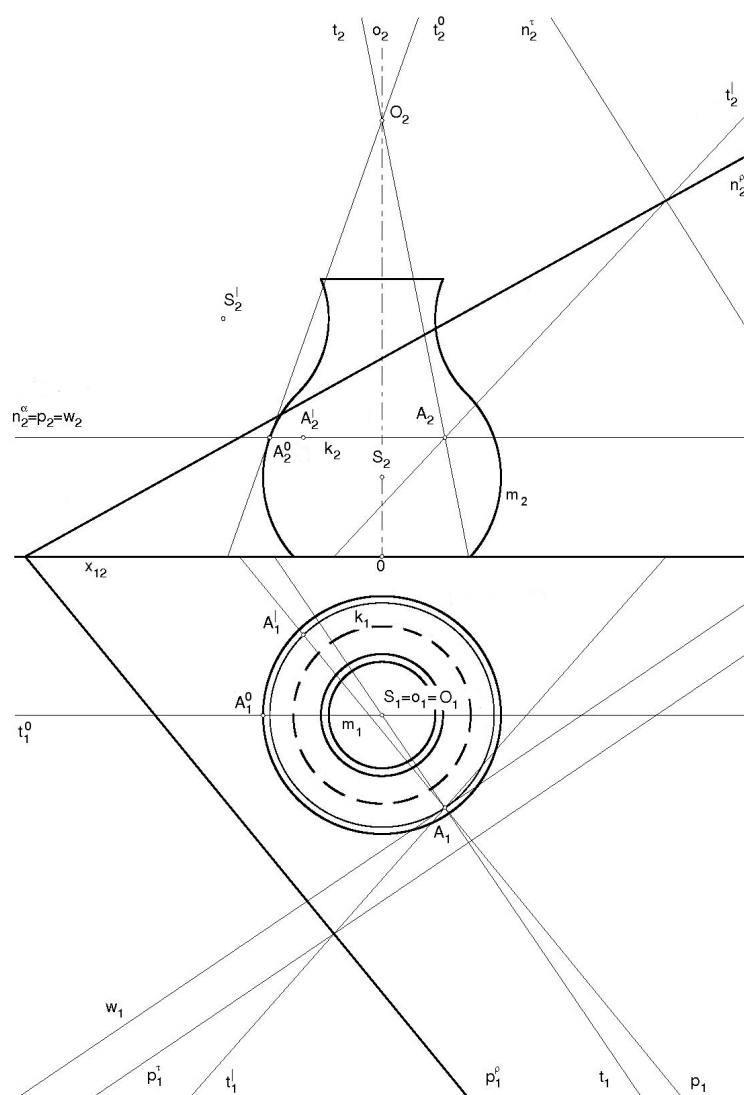


Obr. 8: Konstrukce bodů, ve kterých se mění viditelnost řezu.

Příklad 2.2.3 *Sestrojte libovolné další body řezu rotační plochy Φ rovinou ρ . Osa plochy je kolmá k půdorysně a prochází počátkem soustavy souřadnic; tvořící křivka je tvořena částmi dotýkajících se kružnic: $k^1(S = [0; 4; 2], r = 3)$ a $k^2(S^I = [-4; 4; 6], r^I < |SS^I|)$; rotační plocha Φ je omezena rovinou π a rovinou $\omega = (\infty, \infty, 7)$; rovina řezu $\rho = (-9, 11, 5)$ (viz. Obr. 9).*

Konstrukce (Obr. 9):

1. $\alpha; \alpha \parallel \pi \dots$ libovolná pomocná rovina
2. $k; k = \Phi \cap \alpha \dots$ řezem bude vždy kružnice
3. $p; p = \rho \cap \alpha$
4. $\{A, A^I\}; \{A, A^I\} = k \cap p \dots$ body řezu rotační plochy
5. $A^0; A^0 \dots$ otočený bod A kolem osy o do roviny hlavního meridiánu
6. $t^0; t^0 \dots$ tečna hlavního meridiánu (a tedy i rotační plochy Φ) v bodě A^0
7. $O; O = o \cap t^0 \dots$ vrchol dotykové rotační kuželové plochy
8. $t; t = \leftrightarrow OA \dots$ tečna meridiánu procházejícího bodem A
9. $w; w \dots$ tečna rovnoběžky plochy Φ v bodě A
10. $\tau; \tau = tw \dots$ tečná rovina plochy Φ v bodě A
11. $t^I; t^I = \rho \cap \tau \dots$ tečna řezu plochy Φ rovinou ρ v bodě A



Obr. 9: Konstrukce dalších bodů řezu a tečen v těchto bodech.

Příklad 2.2.4 Vyšetřete body dotyku rovin ρ, ω, σ rotační plochy Φ . Osa plochy je kolmá k půdorysně a prochází počátkem soustavy souřadnic; tvořící křivka m je tvořena částmi dotýkajících se kružnic: $k^1(S = [0; 4; 2], r = 3)$ a $k^2(S^1 = [-4; 4; 6], r^1 < |SS^1|$; rotační plocha Φ je omezena rovinou π a rovinou $\alpha = (\infty, \infty, 7)$ (viz. Obr. 10).

Konstrukce (Obr. 10):

1. σ^0 ; σ v otočení $\mathcal{O} = (o, \sigma \rightarrow \sigma^0 \perp \lambda)$... rovinu σ otočíme kolem osy o do polohy kolmé k rovině hlavního meridiánu λ
 ω^0 ; ω v otočení $\mathcal{O}^1 = (o, \omega \rightarrow \omega^0 \perp \lambda)$
 ρ^0 ; ρ v otočení $\mathcal{O}^1 = (o, \rho \rightarrow \rho^0 \perp \lambda)$
2. ${}^0T^1$; ${}^0T^1$... bod dotyku roviny σ^0 a hlavního meridiánu m plochy Φ ; rovina se dotýká v inflexním bodě, jedná se o bod vratu křivky řezu
 ${}^0T^2$; ${}^0T^2$... bod dotyku roviny ω^0 a hlavního meridiánu m plochy Φ ; rovina se dotýká v dvojnásobném bodě křivky řezu
 ${}^0T^3$; ${}^0T^3$... bod dotyku roviny ρ^0 a hlavního meridiánu m plochy Φ ; rovina se dotýká v izolovaném bodě křivky řezu (vidíme, že bod ${}^0T^2$ není jediným bodem řezu)
3. T^1 ; ${}^0T^1$ v otočení $\mathcal{O}$
 T^2 ; ${}^0T^2$ v otočení $\mathcal{O}^1$
 T^3 ; ${}^0T^3$ v otočení $\mathcal{O}^1$



2.3 Řešené příklady

Příklad 2.3.1 V Mongeově promítání sestrojte řez rotačního tělesa Φ rovinou ρ . Osa plochy je kolmá k půdorysně a prochází počátkem soustavy souřadnic; tvořící křivka $k(S = [2; 7; 2], r = 6, 5)$ je omezená rovinou π a rovinou $\delta = (\infty, \infty, 7)$; $\rho = (-6, 11, 4)$ (zadání viz. Příloha 1).

Konstrukce (Obr. 11):

1. $\Phi, \Phi \dots$ do prvního průmětu rotační plochu zobrazíme pomocí rovníku a hraničních rovnoběžek, do druhého průmětu pomocí hlavního meridiánu a hraničních rovnoběžek

2. $A; A \dots$ nejvyšší bod řezu

$\sigma; (\sigma \perp \rho) \wedge (o \subset \sigma) \dots$ rovina souměrnosti řezu

$s; s = \rho \cap \sigma \dots$ spádová přímka

$A; A = s \cap \Phi$ v otočení $\mathcal{O} = (o, s \rightarrow s^0 \parallel \nu) \dots$ spádovou přímku otočíme kolem osy o do roviny rovnoběžné nárysnou (rovina hlavního meridiánu)

3. $\{B, B^I\}; \{B, B^I\} \dots$ libovolné další body řezu rotační plochy

$\alpha; \alpha \parallel \pi \dots$ libovolná pomocná rovina

$a; a = \Phi \cap \alpha$

$d; d = \rho \cap \alpha$

$\{B, B^I\}; \{B, B^I\} = a \cap d$

4. $t; t \dots$ tečna křivky řezu plochy Φ rovinou ρ v bodě B^I

$S; S \dots$ vrchol normálové kuželové plochy rotační plochy Φ (v tomto případě je vrcholem pro každou rovnoběžku, protože se jedná o kulový pás)

$n; n = \leftrightarrow SB^I \dots$ normála rotační plochy Φ v bodě B^I

$\tau; (\tau \perp n) \wedge (B^I \in \tau) \dots$ tečná rovina plochy Φ v bodě B^I

$t; t = \rho \cap \tau$

5. $L; L \dots$ bod změny viditelnosti v druhém průmětu

$\lambda; (\lambda \parallel \nu) \wedge (o \subset \lambda) \dots$ rovina změny viditelnosti v druhém průmětu

$$l; l = \rho \cap \lambda$$

$$L; L = l \cap \Phi$$

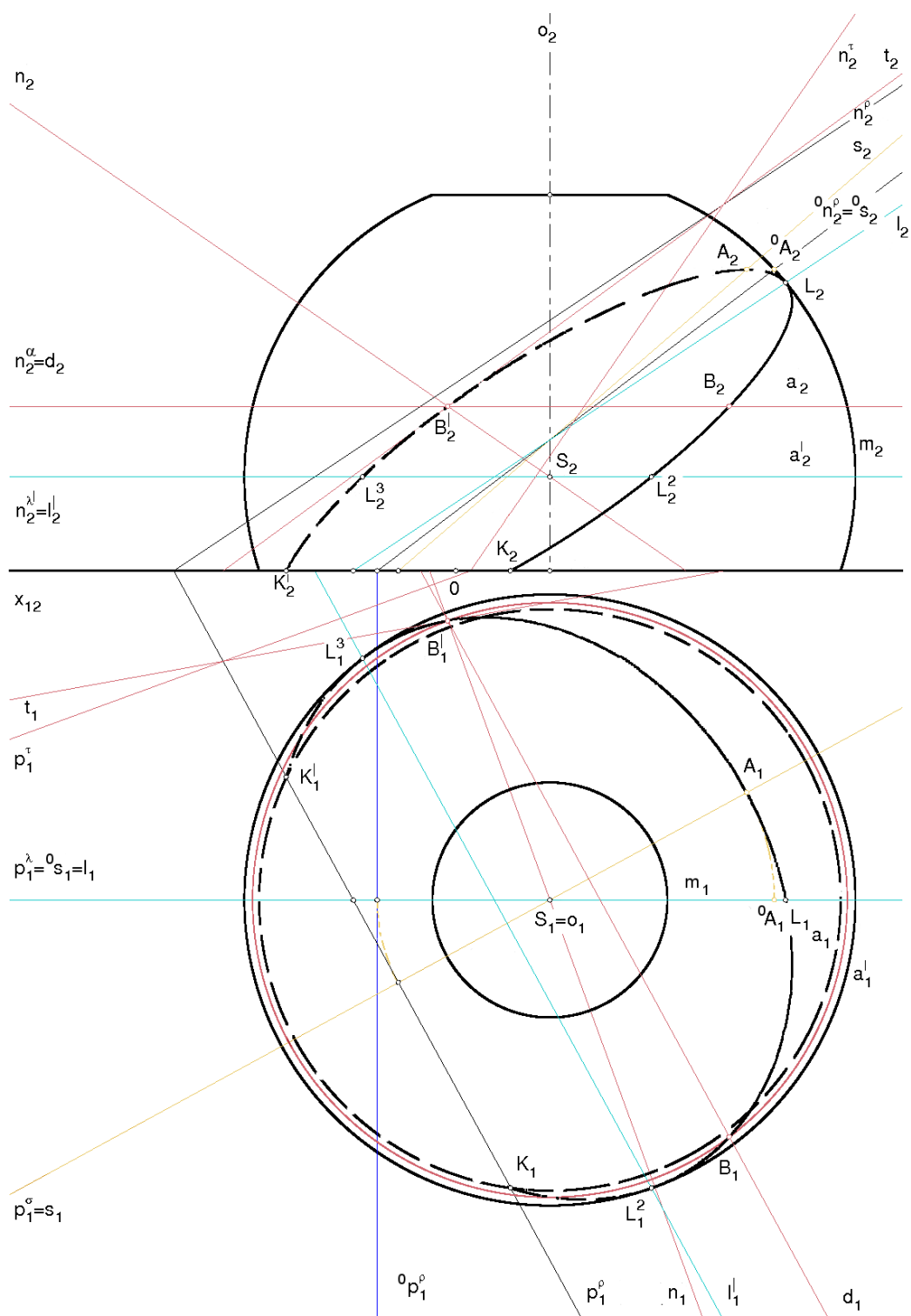
6. $\{L^2, L^3\}; \{L^2, L^3\} \dots$ body změny viditelnosti v prvním průmětu

$\lambda^l; (\lambda^l \parallel \pi) \wedge (S \in \lambda^l) \dots$ rovina změny viditelnosti v prvním průmětu

$$l^l; l^l = \rho \cap \lambda^l$$

$$a^l; a^l = \lambda^l \cap \Phi$$

$$\{L^2, L^3\}; \{L^2, L^3\} = l^l \cap a^l$$



Obr. 11: Příklad 2.3.1.

Příklad 2.3.2 V kótovaném promítání sestrojte řez rotační plochy Φ rovinou ρ . Osa plochy je kolmá k půdorysně a prochází počátkem soustavy souřadnic; tvořící křivka je částí elipsy ohraničená hlavními vrcholy a procházející vedlejším vrcholem C : $\mathcal{E}(S = [-5; 0; 3], A = [-7; 0; 1], C = [-4; 0; 2])$; $\rho = (-6, 11, 4)$ (zadání viz. Příloha 2).

Konstrukce (Obr. 12):

1. $\sigma; (\sigma \perp \rho) \wedge (o \in \sigma) \dots$ rovina souměrnosti řezu
2. $s; s = \rho \cap \sigma \dots$ spádová přímka
3. $\bar{\mathcal{E}}; \bar{\mathcal{E}} = \Phi \cap \sigma \dots$ meridián v rovině σ
4. $\sigma^0; \sigma$ v otočení $\mathcal{O} = (p^\sigma, \sigma \rightarrow \pi) \dots$ rovinu souměrnosti řezu otočíme do roviny průmětny $o^0; o \rightarrow o^0$ v otočení $\mathcal{O}$
 $s^0; s \rightarrow s^0$ v otočení $\mathcal{O}$
 $\rho^0; \rho \rightarrow \rho^0$ v otočení $\mathcal{O} \dots$ zobrazí se jako přímka, tzn. splyne s s^0
 $\bar{\mathcal{E}}^0; \bar{\mathcal{E}} \rightarrow \bar{\mathcal{E}}^0$
5. $g; g \dots$ hraniční kružnice
 $B; B \dots$ hlavní vrchol tvořící elipsy
 $\beta; (\beta \parallel \pi) \wedge (B \in \beta)$
 $O; O = \beta \cap o$
 $g; g = k(O, |o, B|)$
 $g^l; g^l = k(((\beta^l \parallel \pi) \wedge (A \in \beta^l)) \cap o, r = |o, A|)$
 $g^l; g^l = k(g^l \parallel \pi, r = \min|\mathcal{E}, o|) \dots$ hrdlo
6. $\{V, V^l\}; \{V, V^l\} = g \cap \rho \dots$ body řezu na hraničních rovnoběžkách (získáme v otočení)
 $\{W, W^l\}; \{W, W^l\} = g^l \cap \rho$
7. $C; C \dots$ bod dotyku roviny ρ rotační plochy Φ – dvojnásobný bod řezu (získáme v otočení)

8. $L, L = \rho \cap g^{\parallel} \dots$ bod řezu na hrdle, zároveň se jedná o bod změny viditelnosti řezu (získáme v otočení)

9. $R; R \dots$ libovolné další body řezu

$$\alpha; \alpha \parallel \pi$$

$$k; k = \alpha \cap \Phi$$

$$r; r = \rho \cap \alpha$$

$$R; R = r \cap k$$

10. $t^{\perp}; t^{\perp} \dots$ tečna řezu v bodě $R^{\perp}$

$$t; R^{\perp} \in t \dots \text{tečna kružnice } k \text{ v rovině } \alpha \text{ v bodě } R^{\perp}$$

$$n^2; R^{\perp} \in n^2 \dots \text{tečna meridiánu plochy } \Phi \text{ v bodě } R^{\perp}$$

$$\tau; \tau = tn^2 \dots \text{tečná rovina plochy } \Phi \text{ v bodě } R^{\perp}$$

$$t^{\perp}; t^{\perp} = \rho \cap \tau$$

Příklad 2.3.3 V pravouhlé axonometrii ($XY = 12, YZ = 11, XZ = 10$) sestrojte řez rotačního tělesa Φ rovinou ρ . Osa o tělesa splývá s osou z soustavy souřadnic; tvořící křivka je částmi dotýkajících se kružnic (zadání viz. Příloha 3).

Konstrukce (Obr. 13):

1. ψ ; $\psi \dots$ pomocná průmětna

ψ ; ($o \subset \psi$) $\wedge$ ($\psi \perp \triangle XYZ$) $\dots$ promítací rovina ψ procházející osou rotačního tělesa se zobrazí jako přímka

r^{ax} ; $r^{ax} = \psi \cap \triangle XYZ \dots$ axonometrická stopa promítací roviny

ψ^0 ; ψ v otočení $\mathcal{O} = (r^{ax}, O \rightarrow O^0) \dots$ promítací rovinu otočíme kolem axonometrické stopy do axonometrické průmětny a pro přehlednost vysuneme ve směru kolmém na osu z (otočený směr promítání)

2. C ; $C \dots$ libovolný bod ležící na zdánlivém obrysu tělesa (zdánlivý obrys tělesa je průmět meze vlastního stínu vrženého na rotační těleso směrem promítání)

β ; $\beta \perp o \dots$ libovolná rovina kolmá k ose tělesa

k ; $k = \beta \cap \Phi \dots$ rovina β protne rotační těleso Φ v rovnoběžce k

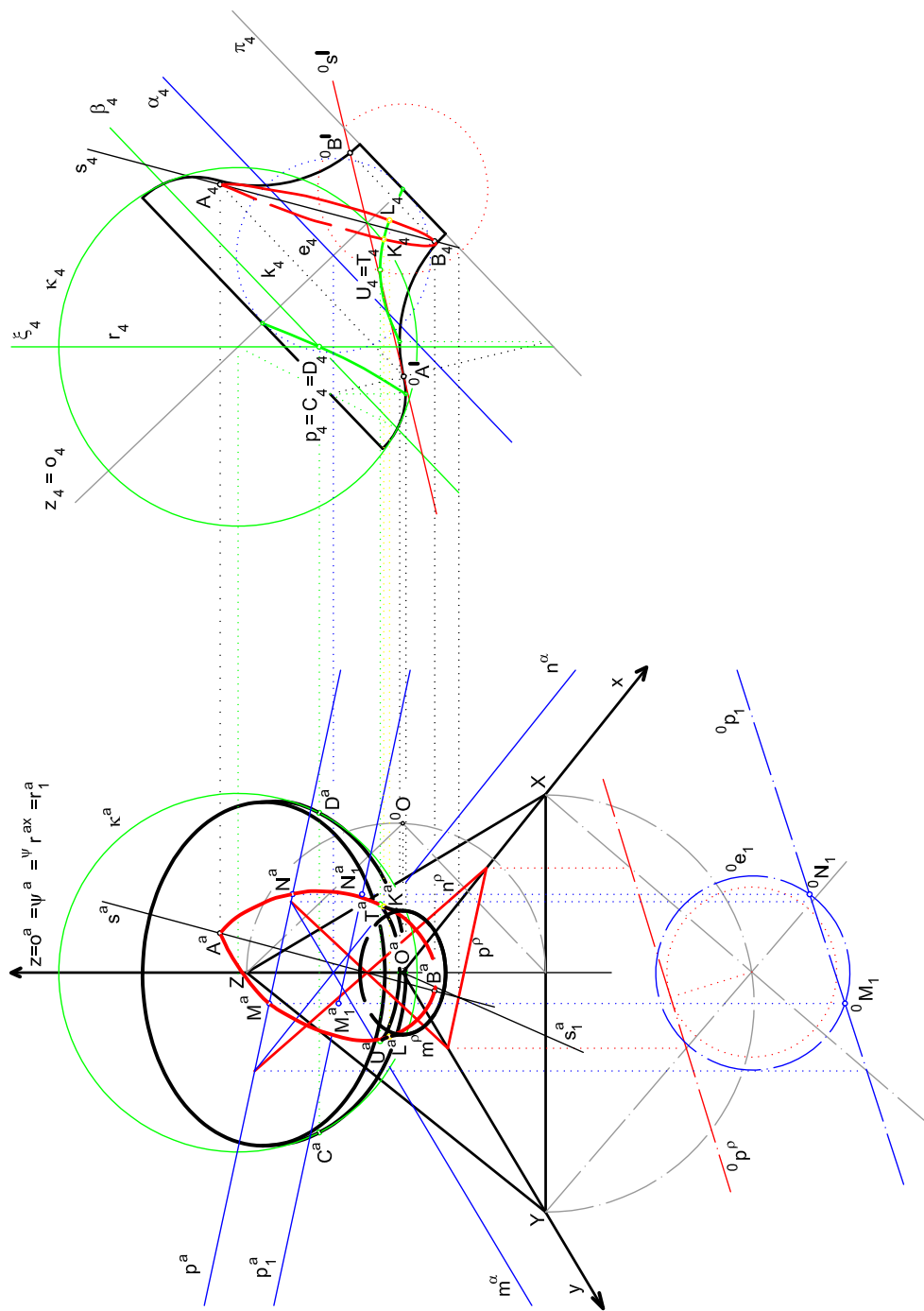
κ ; $k \subset \kappa \dots$ kulová plocha opsaná rotačnímu tělesu dotýkající se podél rovnoběžky k

ξ ; $\xi \dots$ rovina kolmá ke směru promítání procházející středem kulové plochy

r ; $r = \kappa \cap \xi \dots$ mez vlastního stínu vrženého na kulovou plochu směrem promítání

$\{C, D\}$; $\{C, D\} = k \cap r \dots$ bod zdánlivého obrysu sestrojíme v pomocné průmětně, kde se r a k zobrazí jako úsečky; axonometrický průmět bodu bude ležet na axonometrickém průmětu meze vlastního stínu r kulové plochy

3. $\{T, U\}; \{T, U\} \dots$ body vratu zdánlivého obrysu sestrojíme v pomocné průmětně jako bod dotyku směru promítání a meze vlastního stínu
4. $\{A, B\}; \{A, B\} \dots$ nejvyšší a nejnižší body řezu
 $s; (s \subset \rho) \wedge (s \perp p^\rho) \wedge (s \cap z \neq \{\emptyset\}) \dots$ spádová přímka roviny ρ různoběžná s osou z [10]
 $s_4; s_4 \dots$ spádová přímka promítnutá do pomocné průmětny ψ
 ${}^0s^|; s$ v pomocné průmětně v otočení $\mathcal{O}^| = (z_4, s_4 \rightarrow {}^0s^|) \dots$ spádovou přímkou v pomocné průmětně otočíme kolem osy z_4 do roviny ψ_4
 ${}^0A^|; {}^0A^| = \Phi \cap {}^0s^| \dots$ průsečík spádové přímky s rotačním tělesem
 ${}^0B^|; {}^0B^| = \Phi \cap {}^0s^|$
 $A; {}^0A^| \rightarrow A_4 \rightarrow A \dots$ protože je bod A inflexním bodem rotačního tělesa, je rovněž bodem vratu křivky řezu
 $B; {}^0B^| \rightarrow B_4 \rightarrow B \dots$ nejnižší bod řezu
5. $\{M, N\}; \{M, N\} \dots$ bod řezu rotačního tělesa Φ rovinou ρ
 $\alpha; \alpha \perp o \dots$ libovolná rovina kolmá k ose rotačního tělesa o
 $e; e = \Phi \cap \alpha \dots$ rovina α protne rotační těleso v kružnici
 $p; p = \rho \cap \alpha$
 $\{M, N\}; \{M, N\} = m \cap p \dots$ protože je rovina α rovnoběžná s půdorysnou, můžeme sestrojit průnik kružnice e a přímky p pomocí otočení jejich axonometrických půdorysů do axonometrické průmětny (poloměr kružnice e vidíme v pomocné průmětně)
6. $\{L, K\}; \{L, K\} \dots$ body změny viditelnosti křivky řezu sestrojíme jako průsečíky křivky řezu a meze vlastního stínu v pomocné průmětně



Obr. 13: Příklad 2.3.3.

3 Rotační kvadriky

Speciálním typem rotačních ploch jsou kvadriky. Vznikají rotací kuželočky (přímky, kružnice, elipsy, paraboly nebo hyperboly) kolem některé její osy. Název rotační kvadrika byl odvozen podle kvadratického tvaru rovnice příslušných rotačních ploch v pravouhlé soustavě souřadnic.

Je-li kuželočka regulární resp. singulární, pak je také příslušná kvadrika regulární resp. singulární. Mezi kvadriky regulární řadíme elipsoid, jednodílný hyperboloid, dvoudílný hyperboloid a eliptický paraboloid. Do kvadrik singulárních patří válcová a kuželová plocha.

Rotací (ne)středové kuželočky vznikne (ne)středová kvadrika. Střed kuželočky je současně středem kvadriky. Průsečíky kvadriky s osou rotace nazýváme vrcholy kvadriky.

Rotací přímky vznikají tzv. přímkové plochy (kuželová plocha, válcová plocha, jednodílný hyperboloid).

3.1 Válcová plocha

Definice 3.1.1 *Rotační kvadrika, která vznikne rotací přímky kolem osy s ní rovnoběžné navzájem různé, se nazývá válcová plocha.*

3.2 Kuželová plocha

Definice 3.2.1 *Rotační kvadrika, která vznikne rotací přímky různoběžné s osou rotace, se nazývá kuželová plocha.*



Obr. 14: Zleva: válcová plocha, kuželová plocha.

3.3 Elipsoid, kulová plocha

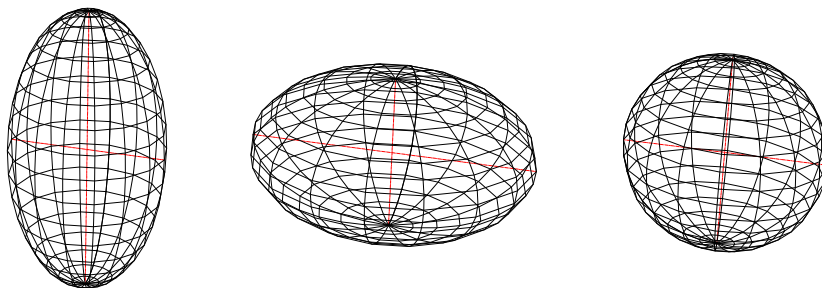
Rotací elipsy kolem její hlavní osy získáváme protáhlý (vejčitý) elipsoid, kolem vedlejší osy zploštělý elipsoid. Speciálním případem je kulová plocha, která vznikne rotací kružnice kolem libovolného jejího průměru.

Definice 3.3.1 *Protáhlým elipsoidem nazveme množinu všech bodů v prostoru, které mají konstantní součet vzdáleností od dvou různých pevně daných bodů větší než vzdálenost daných bodů [13].*

Definice 3.3.2 *Kulovou plochou nazveme množinu všech bodů v prostoru, které mají konstantní vzdálenost od pevně daného bodu.*

Pro zploštělý elipsoid obdobné tvrzení neplatí. Při rotaci řídící elipsy vytváří ohniska rovnoběžkovou kružnici.

Každý rotační elipsoid má dva vrcholy. Střed elipsoidu je pólem nevlastní roviny vzhledem k elipsoidu.



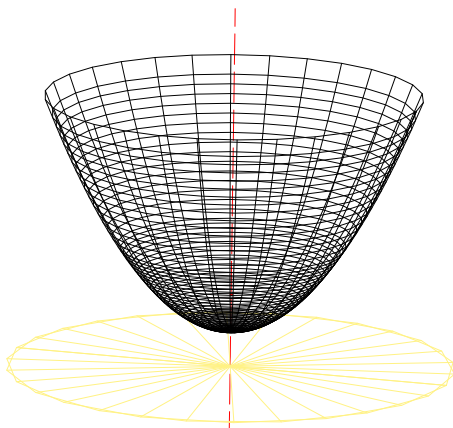
Obr. 15: Zleva: protáhlý elipsoid, zploštělý elipsoid, kulová plocha.

3.4 Kruhový paraboloid

Kruhový paraboloid vzniká rotací paraboly kolem její osy. Rotující řídící přímka vytvoří řídící rovinu. Paraboloid má jeden vrchol. Nevlastní rovina se paraboloidu

dotýká v nevlastním bodě O^∞ . Ohnisko paraboly je současně ohniskem paraboloidu. Jedná se o nestředovou bodovou kvadriku.

Definice 3.4.1 *Kruhovým paraboloidem nazveme množinu všech bodů v prostoru, které mají od pevného bodu a pevné roviny stejnou vzdálenost [13].*



Obr. 16: Rotační paraboloid.

3.5 Rotační hyperboloidy

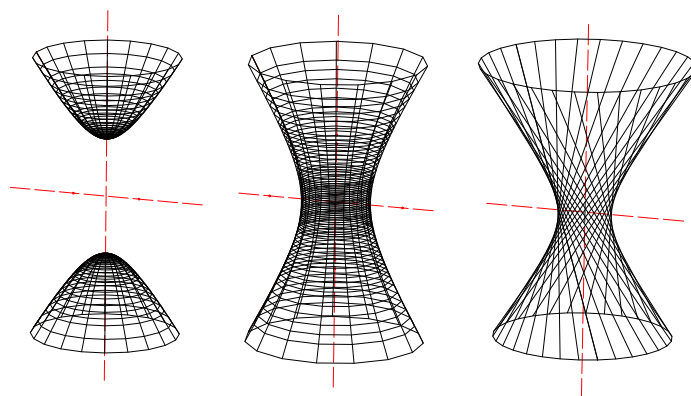
Rotací hyperboly kolem některé její osy vzniká hyperboloid. Jedná se o středovou kvadriku, kde střed je pólem nevlastní roviny vzhledem k dané hyperbole. Rotací asymptot získáme asymptotickou kuželovou plochu, která se rotačního hyperboloidu dotýká podél nevlastní regulární kuželosečky l^∞ .

Podle osy rotace rozlišujeme:

3.5.1 Rotační dvojdílný hyperboloid

Rotací hyperboly kolem její hlavní osy získáváme rotační dvojdílný hyperboloid. Jedná se o bodovou kvadriku se dvěma vrcholy.

Definice 3.5.1 *Rotačním dvojdílným hyperboloidem nazveme množinou všech bodů v prostoru, které mají od dvou pevných různých bodů stálý rozdíl vzdáleností menší, než je vzdálenost daných bodů. Body nazýváme ohniska rotačního hyperboloidu [13].*



Obr. 17: Zleva: dvojdílný hyperboloid; jednodílný hyperboloid vzniklý rotací hyperboly; jednodílný hyperboloid vzniklý rotací přímky mimoběžné s osou rotace.

3.5.2 Rotační jednodílný hyperboloid

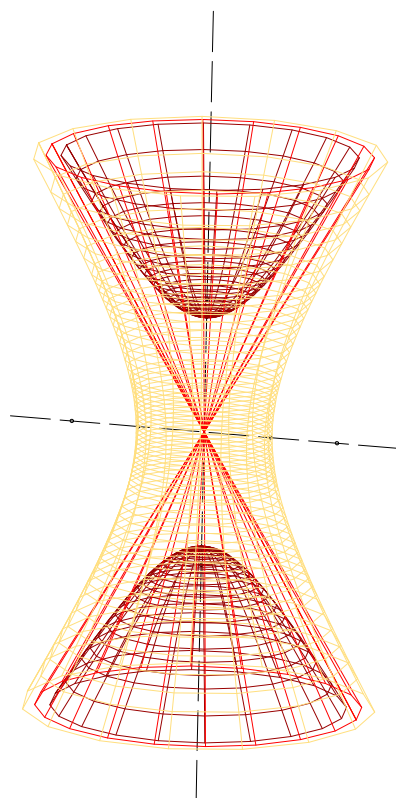
Rotací hyperboly kolem její vedlejší osy získáváme rotační jednodílný hyperboloid. Tvořícím prvkem může být rovněž přímka mimoběžná s osou rotace. Jedná se o přímkovou kvadriku.

Množinu všech přímek, které vzniknou rotací tvořící přímky, nazýváme regulus. Přímky jednoho regulu jsou navzájem mimoběžné. Tečná rovina jednodílného hyperboloidu procházející přímkou prvního regulu obsahuje ještě jednu přímku hyperboloidu, která náleží druhému regulu a je různoběžná s přímkami prvního regulu [13]:

Věta 3.5.1 Každým bodem T jednodílného (rotačního) hyperboloidu prochází dvě přímky různých regulů. Tyto přímky tvoří tečnou rovinu τ a jsou současně řezem plochy rovinou τ . Tečné roviny bodů téže přímky p vytvářejí svazek rovin o ose p .

Navíc ke každé přímce jednoho regulu existuje přímka druhého regulu, která je s ní rovnoběžná (průsečík je nevlastní bod).

Tečná rovina v nevlastním bodě se nazývá asymptotická rovina. Obsahuje přímku asymptotické kuželové plochy rovnoběžnou s dvojicí rovnoběžných přímek jednodílného hyperboloidu.



Obr. 18: Asymptotická kuželová plocha dvojdílného a jednodílného hyperboloidu.

4 Řezy rotačních kvadrik

Při sestrojování řezů rotačních kvadrik rovinami můžeme postupovat obdobně jako v případě obecných rotačních ploch. Protože řezem bude vždy kuželosečka, naskýtá se jednodušší způsob — sestrojit určující body kuželosečky řezu.

Jedná-li se o rovinu řezu, která nemá s kvadrikou žádný společný bod, bude řezem prázdná množina. Je-li rovina řezu tečnou rovinou rotační kvadriky, bude řezem singulární kuželosečka. Při ostatních polohách roviny bude řezem regulární kuželosečka.

Speciálním případem je rovina řezu kolmá k ose kvadriky. Pak bude řezem prázdná množina, jednobodová množina nebo kružnice (rovnoběžka plochy).

Klasifikaci řezu budeme zpravidla provádět podle nevlastních bodů [13]. Pro přehlednost označme ω^∞ nevlastní rovinu, u^∞ nevlastní přímku roviny řezu a l^∞ řez kvadriky nevlastní rovinou. Průsečíky u^∞ a l^∞ budou nevlastními body řezu kvadriky.

4.1 Válcová plocha

Řezem válcové plochy nevlastní rovinou je právě jeden bod O^∞ .

Pokud je rovina řezu válcové plochy rovnoběžná s osou plochy a je zároveň tečnou rovinou plochy ($u^\infty \cap O^\infty = \{O^\infty\}$), bude řezem singulární kuželosečka parabolického typu, tzn. povrchová přímka válcové plochy.

V případě, že rovina řezu je rovnoběžná s osou plochy a její vzdálenost od osy je menší než poloměr válcové plochy ($u^\infty \cap O^\infty = \{O^\infty\}$), jedná se o singulární kuželosečku parabolického typu, tzn. dvojici rovnoběžných přímek.

Je-li rovina kolmá k ose rotační plochy bude řezem kružnice. Při kosé poloze roviny řezu vzhledem k ose ($u^\infty \cap O^\infty = \{\}$) je řezem elipsa. Průnikem válcové plochy a roviny řezu může být rovněž prázdná množina.

Pro řez válcové plochy rovinou kosou k ose plochy platí věta Quételetova–Dandelinova (důkaz je čtenáři k dispozici tamtéž):

Věta 4.1.1 *Rotační válcová plocha je prořazena rovinou, která je kosá k její ose, v elipse. Střed elipsy je na ose válcové plochy; její ohniska jsou dotykové body kuřlových ploch, které jsou vepsány válcové ploše a dotýkají se roviny řezu. Délka její*

vedlejší poloosy se rovná poloměru válcové plochy.

(Urban, 1965, s. 233)

Dotyková válcová plocha splývá s rotační válcovou plochou. Normálová plocha je rovinou kolmou k ose válcové plochy.

4.2 Kuželová plocha

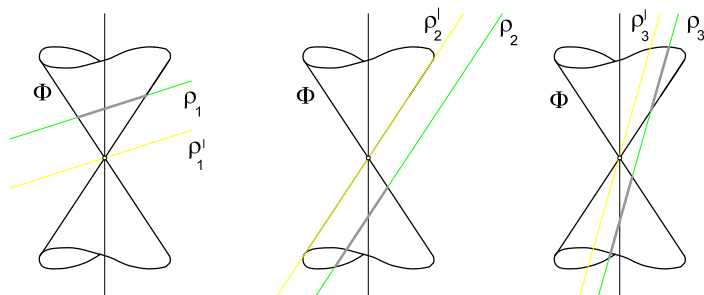
Řezem kuželové plochy může být bod, přímka, dvojice různoběžných přímek, kružnice, elipsa, parabola nebo hyperbola. Klasifikaci řezu rotační plochy můžeme provést několika způsoby:

- Vyšetřením vzájemné polohy vrcholové roviny $\rho^\perp$ rovnoběžné s rovinou řezu ρ a kuželové plochy Φ :

$\Phi \cap \rho^\perp = \{V\}$... kuželová plocha a vrcholová rovina mají společný právě jeden bod — vrchol; řez bude eliptického typu (bod, elipsa)

$\Phi \cap \rho^\perp = \{u\}$... kuželová plocha a vrcholová rovina mají společnou právě jednu přímku; řez bude parabolického typu (přímka, parabola)

$\Phi \cap \rho^\perp = \{u, v\}$... kuželová plocha a vrcholová rovina mají společnou dvojici různoběžných přímek; řez bude hyperbolického typu (dvojice různoběžných přímek, hyperbola)



Obr. 19: Klasifikace řezu kuželové plochy rovinou pomocí vrcholové roviny.

Zleva: eliptický řez, parabolický řez, hyperbolický řez.

Prochází-li rovina řezu singulárním bodem (V) kuželové plochy, bude řezem singulární kuželosečka. Kružnici získáme jako řez kuželové plochy rovinou kolmou k ose plochy.

Pro rovinné řezy rotačních kuželových ploch opět platí Quételetovy-Dandelinovy věty, navíc je výhodné užít vět o průmětu vrcholu kuželové plochy:

Věta 4.2.1 *Rotační kuželová plocha je prořata rovinou (která není vrcholová ani není kolmá k ose a která s rovinou povrchové kružnice plochy svírá menší úhel než povrchové přímky plochy) v elipse. Ohniska průsečné elipsy jsou dotykové body kulových ploch, které jsou vepsány kuželové ploše a dotýkají se roviny řezu.*

Věta 4.2.2 *Pravouhlý průmět eliptického řezu rotační kuželové plochy do roviny kolmé k ose plochy je elipsa, jejímž jedním ohniskem je průmět vrcholu kuželové plochy.*

Věta 4.2.3 *Rotační kuželová plocha je prořata rovinou (která není vrcholová a která s rovinou povrchové kružnice svírá stejný úhel jako povrchové přímky plochy) v parabole. Její ohnisko je dotykový bod kulové plochy, která je vepsána kuželové ploše a dotýká se roviny řezu.*

Věta 4.2.4 *Pravouhlým průmětem parabolického řezu rotační kuželové plochy do roviny kolmé k ose plochy je parabola, jejímž ohniskem je pravouhlý průmět vrcholu plochy.*

Věta 4.2.5 *Rotační kuželová plocha je prořata rovinou (která není vrcholová a která s rovinou povrchové kružnice plochy svírá větší úhel než povrchové přímky) v hyperbole. Její ohniska jsou dotykové body kulových ploch, které jsou vepsány kuželové ploše a dotýkají se roviny řezu.*

Věta 4.2.6 *Pravouhlým průmětem hyperbolického řezu rotační kuželové plochy rovinou (která není rovnoběžná s osou plochy) do roviny kolmé k ose plochy je hyperbola, jejímž ohniskem je pravouhlý průmět vrcholu plochy.*

(Urban, 1964, s. 368 – 374)

Dotyková kuželová plocha splývá s rotační kuželovou plochou.

4.3 Elipsoid, kulová plocha

Protože se elipsoid nedotýká nevlastní roviny v žádném bodě ($\Phi \cap u^\infty = \{\}$), řezem je kuželosečka typu elipsa nebo prázdná množina.

Nemá-li rovina řezu s kvadrikou žádný společný bod, je průnikem prázdná množina. Je-li rovina řezu zároveň tečnou rovinou elipsoidu, bude řezem právě jeden bod — bod dotyku. Rovina řezu kolmá k ose elipsoidu ho protíná v kružnici. Každá další rovina protne elipsoid v elipse.

4.4 Paraboloid

Paraboloid se dotýká nevlastní roviny právě v jednom bodě ($\Phi \cap u^\infty = \{O^\infty\}$).

Prochází-li rovina řezu nevlastním bodem O^∞ , tj. je rovnoběžná s osou paraboloidu, bude řez typu parabola. Paraboloid je bodová kvadrika, tedy řez bude regulární kuželosečka – parabola.

Každá další rovina bude kvadriku protínat v kuželosečce typu elipsa (bod, elipsa) nebo v prázdné množině. Speciálním případem řezu je opět kružnice, tj. když je rovina řezu kolmá k ose kvadriky.

Při sestrojování eliptického řezu bude výhodné využívat následující věty:

Věta 4.4.1 *Pravouhlý průmět eliptického řezu na rotačním paraboloidu do roviny kolmé k ose o je kružnice.*

Věta 4.4.2 *Všechny paraboly na rotačním paraboloidu jsou shodné křivky.*

(Machala, 1986, s. 111)

4.5 Hyperboloidy

Hyperboloidy Φ se dotýkají asymptotické kuželové plochy Ω podél nevlastní regulární kuželosečky l^∞ . Rovina řezu protíná hyperboloid i asymptotickou kuželovou plochu v homotetických kuželosečkách, tj. mají společné nevlastní body. Pokud přímka u^∞ roviny řezu není tečnou l^∞ , jsou kuželosečky řezu ploch Φ a Ω soustředné a jejich střed je pólem nevlastní přímky u^∞ vzhledem ke kuželosečkám řezu.

Řezy hyperboloidů klasifikujeme podle polohy nevlastní kuželosečky l^∞ a nevlastní přímky roviny řezu u^∞ . Uvažujme rovinu ρ^l procházející středem hyperboloidu rovnoběžnou s rovinou řezu ρ [13]:

4.5.1 Dvojdílný hyperboloid

Má-li rovina ρ^l s asymptotickou kuželovou plochou Ω společný právě vrchol kuželové plochy ($\Omega \cap \rho^l = V$), řezem bude kuželosečka typu elipsa (bod, elipsa, kružnice) nebo prázdná množina.

Dotýká-li se ρ^l plochy Ω podél její povrchy, řez bude typu parabola. Hyperbolický typ řezu nastane, pokud rovina ρ^l protíná Ω ve dvojici různoběžek. Protože dvojdílný hyperboloid neobsahuje přímky — jedná se o bodovou kvadriku, řezem bude parabola a hyperbola.

4.5.2 Jednodílný hyperboloid

Je-li jediným společným bodem roviny ρ^l a asymptotické kuželové plochy střed jednodílného hyperboloidu ($\Omega \cap \rho^l = S$), pak řezem bude elipsa.

Dotýká-li se rovina ρ^l asymptotické kuželové plochy podél některé její povrchy, řez bude typu parabola. Obsahuje-li rovina ρ tuto povrchu, obsahuje i dvě přímky jednodílného hyperboloidu s ní rovnoběžné, tedy jedná se o asymptotickou rovinu řezu. Neobsahuje-li rovina ρ tuto povrchu, řezem bude parabola.

Protíná-li rovina ρ^l asymptotickou kuželovou plochu ve dvojici různoběžek, řez je hyperbolického typu. Obsahuje-li rovina řezu ρ povrchovou přímku jednodílného hyperboloidu, obsahuje i druhou přímku s ní různoběžnou. Rovina řezu je tedy tečnou rovinou s bodem dotyku v průsečíku daných přímek. Pokud rovina řezu neobsahuje žádnou přímku jednodílného hyperboloidu, řezem bude hyperbola.

Jelikož je jednodílný hyperboloid přímková plocha, můžeme si řez představit jako množinu průsečíků jednotlivých přímek plochy s rovinou řezu. Nenastane tedy případ, že by řezem byla jednobodová množina nebo dokonce množina prázdná.

4.6 Řešené příklady

Příklad 4.6.1 Sestrojte řez rotačního válce Φ rovinou ρ v kosoúhlém promítání ($\omega = 135^\circ, q = 2/3$). Střed spodní podstavky válce $S = [3; 3; 0]$, poloměr válce $r = 3$, osa válce o je rovnoběžná s osou z , výška válce $v = 8$, rovina řezu $\rho = (12; 10; 4)$.

Rozbor:

Rovina řezu je kosá k ose kvadriky — jedná se o eliptický řez.

Osa kvadriky protíná rovinu řezu ve středu elipsy. Hlavní osa elipsy leží na spádové přímce roviny řezu. Vedlejší osa elipsy leží na hlavní přímce první osnovy roviny řezu. Spádová a hlavní přímka první osnovy se nezobrazí jako vzájemně kolmé, proto použijeme ke konstrukci elipsy Rytzovu konstrukci. Spádová přímka a hlavní přímka budou potřebnými sdruženými průměry. Sdružené průměry omezíme pomocí afinity mezi kosoúhlým a přidruženým Mongeovým promítáním.

Rovina změny viditelnosti je rovnoběžná s osou válce a prochází body dotyku zdánlivého obrysu pláště válce a podstavky. Body změny viditelnosti leží současně na zdánlivém obrysu válce (průnik válce a roviny změny viditelnosti) a průsečnici roviny změny viditelnosti a roviny řezu.

Konstrukce (Obr. 21):

1. $\Phi; \Phi(S, o, r, v)$... podstavu válce sestrojíme pomocí přidruženého Mongeova promítání a Rytzovy konstrukce; obrys pláště sestrojíme jako tečny k elipse mající směr osy válce $[10]$; body dotyku tečen označíme L_1^k, K_1^k
2. $\sigma; (o \subset \sigma) \wedge (\sigma \perp \rho)$... rovinu souměrnosti řezu sestrojíme opět pomocí přidružené Mongeovy projekce, kde je půdorysná stopa roviny σ kolmá k půdorysné stopě roviny ρ ; nárysna stopa je rovnoběžná s osou válce
3. $s; s = \sigma \cap \rho$... spádová přímka
4. $\bar{S}; \bar{S} = s \cap o$... střed elipsy
5. ${}^\rho h; (\bar{S} \in {}^\rho h) \wedge ({}^\rho h \parallel {}^\rho p)$... hlavní přímka první osnovy roviny ρ procházející středem elipsy

6. $(\mathcal{A}_1 = ({}^\rho p, \overline{S}^k \rightarrow S^k)) \wedge (\mathcal{A}_2 = (x, S^k \rightarrow S_1)) \dots$ elipsa řezu odpovídá podstavné kružnici válce v prostorové afinitě o ose ${}^\rho p$; v prostorové afinitě o ose x si současně odpovídá podstavná kružnice válce a přidružený první průmět podstavné kružnice v Mongeově zobrazení; složením obou afinit získáváme opět prostorovou afinitu

$$s_1; s^k \rightarrow s_1^k \rightarrow s_1$$

$${}^\rho h_1; {}^\rho h^k \rightarrow {}^\rho h_1^k \rightarrow {}^\rho h_1$$

$$\mathcal{E}_1; \mathcal{E}^k \rightarrow \mathcal{E}_1^k \rightarrow \mathcal{E}_1 \dots \text{elipsa se zobrazí jako kružnice}$$

$$\{A^k, B^k\}; (\{A_1, B_1\} = \mathcal{E}_1 \cap s_1) \rightarrow \{A_1^k, B_1^k\} \rightarrow \{A^k, B^k\} \dots \text{body ohraničující}$$

sdružené průměry

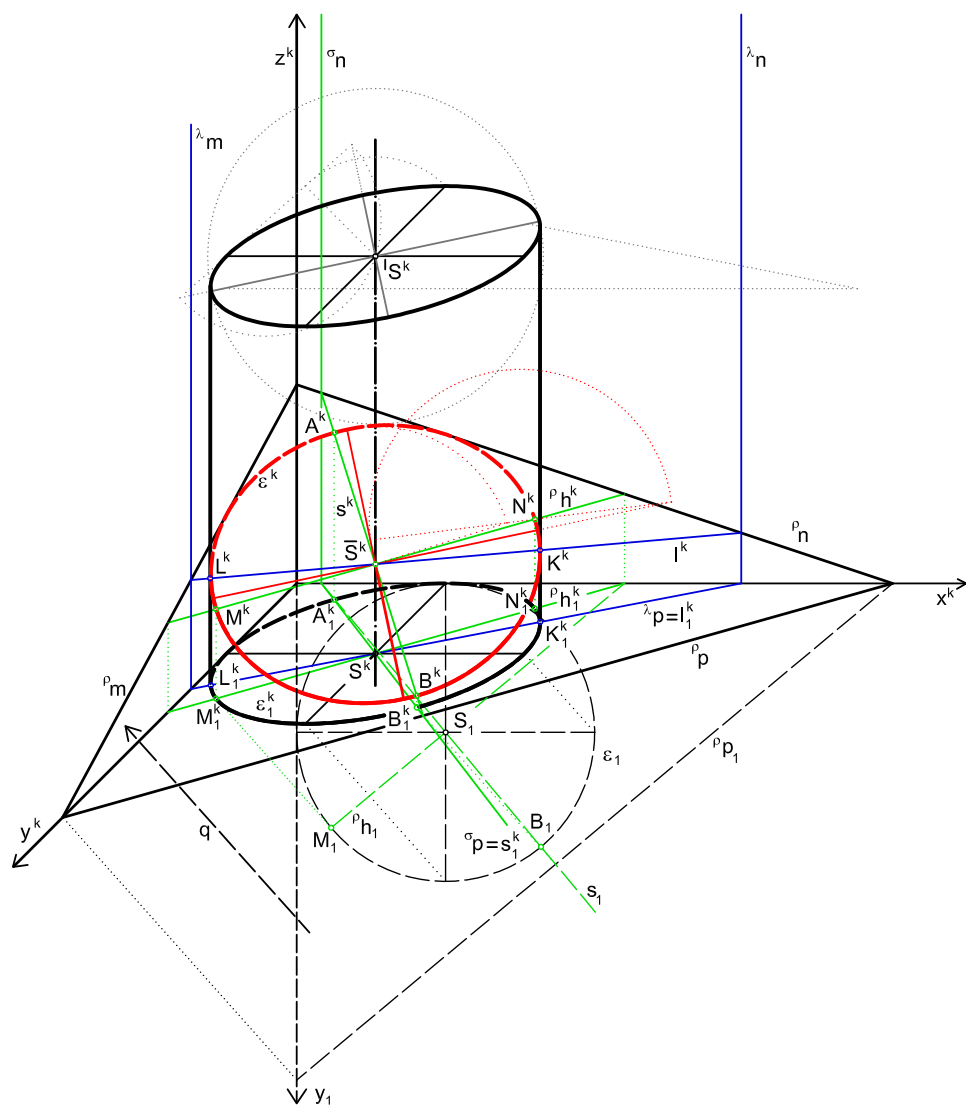
$$\{M^k, N^k\}; (\{M_1, N_1\} = \mathcal{E}_1 \cap {}^\rho h_1) \rightarrow \{M_1^k, N_1^k\} \rightarrow \{M^k, N^k\}$$

7. $\mathcal{E}; \mathcal{E}(s, {}^\rho h) \dots$ elipsu sestrojíme pomocí Rytzovy konstrukce

8. $\lambda; (\{K_1^k, L_1^k\} \in \lambda) \wedge (\lambda \parallel o) \dots$ rovina změny viditelnosti

9. $l; l = \lambda \cap \rho$

10. $\{K, L\}; \{K, L\} = \Phi \cap l \dots$ body změny viditelnosti na obrysu válce



Obr. 21: Příklad 4.6.1.

Příklad 4.6.2 V pravouhlé axonometrii ($XY = 11, YZ = 11, XZ = 11$) sestrojte řez rotačního kužele Φ rovinou ρ . Kužel: střed podstavy $S = [4; 3; 0]$, poloměr podstavy $r = 4$, vrchol kužele $V = [3; 3; 5]$; rovina řezu $\rho = (8; 5, 5; 4)$.

Rozbor:

Klasifikaci řezu provedeme pomocí vrcholové roviny. Vrcholová rovina $\rho^\perp$ neprotíná podstavu kužele — jedná se o eliptický typ řezu.

Rovina souměrnosti řezu je rovinou souměrnosti kužele a rovněž roviny řezu. Spádovou přímkou, na které leží hlavní osa elipsy, sestrojíme jako průsečnici roviny souměrnosti řezu a roviny řezu. Hlavní vrcholy leží na povrchových přímkách kužele v rovině souměrnosti. Střed elipsy sestrojíme jako střed úsečky dané hlavními vrcholy.

Vedlejší osa elipsy leží na hlavní přímce první osnovy roviny řezu. Omezíme ji pomocí povrchových přímek kužele, které leží v rovině obsahující hlavní přímku a vrchol.

Osy elipsy se nezobrazí jako vzájemně kolmé. K sestrojení elipsy řezu použijeme Rytzovu konstrukci.

Rovina změny viditelnosti prochází vrcholem kužele a dotykovými body obrysu pláště a podstavy kužele. Body změny viditelnosti jsou společnými body povrchových přímek kužele v rovině změny viditelnosti a průsečnice roviny změny viditelnosti a roviny řezu.

Konstrukce (Obr. 22):

1. $\Phi; \Phi(S, V, r)$ podstavu kužele sestrojíme pomocí afinity mezi půdorysnou a axonometrickou průmětnou; zdánlivý obrys pláště sestrojíme jako tečny z vrcholu V k elipse podstavy [10]; body dotyku označíme $T, T^\perp$
2. $\sigma; (\sigma \perp \rho) \wedge (o \subset \sigma) \dots$ rovina souměrnosti řezu
3. $s; s = \sigma \cap \rho \dots$ spádová přímka roviny
4. $\{a, b\}; \{a, b\} = \Phi \cap \sigma \dots$ povrchové přímky kužele v rovině souměrnosti řezu

5. A ; $A = a \cap s \dots$ hlavní vrcholy elipsy
 B ; $B = b \cap s$
6. O ; O střed úsečky $AB \dots$ střed elipsy sestrojíme jako střed úsečky AB
7. h^ρ ; $O \in h^\rho \dots$ hlavní přímka první osnovy roviny ρ procházející středem elipsy
8. α ; $\alpha = h^\rho V \dots$ vrcholová rovina obsahující hlavní přímku roviny ρ
9. $\{c, d\}$; $\{c, d\} = \Phi \cap \alpha \dots$ povrchové přímky kužele v rovině α
10. C ; $C = c \cap h^\rho \dots$ vedlejší vrcholy elipsy
 D ; $D = d \cap h^\rho$
11. λ ; $\lambda = TT^|V \dots$ rovina změny viditelnosti
12. l ; $l = \rho \cap \lambda$
13. $\{K, L\}$; $\{K, L\} = \Phi \cap l \dots$ body změny viditelnosti

Příklad 4.6.3 V kosouhlém promítání ($\omega = 140^\circ; q = 2/3$) sestrojte parabolický řez kužele Φ rovinou ρ . Kužel: střed podstavy $S = [2, 6; 3, 5; 0]$, poloměr podstavy $r = 2, 6$, vrchol $V = [2, 6; 3, 5; 7, 8]$; rovina řezu $\rho = (-6, 5; 6, 9; ?)$.

Rozbor:

Parabolický řez kužele získáme, když vrcholová rovina bude tečnou rovinou kuželové plochy.

Rovina souměrnosti paraboly je současně rovinou souměrnosti kužele a rovinou souměrnosti roviny řezu. Průsečnice roviny řezu a roviny souměrnosti je spádovou přímkou roviny řezu na níž leží osa paraboly. Vrchol paraboly je průsečíkem spádové přímky a kužele. Osa a vrchol paraboly řezu se do průmětny nezobrazí jako osa a vrchol paraboly.

Rovina změny viditelnosti prochází vrcholem kužele a dotykovými body obrysu pláště a podstavy kužele. Body změny viditelnosti jsou společnými body povrchových přímek kužele v rovině změny viditelnosti a průsečnice roviny změny viditelnosti a roviny řezu.

Tečny paraboly v bodech řezu na podstavné kružnici kužele sestrojíme jako průsečnice tečných rovin kužele v daných bodech a roviny řezu.

Konstrukce (Obr. 23):

1. $\Phi; \Phi(S, V, r)$... podstavu kužele sestrojíme pomocí přidruženého Mongeova promítání a Rytzovy konstrukce; obrys pláště k, k^l sestrojíme jako tečny k elipse jdoucí daným bodem $[10]$; body dotyku tečen označíme K, K^l
2. $\rho^l; (V \in \rho^l) \wedge (\rho^l \parallel \rho)$... aby byl řez parabolický, musí být vrcholová rovina tečnou rovinou kuželové plochy
3. $\sigma; (o \subset \sigma) \wedge (\sigma \perp \rho)$... rovinu souměrnosti řezu sestrojíme opět pomocí přidružené Mongeovy projekce, kde je půdorysná stopa roviny σ kolmá k půdorysné stopě roviny ρ ; nárysná stopa je rovnoběžná s osou kužele
4. $s; s = \sigma \cap \rho$... spádová přímka
5. $\{a, a^l\}; \{a, a^l\} = \Phi \cap \sigma$... povrchové přímky kužele v rovině souměrnosti

6. A ; $A = s \cap a^\perp \dots$ vrchol paraboly
7. λ ; $\lambda = K^\perp KV \dots$ rovina změny viditelnosti
8. l ; $l = \lambda \cap \rho$
9. L ; $L = l \cap k^\perp \dots$ bod změny viditelnosti
 $\{\}; \{\} = l \cap k$
10. $\{T, T^\perp\}; \{T, T^\perp\} = p^\rho \cap \Phi \dots$ body paraboly ležící na podstavné kružnici
11. τ ; $(T \in \tau) \wedge (V \in \tau) \dots$ tečná rovina kužele procházející bodem řezu T
 $\tau^\perp$; $(T^\perp \in \tau^\perp) \wedge (V \in \tau^\perp)$
12. t ; $t = \tau \cap \rho \dots$ tečna paraboly v bodě T
 $t^\perp$; $t^\perp = \tau^\perp \cap \rho$

Příklad 4.6.4 V Mongeově promítání sestrojte řez rotačního dvojkužele rovinou ρ . Dvojkužel: osa je kolmá k půdorysně, střed spodní podstavy $P = [0; 5; 0]$, vrchol $V = [0; 5; 5, 5]$, bod pláště $Q = [-3; 5; 0]$, výška dvojkužele $v = 11$; rovina řezu $\rho = (4; 6; 11)$.

Rozbor:

Klasifikaci řezu provedeme pomocí vrcholové roviny rovnoběžné s rovinou řezu — jedná se o řez hyperbolický.

Rovinu souměrnosti křivky řezu sestrojíme jako rovinu souměrnosti dvojkužele a současně roviny řezu. Průnikem roviny souměrnosti a roviny řezu bude spádová přímka na níž leží osa hyperboly. Rovina souměrnosti křivky řezu protne dvojkužel ve dvojici úseček, jejichž společné body s osou hyperboly jsou hlavní vrcholy.

Střed hyperboly sestrojíme jako střed úsečky, jejímiž krajními body budou hlavní vrcholy.

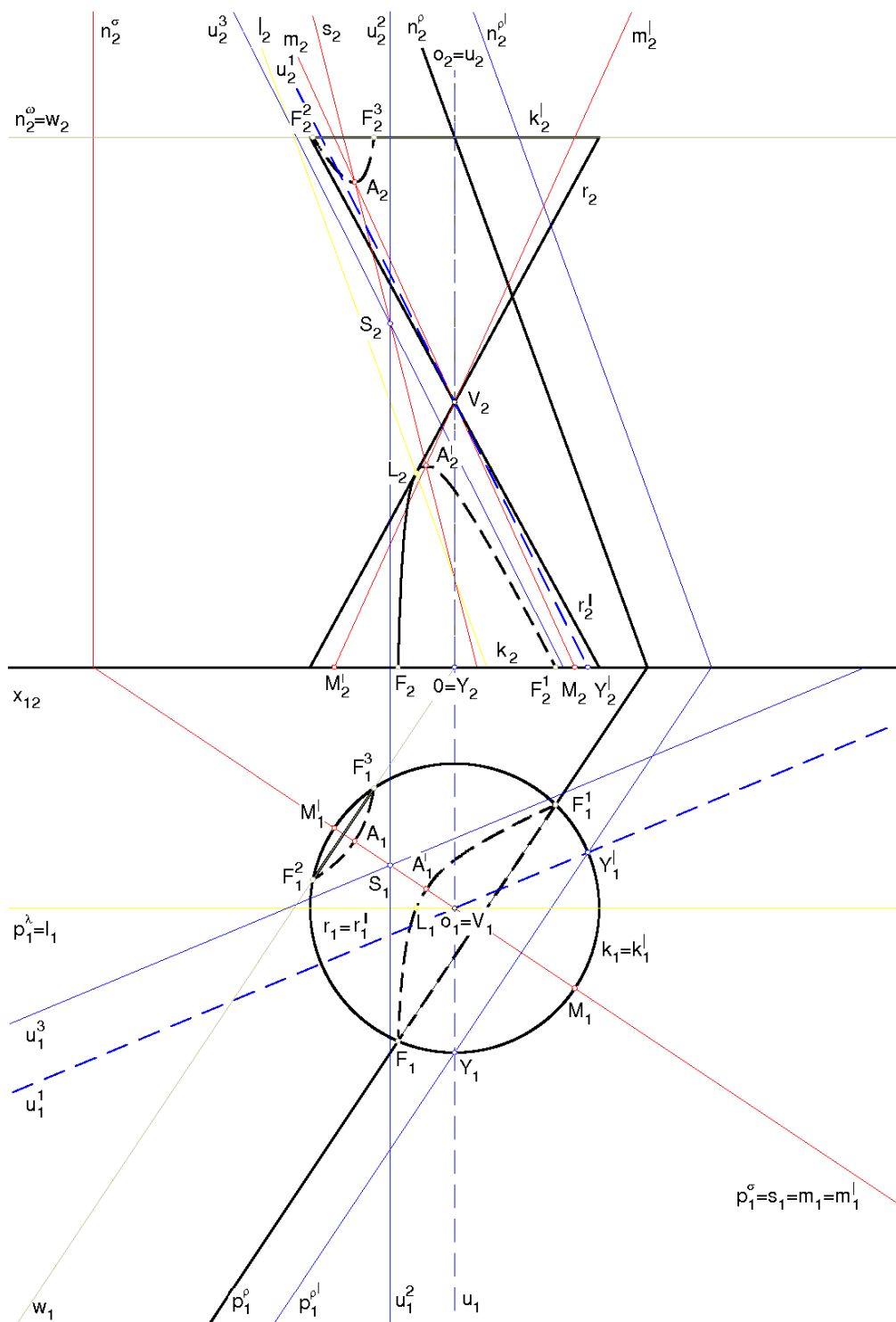
Průnikem kuželové plochy a nevlastní roviny je nevlastní kružnice. Rovina řezu protíná nevlastní rovinu v nevlastní přímce. Nevlastní kružnice a nevlastní přímka se protínají ve dvou nevlastních bodech. Tedy vrcholová rovina protíná kuželovou plochu ve dvojici různoběžek, které určují směr asymptot hyperboly.

Rovina změny viditelnosti bude procházet osou rotačního tělesa a bude rovnoběžná s nárysnou. Body změny viditelnosti sestrojíme jako průnik tělesa s průsečnicí roviny změny viditelnosti a roviny řezu.

Konstrukce (Obr. 24):

1. Φ ; $\Phi(P, V, Q, o, v)$... zdánlivý obrys tělesa je určen podstavnými kružnicemi k, k^l a hlavním meridiánem — tj. povrchovými úsečkami dvojkužele, které označíme r, r^l
2. ρ^l ; $(\rho^l \parallel \rho) \wedge (V \in \rho^l)$... vrcholová rovina rovnoběžná s rovinou řezu
3. σ ; $(\sigma \perp \rho) \wedge (o \subset \sigma)$... rovina souměrnosti řezu
4. $\{M, M^l\}$; $\{M, M^l\} = \sigma \cap k$... body řezu na podstavě
5. s ; $s = \rho \cap \sigma$... spádová přímka

6. $\{m, m^\perp\}; \{m, m^\perp\} = \Phi \cap \sigma \dots$ povrchové přímky kuželové plochy v ρ
7. $A; A = s \cap m^\perp \dots$ hlavní vrcholy hyperboly
 $A^\perp; A^\perp = s \cap m$
8. $S; S$ je střed úsečky $AA^\perp \dots$ střed hyperboly
9. $\{F, {}^1F\}; \{F, {}^1F\} = k \cap p^\rho \dots$ body řezu na dolní podstavě
10. $\omega; (\omega \parallel \pi) \wedge (k^\perp \subset \omega)$
11. $w; w = \omega \cap \rho$
12. $\{{}^2F, {}^3F\}; \{{}^2F, {}^3F\} = k^\perp \cap w \dots$ body řezu na horní podstavě
13. $\{Y, Y^\perp\}; \{Y, Y^\perp\} = \rho^\perp \cap k$
14. $u; u \leftrightarrow YV \dots$ směry asymptot hyperboly
 $u^\perp; u^\perp \leftrightarrow Y^\perp V$
15. $u^2; (u^2 \parallel u) \wedge (S \in u^2) \dots$ asymptoty hyperboly
 $u^3; (u^3 \parallel u^\perp) \wedge (S \in u^3)$
16. $\lambda; (\lambda \parallel \nu) \wedge (o \subset \lambda) \dots$ rovina změny viditelnosti
17. $l; l = \rho \cap \lambda$
18. $L; L = l \cap r \dots$ bod změny viditelnosti v náryse
 $\{\} = l \cap r^\perp$



Obr. 24: Příklad 4.6.4.

Příklad 4.6.5 V kótovaném promítání sestrojte řez zploštělého elipsoidu Φ rovinou ρ . Elipsoid dán elipsou: střed $O = [2; 0; 6]$, hlavní vrchol $W = [2; 5; 6]$, vedlejší vrchol $V = [2; 0; 9]$; rovina řezu ρ je dána body $X = [-5; 4; 5; 0]$, $Y = [2; 8; 5; 0]$, $Z = [3; -3; 6; 2]$.

Rozbor:

Rovina řezu je kosá k ose elipsoidu, jejich průnik je neprázdný a zároveň rovina řezu není tečnou rovinou elipsoidu — řezem bude elipsa.

Rovina souměrnosti řezu je rovinou souměrnosti elipsoidu a zároveň rovinou souměrnosti roviny řezu. Rovina souměrnosti protne rovinu řezu ve spádové přímce na níž leží vedlejší ose elipsy. Vedlejší vrcholy elipsy řezu jsou průsečíky spádové přímky a elipsoidu (vidíme v otočení roviny souměrnosti do půdorysny). Střed elipsy řezu je střed úsečky omezené vedlejšími vrcholy.

Hlavní osa elipsy řezu bude ležet na hlavní přímce roviny řezu procházející středem elipsy řezu. Rovina kolmá k ose elipsoidu procházející středem elipsy řezu protne elipsoid v rovnoběžkové kružnici. Hlavní vrcholy jsou společnými body rovnoběžkové kružnice a hlavní přímky roviny řezu.

Body změny viditelnosti jsou společnými body rovníku rotační plochy a roviny řezu.

Konstrukce (Obr. 25):

1. Φ ; $\Phi \dots$ elipsoid vznikne rotací elipsy $\mathcal{E}(O, W, V)$ kolem vedlejší osy; obrysem je kruh
2. σ ; $\sigma \dots$ rovina souměrnosti řezu
3. s ; $s = \rho \cap \sigma \dots$ vedlejší osa elipsy řezu
4. m ; $m = \Phi \cap \sigma \dots$ meridián v rovině souměrnosti řezu
5. $\{A, A^I\}$; $\{A, A^I\} = m \cap s$ v otočení $\mathcal{O} = (p^\sigma, \sigma \rightarrow \pi) \dots$ vedlejší vrcholy
6. S ; S střed úsečky $A, A^I \dots$ střed elipsy řezu
7. ${}^\rho h$; $S \in {}^\rho h \dots$ hlavní přímka roviny ρ na níž leží hlavní osa elipsy řezu

8. $\alpha; (\alpha \perp o) \wedge (S \in \alpha)$
9. $k; k = \alpha \cap \Phi \dots$ rovnoběžka
10. $\{G, G^{\text{I}}\}; \{G, G^{\text{I}}\} = {}^{\rho}h \cap k \dots$ hlavní vrcholy
11. $\lambda; (\lambda \parallel \pi) \wedge (S \in \lambda) \dots$ rovina změny viditelnosti
12. $n; n = \lambda \cap \Phi \dots$ rovník
13. $\{K, K^{\text{I}}\}; \{K, K^{\text{I}}\} = \rho \cap n \dots$ body změny viditelnosti

Příklad 4.6.6 V kosoúhlém promítání ($\omega = 150^\circ, q = 2/3$) sestrojte řez kulové plochy κ rovinou ρ . Kulová plocha: střed $S = [0; 0; 3, 5]$, poloměr $r = 3, 5$, osa o je kolmá k π ; rovina řezu $\rho = (5; 6; 5, 5)$.

Rozbor:

Zdánlivým obrysem kulové plochy v kosoúhlém promítání je elipsa, jejímiž ohnisky jsou průměty krajních bodů průměru kulové plochy rovnoběžného s osou y^k [10]. Další body na zdánlivém obrysu můžeme sestrojit dle [13].

Průnik kulové plochy s rovinou řezu je neprázdný a zároveň rovina řezu není tečnou rovinou kulové plochy — řezem bude kružnice (zobrazí se jako elipsa).

Rovina souměrnosti řezu je rovinou souměrnosti kulové plochy a zároveň rovinou souměrnosti roviny řezu. Rovina souměrnosti protne rovinu řezu ve spádové přímce. Průsečíky kulové plochy a spádové přímky ohraničují průměr kružnice řezu (v otočení zjistíme zároveň i poloměr kružnice řezu). Střed průměru je středem kružnice řezu. Hlavní přímka roviny řezu první osnovy procházející středem kružnice řezu bude druhým potřebným průměrem (kolmým na spádovou přímku). Druhý průměr omezíme pomocí poloměru kružnice řezu (v přidruženém Mongeově zobrazení). K sestrojení kružnice řezu (elipsy) užijeme Rytzovy konstrukce.

K určení bodů změny viditelnosti bude zapotřebí sestrojit rovinu kolmou ke směru promítání procházející středem kulové plochy. Body změny viditelnosti jsou společné body křivky řezu a průsečnice uvažované roviny s rovinou řezu.

Konstrukce (Obr. 26):

1. $\{m, n\}; \{m, n\}$ rovník a meridián kulové plochy

$$a; (a \parallel x) \wedge (S \in a)$$

$$\{A, B\}; (\{A, B\} \in a) \wedge (|AS| = |SB| = r)$$

$$b; (b \parallel y^k) \wedge (S \in b)$$

$\{C, D\}; (\{C, D\} \in b) \wedge (|CS| = |SD| = r) \dots$ body ohraničující průměr kulové plochy a zároveň ohniska zdánlivého obrysu kulové plochy

$m; m \dots$ rovník se zobrazí jako elipsa se sdruženými průměry AB, CD

$$\{E, F\}; (\{E, F\} \in o) \wedge (|ES| = |SF| = r)$$

n ; $n \dots$ meridián se zobrazí jako elipsa se sdruženými průměry CD, EF

2. κ ; $\kappa(S, r, o) \dots$ obrysem kulové plochy ve středovém promítání bude elipsa [10]

j ; $(j^k \perp b^k) \wedge (S \in j) \dots$ vedlejší osa zdánlivého obrysu

$\{J, K\}$; $(\{J, K\} \in j) \wedge (|S^k J^k| = |K^k S^k| = r) \dots$ vedlejší vrcholy zdánlivého obrysu

κ ; zdánlivý obrys kulové plochy κ se zobrazí jako elipsa s vedlejšími vrcholy $\{J, K\}$ a ohnisky $\{C, D\}$

3. σ ; $(o \subset \sigma) \wedge (\sigma \perp \rho) \dots$ rovinu souměrnosti řezu sestrojíme pomocí přidružené Mongeovy projekce

4. s ; $s = \sigma \cap \rho \dots$ spádová přímka na níž leží průměr kružnice řezu

5. $\{Q, R\}$; $\{Q, R\} = \kappa \cap s$ v otočení $\mathcal{O}^I = (o; \sigma \rightarrow \nu) \dots$ omezení průměru

6. O ; O střed úsečky $QR \dots$ střed kružnice řezu

7. ${}^{\rho}h$; $O \in {}^{\rho}h \dots$ hlavní přímka první osnovy roviny řezu, na které leží druhý průměr kružnice řezu

8. $\{X, Y\}$; $(\{X, Y\} \in {}^{\rho}h) \wedge (|XO| = |OY| = |OR|) \dots$ omezení druhého průměru

9. e ; kružnice řezu e se zobrazí jako elipsa se sdruženými průměry QR, XY

10. p ; $p \dots$ směr promítání

11. λ ; $(\lambda \perp p) \wedge (S \in \lambda)$

12. l ; $l = \rho \cap \lambda$

13. $\{L, L^I\}$; $\{L, L^I\} = \kappa \cap l \dots$ body změny viditelnosti

57

Příklad 4.6.7 V kótovaném promítání sestrojte řez rotačního paraboloidu Φ rovinou ρ . Paraboloid: vrchol $V = [0; 0; 3, 5]$, ohnisko $F = [0; 0; 5, 5]$, řídící rovina $\alpha = (\infty; \infty; 1, 5)$; rovina řezu ρ je dána body $A = [-3, 3; 4, 5; 2, 5]$, $B = [2, 7; 1; 7]$, $C = [4; 2, 5; 10, 6]$.

Rozbor:

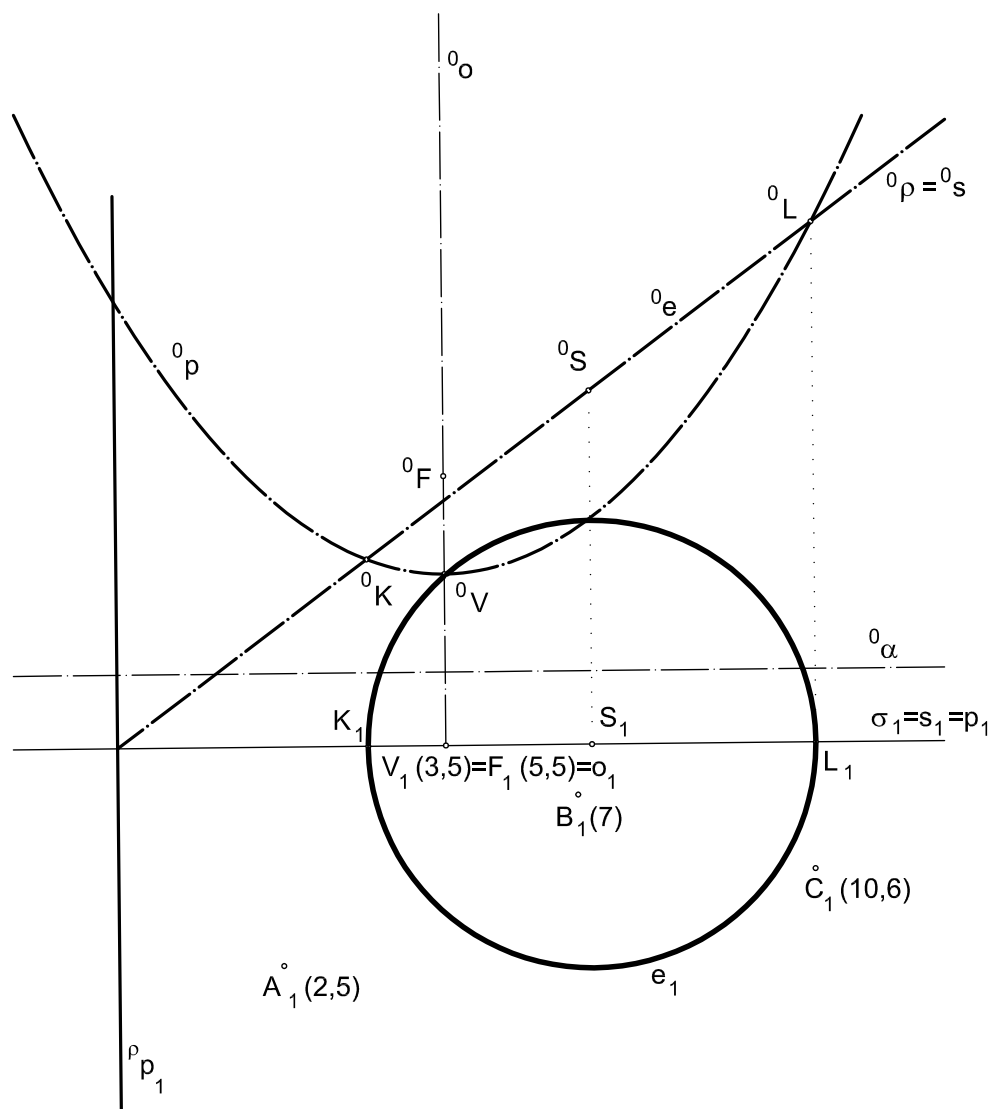
Osa paraboloidu je kolmá k půdorysně — průmětem bude celá první průmětna. Rovina řezu je kosá k ose paraboloidu, jejich průnik je neprázdný a zároveň rovina řezu není tečnou rovinou paraboloidu — řezem bude elipsa.

Rovina souměrnosti řezu je rovinou souměrnosti paraboloidu a zároveň rovinou souměrnosti roviny řezu. Rovina souměrnosti řezu protíná paraboloid v parabole. Průsečnice roviny řezu a roviny souměrnosti řezu je spádová přímka na níž leží hlavní osa elipsy. Společné body paraboloidu (paraboly) a spádové přímky (ve sklopení) jsou vrcholy elipsy řezu. Střed elipsy je středem úsečky ohraničené vrcholy. Dle věty o pravoúhlém průmětu eliptického řezu paraboloidu do roviny kolmé k ose sestrojíme první průmět elipsy (zobrazí se jako kružnice).

Protože je osa paraboloidu kolmá k průmětně, bude celá elipsa řezu viditelná.

Konstrukce (Obr. 27):

1. Φ ; $\Phi(V, F, \alpha)$... paraboloid nemá první obrys
2. σ ; σ ... rovina souměrnosti řezu
3. s ; $s = \rho \cap \sigma$... spádová přímka
4. p ; $p = \Phi \cap \sigma$... meridián v rovině souměrnosti řezu
5. $\{K, L\}$; $\{K, L\} = p \cap s$ ve sklopení ... hlavní vrcholy elipsy
6. S ; S střed úsečky KL ... střed elipsy řezu
7. e ; e ... prvním průmětem bude kružnice se středem v bodě S_1 a poloměrem $|K_1S_1|$



Obr. 27: Příklad 4.6.7.

Příklad 4.6.8 V Mongeově promítání sestrojte parabolický řez rotačního dvojdílného hyperboloidu Φ rovinou ρ . Hyperbola: střed $S = [0; 4; 3]$, hlavní vrchol $A = [0; 4; 5]$, velikost vedlejší poloosy $b = 1,5$, hyperboloid je omezen rovinou π a rovinou $\alpha = (\infty; \infty; 8, 2)$; rovina řezu $\rho = (9; 10; ?)$.

Rozbor:

Zdánlivý obrys dvojdílného hyperboloidu ve druhé průmětně je zároveň hlavním meridiánem — hyperbolou $\mathcal{H}(S, A, b)$. Prvním obrysem jsou hraniční rovnoběžky.

Aby byl řez parabolický, musí se rovina $\rho^\perp$ rovnoběžná s rovinou řezu ρ dotýkat asymptotické kuželové plochy podél povrchové přímky.

Rovina souměrnosti řezu je rovinou souměrnosti hyperboloidu a zároveň rovinou souměrnosti roviny řezu. Rovina souměrnosti protne rovinu řezu ve spádové přímce na níž leží osa paraboly. Spádová přímka protne dvojdílný hyperboloid ve vrcholu paraboly řezu. Osa a vrchol paraboly řezu se do nárysny nezobrazí jako osa a vrchol paraboly.

Rovina změny viditelnosti je rovnoběžná s nárysnou a prochází osou hyperboloidu. Společné body průsečnice roviny řezu s rovinou změny viditelnosti a plochy Φ jsou body změny viditelnosti křivky řezu ve druhé průmětně.

Konstrukce (Obr. 28):

1. $\Phi; \Phi(S, A, b) \dots$ prvním průmětem jsou obrazy hraničních rovnoběžek; druhým průmětem hyperbola
2. $\Omega; \Omega \dots$ asymptotická kuželová plocha
3. $\rho^\perp; \rho^\perp$ se dotýká asymptotické kuželové plochy podél její povrchové přímky
4. $\rho; \rho \parallel \rho^\perp \dots$ rovina řezu
5. $\lambda; (\lambda \perp \pi) \wedge (o \subset \lambda) \dots$ rovina změny viditelnosti v náryse
6. $l; l = \lambda \cap \rho$
7. $\{K\}; \{K\} = \Phi \cap l \dots$ bod změny viditelnosti v náryse

8. σ ; $(\sigma \perp \rho) \wedge (o \subset \sigma)$... rovina souměrnosti řezu
9. s ; $s = \rho \cap \sigma$... spádová přímka
10. $\{R\}$; $\{R\} = \Phi \cap s$ v otočení $\mathcal{O} = (o, \sigma \rightarrow \lambda)$... vrchol paraboly
11. konstrukce dalších bodů řezu a tečen v nich viz. *Příklad 2.2.3*

62

Příklad 4.6.9 V pravoúhlé axonometrii ($XY = 6, YZ = 11, XZ = 11$) sestrojte řez rotačního jednodílného hyperboloidu Φ tečnou rovinou τ procházející bodem T hyperboloidu. Hyperbola: střed $S = [0; 0; 5, 5]$, vedlejší vrchol $C = [0; 0; 2]$, velikost hlavní poloosy $a = 1, 5$ (viz. Příloha 4).

Rozbor:

Zdánlivý obrys jednodílného hyperboloidu je dán průmětem meze vlastního stínu při osvětlení směrem rovnoběžným se směrem promítání.

Tečná rovina je kolmá na normálu hyperboloidu v bodě dotyku. Řezem rotačního jednodílného hyperboloidu tečnou rovinou je dvojice různoběžek procházejících bodem dotyku tečné roviny.

Body změny viditelnosti řezu jsou společnými body přímek řezu a meze vlastního stínu (zdánlivého obrysu).

Konstrukce (Obr. 29):

1. $\Phi; \Phi(S, C, a, T) \dots$ promítací rovinu otočíme kolem axonometrické stopy do axonometrické průmětny a pro přehlednost vysuneme ve směru kolmém na osu z (otočený směr promítání); zdánlivý obrys tělesa sestrojíme pomocí meze vlastního stínu vrženého na rotační těleso směrem promítání
2. $W; W \dots$ vrchol normálové kuželové plochy příslušný rovnoběžce procházející bodem dotyku T
3. $n; n = \leftrightarrow TW \dots$ normála plochy Φ
4. $\tau; (\tau \perp n) \wedge (T \in \tau) \dots$ rovina kolmá k normále n procházející bodem T (tečná rovina s bodem dotyku T)

$$\lambda; (n \in \lambda) \wedge (\lambda \perp \pi)$$

$$\lambda_{r^{ax}}; \lambda_{r^{ax}} = \lambda \cap \triangle XYZ$$

$$p^\alpha; (p^\alpha \perp \lambda_{r^{ax}}) \wedge (O \in p^\alpha)$$

$$1; 1 = p^\alpha \cap XY$$

$${}^\alpha r^{ax}; ({}^\alpha r^{ax} \perp n^a) \wedge (1 \in {}^\alpha r^{ax})$$

$$2; 2 = {}^\alpha r^{ax} \cap XZ$$

$$n^\alpha; n^\alpha = \leftrightarrow 2O$$

$$\tau; (\tau \parallel \alpha) \wedge (T \in \tau)$$

5. $\{U, V\}; \{U, V\} = \Phi \cap p^\tau \dots$ průsečíky půdorysné stopy roviny řezu a hyperboloidu

6. $u; u = \leftrightarrow UT \dots$ přímky řezu

$$v; v = \leftrightarrow VT$$

7. $\{K\}; \{K\}$ průsečík přímek řezu $\{u, v\}$ s mezí vlastního stínu $\dots$ body změny viditelnosti

Příklad 4.6.10 V pravoúhlé axonometrii ($XY = 6, YZ = 11, XZ = 11$) sestrojte řez rotačního jednodílného hyperboloidu Φ asymptotickou rovinou ρ procházející přímkou b . Hyperbola: střed $S = [0; 0; 5, 5]$, vedlejší vrchol $C = [0; 0; 2]$, velikost hlavní poloosy $a = 1, 5$ (viz. Příloha 5).

Rozbor:

Zdánlivý obrys jednodílného hyperboloidu je dán mezí vlastního stínu při osvětlení směrem rovnoběžným se směrem promítání.

Aby byla rovina řezu ρ asymptotická, musí být přímka b povrchovou přímkou asymptotické kuželové plochy jednodílného hyperboloidu. Rovina řezu obsahuje přímku b a zároveň je tečnou rovinou asymptotické kuželové plochy. Asymptotická rovina protne jednodílný hyperboloid ve dvojici přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou b .

Body změny viditelnosti řezu jsou společnými body rovnoběžných přímek řezu a zdánlivého obrysu.

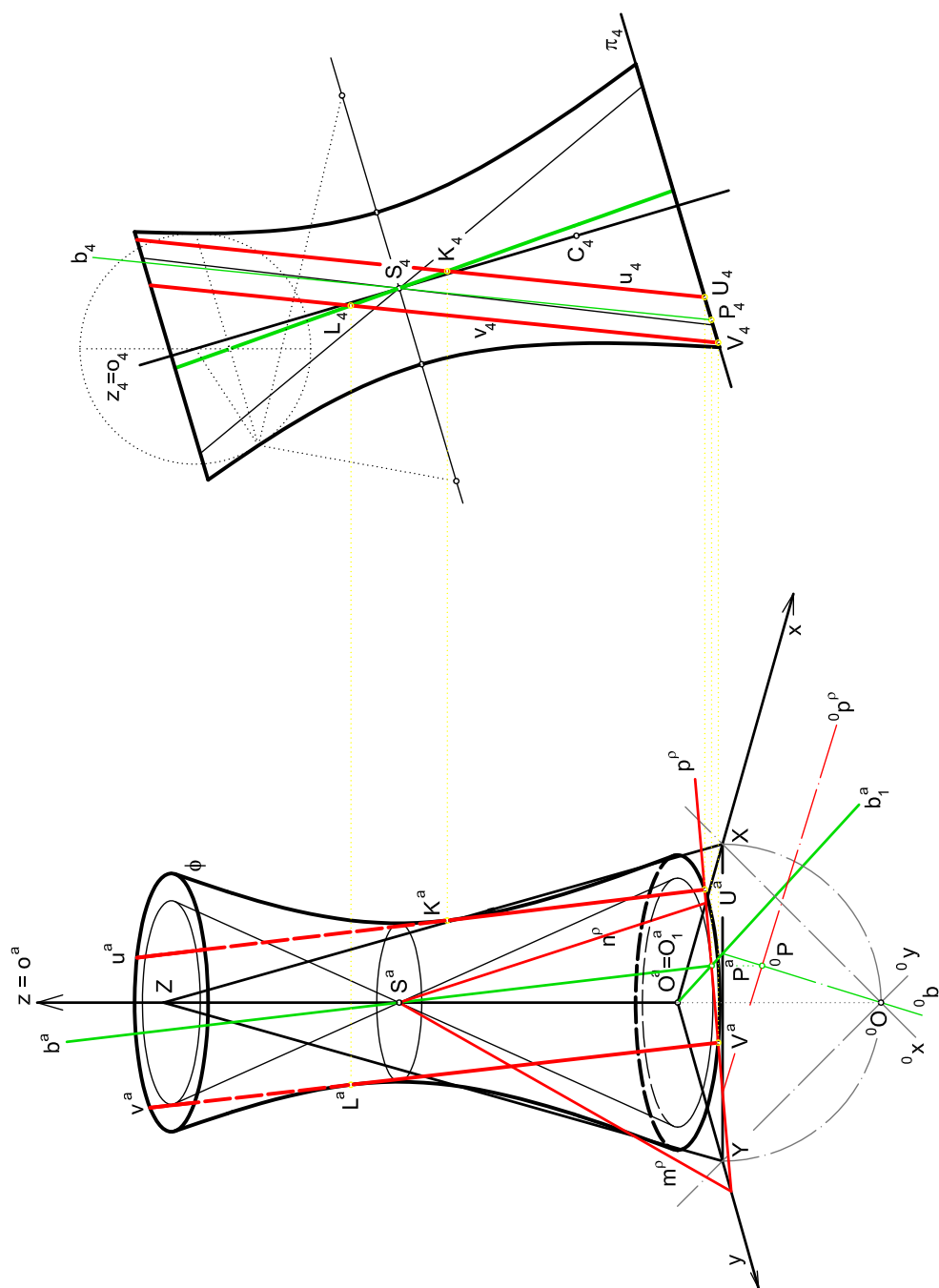
Konstrukce (Obr. 30):

1. $\Phi; \Phi(S, C, a) \dots$ promítací rovinu otočíme kolem axonometrické stopy do axonometrické průmětny a pro přehlednost vysuneme ve směru kolmém na osu z (otočený směr promítání); zdánlivý obrys tělesa sestrojíme pomocí meze vlastního stínu vrženého na rotační těleso směrem promítání
2. $P; P = \pi \cap b \dots$ půdorysný stopník přímky b
3. p^ρ ; půdorysná stopa p^ρ roviny řezu ρ je tečnou rovnoběžkové kružnice asymptotické kuželové plochy v rovině π (v otočení $\mathcal{O} = (\leftrightarrow XY, \mathcal{O} \rightarrow O^0)$)
4. $\rho; \rho = p^\rho S \dots$ rovina řezu
5. $\{U, V\}; \{U, V\} = \Phi \cap p^\rho \dots$ průsečíky půdorysné stopy roviny řezu a hyperboloidu

6. $u; (U \in u) \wedge (u \parallel b) \dots$ přímky řezu

$v; (V \in v) \wedge (v \parallel b)$

7. $\{K, L\}; \{K, L\}$ průsečíky přímek řezu $\{u, v\}$ s mezí vlastního stínu $\dots$ body změny viditelnosti



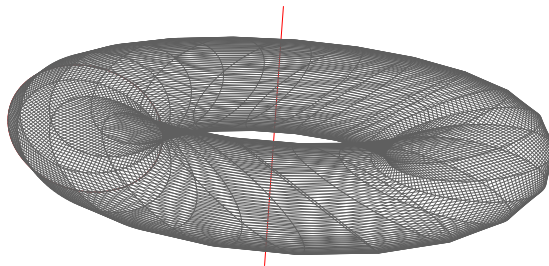
Obr. 30: Příklad 4.6.10.

5 Anuloidy

Speciálním případem rotačních ploch jsou anuloidy.

Definice 5.0.1 *Kružnici, která vznikne rotací středu tvořící kružnice kolem osy, nazveme středovou kružnicí [14].*

Definice 5.0.2 *Rotační plocha, která vznikne rotací kružnice kolem osy neležící v téže rovině, se nazývá globoid [7].*



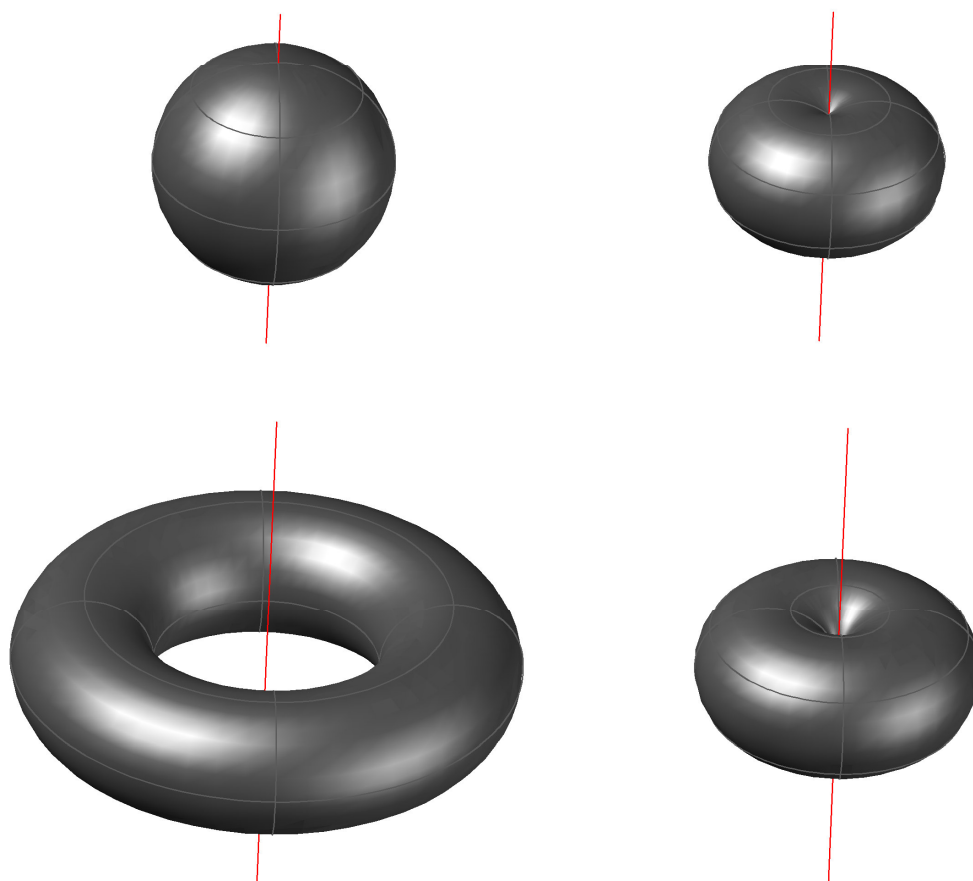
Obr. 31: Globoid.

Definice 5.0.3 *Rotační plocha, která vznikne rotací kružnice kolem osy ležící v téže rovině a neprocházející středem, se nazývá anuloid [7].*

Prochází-li osa rotace středem tvořící kružnice vzniká kulová plocha (viz. 3.3 *Elipsoid, kulová plocha*)

Anuloidy dělíme podle polohy osy a tvořící křivky [14]:

- melonoid — osa rotace je sečnou tvořící kružnice a neprochází jejím středem
- axoid — osa rotace je tečnou tvořící kružnice
- anuloid, torus, kruhový prstenec — osa rotace a tvořící kružnice nemají společné žádné body



*Obr. 32: a) kulová plocha
c) anuloid*

*b) melonoid
d) axoid.*

„Zdánlivý obrys anuloidu s osou rotace o v obecné poloze v pravoúhlém promítání je ekvidistanta elipsy, která je průmětem kružnice středů kulových ploch. Tato křivka (tzv. toroida) je osmého stupně a má dvě větve: vnější větev má tvar oválu (ale není to elipsa), vnitřní větev má až čtyři body vratu a dva dvojnásobné body. Nemusí ovšem mít žádné body vratu, a pak nemá ani dvojnásobné body, popř. má jen dva body vratu a nemá dvojnásobné body.“

(Drábek a spol., 1979, s. 133-134)

Anuloid rovněž získáme jako obalovou plochu kulových ploch s konstantním poloměrem a středem pohybujícím se po dané kružnici [7]. Toho využijeme při hledání meze vlastního stínu.

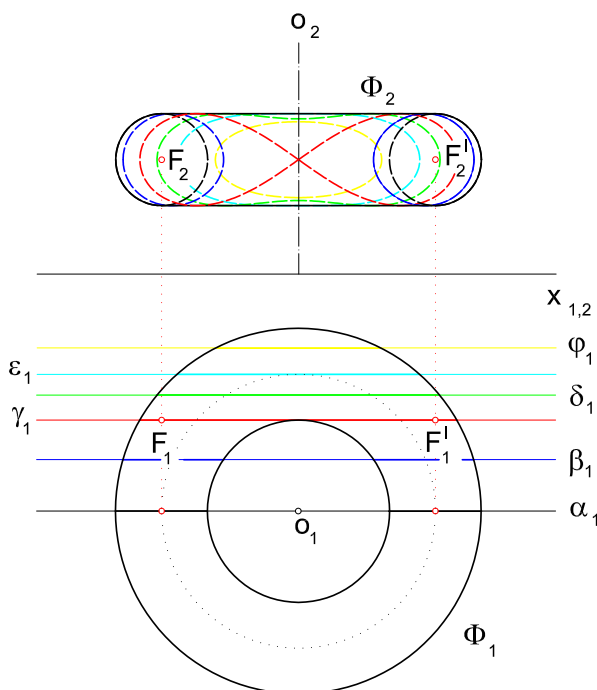
6 Řezy anuloidů

6.1 Spirické křivky Perseovy

Uvažujeme-li řez rovinou rovnoběžnou s osou rotace, průnikovou křivkou bude tzv. spirická křivka Perseova. Tyto křivky řezu mají buď jednu nebo dvě větve.

Speciálním typem spirických křivek jsou Cassiniho křivky. Jedná se o řez rovinou rovnoběžnou s osou rotace ve vzdálenosti poloměru tvořící kružnice. Body těchto křivek mají od dvou pevných bodů konstantní součin vzdáleností roven $2Rr$. Kde r je poloměr tvořící kružnice a R je poloměr středové kružnice. Pevnými body rozumíme ohniska F, F' , která získáme jako průměty středů tvořící kružnice rovnoběžné s rovinou řezu do roviny řezu.

Cassiniho křivka, pro kterou současně platí, že rovina řezu je tečnou rovinou hrdelní kružnice anuloidu ($r = R/2$), se nazývá Bernoulliho lemniskáta.



Obr. 33: Spirické křivky Perseovy (červeně Bernoulliho lemniskáta).

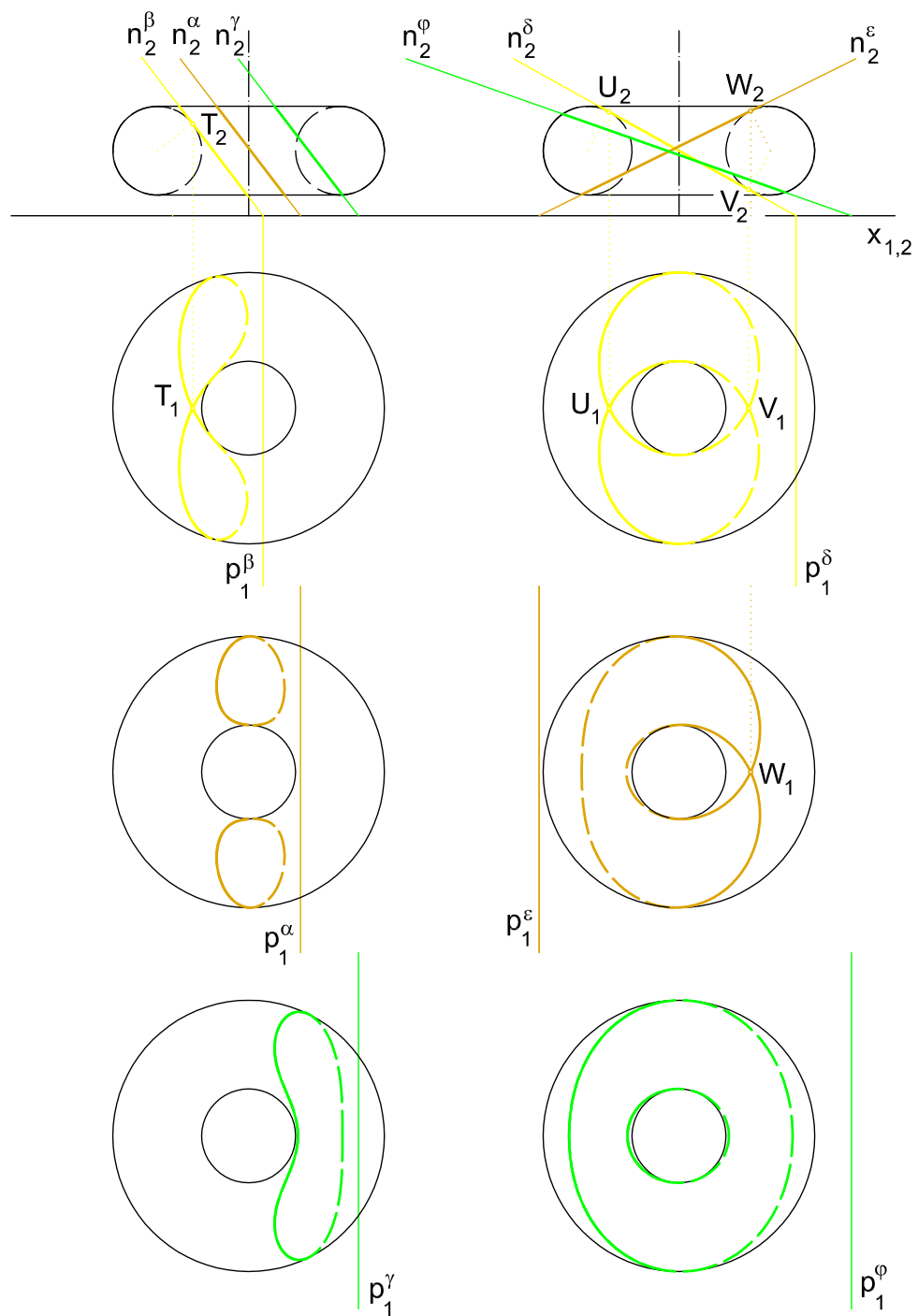
6.2 Obecné křivky řezu

Křivka řezu anuloidu obecnou rovinou má buď jednu větev nebo se rozpadá na dvě části.

Pro jednoduchost uvažujme rovinu řezu kolmou k nárysně. Podle počtu společných bodů roviny řezu a hlavního meridiánu anuloidu dostáváme přehled zvláštních případů křivek řezu (*Obr. 34*) [9]:

- rovina řezu α nemá s hlavním meridiánem žádný společný bod — křivka řezu bude mít dvě větve, nebude mít dvojnásobné body
- rovina řezu β se dotýká hlavního meridiánu právě v jednom bodě T — křivka řezu bude mít jednu větev a právě jeden dvojnásobný bod (T)
- rovina řezu γ protíná hlavní meridián ve dvou bodech — křivka řezu bude mít jednu větev a nebude mít dvojnásobné body
- rovina řezu δ se dotýká hlavního meridiánu ve dvou bodech (U, V) — křivka řezu se rozpadne na dvě části (loxodromické kružnice) a bude mít dva dvojnásobné body (U, V)
- rovina řezu ϵ se dotýká hlavního meridiánu právě v jednom bodě (W) a má s ním společné dva průsečíky — křivka řezu má jednu větev a právě jeden dvojnásobný bod (W)
- rovina řezu φ má čtyři průsečíky s hlavním meridiánem — křivka řezu se rozpadne na dvě části a nemá dvojnásobné body

Řezem anuloidu může být rovněž jednobodová množina (jedná se o tečnou rovinu) a nebo množina prázdná.



Obr. 34: Řezy anuloidů obecnými rovinami.

6.3 Řešené příklady

Příklad 6.3.1 V Mongeově promítání sestrojte řez anuloidu Φ rovinou ρ . Anuloid: střed $S = [0; 8; 3]$, střed tvořící kružnice $O = [3; 8; 3]$, poloměr tvořící kružnice $l = 1$; rovina řezu $\rho = (6; 11, 5; 6)$.

Rozbor:

Prvním průmětem anuloidu je mezikružší sestávající z průmětu hrdla a rovníku. Druhý průmět je tvořen průmětem kráterových rovnoběžek a hlavního meridiánu.

Křivku řezu sestrojíme bodově.

Rovinu souměrnosti křivky řezu sestrojíme jako rovinu souměrnosti anuloidu a roviny řezu. Dvojnásobné body řezu jsou body dotyku roviny řezu a anuloidu (určíme je jako body dotyku hlavního meridiánu a roviny řezu otočené do polohy kolmé k nárysně).

K sestrojení dalších bodů řezu využijeme vhodných rovin rovnoběžných s průdorysnou, které protnou anuloid v kružnici a rovinu řezu v přímce. Společné body kružnice a průsečnice jsou body řezu.

Body změny viditelnosti v průdorysně leží v rovině rovníku a hrdla, body změny viditelnosti v náryse v rovinách kráterových rovnoběžek.

Konstrukce (Obr. 35):

1. $\Phi; \Phi(S, O, l) \dots$ první průmět je tvořen průmětem mezikružší hrdla a rovníku (a, r) , druhý průmět průmětem hrdelních kružnic (e, d) a hlavním meridiánem
2. $\sigma; (\sigma \perp \rho) \wedge (o \subset \sigma) \dots$ rovina souměrnosti křivky řezu
3. $s; s = \rho \cap \sigma \dots$ spádová přímka
4. ${}^0\rho; \rho$ v otočení $\mathcal{O} = (o, s \rightarrow ({}^0s \parallel \nu)) \dots$ rovina řezu není tečnou rovinou anuloidu a zároveň nemá společné body s hlavním meridiánem — řez bude mít dvě větve a nebude mít dvojnásobné body
5. $\alpha; \{a, r\} \subset \alpha$
 $h^\rho; h^\rho = \rho \cap \alpha$

$\{A, A^{\downarrow}, R, R^{\downarrow}\}; \{A, A^{\downarrow}, R, R^{\downarrow}\} = \{a, r\} \cap h^{\rho} \dots$ body změny viditelnosti v půdoryse

6. $\beta; e \subset \beta$

$$*h^{\rho}; *h^{\rho} = \rho \cap \beta$$

$\{E, E^{\downarrow}\}; \{E, E^{\downarrow}\} = *h^{\rho} \cap e \dots$ body změny viditelnosti v náryse

$\gamma; d \subset \gamma$

$$**h^{\rho}; **h^{\rho} = \rho \cap \gamma$$

$\{D, D^{\downarrow}\}; \{D, D^{\downarrow}\} = **h^{\rho} \cap d \dots$ body změny viditelnosti v náryse

7. konstrukce dalších bodů řezu a tečen v nich viz. *Příklad 2.2.3*

Příklad 6.3.2 V kótovaném promítání sestrojte řez anuloidu Φ tečnou rovinou ρ .
Anuloid: střed $S = [0; 0; 0]$, poloměr středové kružnice $R = 4$, poloměr tvořící kružnice $r = 1$; rovina rovnoběžná s rovinou řezu α je určena body $A = [6; 2; 0]$, $B = [6; -2; 0]$ a odchylka roviny α od půdorysny π je 11° .

Rozbor:

Prvním průmětem anuloidu je mezikružší sestávající z průmětu hrdla a rovníku. Rovina α je určena dvěma body a odchylkou od půdorysny (2 řešení).

Rovina řezu je rovnoběžná s rovinou α a zároveň je tečnou rovinou anuloidu Φ (4 řešení). Rovinu ρ sestrojíme v otočení.

Křivku řezu sestrojíme bodově.

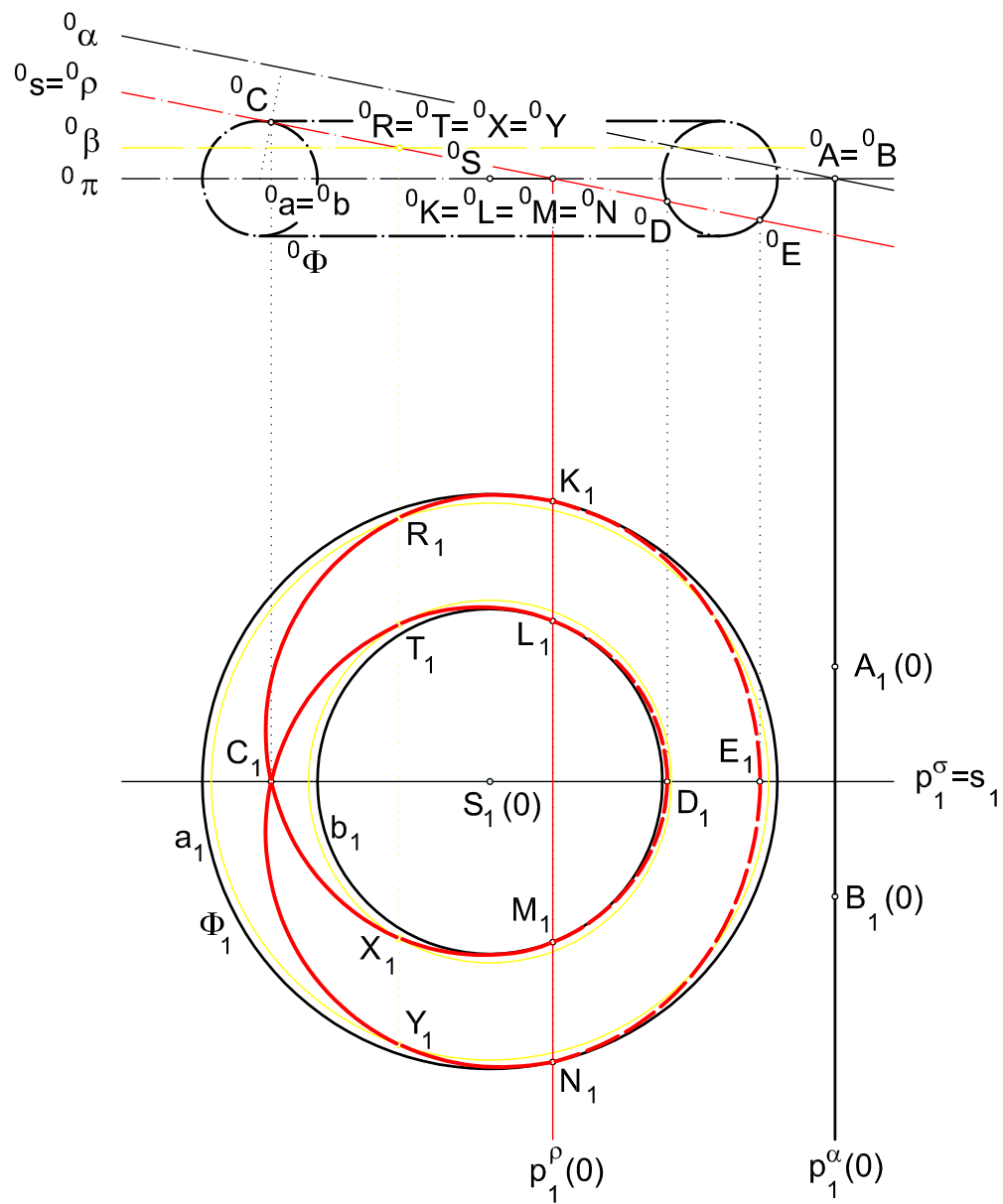
Tečná rovina se dotýká anuloidu v dvojnásobném bodě řezu a protíná hlavní meridián ve dvojici dalších bodů.

K sestrojení dalších bodů řezu využijeme vhodných rovin rovnoběžných s půdorysnou, které protnou anuloid v kružnici a rovinu řezu v přímce. Společné body kružnice a průsečnice jsou body řezu.

Body změny viditelnosti leží v rovině rovníku a hrdla.

Konstrukce (Obr. 36):

1. $\Phi; \Phi(S, R, r) \dots$ první průmět je tvořen průmětem mezikružší hrdla a a rovníku b
2. $\rho; (\rho \parallel \alpha) \dots$ rovina řezu rovnoběžná s rovinou α a zároveň tečná rovina anuloidu (4 řešení)
3. $\sigma; (\sigma \perp \rho) \wedge (S \in \sigma) \dots$ rovina souměrnosti řezu
4. $s; s = \rho \cap \sigma \dots$ spádová přímka
5. $\{C, D, E\}; \{C, D, E\} = \Phi \cap s \dots \{C\}$ dvojnásobný bod řezu, $\{D, E\}$ body křivky řezu
6. $\{K, L, M, N\}; \{K, L, M, N\} = \{a, b\} \cap \rho \dots$ body změny viditelnosti
7. $\{R, T, X, Y\};$ konstrukce dalších bodů řezu a tečen v nich viz. *Příklad 2.2.3*



Obr. 36: Příklad 6.3.2.

Závěr

Záměrem diplomové práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů na téma Řezy rotačních těles v projekcích.

Seznámili jsme se se vznikem rotačních ploch. Popsali jejich prvky a základní vlastnosti vztahující se k řezům rovinami. Ukázali jsme si univerzální způsob sestrojení křivky řezu rotační plochy.

Více jsme se věnovali speciálním rotačním plochám — kvadrikám. Ukázali jsme, že řezem bude vždy kuželosečka. Při konstrukci křivky řezu jsme využili ohniskových vlastností a tím postup zjednodušili.

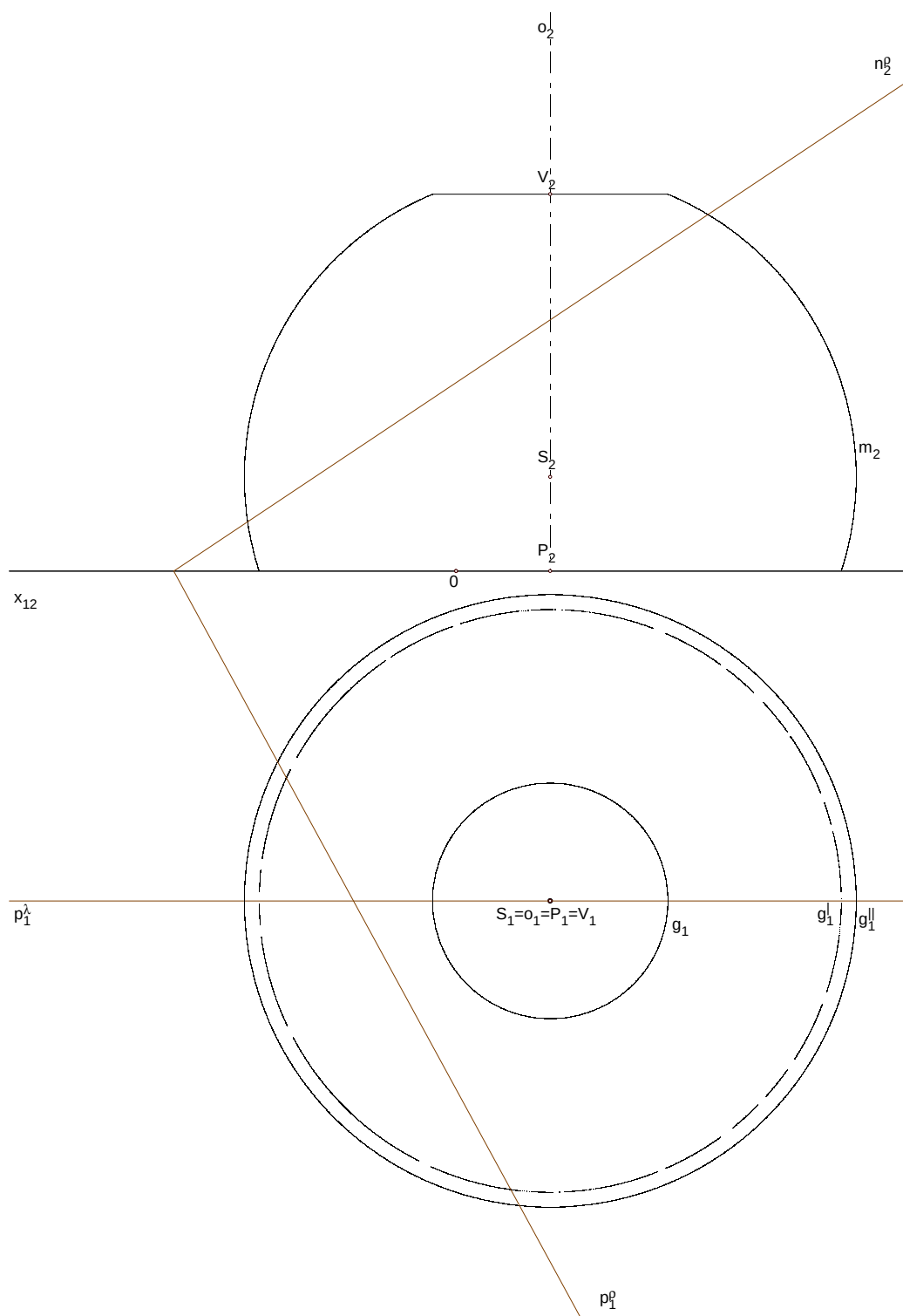
Dalšími speciálními rotačními plochami byly anuloidy. Rozdělili jsme je podle vzájemné polohy osy rotace a tvořící kružnice. Speciální kategorii křivek řezů anuloidů tvoří spirické křivky Perseovy, mezi které patří Bernoulliho lemniskáta.

Příklady byly zadávány v kótovaném promítání, Mongeově zobrazení, pravoúhlé axonometrii a kosoúhlém promítání.

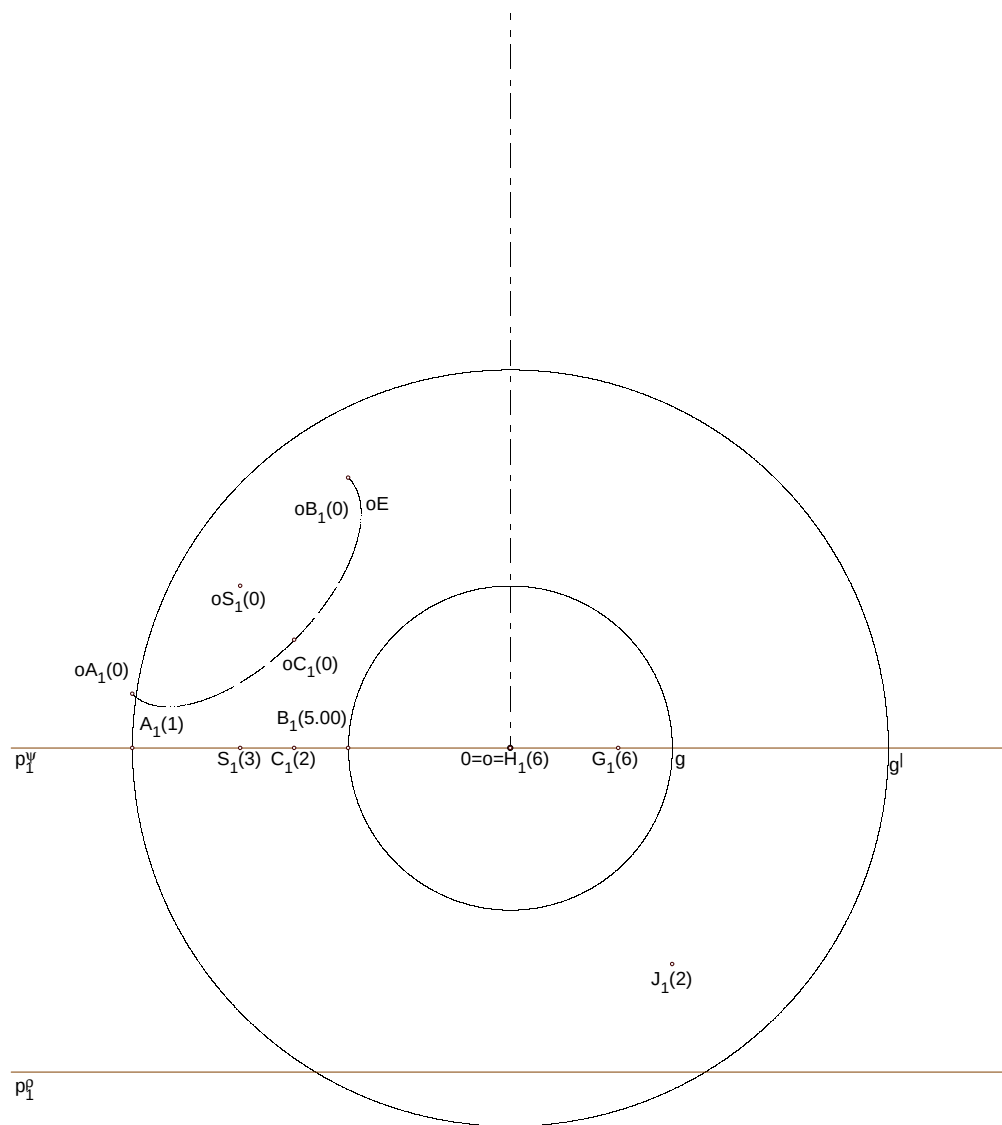
Z kapacitních důvodů diplomové práce uvádím další zajímavá rozšíření alespoň v bodech:

- řezy rotačních ploch ve středovém promítání
- souvislosti mezi řezy a osvětlením některých rotačních ploch
- průniky přímky s rotační plochou
- průniky rotačních ploch
- aplikace řezů rotačních ploch ve stavebnictví, nábytkářském průmyslu
- uplatnění programu Deskriptivní geometrie 1.32 při výuce deskriptivní geometrie

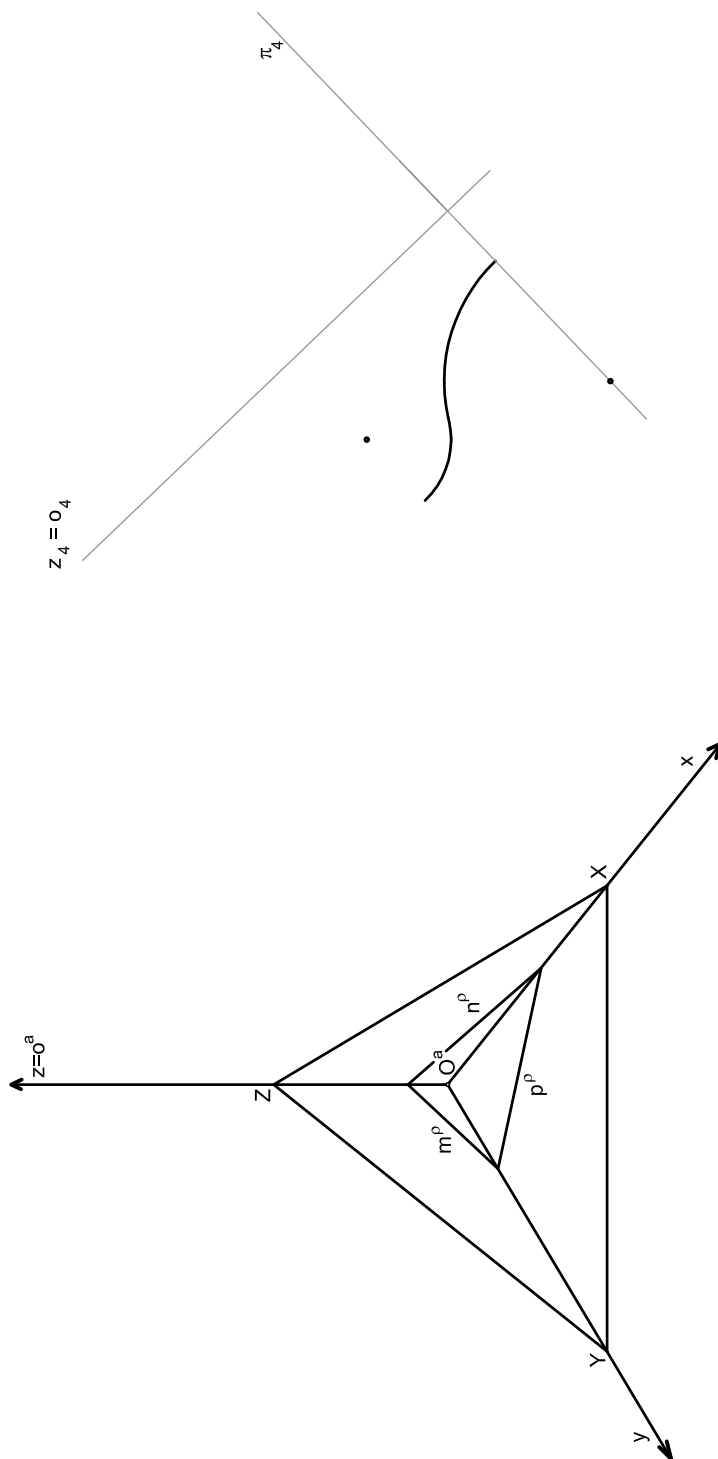
Příloha 1



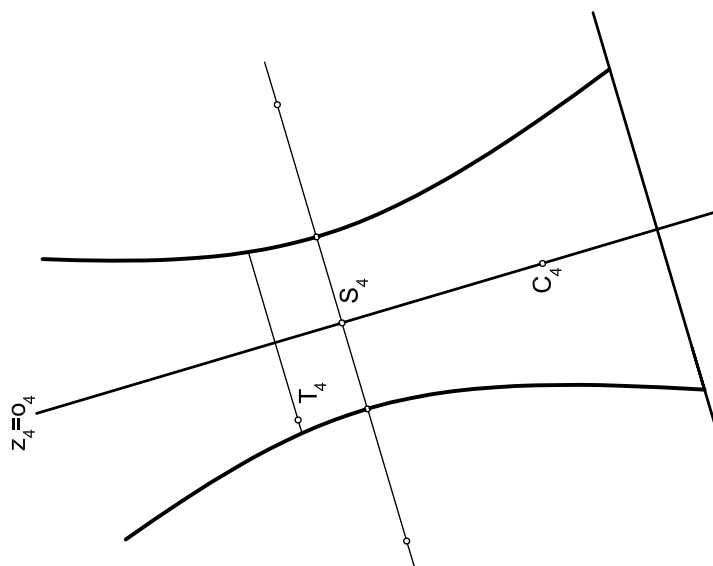
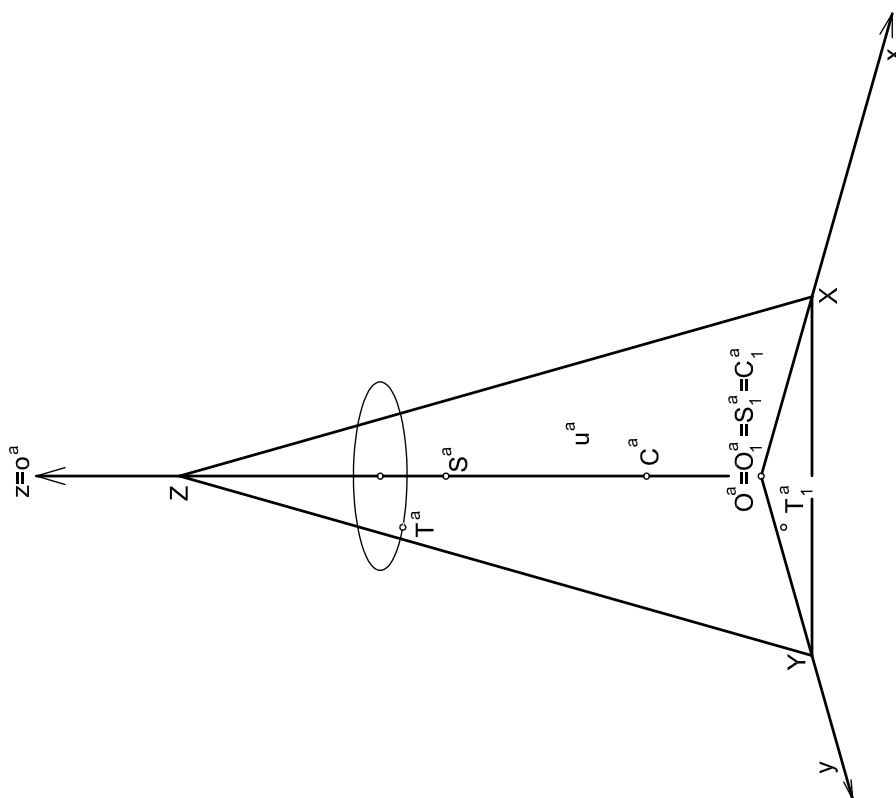
Příloha 2



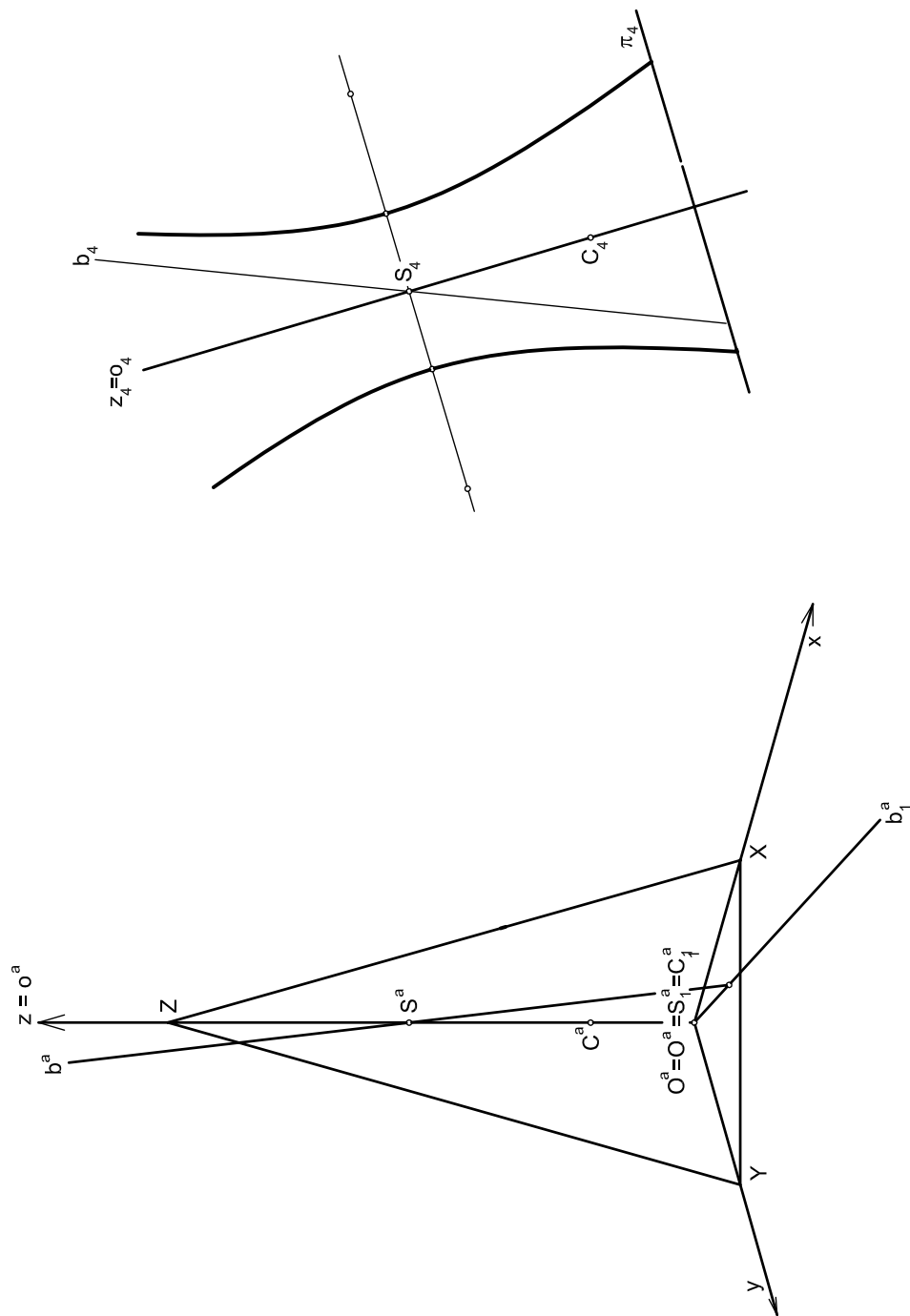
Příloha 3



Příloha 4



Příloha 5



Literatura

- [1] Bureš, J., Burešová, J.: *Projektivní geometrie I*. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1983, 1. vyd.
- [2] Doležal, M., Poláček, J.: *Základy deskriptivní a konstruktivní geometrie: Díl V: Křivky a plochy technické praxe*. Ostrava: VŠB — Technická univerzita Ostrava, 2008, 3. vyd.
- [3] Doležal, M., Poláček, J., Tůma, M.: *Sbírka řešených příkladů z deskriptivní a konstruktivní geometrie. Díl 5, Rotační a šroubové plochy*. Ostrava: VŠB — Technická univerzita Ostrava, 2003, 2. vyd.
- [4] Drábek, K., Harant, Fr., Setzer, O.: *Deskriptivní geometrie. II*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, n. p., 1979, 1. vyd.
- [5] Harant, M. a kol.: *Deskriptivní geometrie část I. pro II. ročník SVVŠ*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1965, 1. vyd.
- [6] Havlíček, K.: *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*. Praha: SNTL 1956
- [7] Kadeřávek, Fr., Klíma, J., Kounovský, J.: *Deskriptivní geometrie. II*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, n. p., 1954, 1. vyd.
- [8] Macková, B. a kol.: *Deskriptívna geometria v príkladoch*. Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1964, 2. vyd.
- [9] Machala, F.: *Rotační plochy*. Olomouc: Rektorát Univerzity Palackého v Olomouci, 1985, 1. vyd.
- [10] Urban, A.: *Deskriptivní geometrie I*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, n. p., 1978, 2. vyd.
- [11] Urban, A.: *Deskriptivní geometrie II*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, n. p., 1967, 1. vyd.
- [12] Juklová, L.: *I. Obecné rotační plochy* [online]. [cit. 2010-24-07]. <<http://kag.upol.cz/juklova/index.html>>

- [13] Juklová, L.: *II. Rotační kvadriky* [online]. [cit. 2010-24-07].
<<http://kag.upol.cz/juklova/index.html>>
- [14] EVLM: *Anuloid* [online]. [cit. 2010-24-07].
<<http://www.evln.stuba.sk/~szarkova/student/KG/anuloid.pdf>>