

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Pravděpodobnost a diskrétní systémy



Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Rostislav Vodák, Ph.D.
Rok odevzdání: 2013

Vypracoval:
Bc. Zuzana Křivánková
AME, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením pana RNDr. Rostislava Vodáka, Ph.D. a v seznamu literatury jsem uvedla všechny použité zdroje.

V Olomouci dne 2. prosince 2013

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat především svému vedoucímu diplomové práce, panu RNDr. Rostislavu Vodákovi, Ph.D., za odborné vedení, cenné rady a čas, který mi věnoval. Dále chci poděkovat Centru dopravního výzkumu, v. v. i. za poskytnutí dat silničních sítí v rámci projektu TRISK – VG20102015057. V neposlední řadě patří díky mé rodině a přátelům za to, že mě během studia podporovali a byli mi oporou.

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 4 |
| 1 Základní pojmy z teorie grafů | 6 |
| 1.1 Graf a druhy grafů | 6 |
| 1.2 Podgraf, cesta, souvislost | 8 |
| 2 Použité metody a algoritmy | 12 |
| 2.1 Zadání grafu do počítače | 12 |
| 2.2 Komponenty souvislosti | 14 |
| 2.3 Hledání nejkratší cesty | 15 |
| 2.4 Metoda Monte Carlo | 18 |
| 3 Míry robustnosti sítě | 20 |
| 3.1 Metoda komponent souvislosti | 20 |
| 3.2 Propojenost grafu a rozdělení délek nejkratších cest | 21 |
| 3.3 Využití metody Monte Carlo | 23 |
| 4 Modelování robustnosti silniční sítě | 26 |
| 4.1 Popis dat | 28 |
| 4.2 Robustnost silniční sítě a její zlepšení | 29 |
| 5 Výsledky | 33 |
| 5.1 Porovnání robustnosti sítě Karlovarského a Zlínského kraje | 33 |
| 5.2 Porovnání robustnosti částí sítě Zlínského kraje | 41 |
| 5.3 Zvyšování robustnosti částí sítě Zlínského kraje metodou komponent | 48 |
| 5.3.1 Zlínský kraj, část 1 | 48 |
| 5.3.2 Zlínský kraj, část 2 | 50 |
| 5.4 Zvyšování robustnosti částí sítě Zlínského kraje metodou propoje- | |
| nosti grafu | 52 |
| 5.4.1 Zlínský kraj, část 1 | 53 |
| 5.4.2 Zlínský kraj, část 2 | 56 |
| 5.5 Zvyšování robustnosti částí sítě Zlínského kraje metodou rozdělení | |
| délek nejkratších cest | 60 |
| 5.5.1 Zlínský kraj, část 1 | 60 |
| 5.5.2 Zlínský kraj, část 2 | 66 |
| Závěr | 72 |
| Přílohy | 74 |
| Literatura | 79 |

Úvod

Téma mé diplomové práce – Pravděpodobnost a diskrétní systémy – může znít zpočátku záhadně a čtenáři může připadat jako velká neznámá. Co jsou to diskrétní systémy? A jak souvisí s pravděpodobností? Pokud se čtenář nenechá odradit tajuplným názvem, dozví se, že problematika není tak nejasná, jak možná na první pohled vypadá.

Diskrétním systémem, jak ho chápeme v této práci, může být v podstatě cokoliv, co se skládá z nějakých částí nebo objektů. Nemáme tedy na mysli diskrétnost z hlediska času, ale z hlediska prostoru. Diskrétní systém si lze například představit jako graf složený z bodů, kdy jednotlivé body představují ony diskrétní objekty, a společně se spojnici těchto bodů tvoří ucelený systém. Přerušením některých spojníc v tomto systému, kdy se systém rozpadne na několik částí a některé body tak ztratí propojení s jinými, získáme opět diskrétní systém, složený z těchto jednotlivých částí.

Souvislost s pravděpodobností se tedy rovnou nabízí: na pravděpodobnosti může záviset, zda se přeruší to či ono propojení, jaký bude celkový počet přerušených spojníc, na jaký počet částí se systém rozpadne, mezi kolika body ztratíme spojení, atd.

Aplikace těchto úvah je poměrně široká – na sítích všeho druhu, jež nás dennodenně obklopují. Život si nedovedeme představit bez elektrické energie, která je k nám dodávána prostřednictvím sítě elektrického vedení, bez sítě silnic a železnic, po kterých se dopravujeme do zaměstnání a do škol, bez internetu, který je pro někoho neodmyslitelným zdrojem informací či zábavy.

V této práci se zaměříme právě na sítě silniční. Naším cílem bude měřit a zlepšovat robustnost reálných silničních sítí, tedy to, jak jsou sítě odolné proti náhodným událostem, které mohou vést k prodloužení spojení mezi jednotlivými uzly nebo přímo k rozpadu sítě na vzájemně nepropojené části. K měření robustnosti sítí použijeme tři různé metody a zvyšovat ji budeme přidáváním nových propojení mezi dopravními uzly, tedy stavěním nových silnic. Všechny použité

metody lze aplikovat i na jiné druhy sítí.

Téma jsem si vybrala právě z důvodu jeho zajímavé a praktické aplikace a možnosti pracovat s reálnými daty opravdových silničních sítí.

Práce je rozdělena do pěti kapitol. V první kapitole se čtenář seznámí se základními pojmy teorie grafů, které jsou nezbytné k pochopení celého textu. Vysvětlíme, co přesně rozumíme pojmem graf, jaké jsou druhy grafů a jaké vlastnosti a charakteristiky můžeme u grafů zkoumat.

Druhá kapitola je věnována základním metodám a algoritmům, které budeme pro výpočty potřebovat. Jelikož výpočty budou probíhat na počítači, řekneme si, jak graf do počítače zadat. Následně popíšeme některé základní algoritmy na grafech, jako je určení komponent souvislosti a výpočet délky nejkratší cesty. Využijeme rovněž metodu Monte Carlo, která je založena na teorii pravděpodobnosti a matematické statistiky.

Ve třetí kapitole představíme metody, kterými budeme měřit robustnost sítí. Jedna z metod je založená na komponentách souvislosti, druhá na propojenosti grafu a třetí na délkách nejkratších cest. Ukážeme, jak k výpočtu měř robustnosti využít metodu Monte Carlo.

Ve čtvrté kapitole blíže vysvětlíme souvislost grafů a silničních sítí. Jsou zde představena reálná data silničních sítí, na kterých provádíme výpočty. Podkapitola s názvem „Robustnost silniční sítě a její zlepšení“ podává detailnější popisy jednotlivých metod a algoritmů.

Výsledky výpočtů jsou prezentovány v poslední, páté kapitole.

Všechny algoritmy jsou naprogramovány v programu MathWorks MATLAB R2010b a ve starších verzích tohoto programu nemusí fungovat. Programy jsou k práci přiloženy na CD, včetně použitých dat silničních sítí. Základní popis všech použitých programů je k nalezení v příloze této práce.

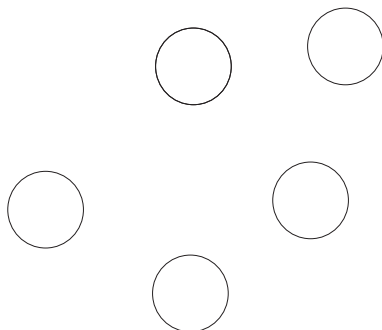
1 Základní pojmy z teorie grafů

V první kapitole se seznámíme se základními pojmy z teorie grafů. Vyslovíme definici grafu, jak jej chápeme v této práci, ukážeme si různé druhy grafů a vysvětlíme jejich vlastnosti. Vysvětlované pojmy budeme pro lepší názornost a snadnější pochopení demonstrovat na obrázcích. Čerpat budeme z knih [1] – [3].

1.1 Graf a druhy grafů

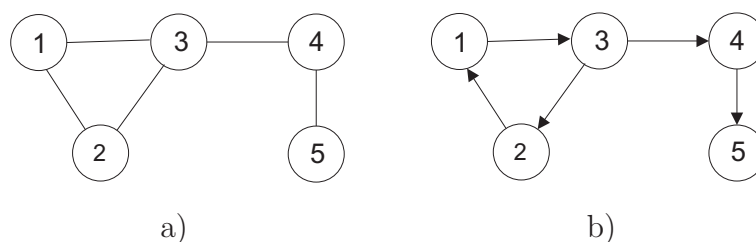
Grafem G rozumíme uspořádanou dvojici (V, E) , kde V je nějaká neprázdná množina prvků a E je množina dvoubodových podmnožin množiny V . Prvky množiny V se nazývají *vrcholy* nebo také *uzly* grafu G a prvky množiny E *hrany* grafu G . Píšeme $G = (V, E)$. Množinu vrcholů nějakého známého grafu G můžeme označit $V(G)$, množinu hran $E(G)$. Pro množinu hran platí $E \subseteq \binom{V}{2}$, kde kombinační číslo $\binom{V}{2}$ značí množinu všech dvouprvkových podmnožin množiny V .

Rozlišujeme několik základních druhů grafů. Jestliže je počet vrcholů grafu konečný, mluvíme o *konečném grafu*. V opačném případě hovoříme o *nekonečném grafu*. Pro úplnost připouštějí někteří autoři i *prázdný graf*, u něhož je prázdná jak množina vrcholů, tak množina hran. Protože $V = \emptyset$ a $E = \emptyset$, označíme prázdný graf $G = (\emptyset, \emptyset)$ nebo též $G = \emptyset$. Definován je také *nulový graf*, který má neprázdnou množinu vrcholů, ale prázdnou množinu hran, $G = (V, \emptyset)$. Někteří autoři používají název *diskrétní graf*, viz obrázek 1.



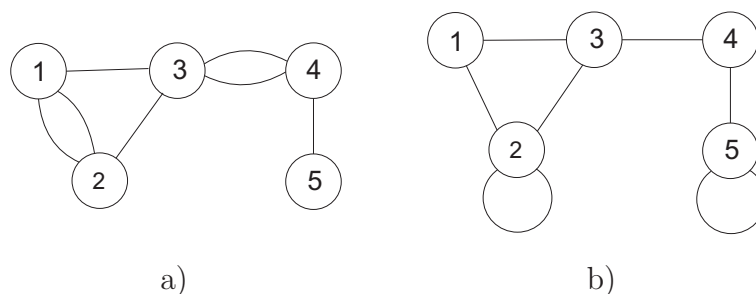
Obr. 1: Diskrétní graf

Dosud jsme hovořili o obyčejném nebo také *neorientovaném grafu*, protože jsme hranám nepřidali žádný směr a lze je tedy chápat jako obousměrné. Jsou-li hrany v grafu představovány uspořádanými dvojicemi vrcholů, jinak řečeno záleží-li na pořadí, ve kterém jsou vrcholy uvedeny, pak hovoříme o *orientovaném grafu*. Hrany v takovém grafu mají přiřazenu orientaci, tedy z kterého do kterého vrcholu vedou, což lze graficky vyznačit šipkou u každé hrany. Neorientovaný graf lze v případě potřeby nahradit orientovaným grafem se stejnou množinou vrcholů, v němž každou neorientovanou hranu nahradíme dvěma orientovanými hranami s opačnou orientací. Rozdíl mezi neorientovaným a orientovaným grafem je patrný na následujícím obrázku.



Obr. 2: a) Neorientovaný graf, b) Orientovaný graf

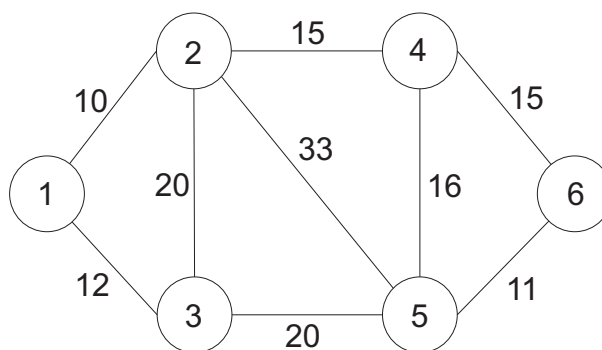
Existuje-li v grafu G mezi dvěma vrcholy v_i a v_j více než jedna neorientovaná hrana, nazveme ho *multigrafem*. Hranám (v, v) se říká *smyčky* a grafy obsahující smyčky pak nazýváme *pseudografy*. S pseudografy ani multigrafy se sice v této práci nesetkáme, ukažme si ale jejich příklady na obrázku 3.



Obr. 3: a) Multigraf, b) Pseudograf

Důležité jsou pro nás *grafy hranově ohodnocené*, v nichž je každé hraně přiřazeno tzv. *ohodnocení*, což může být nejjednodušeji celé číslo, ale také číslo reálné, dvojice čísel apod. Pokud nemůže dojít k omylu, nazýváme takový graf někdy pouze *ohodnoceným* grafem, viz obrázek 4. Na graf, který není ohodnocený, se dá pohlížet jako na ohodnocený graf, ve kterém má každá hrana ohodnocení rovno jedné. Například v modelu silniční sítě je nejčastějším ohodnocením hran délka silnice v metrech nebo kilometrech. V případě autobusových spojů nás však bude zajímat spíše ohodnocení v podobě dvojice čísel udávajících dobu jízdy autobusu v minutách a cenu jízdného v korunách.

Jestliže jsou určité hodnoty přiřazovány vrcholům grafu, nazýváme takový graf *vrcholově ohodnocený*. Příkladem ohodnocení vrcholů může být čas, který stráví vlak ve stanici, v minutách, nebo počet obyvatel měst silniční sítě. Setkat se můžeme i s grafy, které mají ohodnocené jak hrany, tak vrcholy. Může jím být například mapka pěší túry, kde vrcholy, představující různé zajímavosti, jsou ohodnoceny svou nadmořskou výškou a hrany, značící turistické trasy mezi nimi, mají za ohodnocení svoji délku.

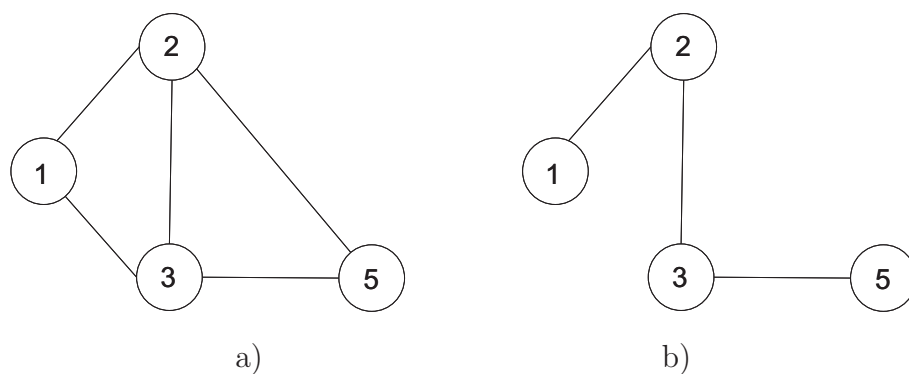


Obr. 4: Hranově ohodnocený graf

1.2 Podgraf, cesta, souvislost

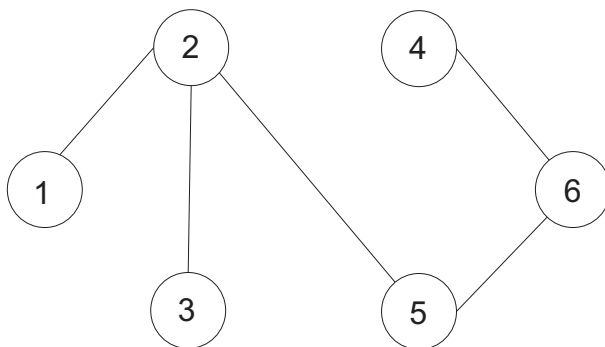
Vynecháním některých vrcholů a hran z grafu $G = (V, E)$ získáme jeho *podgraf*. Pro takto vytvořený graf $G_1 = (V_1, E_1)$ musí platit $V(G_1) \subseteq V(G)$

a $E(G_1) \subseteq E(G)$. Řekneme, že graf G_1 je *indukovaným podgrafem* grafu G , jestliže platí $V(G_1) \subseteq V(G)$ a $E(G_1) = E(G) \cap \binom{V_1}{2}$. Tedy indukovaný podgraf vznikne vynecháním některých vrcholů G a všech hran, které do nich vedou. Pro vytvoření podgrafu můžeme navíc vynechat některé další hrany, aniž bychom vynechali některý z jejich koncových vrcholů. Na obrázku 5 je indukovaný podgraf a podgraf ke grafu z obrázku 4 bez hranového ohodnocení.



Obr. 5: a) Indukovaný podgraf, b) Podgraf

Vynecháme-li z daného grafu G pouze některé hrany, přičemž množinu vrcholů ponecháme beze změny, pak takto vzniklý graf G_2 nazýváme *faktor* nebo také *částečný graf*, případně *hranový podgraf* původního grafu. Platí tedy $V(G_2) = V(G)$ a $E(G_2) \subseteq E(G)$. Následující obrázek je příkladem faktoru ke grafu z obrázku 4 bez hranového ohodnocení.



Obr. 6: Faktor

Konečnou posloupnost vrcholů a hran

$$S = \{v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \dots, v_{n-1}, h_n, v_n\},$$

kde $v_i \in V(G)$ pro $i = 0, 1, \dots, n$ a $h_i \in E(G)$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, nazveme *sledem* mezi vrcholy v_0 a v_n . Vrcholy v_0 a v_n jsou *krajními vrcholy* sledu, přičemž v_0 je počátečním a v_n koncovým vrcholem. *Vnitřními vrcholy* sledu jsou v_1, v_2, \dots, v_{n-1} . Číslo n , které udává počet hran tvořících daný sled, se nazývá *délka sledu*. Jestliže $v_0 = v_n$, hovoříme o *uzavřeném sledu*, v opačném případě se jedná o *sled otevřený*. *Cestou* v grafu nazveme otevřený sled, ve kterém se neopakuje žádný vrchol, tj. $v_i \neq v_j$, když $i \neq j$. Například v modelu silniční sítě odpovídá cestě v grafu cesta z jednoho města do druhého po existujících silnicích.

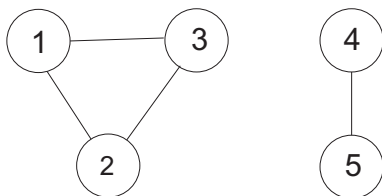
Délka cesty mezi dvěma vrcholy v', v'' v souvislém, hranově ohodnoceném grafu je definována jako součet ohodnocení hran cesty. V neohodnoceném grafu je délka cesty vyjádřena jako počet hran obsažených v této cestě. Označme C množinu všech cest $c(v', v'')$ z vrcholu v' do vrcholu v'' v nezáporně ohodnoceném grafu $G = (V, E)$ s ohodnocením hran $d(h)$. *Nejkratší cesta* nebo také *minimální cesta* mezi vrcholy v' a v'' v grafu $G = (V, E)$ je cesta $c^*(v', v'') \in C$, pro kterou platí

$$\sum_{h \in c^*(v', v'')} d(h) = \min_{c(v', v'') \in C} \left\{ \sum_{h \in c(v', v'')} d(h) \right\}.$$

V neohodnoceném grafu je nejkratší cesta z vrcholu v' do vrcholu v'' taková, na níž je počet hran minimální.

Řekneme, že graf je *souvislý*, jestliže pro každé dva jeho vrcholy v, v' v něm existuje alespoň jedna cesta z v do v' . Z obrázku poznáme souvislý graf jednoduše podle toho, že jsou v něm všechny vrcholy "pospojovány". Není-li graf souvislý, budou nás zajímat jeho *komponenty souvislosti*, což jsou největší souvislé části grafu. Přesněji jsou to podgrafy $G_i, i = 1, \dots, k$, grafu G , které jsou souvislé a platí pro ně $\bigcup_{i=1}^k G_i = G, G_i \cap G_j = \emptyset, i \neq j$. Graf o N vrcholech může mít

nejvýše N komponent souvislosti. Mezi libovolnými dvěma vrcholy z téže komponenty souvislosti existuje cesta, mezi vrcholy z různých komponent souvislosti cesta neexistuje. Nesouvislý graf vidíme na obrázku 7.



Obr. 7: Graf se dvěma komponentami souvislosti

2 Použité metody a algoritmy

V této kapitole si povíme o tom, jak pracovat s grafy na počítači. Zmíníme některé metody pro „přepis“ grafu do programu, aby s ním šlo dále pracovat, metodu používanou v této práci podrobně popíšeme. Dále popíšeme základní algoritmy, které budeme používat, a principy, jak fungují. Vycházet budeme z knih [1] a [4] – [7].

2.1 Zadání grafu do počítače

Zásadní otázkou při řešení jakékoli úlohy s grafy na počítači je, jakou datovou strukturu zvolit pro reprezentaci grafu v programu. Běžně se používá několik různých reprezentací a obecně nelze říct, která je lepší a která horší. Vždy záleží na tom, jaké informace o grafu máme, a co s ním budeme chtít provádět. Každá reprezentace má pak svoje výhody a nevýhody.

Nejčastěji používanými reprezentacemi grafu v programu jsou:

1. Matice sousednosti
2. Matice vzdáleností
3. Matice incidence
4. Seznam následníků
5. Seznam hran

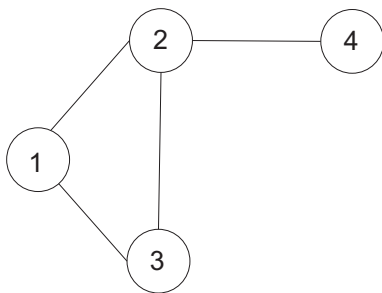
V této práci budeme používat zadání grafu pomocí seznamu následníků, který si proto podrobněji popíšeme. Kromě výhod popsaných v následujícím odstavci je to podle [4] asi nejvýhodnější reprezentace pro potřeby Dijkstrova algoritmu (viz kapitola 2.3).

Seznam následníků jednotlivých vrcholů představuje velmi jednoduchou a úspornou reprezentaci grafu. Lze jej použít pro grafy neorientované i orientované. Základní podobu, sloužící pro grafy neohodnocené, lze snadno modifikovat

a využít i pro grafy ohodnocené. Tato pro mnohé algoritmy velmi výhodná reprezentace spočívá v tom, že si ke každému vrcholu grafu pamatujeme čísla vrcholů, do kterých z něj vede hrana. K uložení grafu postačí pouze dvě jednorozměrná pole, což je paměťově mnohem úspornější, než kdybychom měli pro každý vrchol samostatné pole následníků.

Rozeberme si nyní toto uložení podrobněji. Předpokládejme, že chceme uložit graf o N vrcholech, označených čísly od 1 do N , a M hranách s čísly 1 až M . Mějme dvě pole, která si pojmenujeme **uk** a **nasl**. Do pole **nasl** o velikosti M u orientovaných grafů, $2M$ u neorientovaných, uložíme za sebe všechny následníky jednotlivých vrcholů grafu. Pole **uk** má velikost $N + 1$, jeho prvních N pozic odpovídá vrcholům grafu a na i -té pozici je uložen index pozice z pole **nasl**, na které začíná seznam následníků i -tého vrcholu. Poslední pozice v poli **uk** ukazuje na první volný index v poli **nasl**. Tato pozice je v poli **uk** z technických důvodů proto, aby šlo pracovat i s následníky posledního vrcholu stejným způsobem jako s následníky ostatních vrcholů. Chceme-li zjistit následníky i -tého vrcholu, příkazem **uk**(i) se odkážeme na odpovídající pozici v poli **nasl**. Jelikož následníci vrcholu s číslem $i + 1$ začínají na pozici **uk**($i + 1$), následníci vrcholu i končí v poli **nasl** na pozici **uk**($i + 1$) - 1. Pokud některý vrchol i nemá žádného následníka, zapíše se jednoduše **uk**(i) = **uk**($i + 1$).

Předvedme si tento zápis na následujícím jednoduchém grafu



Obr. 8: Vzorový graf

jehož zápis podle výše uvedeného systému vypadá takto:

| | | | | | | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|---|--|--|--|--|--|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | |
| uk | 1 | 3 | 6 | 8 | 9 | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|-------------|---|---|---|---|---|---|---|---|--|--|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | |
| nasl | 2 | 3 | 1 | 3 | 4 | 1 | 2 | 2 | | |

2.2 Komponenty souvislosti

Určení komponent souvislosti souvisí s tím, zda se dostaneme z kteréhokoli vrcholu grafu do kteréhokoli jiného vrcholu. Pokud toto možné není, chceme vrcholy rozdělit do co největších skupin tak, aby v každé skupině existovalo spojení mezi každou dvojicí vrcholů.

Ohodnocení grafu s určováním jeho souvislosti obecně nesouvisí, a proto nezáleží na tom, zda je graf, jehož souvislost určujeme, ohodnocený, či nikoliv. Výjimku tvoří případ, kdy z grafu odebereme nějakou hranu. To se totiž většinou dělá tak, že hrana v grafu ve skutečnosti zůstane, ale její ohodnocení se nastaví na nekonečno.

Pro testování souvislosti grafu a určování jeho komponent souvislosti využijeme libovolný algoritmus na procházení daným grafem. Můžeme použít procházení do šířky, do hloubky, nebo v jakémkoli jiném pořadí. Průběh všech těchto algoritmů vypadá takto: zvolíme výchozí vrchol, nabízí se třeba vrchol s číslem 1. Z výchozího vrcholu začneme procházet graf, přičemž postupně navštívíme a označíme všechny dostupné vrcholy. Pokud jsme takto označili všechny vrcholy grafu, je zkoumaný graf souvislý. V opačném případě graf souvislý není a určíli jsme právě jednu jeho komponentu souvislosti, neboť do zbývajících vrcholů grafu z již označených vrcholů nevede cesta. Stejným způsobem tedy určíme ostatní komponenty souvislosti. Zvolíme jeden libovolný neoznačený vrchol, třeba opět ten s nejmenším číslem. Z něj budeme graf procházet a označovat navštívené vrcholy jinou značkou, abychom od sebe komponenty odlišili. Postup opakujeme

tak dlouho, dokud nebudou označeny všechny vrcholy grafu a tím pádem určeny jednotlivé komponenty souvislosti. Pracujeme-li s ohodnoceným grafem, z něhož byly odebrány nějaké hrany, je nutné do algoritmu přidat podmínku, která bude kontrolovat ohodnocení hran. Na hrany s ohodnocením nekonečno bude algoritmus nahlížet jako na neexistující hrany.

Popsaný algoritmus má kvadratickou časovou složitost vzhledem k počtu vrcholů grafu. Postupně je nutno označit všech N vrcholů, po označení každého z nich pak musíme zkoumat všechny jeho následníky, kterých může být až N . Proveďte se tedy celkem až N^2 elementárních operací. Přesnější odhad časové složitosti lze získat, použijeme-li k jejímu vyjádření více parametrů. Je-li graf tvořen N vrcholy a M hranami, celkový počet provedených elementárních operací pak lze odhadnout výrazem $O(N + M)$.

2.3 Hledání nejkratší cesty

Najít nejkratší cestu mezi dvěma vrcholy je jednou ze základních algoritmických úloh v teorii grafů. S tímto požadavkem se setkáme v mnoha praktických aplikacích, v našem případě při hledání nejkratšího spojení mezi městy po silnici. Algoritmy většinou řeší o něco obecnější úlohu – z výchozího vrcholu nalézt nejkratší cesty do všech ostatních vrcholů grafu. Většinou algoritmy pracují stejným způsobem pro grafy neorientované i orientované.

Jedním z nejznámějších a nejrychlejších algoritmů pro určení nejkratší cesty je *Dijkstrův algoritmus*, jehož autorem je nizozemský informatik Edsger Wybe Dijkstra. Tento algoritmus lze použít pro všechny grafy s nezáporným ohodnocením hran a pro neohodnocené grafy tak, že všem hranám přiřadíme ohodnocení 1. Kromě délky nejkratší cesty algoritmem snadno zjistíme i to, kudy nejkratší cesta vede. Pokud v grafu existuje více cest minimální délky, algoritmus zobrazí tu, kterou nalezne jako první.

Dijkstrův algoritmus postupně prochází dostupné vrcholy grafu, počínaje zvoleným výchozím vrcholem, ze kterého chceme počítat cesty. Průběžně počítané

hodnoty, přiřazované jednotlivým vrcholům, řídí další způsob procházení. Tyto hodnoty se rovnají délkám nejkratších cest, které jsme pro dané vrcholy dosud našli. Rozlišujeme, zda jsou pro každý vrchol dočasné a mohou se ještě změnit, tj. zlepšit, zmenšit, nebo se jedná již o hodnoty trvalé, určující výslednou hodnotu nejkratší cesty. Výchozímu vrcholu na začátku přiřadíme dočasnou hodnotu 0, jelikož cesta do něj má nulovou délku, a ostatním vrcholům, do nichž ještě neznáme žádnou cestu, přiřadíme dočasnou hodnotu ∞ . Výpočet pak bude probíhat tak dlouho, dokud nebude stanovena trvalá hodnota všech dostupných vrcholů, nebo případně jen cílového vrcholu. Výpočet probíhá po krocích, přičemž v každém kroku:

1. Vybereme vrchol s nejmenší dočasnou hodnotou (nechť je to vrchol v).
2. Hodnotu tohoto vrcholu prohlásíme za trvalou.
3. Všem jeho následníkům s dočasnou hodnotou přepočítáme jejich hodnoty podle předpisu

$$h_i = \min(h_i, h_v + d_{vi}),$$

kde h_v je trvalá hodnota vrcholu v a d_{vi} je ohodnocení hrany vedoucí z vrcholu v do vrcholu i . Snížíme tak ty dočasné hodnoty vrcholů, které lze snížit díky cestě vedoucí přes vrchol v . Pro konečné grafy s N vrcholy je algoritmus konečný a skončí nejvýše po N krocích, neboť v každém kroku je jednomu vrcholu přiřazena trvalá hodnota.

V každém kroku se musí vyhledat vrchol s nejmenší dočasnou hodnotou, což je výběr z N vrcholů, a provede se tedy N elementárních operací. Přepočítávaných dočasných hodnot následníků vybraného vrcholu může být také nejvýše N . Algoritmus má tedy kvadratickou časovou složitost.

Správnost algoritmu plyne z toho, jakým způsobem je vybírán vrchol, jehož hodnotu prohlašujeme za trvalou. Je to vrchol s momentálně nejmenší dočasnou hodnotou, přičemž tato hodnota udává délku takové nejkratší cesty do vrcholu, jež vede pouze přes vrcholy s již trvalou hodnotou. Jelikož všechny ostatní vrcholy

grafu mají dočasnou hodnotu vyšší (nebo stejnou) a graf má nezáporně ohodnocené hrany, nepůjde už hodnotu vybraného vrcholu vylepšit. Jakákoli jiná cesta do něj by byla delší, popř. stejně dlouhá. Prohlásit hodnotu vybraného vrcholu za trvalou je tedy korektní.

Ukažme si, jak bude probíhat hledání nejkratší cesty z vrcholu 1 do ostatních vrcholů na grafu z obrázku 4. Výsledky budeme zapisovat do tabulky o třech řádcích a šesti sloupcích, které odpovídají jednotlivým vrcholům v grafu. Do prvního řádku zapisujeme známé délky nejkratších cest, druhý řádek říká, zda je délka cesty dočasná (hodnota 0), či trvalá (hodnota 1). Do třetího řádku zaznamenáváme předchozí vrchol na cestě do daného vrcholu. Cestu potom čteme od konce – začneme u cílového vrcholu a pokračujeme tak dlouho, dokud nedojdeme do vrcholu výchozího.

Před zahájením výpočtu je potřeba zadat tabulku takto:

| | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0 | Inf | Inf | Inf | Inf | Inf |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Takto se bude tabulka měnit po jednotlivých krocích výpočtu:

| | | | | | |
|---|----|----|-----|-----|-----|
| 0 | 10 | 12 | Inf | Inf | Inf |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|-----|
| 0 | 10 | 12 | 25 | 43 | Inf |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 |

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|-----|
| 0 | 10 | 12 | 25 | 32 | Inf |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|
| 0 | 10 | 12 | 25 | 32 | 40 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|
| 0 | 10 | 12 | 25 | 32 | 40 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|
| 0 | 10 | 12 | 25 | 32 | 40 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |

Např. nejkratší cesta z 1 do 6 je dlouhá 40j a vede přes vrcholy: 1 - 2 - 4 - 6.

2.4 Metoda Monte Carlo

O v dnešní době hojně využívaných metodách Monte Carlo pojednává mnoho publikací. V této kapitole čerpám z [6] – [8].

Metodami Monte Carlo se nazývají numerické simulační metody řešení matematických úloh pomocí modelování náhodných veličin a statistického odhadu jejich charakteristik. Pomocí této metody, jež dostala název podle vyhlášeného monackého města plného heren, lze řešit prakticky libovolné matematické úlohy. Má velmi široké uplatnění v různých oblastech, např. ve fyzice, technice, ekonomii, v teorii her, v teorii hromadné obsluhy, teorii zásob, při optimalizačních výpočtech, v řízení dopravy aj. Přestože metoda vychází z teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky, lze ji pohodlně využít i k řešení deterministických problémů, které s náhodou nemají nic společného. Metoda je schopna matematicky modelovat a poté simulovat jevy, procesy či výpočty cestami, které s řešením původního problému zdánlivě vůbec nesouvisí, a často dospět k výsledku mnohem rychleji a „takřka bezpracně“ oproti tradičnímu přístupu. Příkladem netradičního využití metody může být výpočet určitého integrálu, výpočet sumy nebo řešení soustavy lineárních rovnic.

Základem a historicky prvním užitím metody Monte Carlo je tzv. *Buffonova úloha o jehle*, kdy se opakováním náhodného pokusu házení jehly na rovinu pokrytou rovnoběžkami určoval odhad čísla π . Rozvoj metody Monte Carlo byl ve

značné míře podmíněn rozvojem moderní výpočetní techniky. Použití počítačů je v dnešní době neodmyslitelné, neboť k dosažení potřebné přesnosti je potřeba mnohonásobné opakování simulací.

Nejčastější použití metody Monte Carlo spočívá v modelování takové náhodné veličiny X , že její střední hodnota $E(X)$ je rovna hledané hodnotě a . Pak můžeme odhadnout a z n nezávislých realizací x_1, x_2, \dots, x_n pomocí aritmetického průměru

$$a \doteq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Musíme tedy znát vlastnosti modelovaného náhodného procesu nebo náhodné veličiny. V praxi to znamená znát jejich rozdělení pravděpodobnosti. Ta se často určují empiricky (např. v úlohách z teorie hromadné obsluhy), v některých úlohách (např. ve fyzice elementárních částic) jsou odvozována teoreticky. Někdy není rozdělení pravděpodobnosti určeno jednoznačně a vybírá se pak vhodné rozdělení z jisté třídy, v takovém případě se snažíme přihlídnout k dalším požadavkům, jako je snadnost výpočtu, efektivita výsledného algoritmu apod.

Dále musíme umět získat nezávislé realizace libovolné náhodné veličiny. To obvykle probíhá ve dvou krocích, kdy nejprve generujeme realizace náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, 1)$, a ty se pak transformují na realizace náhodných veličin s požadovaným rozdělením. Pomocí těchto náhodných čísel se potom buď přímo počítají odhady charakteristik náhodné veličiny X , nebo se pomocí vhodného algoritmu počítají hodnoty x_i a odhady charakteristik náhodné veličiny. Výsledek má často tvar intervalu, ve kterém hledaná hodnota s jistou pravděpodobností leží. Meze tohoto intervalu bývají určeny pomocí disperze nebo jiných momentů náhodné veličiny.

Úspěch celého výpočtu metodou Monte Carlo pak závisí zejména na kvalitě generátoru náhodných, resp. pseudonáhodných čísel a výběru racionálního algoritmu výpočtu.

3 Míry robustnosti sítě

Protože v reálném světě existuje nespočet důležitých sítí, na kterých je moderní společnost závislá, jako například silniční síť, síť elektrického vedení, potrubní síť pro distribuci plynu apod., je nutné zkoumat jejich citlivost na různé události. Rozlišujeme mezi dvěma základními pojmy, a to *robustnost* a *zranitelnost* sítě. Robustnost sítě znamená její odolnost vůči náhodným událostem, zatímco zranitelnost spočívá v identifikaci hran, jejichž přerušení bude mít pro síť v jistém smyslu největší následky (viz [8]). V této kapitole představíme míru robustnosti sítě založenou na komponentách souvislosti grafu. Dále budeme prezentovat dvě míry robustnosti sítě dle [9] a přiblížíme si postup jejich výpočtu. Každou síť lze totiž vyjádřit jako graf a jako s grafem s ní také můžeme pracovat a provádět výpočty.

3.1 Metoda komponent souvislosti

Nejjednodušší metoda, pomocí které budeme robustnost sítě posuzovat, je založena na komponentách souvislosti. V silniční síti pomocí komponent souvislosti zjišťujeme, zda se dá dojet po silnicích z kteréhokoli města do kteréhokoli jiného města. Pokud toto možné není, chceme města rozdělit do co největších skupin tak, aby v každé skupině existovalo silniční spojení mezi každou dvojicí měst.

Možností by bylo náhodně přerušit některé hrany a zkoumat, na kolik komponent souvislosti se síť rozpadne. My však zvolíme opačný postup. Při zvoleném počtu komponent souvislosti budeme zjišťovat průměrný počet hran, k jejichž přerušení muselo dojít, aby se síť rozpadla na tento počet komponent.

K výpočtu použijeme metodu Monte Carlo, kdy v každé iteraci budeme náhodně odebírat hrany z grafu až do dosažení požadovaného počtu komponent souvislosti. Poté ze všech počtů odebraných hran ze všech iterací spočítáme aritmetický průměr, jakožto aproximaci střední hodnoty počtu odebraných hran. Pokud bychom totiž chtěli zjišťovat všechny kombinace hran, jejichž odebrání z grafu

vede k jeho rozpadu na zadaný počet komponent, takových kombinací by mohlo být velmi mnoho a určit všechny by bylo prakticky nemožné. Z tohoto důvodu je vhodná aproximace metodou Monte Carlo.

3.2 Propojenost grafu a rozdělení délek nejkratších cest

Definujme nyní dvě míry robustnosti sítí v souvislosti s různým počtem odebraných hran z grafu. Mějme dán obyčejný neorientovaný graf $G = (V, E)$, kde $|V| = N$ a $|E| = M$, symbol „ $|\cdot|$ “ značí mohutnost příslušné množiny, tedy počet jejích prvků. Existuje-li cesta mezi vrcholy u a v , řekneme, že u a v jsou *propojené* a označíme $u \sim v$. Předpokládáme, že všechny dvojice vrcholů v G jsou propojené, tedy graf je souvislý. Označme d_{uv} nejkratší cestu z u do v . Dále uvažujme množinu podgrafů \mathcal{G}_k , získanou tak, že z grafu G odstraníme právě k hran. Existuje $\binom{M}{k}$ způsobů, jak v grafu G vybrat k hran z M hran, proto $|\mathcal{G}_k| = \binom{M}{k}$. Po odebrání k hran už graf $G_k^{(i)}$, $i = 1, \dots, \binom{M}{k}$, nemusí být nutně souvislý. Nejsou-li vrcholy u a v v $G_k^{(i)}$ propojeny, položíme $|d_{uv}| = \infty$.

Představme si nyní veličiny, podle kterých budeme posuzovat robustnost grafu. Pro graf s k neprůjezdnými hranami $G_k^{(i)}$ definujeme *koefficient propojení* $G_k^{(i)}$ takto:

$$S_k \left(G_k^{(i)} \right) = \frac{\left| \left\{ (u, v) : u \sim v \text{ v } G_k^{(i)} \right\} \right|}{N(N-1)/2}, k = 1, \dots, M, i = 1, \dots, \binom{M}{k},$$

Jedná se tedy o poměr propojených dvojic vrcholů ku všem dvojicím vrcholů v grafu $G_k^{(i)}$. Zkráceně lze mluvit o *propojenosti*. $S_k(G_k^{(i)})$ můžeme také interpretovat jako pravděpodobnost, že jeden náhodně vybraný pár vrcholů je v grafu $G_k^{(i)}$ propojen. Míru robustnosti grafu G pro dané k pak spočítáme jako střední hodnotu:

$$\overline{S}_k = \frac{1}{|\mathcal{G}_k|} \sum_{i=1}^{\binom{M}{k}} S_k \left(G_k^{(i)} \right)$$

Druhou veličinou, která je pro $G_k^{(i)}$ definována, je *rozdělení délek nejkratších cest*:

$$F_k \left(x; G_k^{(i)} \right) = \frac{|\{(u, v) : |d_{uv}| \leq x\}|}{N(N-1)/2}, k = 1, \dots, M, i = 1, \dots, \binom{M}{k}.$$

F_k udává relativní četnost dvojic vrcholů v $G_k^{(i)}$, jejichž nejkratší cesta je menší než x . Spočítá se tedy jako podíl počtu těchto dvojic vrcholů a počtu všech dvojic vrcholů v grafu, (u, v) a (v, u) bereme v obou výše uvedených definicích jako jednu dvojici. Jelikož pro různá i se $F_k(x; G_k^{(i)})$ liší, vyjádříme robustnost grafu G pomocí tohoto rozdělení střední hodnotou $F_k(x; G_k)$ jako:

$$\overline{F}_k(x) = \frac{1}{|\mathcal{G}_k|} \sum_{i=1}^{\binom{M}{k}} F_k \left(x; G_k^{(i)} \right).$$

Na celou tuto problematiku lze pohlížet také stochasticky. Získání grafu $G_k^{(i)}$ odstraněním k náhodných hran z G je ekvivalentní s náhodným výběrem prvku z množiny \mathcal{G}_k , kde každý prvek může být vybrán se stejnou pravděpodobností.

$S_k(G_k^{(i)})$ můžeme považovat za náhodnou veličinu na pravděpodobnostním prostoru nad \mathcal{G}_k , kde každý $G_k^{(i)} \in \mathcal{G}_k$ je vybrán se stejnou pravděpodobností.

V případě $F_k(x, G_k^{(i)})$ se jedná vlastně o něco podobného, jako je diskrétní rozdělení pravděpodobnosti vzdálenosti mezi dvěma náhodně zvolenými vrcholy v $G_k^{(i)}$. Jinými slovy, nechť X_k je nejkratší cesta mezi dvěma různými náhodně zvolenými vrcholy, U a V , pak $X_k = |d_{UV}|$ a $F_k(x, G_k^{(i)})$ je rozdělení pravděpodobnosti veličiny X .

Nutno podotknout, že $F_k(x; G_k^{(i)})$ není rozdělení pravděpodobnosti v pravém slova smyslu, ale tato terminologie je používána ke zdůraznění podobnosti s obvyklým rozdělením pravděpodobnosti. Jelikož bylo v grafu $G_k^{(i)}$ odebráno k hran, nemusí být propojené všechny vrcholy, a tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_k(x; G_k^{(i)}) = S_k(G_k^{(i)}) \neq 1,$$

protože pro dostatečně velké x vyjadřuje $F_k(x; G_k^{(i)})$ poměr propojených dvojic vrcholů.

Cílem metody je zkoumat změny \bar{S}_k a $\bar{F}_k(x)$ pro rostoucí k . Porovnáním s hodnotami z původního grafu bez odebraných hran získáme informace o struktuře sítě.

Platí, že čím větší jsou hodnoty \bar{S}_k a $\bar{F}_k(x)$ pro daná k , tím větší je robustnost sítě.

3.3 Využití metody Monte Carlo

Stochastický pohled na výše definované veličiny je vhodný z výpočetních důvodů. Ke spočítání přesných hodnot \bar{S}_k a $\bar{F}_k(x)$, na něž můžeme nahlížet jako na střední hodnoty, by bylo zapotřebí všech hodnot $S_k(\cdot)$ a $F_k(x, \cdot)$ pro všechny $G_k^{(i)}$ z \mathcal{G}_k . V praxi u reálných sítí je však mohutnost \mathcal{G}_k obrovská – $|\mathcal{G}_k| = \binom{M}{k}$ a M je obvykle v řádu stovek. Už v síti se 30 hranami lze vybrat 435 dvojic hran

k vypuštění, 4060 trojic, 27405 čtveřic a robustnost chceme počítat pro rostoucí k . Proto je prakticky nemožné spočítat tyto hodnoty přesně. Vhodnou alternativou je odhadnutí zmíněných hodnot s použitím metody Monte Carlo.

Pomocí metody Monte Carlo budeme generovat podgrafy $G_k^{(i)}$, $i = 1, \dots, R$, tak, že z grafu G náhodně odebereme k hran, a následně spočítáme $S_k(G_k^{(i)})$ nebo $F_k(x; G_k^{(i)})$. Po obdržení R hodnot spočítáme prosté aritmetické průměry:

$$\hat{S}_k = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R S_k(G_k^{(i)}),$$

$$\hat{F}_k(x) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R F_k(x; G_k^{(i)}),$$

jako odhady \bar{S}_k a $\bar{F}_k(x)$. Chyby $|\hat{S}_k - \bar{S}_k|$ a $\sup_x |\hat{F}_k(x) - \bar{F}_k(x)|$ klesají v řádu $O(1/\sqrt{R})$.

Pokud jde o $\hat{F}_k(x)$, je navíc třeba spočítat hodně $F_k(x; G_k^{(i)})$, což je rozdělení pravděpodobnosti délek nejkratších cest mezi všemi páry vrcholů v $G_k^{(i)}$. K tomu použijeme Dijkstrův algoritmus, jehož časová složitost pro spočítání nejkratších cest z jednoho vrcholu do všech ostatních je, jak už bylo řečeno, $O(N^2)$. Pro spočítání všech $F_k(x; G_k^{(i)})$ je nutné algoritmus spustit N -krát, z čehož plyne, že čas potřebný ke spočítání všech nejkratších cest v $G_k^{(i)}$ je $O(N^3)$. Už výpočet pro jeden podgraf $G_k^{(i)}$ by trval dlouho, ale my potřebujeme spočítat hodně $F_k(x; G_k^{(i)})$ pro různé $G_k^{(i)}$. Abychom se těmto nepříjemnostem vyhnuli, použijte se místo přesného $F_k(x; G_k^{(i)})$ odhad pomocí metody Monte Carlo. To je však výhodné jen při větším počtu vrcholů v grafu. Pro malé počty vrcholů v grafu lze počítat nejkratší cesty ze všech vrcholů.

Postup metody Monte Carlo bude vypadat následovně:

Pro $j = 1, \dots, m$

1. náhodně se zvolí vrchol $v \in V$
2. spočítají se nejkratší cesty d_{vu} z v do u takové, že $u \sim v$
3. spočítá se $F_k^{(j)}(x; G_k^{(i)}) := |\{(v, u) \mid |d_{vu}| \leq x\}| / (N - 1)$ a

$$\widehat{F}_k^{(j)}(x; G_k^{(i)}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m F_k^{(j)}(x; G_k^{(i)}).$$

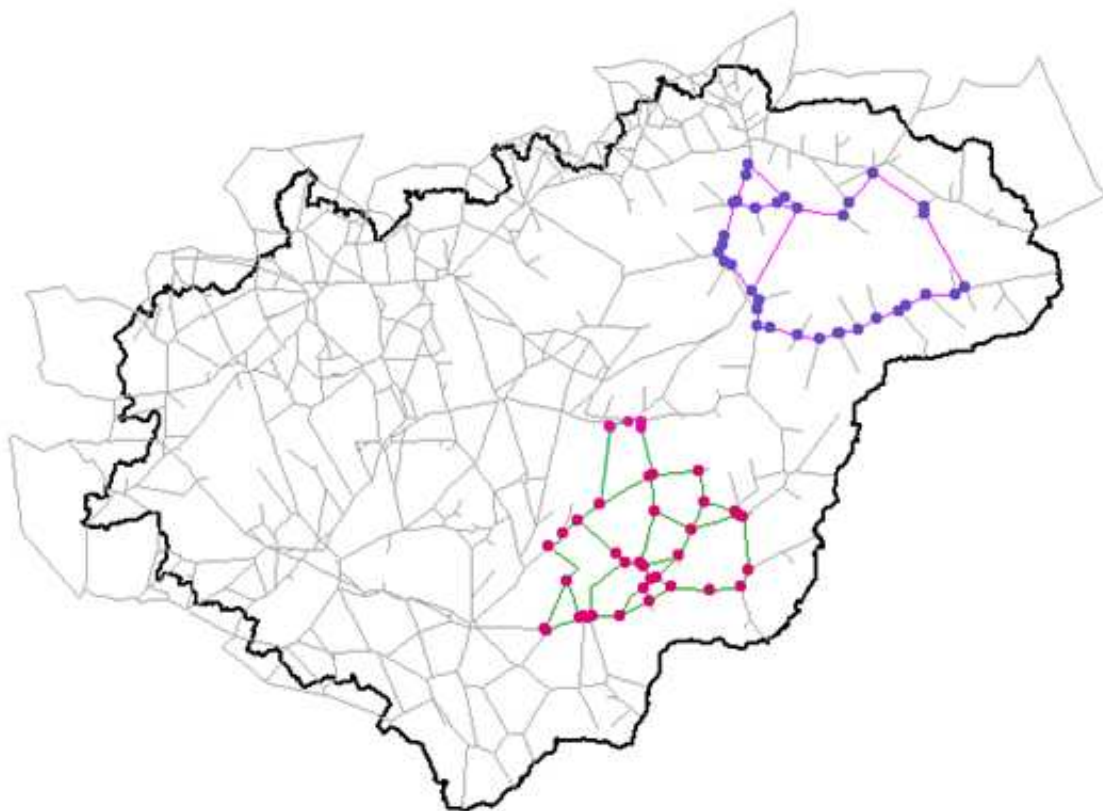
Ve zmíněném algoritmu se délky nejkratších cest z několika náhodně zvolených vrcholů do všech ostatních vrcholů použijí k odhadu distribuce délek nejkratších cest v $G_k^{(i)}$. Tento postup zkrátí výpočetní čas z $O(N^3)$ v horším případě na $O(mN^2)$, v průměru můžeme očekávat ještě větší úsporu času. Současně však způsobí chybu o velikosti $O(1/\sqrt{m})$, výsledná chyba celého procesu pak je $O(1/\sqrt{m}) + O(1/\sqrt{R})$. Nicméně v praktických výpočtech se při dostatečně velkém R a m takováto chyba odhadu $\widehat{F}_k(x)$ jeví velmi malá.

4 Modelování robustnosti silniční sítě

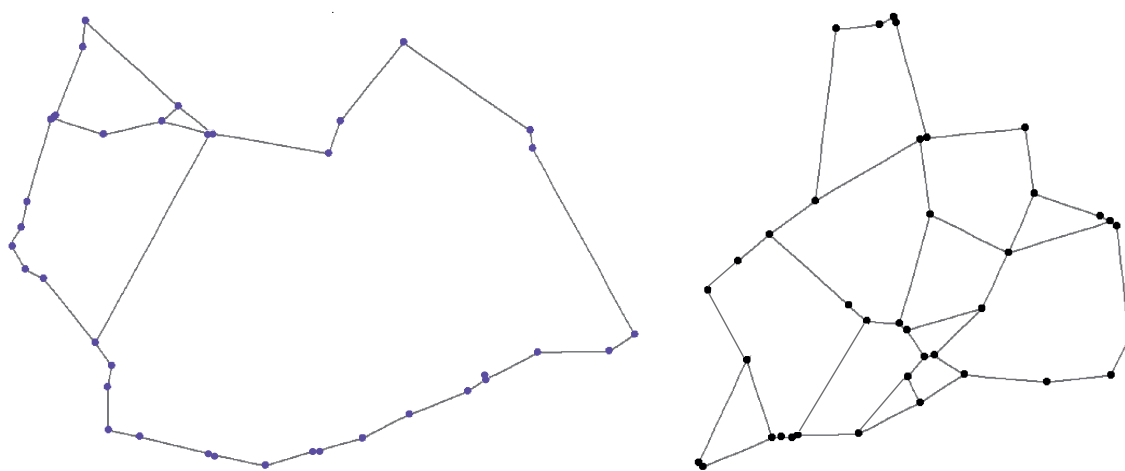
Uvedenou teorii budeme nyní aplikovat na silničních sítích, protože dnešní společnost se neobejde bez dopravování různých komodit, a spolehlivé fungování silniční sítě je proto nutností. Funkčnost silniční sítě však může být nepříznivě ovlivněna náhodnými událostmi, zejména přírodními katastrofami. V jejich důsledku může být přerušeno i několik úseků komunikací najednou a může se stát, že některé části zůstanou izolovány od zbytku sítě.

Silniční síť pro nás představuje graf, který je konečný, souvislý a bez smyček. Vrcholy grafu nejčastěji znázorňují obce a křižovatky a hrany značí úseky cest mezi nimi. Graf je ohodnocený hranově i vrcholově. Ohodnocení hran vyjadřuje vzdálenost vrcholů v jednotkách délky nebo času. Je-li ohodnocení vrcholu větší než nula, znamená to, že cesty se kříží v obci, a ohodnocením je pak počet obyvatel, žijících v této obci. Ohodnocení vrcholu nulou znamená, že se jedná o neobydlený vrchol.

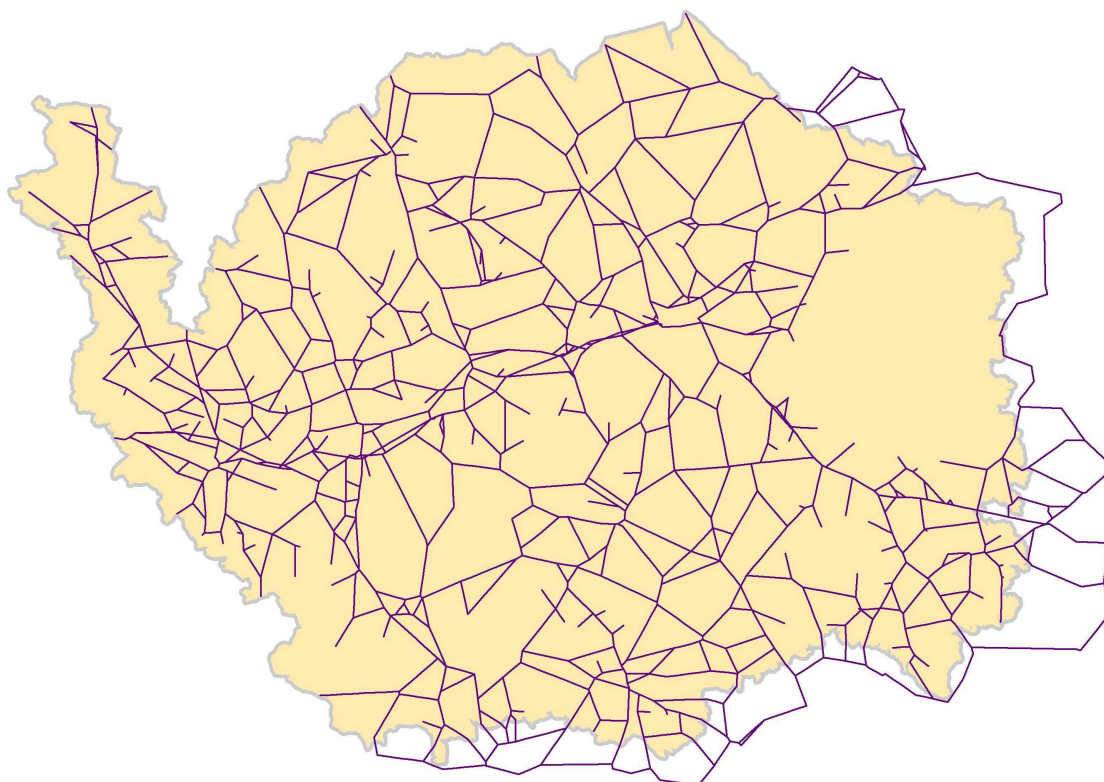
Pomocí zmíněných metod budeme modelovat robustnost silniční sítě celého Karlovarského kraje, celého Zlínského kraje a také jeho dvou částí, které označíme „část 1“ a „část 2“. Graf sítě celého Zlínského kraje čítá 753 vrcholů a 1021 hran. Síť Karlovarského kraje je o něco menší s počtem 727 vrcholů a 984 hran. Obě části Zlínského kraje mají shodně 38 vrcholů a i přibližně stejný počet hran, část 1 má 41 a část 2 obsahuje 49 hran, přesto jsou obě naprosto odlišné. Všechny tyto sítě si můžete prohlédnout na přiložených obrázcích. Obrázek 9 znázorňuje celou silniční síť Zlínského kraje s barevně vyznačenými částmi 1 a 2. Na obrázku 10 můžete vidět jednotlivé části Zlínského kraje samostatně. Na obrázku 11 je zobrazena silniční síť Karlovarského kraje.



Obr. 9: Silniční síť Zlínského kraje s vyznačenými částmi



Obr. 10: Části silniční sítě Zlínského kraje: část 1 vlevo, část 2 vpravo



Obr. 11: Silniční síť Karlovarského kraje

4.1 Popis dat

Data silničních sítí, včetně jejich grafických podob, jsem obdržela od Centra dopravního výzkumu, v. v. i (zkráceně CDV) v textových souborech. Data každé sítě jsou uložena ve 2 souborech, přičemž „základní“ soubor obsahuje data ve formátu:

```
číslo_vrcholu;počet_obyvatel  číslo_následníka;počet_obyvatel_v_následníku;  
číslo_hrany_do_následníka;délka_hrany_v_metrech;délka_hrany_v_sekundách
```

v řádcích pro každý vrchol sítě. Vrchol s jedním následníkem je zapsán např. takto:

2541A011;899 2541A012;364;2541A011 2541A012;125;10

Vrcholy a hrany nejsou označeny pouze čísly ale jako řetězce číslic a písmen, a proto je pro použití těchto dat v algoritmech nutné použít načítací program, kterým je přechíslovujeme na celá čísla.

Druhý soubor data doplňuje o souřadnice jednotlivých vrcholů. Informace jsou uloženy v řádcích ve tvaru:

číslo_vrcholu souřadnice souřadnice

a pro jejich správné načtení je opět potřeba použít program, neboť vrcholy jsou i zde označeny řetězci. Příklad jednoho řádku v souboru:

2541A018 -478857.71870 -1154886.37500

4.2 Robustnost silniční sítě a její zlepšení

Naším cílem je ohodnotit a porovnat robustnost silničních sítí a následně zvýšit jejich robustnost přidáním jedné hrany, tzn. postavením silnice tak, aby zvýšení robustnosti bylo co největší. Hrany přidáváme jen mezi stávajícími vrcholy sítě, takže nevzniknou žádné nové křižovatky, které by zvyšovaly náklady na realizaci vylepšení. Z důvodu finanční náročnosti výstavby budeme připouštět jen takové nové hrany, které nebudou stávající hrany v síti křížit. Ze stejných důvodů je logickým požadavkem stavět nové úseky silnic jen do určité délky.

Budeme pracovat s délkami hran v sekundách, protože řidiče spíše než vzdálenost zajímá, jak dlouho bude cesta trvat. Omezení délek nových silnic je však přirozenější zadat v metrech. Uživatel zadá také průměrnou rychlost průjezdu hranou, což souvisí se třídou nové silnice, a tedy i tím, kolik bude nová silnice stát. My použijeme ve všech výpočtech rychlost 20 m/s.

Popišme si algoritmus přidávání hran podrobněji. Postupujeme tak, že postupně procházíme vrcholy grafu a zjišťujeme jejich následníky. Tím zjistíme rovněž čísla těch vrcholů, do kterých hrana z daného vrcholu nevede. Z tohoto seznamu „potenciálních následníků“ pak ještě vyřadíme vrcholy s nižším číslem, než má výchozí vrchol, abychom každou přidávanou hranu testovali pouze jednou. Testované hrany tak sice vedou z vrcholu s nižším číslem do vrcholu s vyšším číslem, to ale neznamená, že hrana po přidání do grafu nepůjde použít oběma směry.

Vybereme jednoho potenciálního následníka a hranu mezi ním a výchozím vrcholem nejprve testujeme z hlediska její délky. Splňuje-li délka nové hrany zadané omezení, přistoupíme k testování, zda by se tato hrana nekřížila s nějakou stávající hranou. To je na počítači mnohem složitější a delší proces, přestože většinou brzy narazíme na křížící hranu a testovat přestáváme. Naopak pokud na žádnou křížící hranu nenarazíme, jsou obě podmínky splněny a hranu přidáme do grafu upravením příslušných polí reprezentace grafu. Získáme tak v podstatě „nový“ graf, který pak zkoumáme z hlediska robustnosti sítě pomocí výše popsaných metod. Výsledky zapíšeme do tabulky.

Postup opakujeme tak dlouho, dokud nevyčerpáme všechny vrcholy grafu a jejich potenciální následníky a neotestujeme tak všechny možné nové hrany. Získané hodnoty mezi sebou porovnáme a zjistíme tak, propojením kterých vrcholů robustnost sítě zvýšíme nejvíce.

Nyní si podrobněji popíšeme algoritmy na zmíněné metody určení robustnosti sítí. Nejjednodušší a nejrychlejší průběh má algoritmus na metodu komponent. Hrany k přerušení budeme generovat náhodně a po přerušení každé další hrany zjistíme počet komponent souvislosti. Jakmile dosáhneme požadovaného počtu komponent souvislosti, zaznameneáme si počet přerušených hran. Uživatel zvolí pevný počet iterací a chybu a následně se postup opakuje tak dlouho, dokud není splněn zadaný počet iterací, a pak ještě tak dlouho, dokud chyba mezi posledními dvěma iteracemi není v absolutní hodnotě menší než zadaná chyba. Pro vzájemné

porovnání různých sítí použijeme normovanou hodnotu, kdy počet neprůjezdných hran vydělíme celkovým počtem hran v grafu.

Algoritmus na metodu propojenosti je časově náročnější. Po přidání hrany do grafu se náhodně přeruší k -tice hran pro zadané k . Následně určíme komponenty souvislosti grafu. V každé komponentě spočítáme počet propojených dvojic vrcholů a tyto hodnoty sečteme, čímž získáme počet propojených dvojic vrcholů v celém grafu. Hodnoty S_k pak spočítáme dle definice. Postup opakujeme v nastaveném počtu iterací metody Monte Carlo. Odhady S_k pro zadané k -tice hran pak vypočítáme jako aritmetický průměr hodnot z metody Monte Carlo. Tyto pak porovnáme s hodnotami S_k původní sítě. Hodnoty k volíme podle potřeby a vlastností grafu. V grafech s malým počtem hran lze počítat pro všechna k od 0 až po počet hran v grafu, ale už po odebrání zhruba poloviny hran se hodnoty S_k většinou blíží nule. V grafech s velkým počtem hran stačí volit k po nějakých násobcích.

Nejsložitější a časově nejnáročnější je výpočet F_k . Jak již bylo řečeno v popisu této metody, v jejím průběhu je potřeba opakovaně počítat délky nejkratších cest ze zvoleného vrcholu do všech ostatních vrcholů. Z časových důvodů se k tomu využívá metoda Monte Carlo, kdy je výchozí vrchol volen náhodně a počet iterací menší než počet vrcholů v grafu. V grafech s malým počtem vrcholů by však toto nemělo smysl, neboť přesný výpočet nezabere oproti metodě Monte Carlo až tolik času. Rozhodli jsme se proto, že pro grafy s počtem vrcholů nejvýše sto budeme počítat délky nejkratších cest přesně a Monte Carlo zavedeme až pro grafy s větším počtem vrcholů. V přesném výpočtu jsou jako výchozí vrcholy voleny postupně všechny vrcholy grafu. Dále je v programu nutné zadat nějakou škálu hodnot x , pro které budeme distribuci počítat. Tu jsme zvolili tak, aby zachytila i extrémní případ, kdy by po odebrání některých hran nejkratší cesta vedla všemi ostatními hranami sítě. Je nezbytné si uvědomit, že pro každou k -tici odebraných hran je výsledné F_k množinou diskrétních hodnot a přesnost výsledků závisí na jemnosti zadané škály. Algoritmus tedy probíhá tak, že pro každou zadanou k -tici se v každé iteraci metody Monte Carlo náhodně odebere k hran.

Dle počtu vrcholů v grafu se zvolí metoda pro další výpočty – přesný výpočet pro malý počet vrcholů a Monte Carlo pro velký počet vrcholů v grafu. Spočítají se délky nejkratších cest z výchozích vrcholů do všech ostatních vrcholů v grafu a určí se četnosti délek cest dle zvolené škály. Dílčí hodnoty F_k se spočítají dle definice a poté na ně aplikujeme aritmetický průměr, abychom získali konečné hodnoty. Vzhledem k tomu, že pro každé zvolené k je výsledkem $\widehat{F}_k(x)$ vektor hodnot pro hodnoty x ze zvolené škály, a vzhledem k časové náročnosti algoritmu je vhodné volit k po nějakých násobcích tak, abychom počítali pro ne moc velkou množinu hodnot k . Nabízí se třeba násobky 5 % nebo 10 % celkového počtu hran v grafu, přičemž opět nemá moc smysl odebírat více než 50 % hran.

Výslednou hodnotu zlepšení určíme v závislosti na zvolené metodě. V případě komponent souvislosti nám stačí porovnat výsledné počty neprůjezdných hran nebo jejich normované hodnoty, porovnáváme-li různé sítě s různým počtem hran. V případě propojenosti grafu, resp. distribuce nejkratších cest vypočítáme výslednou hodnotu jako součet čtverců rozdílů \widehat{S}_k , resp. \widehat{F}_k původní sítě a \widehat{S}_k , resp. \widehat{F}_k sítě s přidanou hranou pro všechna zadaná k . U \widehat{F}_k ještě sečteme hodnoty z celého vektoru, abychom obdrželi jako výslednou hodnotu jedno číslo. Pak platí, že čím je vypočítaná odchylka větší, tím je větší zlepšení. Toto plyne z definice \widehat{S}_k a \widehat{F}_k .

5 Výsledky

V této kapitole budeme prezentovat výsledky jednotlivých metod. Nejdříve porovnáme robustnosti jednotlivých sítí a poté budeme robustnost některých sítí zvyšovat.

Hrany do sítí budeme přidávat nejprve bez omezení délky, čímž získáme nejlepší možná vylepšení dané sítě. Potom omezíme délku přidávaných hran na 5 km a zjistíme tak finančně méně náročná vylepšení sítí.

Kvůli stručnosti budeme v celé kapitole vynechávat symbol „ $\hat{}$ “, přestože se jedná o odhady metodou Monte Carlo.

Upozornění: Z důvodu toho, jak je v programu pro výpočet F_k zadaná škála hodnot x , nelze pro výpočet robustnosti metodou rozdělení délky nejkratších cest zadat omezení hrany přímo *nekonečno*. Je nutné zadat reálné číslo dostatečně velké, aby omezení pokrylo délky všech hran, které je možno přidat. Délku nejdelší přidávané hrany zjistíme buďto z předchozích metod, nebo pouhým přidáváním hran bez počítání robustnosti.

5.1 Porovnání robustnosti sítě Karlovarského a Zlínského kraje

Jak již bylo řečeno, silniční síť Karlovarského kraje se skládá ze 727 vrcholů a 984 hran, silniční síť Zlínského kraje ze 753 vrcholů a 1021 hran. Jejich robustnost porovnáme dle všech tří představených metod. Každá metoda určí jako robustnější tu síť, jejíž výsledné hodnoty dané metody budou vyšší.

Metodou komponent souvislosti jsme zjišťovali, kolik hran je průměrně potřeba z grafů odebrat, aby se rozpadly na 4 komponenty souvislosti. Výsledky jsou v následující tabulce.

Tabulka 1: Robustnost krajů metodou komponent souvislosti

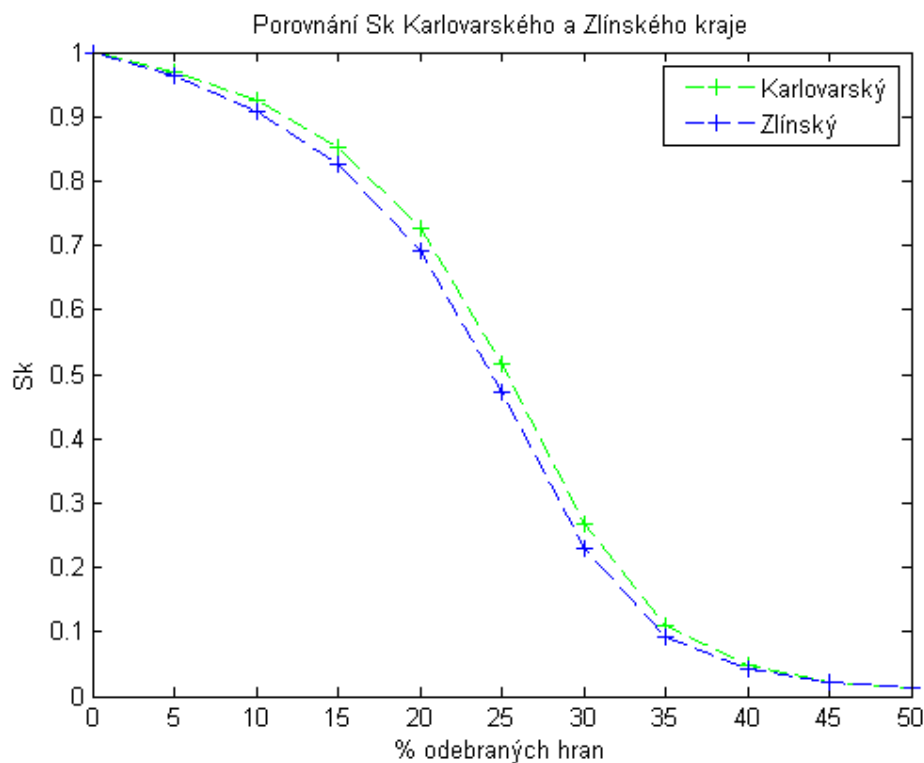
| kraj | počet odebraných hran | normovaná hodnota |
|-------------|-----------------------|-------------------|
| Karlovarský | 19,9640 | 0,0051 |
| Zlínský | 18,5060 | 0,0045 |

Dle metody komponent je robustnější silniční síť Karlovarského kraje.

V rámci metody propojenosti jsme počítali koeficienty propojení S_k pro takové k -tice vypuštěných hran, které odpovídají zhruba násobkům 5 % hran až do 50 % vypuštěných hran. Pro Karlovarský kraj jsme tedy vypouštěli 0, 49, 98, ..., 490 hran, pro Zlínský kraj bylo vypouštěno 0, 51, 102, ..., 510 hran. Výsledky jsou v následující tabulce a jejich grafické znázornění na obrázku 12.

Tabulka 2: Hodnoty S_k Karlovarského a Zlínského kraje

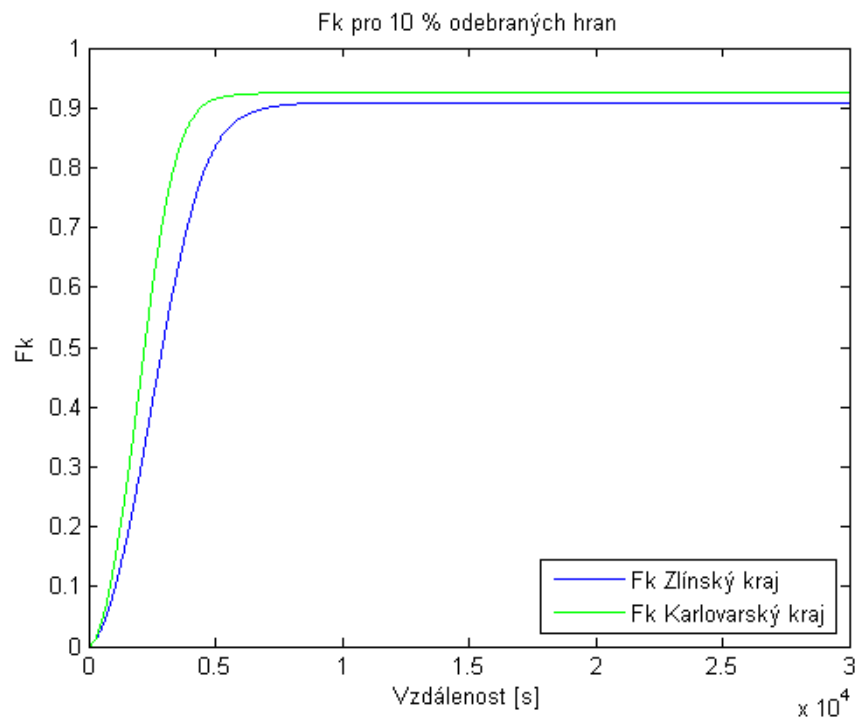
| | 0 % | 5 % | 10 % | 15 % | 20 % | 25 % |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| KV | 1 | 0,9698 | 0,9249 | 0,8517 | 0,7268 | 0,5161 |
| ZL | 1 | 0,9635 | 0,9089 | 0,8272 | 0,6915 | 0,4712 |
| | | | | | | |
| | 30 % | 35 % | 40 % | 45 % | 50 % | |
| KV | 0,2674 | 0,1103 | 0,0468 | 0,0232 | 0,0131 | |
| ZL | 0,2302 | 0,0933 | 0,0410 | 0,0212 | 0,0123 | |



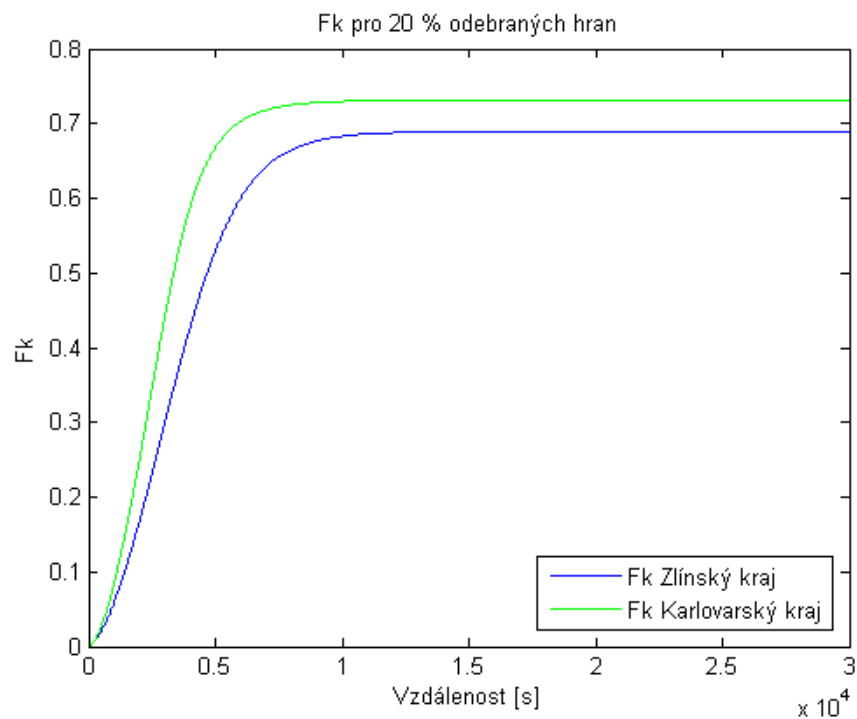
Obr. 12: Srovnání robustnosti Karlovar. a Zlín. kraje metodou propojenosti

Dle metody propojenosti je taktéž robustnější síť Karlovarského kraje.

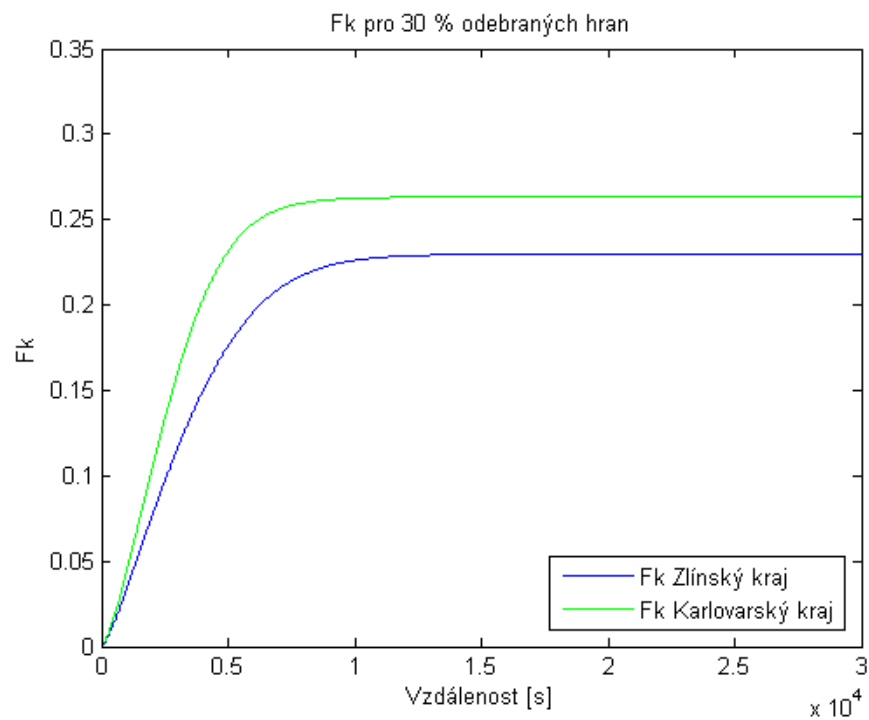
Pro zjištění robustnosti metodou distribuce délek nejkratších cest jsme vypouštěli k -tice hran, které odpovídají zhruba násobkům 10 % hran až do 50 % vypuštěných hran. Pro Karlovarský kraj jsme tedy vypouštěli hrany v počtu 0, 98, 196, ..., 490, pro Zlínský kraj bylo vypouštěno 0, 102, 204, ..., 510 hran. Výsledné F_k znázorňují grafy na obrázcích 13 – 17.



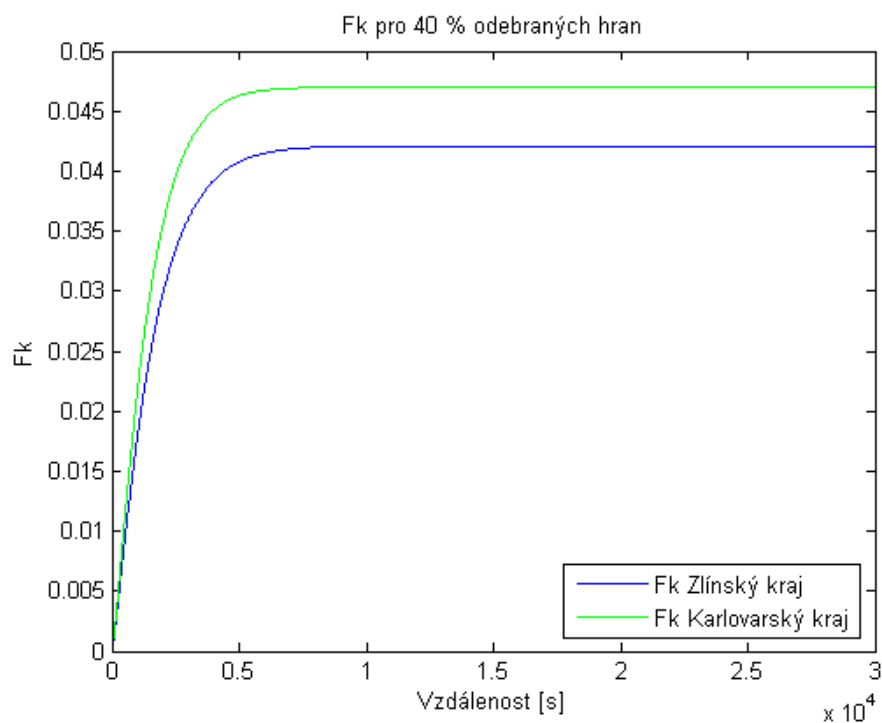
Obr. 13: Srovnání F_k Karlovarského a Zlínského kraje pro 10 % vypuštěných hran



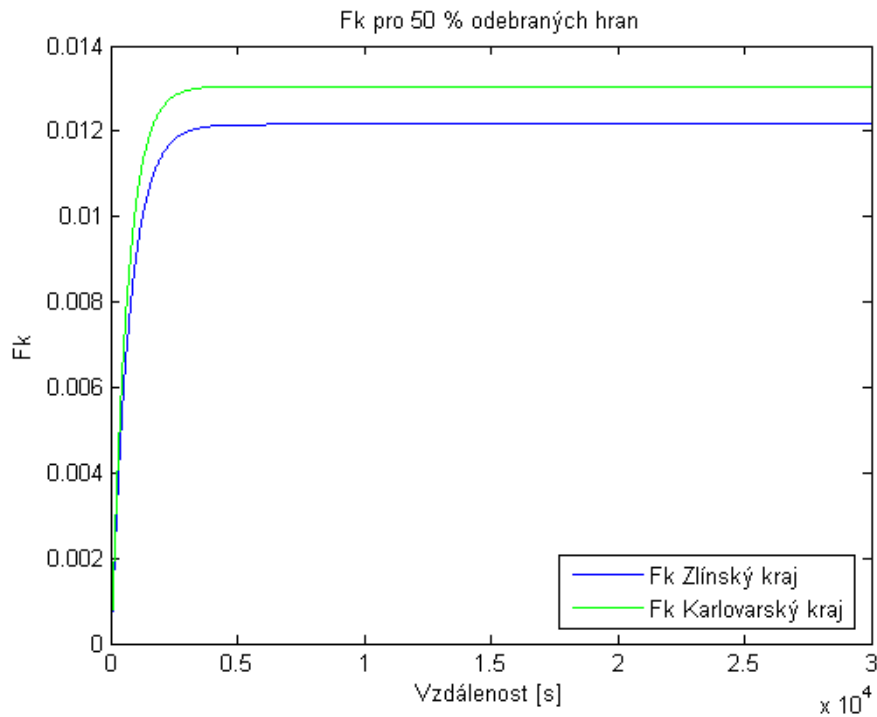
Obr. 14: Srovnání F_k Karlovarského a Zlínského kraje pro 20 % vypuštěných hran



Obr. 15: Srovnání F_k Karlovarského a Zlínského kraje pro 30 % vypuštěných hran

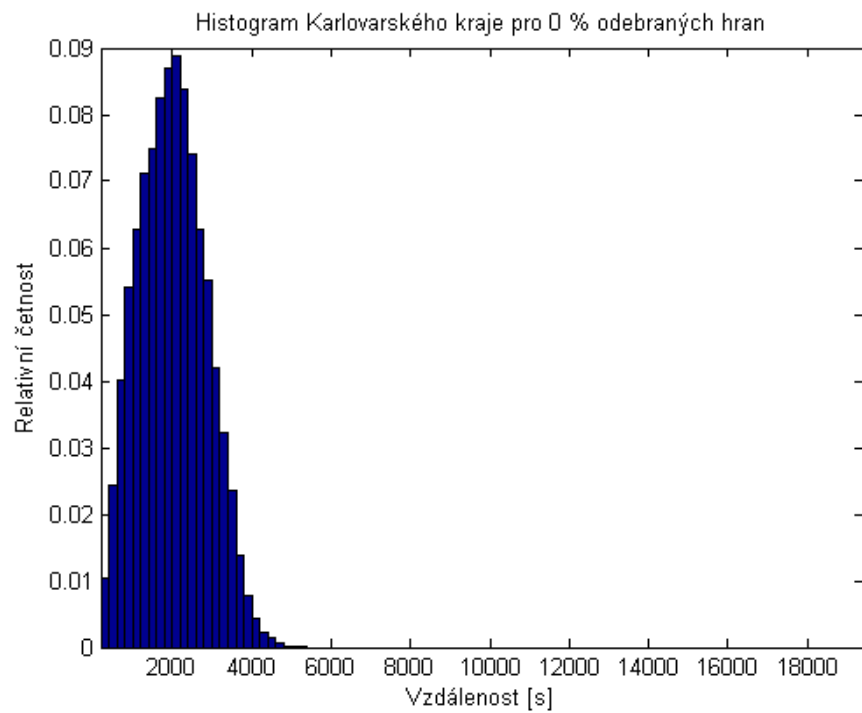


Obr. 16: Srovnání F_k Karlovarského a Zlínského kraje pro 40 % vypuštěných hran

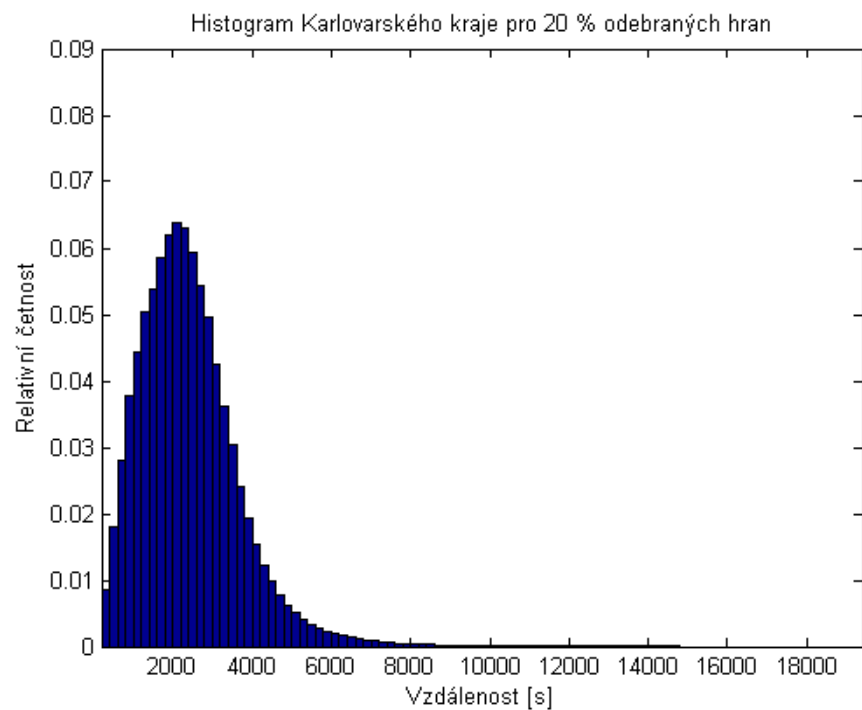


Obr. 17: Srovnání F_k Karlovarského a Zlínského kraje pro 50 % vypuštěných hran

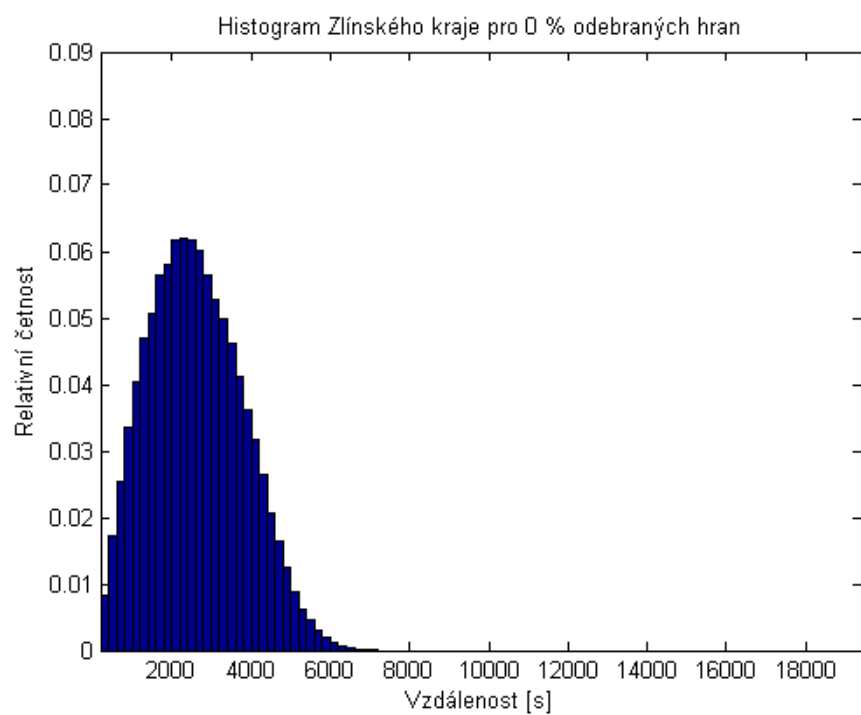
Podle metody distribuce délek nejkratších cest je opět robustnější síť Karlovarského kraje. Na následujících obrázcích porovnáme histogramy délek nejkratších cest obou krajů a ukážeme si, jak se změní odebráním 20 % hran. Odebíráním hran se histogramy zplošťují a protahují, neboť ubývá krátkých cest mezi vrcholy a jsou nahrazovány delšími. Cesty mezi některými vrcholy zanikají úplně.



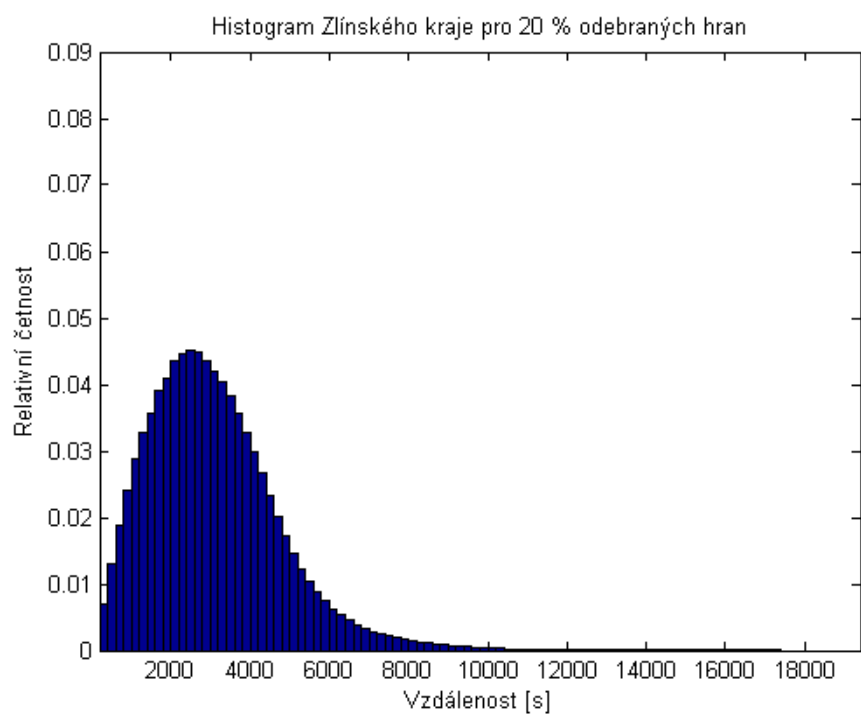
Obr. 18: Histogram nejkratších cest v Karlovarském kraji



Obr. 19: Histogram nejkrat. cest v Karlovar. kraji pro 20 % vypuštěných hran



Obr. 20: Histogram nejkratších cest ve Zlínském kraji



Obr. 21: Histogram nejkrat. cest ve Zlínském kraji pro 20 % vypuštěných hran

5.2 Porovnání robustnosti částí sítě Zlínského kraje

Obě části mají shodně 38 vrcholů, liší se počtem hran, přičemž část 1 obsahuje 41 hran a část 2 se skládá z 49 hran. Jejich robustnost porovnáme dle všech tří představených metod.

Nejdříve porovnáme počty hran, které je průměrně potřeba z grafů odebrat, aby se rozpadly na 4 komponenty souvislosti. Výsledky jsou v následující tabulce.

Tabulka 3: Robustnost částí Zlínského kraje metodou komponent souvislosti

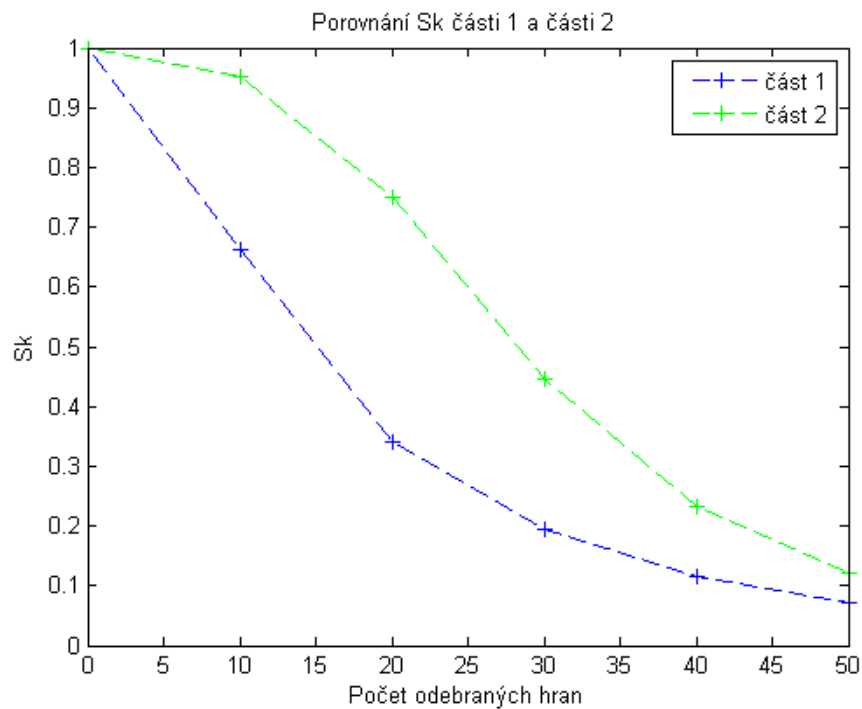
| síť | počet odebraných hran | normovaná hodnota |
|--------|-----------------------|-------------------|
| část 1 | 5,7773 | 0,1409 |
| část 2 | 11,602 | 0,23678 |

Dle metody komponent je robustnější silniční síť část 2.

Koeficienty propojení S_k jsme počítali pro 0, 10, 20, ..., 50 % vypuštěných hran, což odpovídá přibližně 0, 4, 8, ..., 20 vypuštěným hranám v části 1 a přibližně 0, 5, 10, ..., 25 vypuštěným hranám v části 2. Výsledné hodnoty jsou v tabulce 4 a na obrázku 22.

Tabulka 4: Hodnoty S_k části 1 a části 2 Zlínského kraje

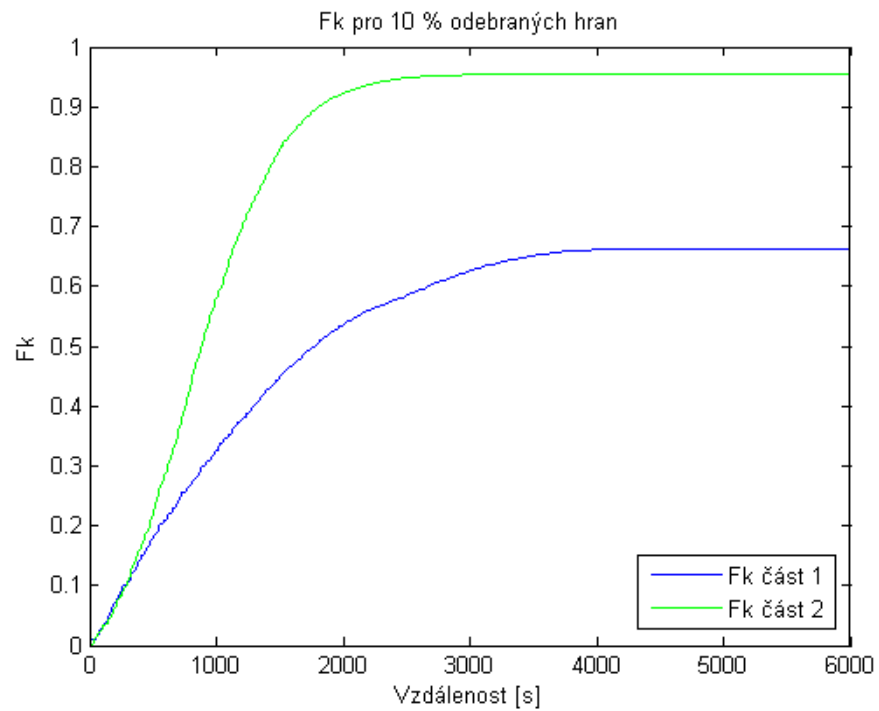
| | 0 % | 10 % | 20 % | 30 % | 40 % | 50 % |
|--------|-----|--------|--------|--------|--------|--------|
| část 1 | 1 | 0,6621 | 0,3410 | 0,1935 | 0,1166 | 0,0730 |
| část 2 | 1 | 0,9523 | 0,7495 | 0,4473 | 0,2314 | 0,1202 |



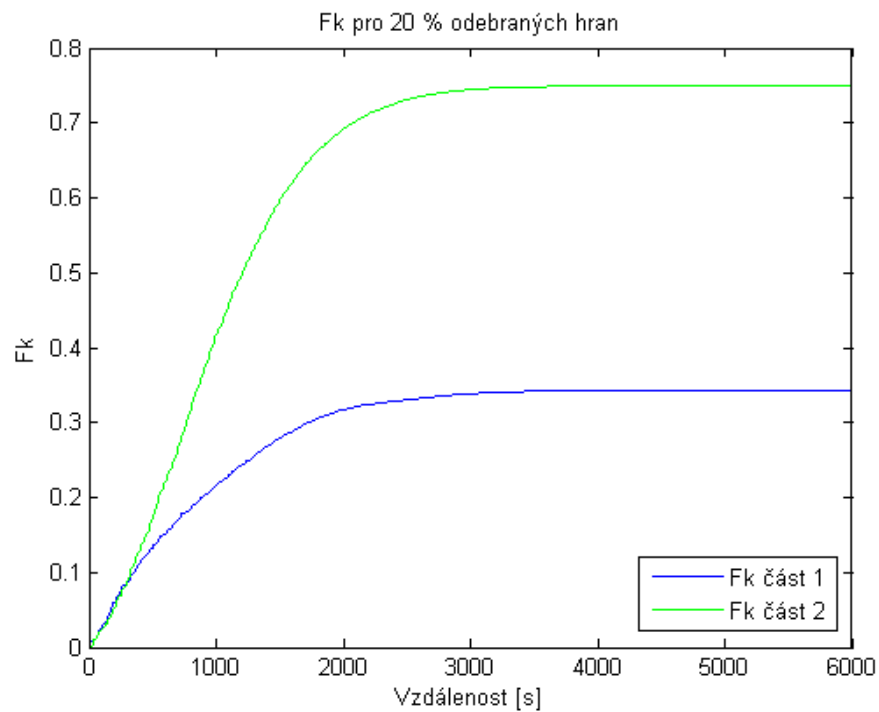
Obr. 22: Srovnání robustnosti částí Zlínského kraje metodou propojenosti

Z výsledků plyne, že část 2 je robustnější.

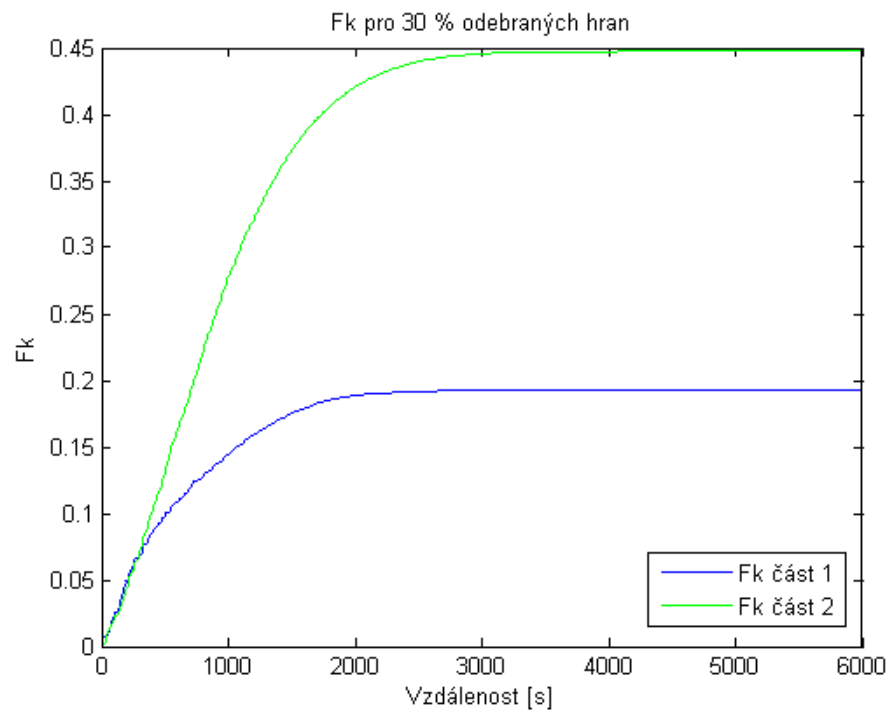
Distribuce F_k jsme počítali pro k -tice hran, které odpovídají zhruba násobkům 10 % hran až do 50 % vypuštěných hran. V části 1 jsme tedy vypouštěli 0, 4, 8, ..., 20 hran a v části 2 bylo vypouštěno 0, 5, 10, ..., 25 hran. Výsledné F_k znázorňují grafy na obrázcích 23 – 27.



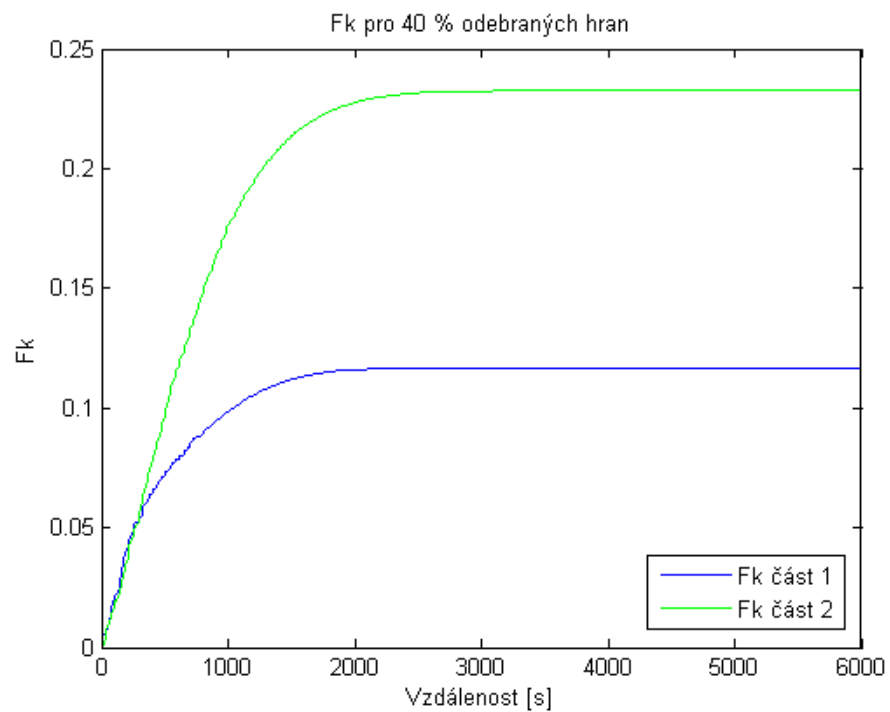
Obr. 23: Srovnání F_k částí Zlínského kraje pro 10 % vypuštěných hran



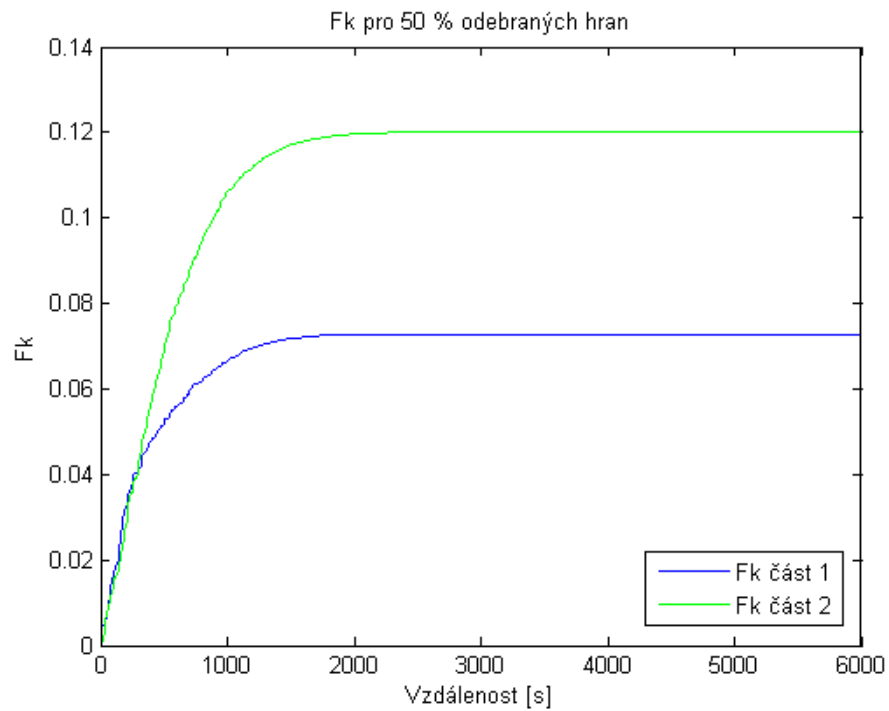
Obr. 24: Srovnání F_k částí Zlínského kraje pro 20 % vypuštěných hran



Obr. 25: Srovnání F_k částí Zlínského kraje pro 30 % vypuštěných hran

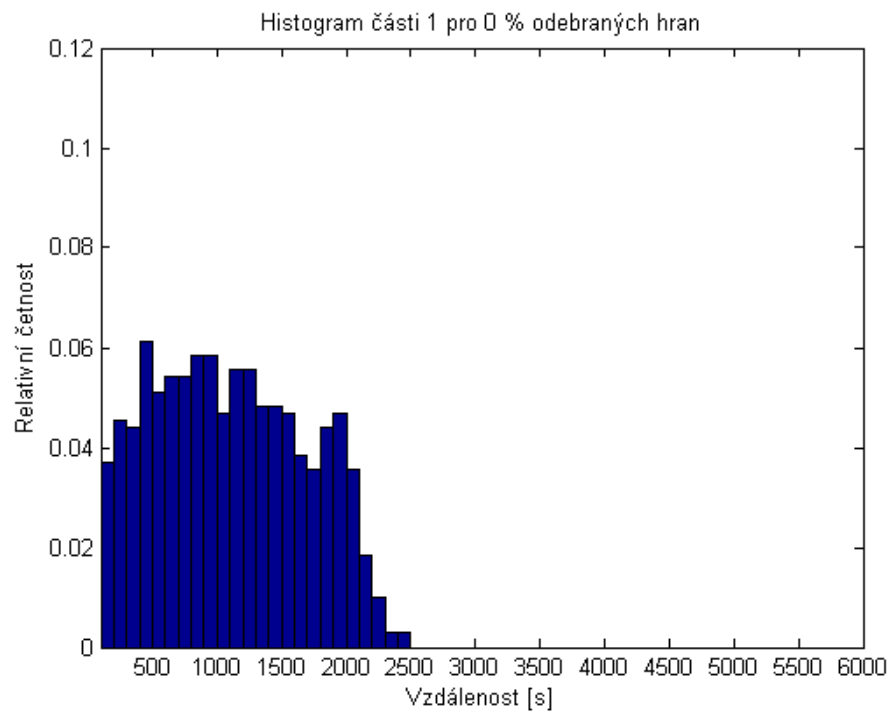


Obr. 26: Srovnání F_k částí Zlínského kraje pro 40 % vypuštěných hran

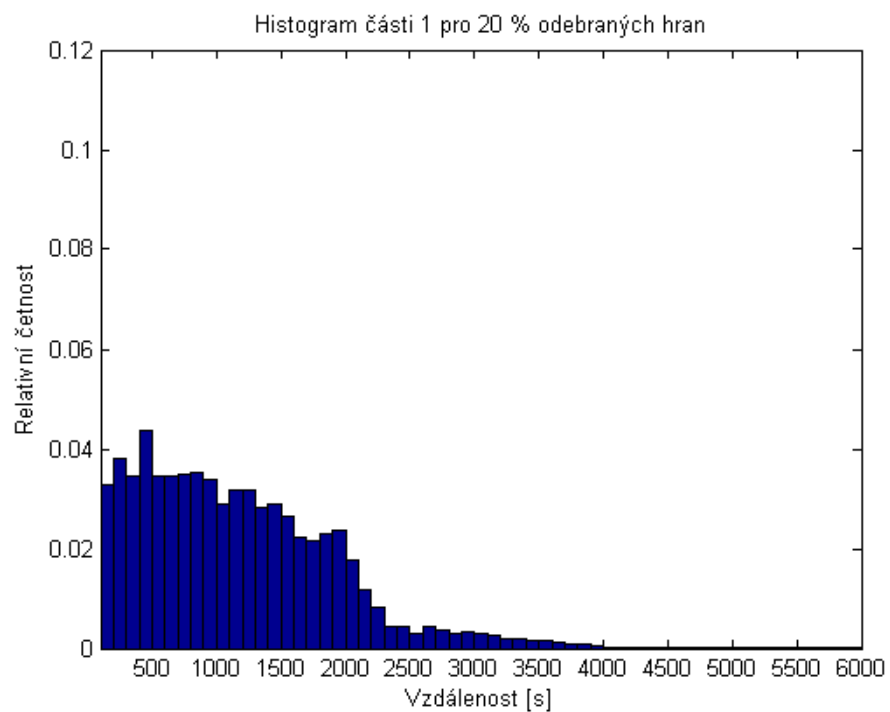


Obr. 27: Srovnání F_k částí Zlínského kraje pro 50 % vypuštěných hran

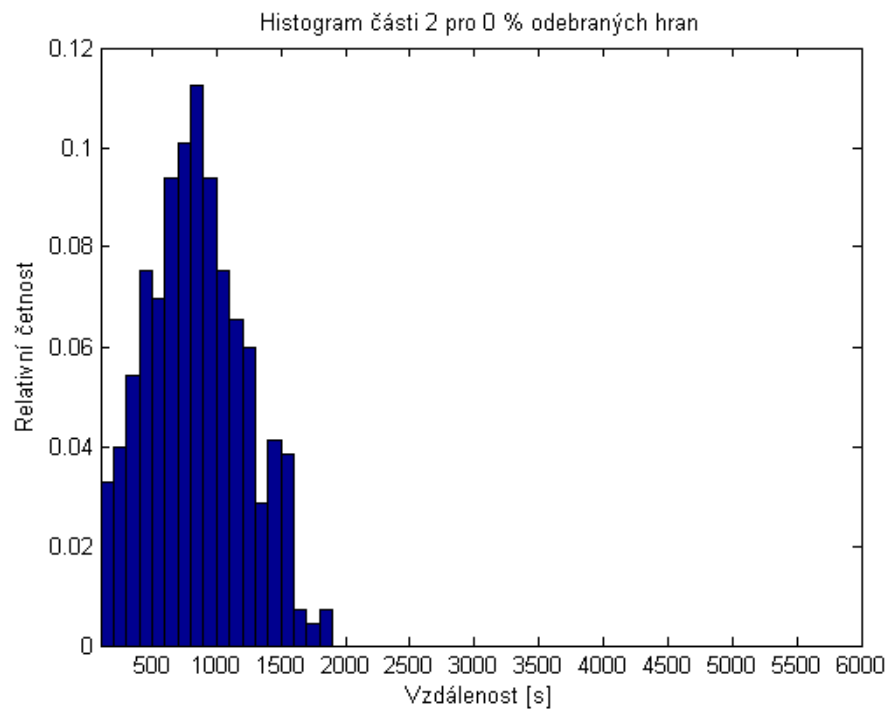
Podle metody distribuce délek nejkratších cest je robustnější síť části 2 Zlínského kraje. Podívejme se, jak vypadají histogramy nejkratších cest pro původní síť a po odebrání 20 % hran.



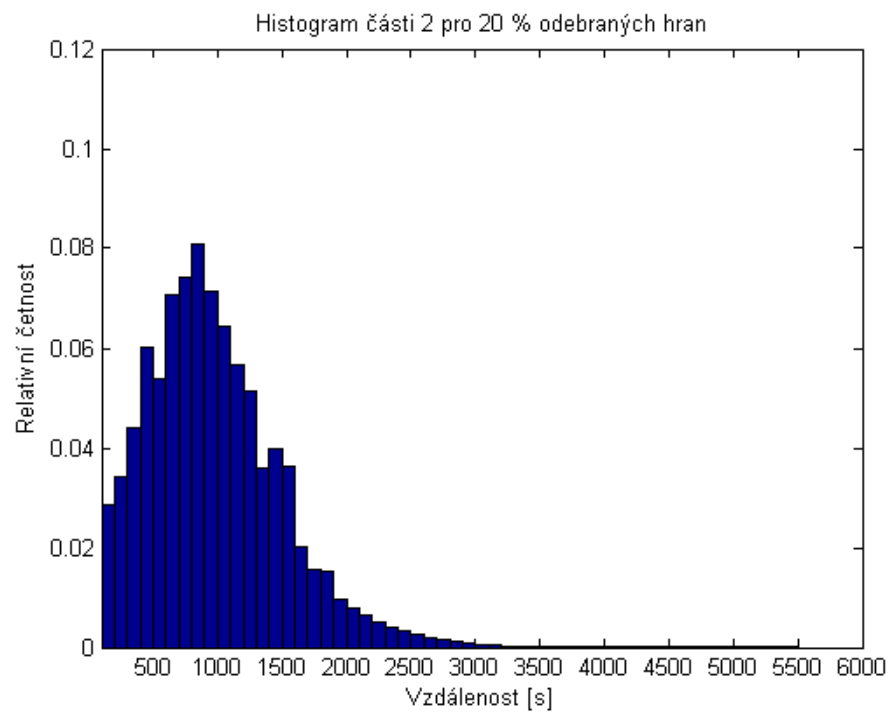
Obr. 28: Histogram nejkratších cest v části 1



Obr. 29: Histogram nejkratších cest v části 1 pro 20 % vypuštěných hran



Obr. 30: Histogram nejkratsích cest v části 2



Obr. 31: Histogram nejkratsích cest v části 2 pro 20 % vypuštěných hran

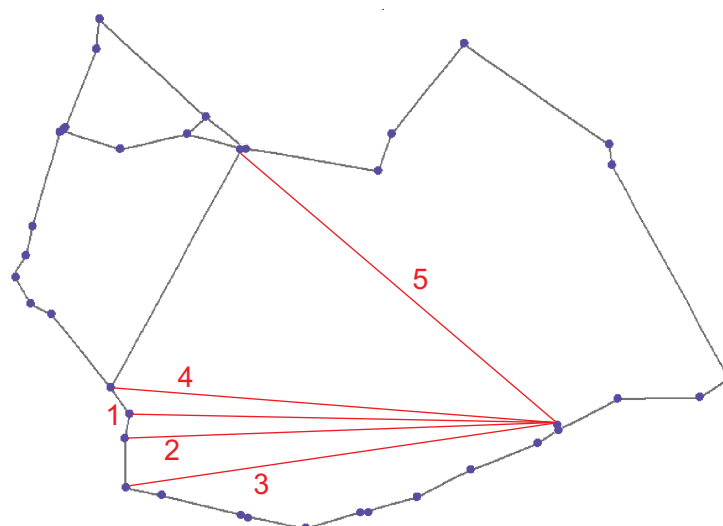
5.3 Zvyšování robustnosti částí sítě Zlínského kraje metodou komponent

5.3.1 Zlínský kraj, část 1

Nejdříve spočítáme, které hrany je nejlepší přidat, aniž bychom nějak omezili jejich délku. Budeme počítat průměrný počet hran, které se musí přerušit, aby se síť rozpadla na 4 komponenty souvislosti. Do tabulky 5 zapíšeme pět nejlepších výsledků, které také znázorníme na obrázku 32. Porovnat je můžeme s hodnotami pro původní síť, kdy bylo k rozpadu potřeba průměrně 5,7773 neprůjezdných hran.

Tabulka 5: Nejlepší výsledky v části 1 metodou komponent bez omezení délky hrany

| z | do | Délka hrany [m] | Počet přerušených hran |
|----------|----------|-----------------|------------------------|
| 2541A004 | 2541A039 | 14706,89 | 6,8155 |
| 2541A044 | 2541A039 | 14896,32 | 6,8116 |
| 2541A002 | 2541A039 | 14965,59 | 6,807 |
| 2532A011 | 2541A039 | 15413,41 | 6,8056 |
| 2523A043 | 2541A039 | 14483,35 | 6,792 |



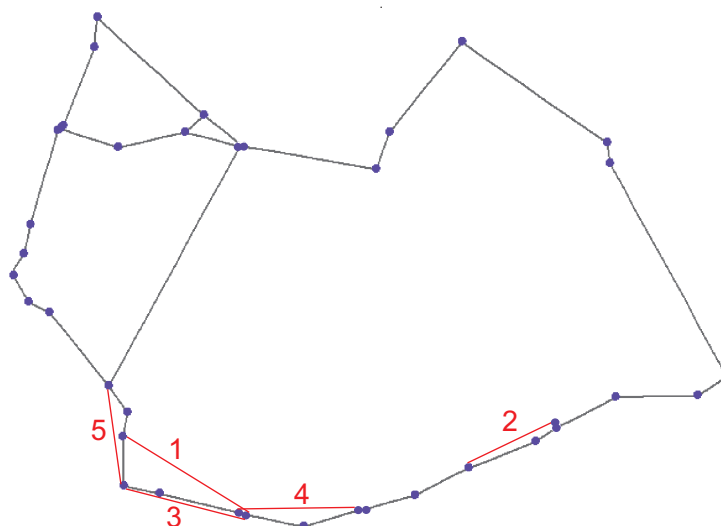
Obr. 32: Nejlepší výsledky v části 1 metodou komponent bez omezení délky hrany

Vidíme, že všechny hrany vedou do jednoho vrcholu (v tom místě jsou vrcholy dva, tento je severněji). Čtyři z nich dokonce směřují do stejné oblasti do sousedních vrcholů a jejich délka je přibližně stejná, v rozmezí 14,707 – 15,413 km. Počty přerušených hran pro tyto výsledky se moc neliší a dalo by se říct, že propojení těchto vrcholů bude mít na síť skoro stejný dopad. Pátá hrana je nejkratší, měří 14,483 km. Výsledky se realizují v řidčeji propojené části sítě, kde skoro ze všech vrcholů vedou maximálně dvě hrany.

Omezíme-li délku přidávaných hran na 5 km, dostaneme tyto nejlepší výsledky, viz tabulka 6.

Tabulka 6: Nejlepší výsledky v části 1 metodou komponent s omezením délky hrany 5 km.

| z | do | Délka hrany [m] | Počet přerušených hran |
|----------|----------|-----------------|------------------------|
| 2541A044 | 2541A009 | 4914,96 | 6,4289 |
| 2541A015 | 2541A039 | 3318,33 | 6,3295 |
| 2541A002 | 2541A009 | 4214,36 | 6,3281 |
| 2412A011 | 2541A008 | 4105,06 | 6,3267 |
| 2541A002 | 2532A011 | 3466,89 | 6,3256 |



Obr. 33: Nejlepší výsledky v části 1 metodou komponent s omezením délky hrany 5 km

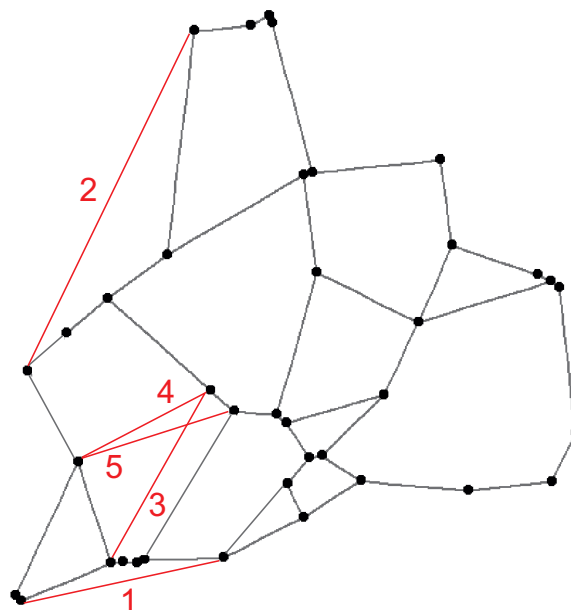
Jak vidíme na obrázku 33, výsledky se realizují převážně ve stejné oblasti, jako v případě bez omezení délky hrany. Propojujeme dokonce stejné vrcholy, jako v předchozím případě, ale kvůli omezení vzdálenosti jsme nuceni je propojovat s vrcholy, které jsou blíž. Vrcholů je zde poměrně hodně a vychází z nich jen málo hran. Nově vzniklé hrany jsou ale téměř paralelní s hranami původní sítě, což není žádoucí. Z výsledků vyplývá důležitost rozumné volby omezení délky přidávaných hran, neboť délka hrany 5 km se zde jeví krátká.

5.3.2 Zlínský kraj, část 2

Nejdříve budeme přidávat hrany bez omezení jejich délky. Pět nejlepších výsledků je uvedeno v tabulce 7 a vyznačeno na obrázku 34. V původní síti je k rozpadu na 4 komponenty souvislosti potřeba zneprůjezdnit 11,602 hran.

Tabulka 7: Nejlepší výsledky v části 2 metodou komponent bez omezení délky hrany

| z | do | Délka hrany [m] | Počet přerušených hran |
|----------|----------|-----------------|------------------------|
| 3512A014 | 2534A026 | 7544,06 | 12,6146 |
| 2534A002 | 2532A082 | 13752,90 | 12,6074 |
| 2534A020 | 2534A004 | 7253,30 | 12,5212 |
| 2534A020 | 2534A032 | 5481,41 | 12,5156 |
| 2534A032 | 2534A021 | 5972,25 | 12,4815 |

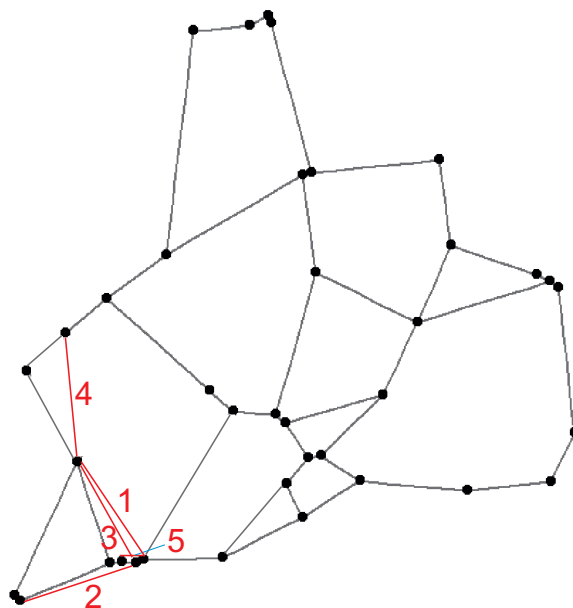


Obr. 34: Nejlepší výsledky v části 2 metodou komponent
bez omezení délky hrany

Přidáním hran se dvěma nejlepšími výsledky zlepšíme síť skoro stejně při naprosto rozdílných délkách těchto hran. Důležitý je také fakt, že obě tyto hrany vedou vně dané sítě, a jelikož zkoumáme pouze danou část sítě celého kraje, může docházet ke konfliktu s hranami v jiných částech kraje, k čemuž také došlo v případě našeho nejlepšího výsledku. U následujících výsledků uvnitř sítě pozorujeme tendenci propojovat vrcholy v těže oblasti, neboť graf je tu řidší a nachází se zde na malém prostoru dost vrcholů, ze kterých vedou jen dvě hrany.

Tabulka 8: Nejlepší výsledky v části 2 metodou komponent s omezením délky
hrany 5 km

| z | do | Délka hrany [m] | Počet přerušených hran |
|----------|----------|-----------------|------------------------|
| 2534A032 | 2534A025 | 4297,87 | 12,4679 |
| 3512A014 | 2534A024 | 4413,10 | 12,4537 |
| 2534A032 | 2534A024 | 4248,18 | 12,3916 |
| 2534A018 | 2534A032 | 4700,10 | 12,3362 |
| 2534A005 | 2534A025 | 785,43 | 12,3296 |



Obr. 35: Nejlepší výsledky v části 2 metodou komponent
s omezením délky hrany 5 km

Výsledky s maximální délkou hrany 5 km se opět realizují přibližně ve stejné oblasti, jako bez omezení. Některé vrcholy, které jsme propojovali v případě bez omezení, teď propojujeme s vrcholy, které k nim jsou blíže. Dokonce přidáním 785 m dlouhé hrany z výsledku 5 v této oblasti dojde k jednomu z nejlepších zlepšení sítě při poměrně nízkých nákladech. Propojení grafu je v této oblasti řídké.

Pozor musíme dát na křížení hrany z výsledku 2, která vede vně této části sítě, s případnými dalšími hranami v sousední části celé sítě Zlínského kraje.

5.4 Zvyšování robustnosti částí sítě Zlínského kraje metodou propojenosti grafu

V této části budeme robustnost sítí posuzovat pomocí propojenosti grafu, označené jako S_k . Výsledné hodnoty zlepšení vypočítáme jako součet čtverců rozdílů S_k původní sítě a S_k sítě s přidanou hranou pro všechna zadaná k .

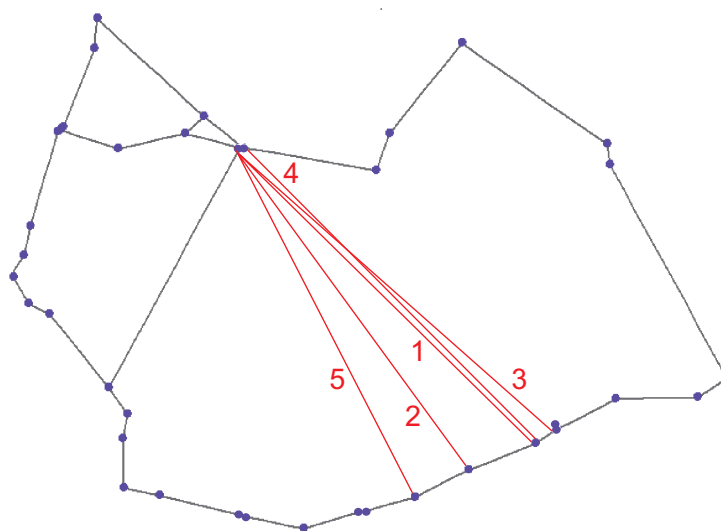
5.4.1 Zlínský kraj, část 1

Síť část 1 se skládá ze 38 vrcholů a 41 hran. Hodnoty S_k budeme počítat pro k -tice hran pro k od 0 do 20, což odpovídá zhruba polovině neprůjezdných hran v síti. Pravděpodobnost, že by se ve stejnou dobu v silniční síti přerušila více než polovina úseků silnic, je velmi malá.

Nejprve budeme opět počítat bez omezení délky přidávaných hran a nejlepší výsledky zapíšeme do tabulky 9.

Tabulka 9: Nejlepší výsledky v části 1 metodou propojenosti bez omezení délky hrany

| z | do | Délka hrany [m] | Hodnota zlepšení |
|----------|----------|-----------------|------------------|
| 2541A016 | 2523A043 | 14350,05 | 0,2188 |
| 2541A015 | 2523A043 | 13539,67 | 0,2179 |
| 2541A017 | 2523A043 | 14543,33 | 0,2146 |
| 2541A016 | 2523A034 | 14293,18 | 0,2138 |
| 2541A013 | 2523A043 | 13381,57 | 0,2117 |

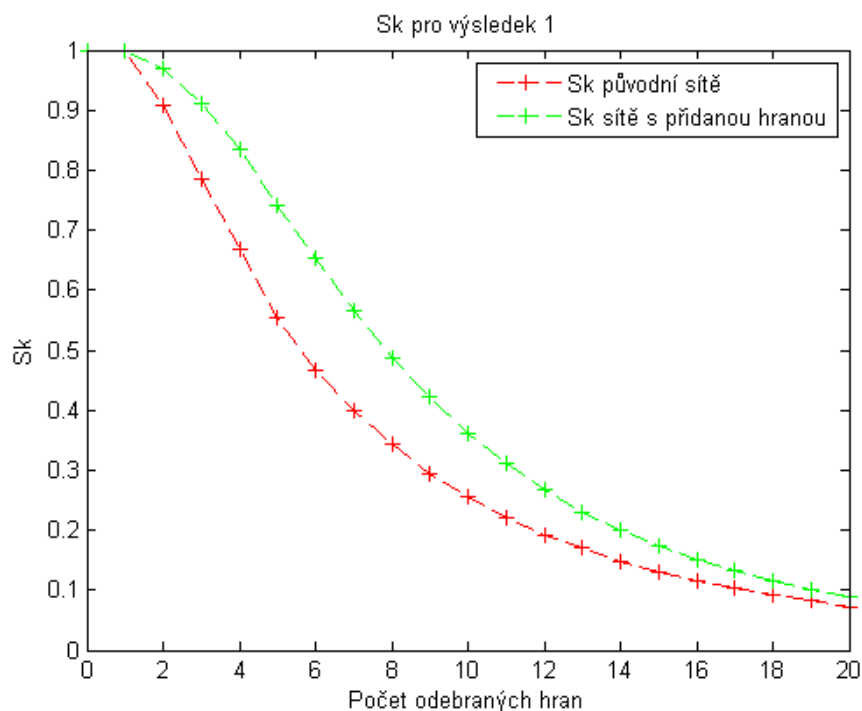


Obr. 36: Nejlepší výsledky v části 1 metodou propojenosti bez omezení délky hrany

Robustnost sítě se nejvíce zvýší přidáním hran „napříč“ celou sítí z oblasti s velmi řídkým propojením do oblasti, kde je propojení o něco hustší. Jejich délka se pohybuje mezi 13,381 – 14,543 km. Jak je vidět na obrázku 36, čtyři z nejlepších hran vedou do jednoho vrcholu. Pátá z nich vede do vrcholu, který se nachází v těsné blízkosti cílového vrcholu ostatních čtyř hran, přičemž vychází ze stejného vrcholu jako hrana z nejlepšího výsledku.

Ani jedna z hran se neshoduje s výsledky metody komponent, ač na první pohled jedna hrana vypadá shodně. V blízkosti vrcholu, ze kterého vychází hrana ze třetího výsledku, se totiž nachází ještě jeden vrchol, ale na obrázku oba téměř splývají v jeden. Skoro všechny hrany z výsledků získaných touto metodou jsou kratší, než hrany získané metodou komponent.

Graf na obrázku 37 znázorňuje zlepšení koeficientů propojení po přidání hrany z nejlepšího výsledku.

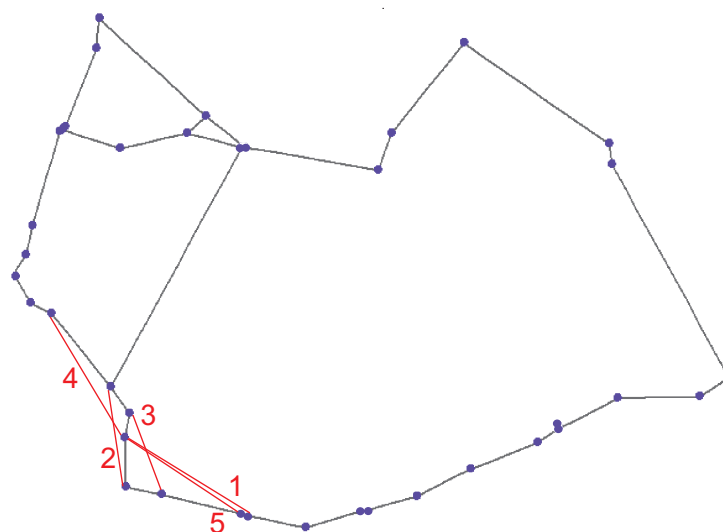


Obr. 37: Porovnání S_k původní sítě a nové sítě části 1 po přidání hrany s neomezenou délkou

Omezme teď maximální délku přidávaných hran na 5 km. Výsledky jsou v následující tabulce a vykresleny jsou na obrázku 38.

Tabulka 10: Nejlepší výsledky v části 1 metodou propojenosti s omezením délky hrany 5 km.

| z | do | Délka hrany [m] | Hodnota zlepšení |
|----------|----------|-----------------|------------------|
| 2541A044 | 2541A009 | 4914,96 | 0,0431 |
| 2541A002 | 2532A011 | 3466,89 | 0,0406 |
| 2541A007 | 2541A004 | 2984,11 | 0,0327 |
| 2541A044 | 2532A109 | 4965,91 | 0,0273 |
| 2541A044 | 2541A008 | 4827,67 | 0,0272 |

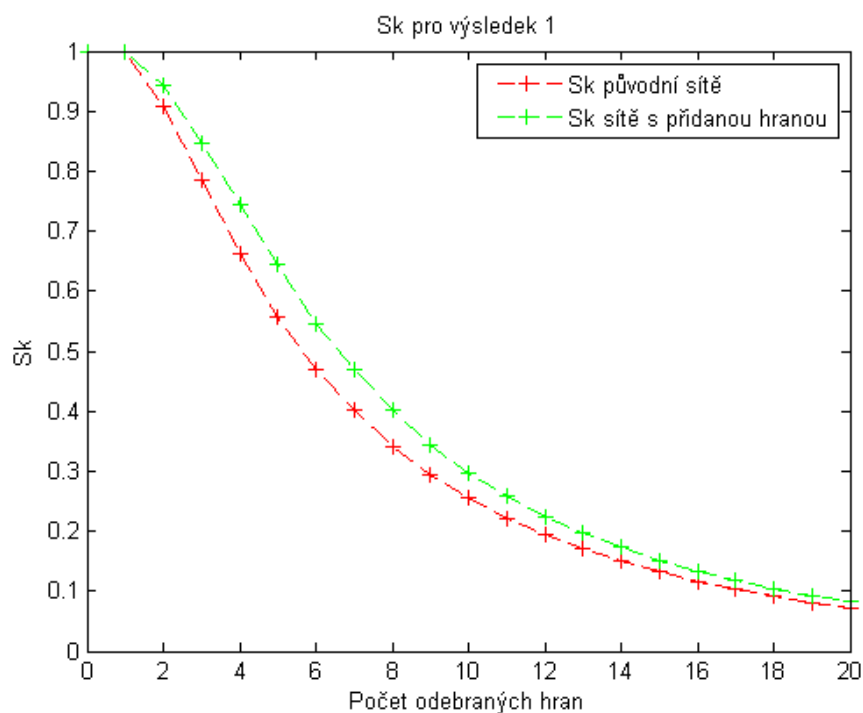


Obr. 38: Nejlepší výsledky v části 1 metodou propojenosti s omezením délky hrany 5 km

Mezi pěti nejlepšími výsledky v tabulce 10 se dva objevují i mezi výsledky metody komponent, přičemž obě metody vybraly shodný nejlepší výsledek. Na obrázku 38 také vidíme, že dvě hrany vychází ze stejného vrcholu a vedou do vrcholů těsně sousedících. Rovněž dvě hrany vedou vně této části sítě, kde by

mohlo dojít ke křížení s jinými hranami. Propojení grafu v této části je velmi řídké, jen z jednoho vrcholu vychází víc než dvě hrany a přidání další hrany by mělo smysl.

Graf na obrázku 39 znázorňuje zlepšení koeficientů propojení po přidání hrany z nejlepšího výsledku.



Obr. 39: Porovnání S_k původní sítě a nové sítě části 1 po přidání hrany s max. délkou 5 km

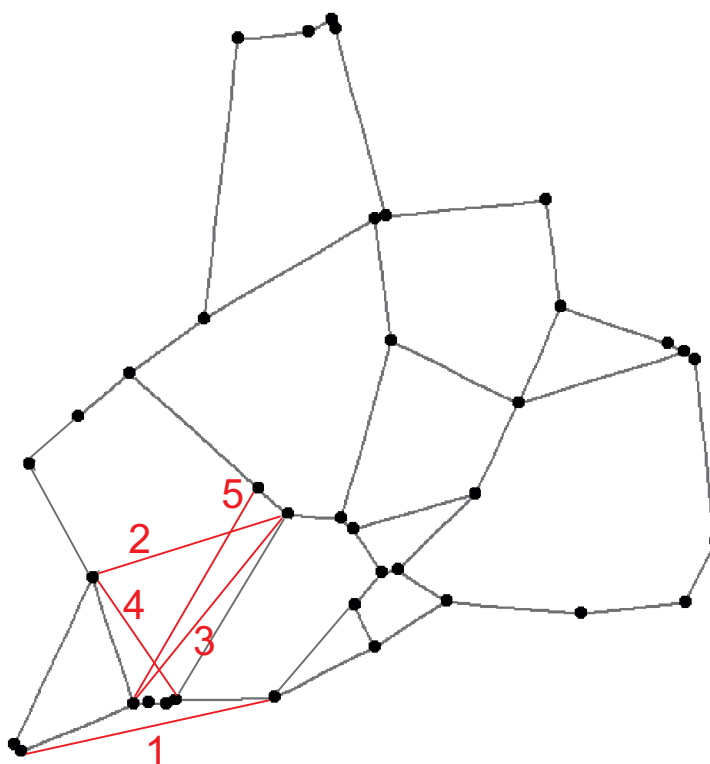
5.4.2 Zlínský kraj, část 2

Část 2 obsahuje 38 vrcholů a 49 hran. Hrany budeme vypouštět v počtu od 0 do 25, což je zhruba polovina hran v síti, a pro tyto k-tice budeme počítat S_k a hledat nejvýhodněji přidanou hranu.

Nebudeme-li uvažovat nějaké omezení délky přidávaných hran, nejlepší výsledky dostaneme přidáním hran z tabulky 11, které jsou nakresleny na obrázku 40.

Tabulka 11: Nejlepší výsledky v části 2 metodou propojenosti bez omezení délky hrany

| z | do | Délka hrany [m] | Hodnota zlepšení |
|----------|----------|-----------------|------------------|
| 3512A014 | 2534A026 | 7544,06 | 0,0848 |
| 2534A032 | 2534A021 | 5972,25 | 0,0779 |
| 2534A004 | 2534A021 | 7112,15 | 0,0735 |
| 2534A032 | 2534A025 | 4297,87 | 0,0683 |
| 2534A020 | 2534A004 | 7253,30 | 0,0615 |

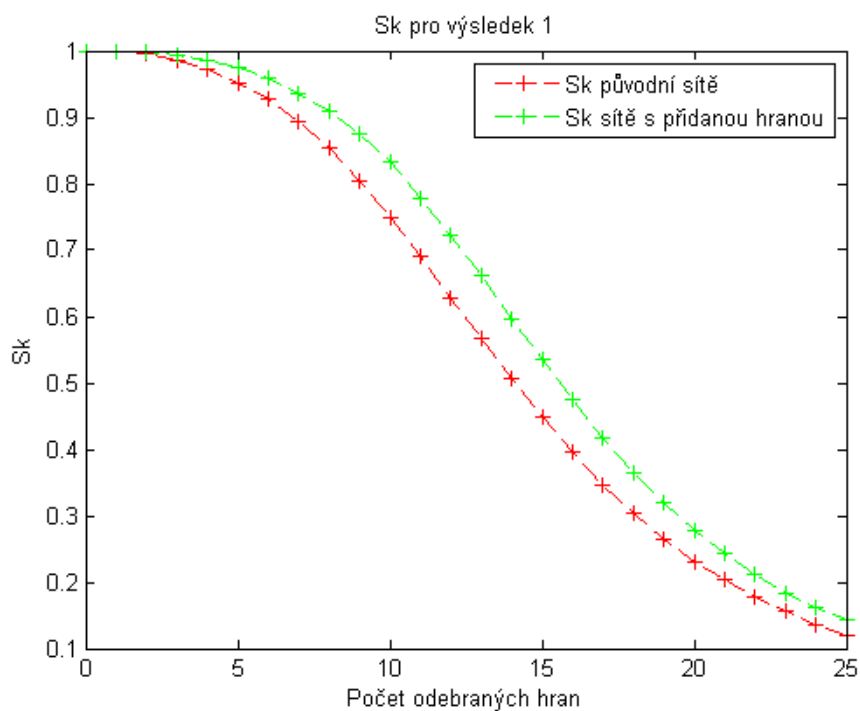


Obr. 40: Nejlepší výsledky v části 2 metodou propojenosti bez omezení délky hrany

Dvě hrany, navržené k přidání, jsou totožné s hranami navrženými metodou komponent. Obě metody se shodnou na šesti vrcholech, které propojují různými

hranami. Propojení grafu je zde řídké – větší počet vrcholů a hran poměrně málo. Nejlepší výsledek, který se v obou metodách shoduje, doporučuje vést hranu vně sítě, tudíž může přijít do konfliktu s jinými hranami v sousední části sítě.

Graf na obrázku 41 znázorňuje zlepšení koeficientů propojení po přidání hrany z nejlepšího výsledku.

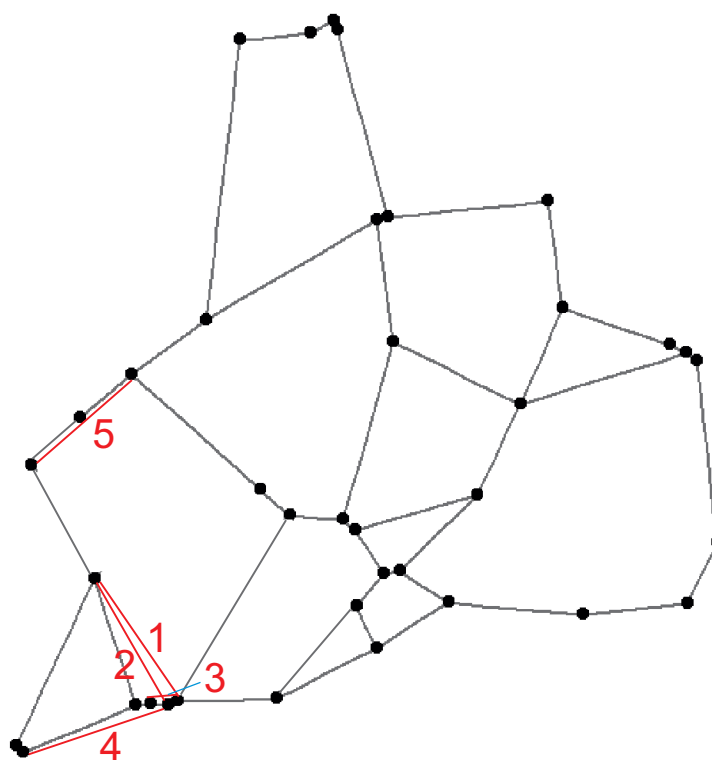


Obr. 41: Porovnání S_k původní sítě a nové sítě části 2 po přidání hrany s neomezenou délkou

Omezme teď délku přidávané hrany na 5 km. Hrany, které nejvíce zvýší robustnost sítě, jsou zapsány v tabulce 12.

Tabulka 12: Nejlepší výsledky v části 2 metodou propojenosti s omezením délky hrany 5 km.

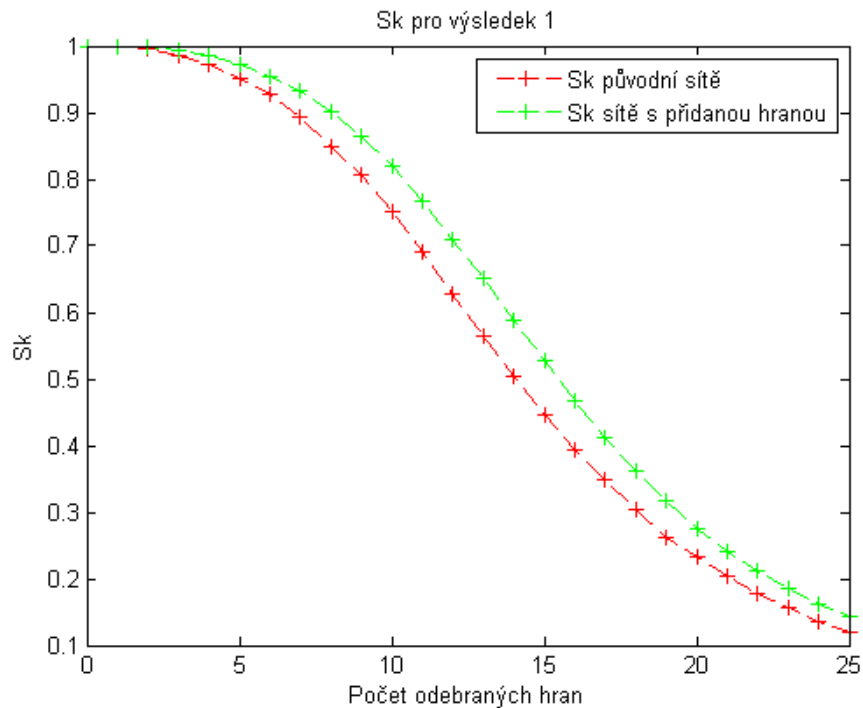
| z | do | Délka hrany [m] | Hodnota zlepšení |
|----------|----------|-----------------|------------------|
| 2534A032 | 2534A025 | 4297,87 | 0,0693 |
| 2534A032 | 2534A024 | 4248,18 | 0,0356 |
| 2534A005 | 2534A025 | 785,43 | 0,0349 |
| 3512A014 | 2534A024 | 4413,10 | 0,0318 |
| 2534A002 | 2534A003 | 3929,58 | 0,0308 |



Obr. 42: Nejlepší výsledky v části 2 metodou propojenosti s omezením délky hrany 5 km

Čtyři z přidávaných hran jsou shodné s hranami z metody komponent, liší se akorát jejich pořadí přidávání. Pátá hrana je téměř paralelní s hranami původní sítě, což je nežádoucí.

Zlepšení koeficientů propojení po přidání hrany z nejlepšího výsledku znázorňuje graf na obrázku 43.



Obr. 43: Porovnání S_k původní sítě a nové sítě části 2 po přidání hrany s max. délkou 5 km

5.5 Zvyšování robustnosti částí sítě Zlínského kraje metodou rozdělení délek nejkratších cest

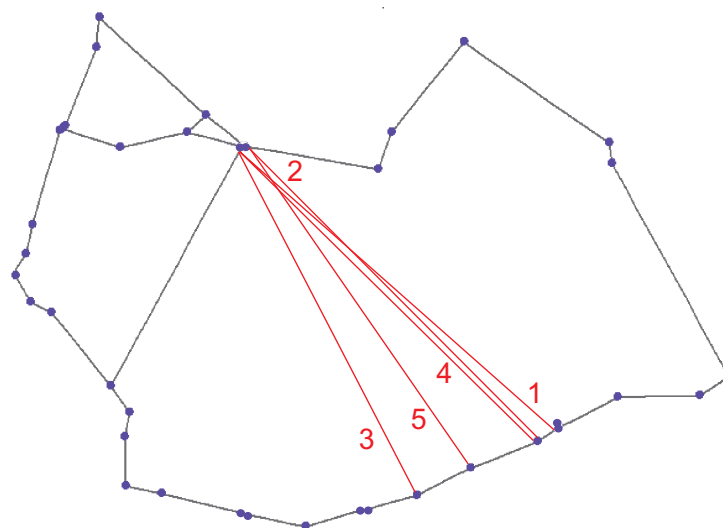
Nakonec budeme posuzovat zlepšení robustnosti sítí podle rozdělení délek nejkratších cest, označeného F_k .

5.5.1 Zlínský kraj, část 1

Stejně jako v kapitole 5.2, kde jsme pouze počítali a porovnávali robustnost této sítě, budeme i pro zlepšování robustnosti počítat distribuce F_k pro takové k -tice vypouštěných hran, které odpovídají zhruba násobkům 10 % hran až do 50 % vypuštěných hran. V části 1 to odpovídá vypouštění 0, 4, 8, ..., 20 hran.

Tabulka 13: Nejlepší výsledky v části 1 metodou distribuce délek nejkratších cest bez omezení délky hrany.

| z | do | Délka hrany [m] | Hodnota zlepšení |
|----------|----------|-----------------|------------------|
| 2541A017 | 2523A043 | 14543,33 | 33,0542 |
| 2541A016 | 2523A034 | 14293,18 | 33,0042 |
| 2541A013 | 2523A043 | 13381,57 | 32,9992 |
| 2541A016 | 2523A043 | 14350,05 | 32,6517 |
| 2541A015 | 2523A034 | 13539,67 | 32,1021 |



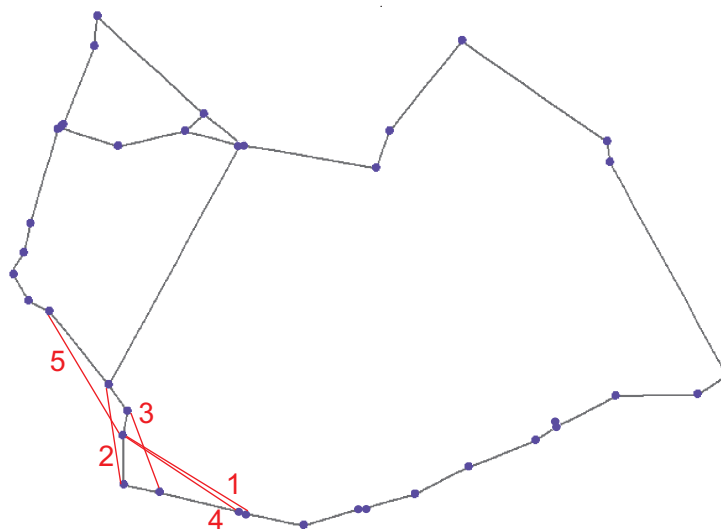
Obr. 44: Nejlepší výsledky v části 1 metodou distribuce délek nejkratších cest bez omezení délky hrany

Jak vidíme v tabulce 13 a na obrázku 44, čtyři z výsledných hran se shodují s hranami přidanými metodou propojenosti, výsledky jsou akorát v jiném pořadí, ale jejich hodnoty zlepšení se příliš neliší. Pátá hrana změnila cílový vrchol na vrchol, který se nachází v těsné blízkosti cílového vrcholu z metody propojenosti. Všechny hrany vedou z oblasti s řidším propojením do oblasti s propojením o něco hustším.

Omezíme-li délku přidávaných hran na 5 km, výsledky budou následující:

Tabulka 14: Nejlepší výsledky v části 1 metodou distribuce délek nejkratších cest s omezením délky hrany 5 km.

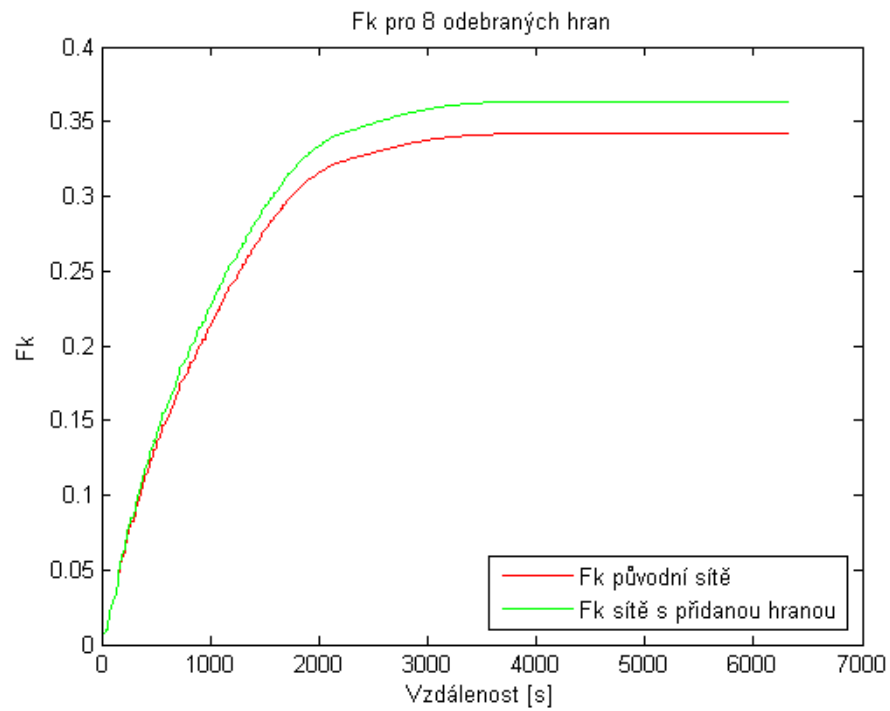
| z | do | Délka hrany [m] | Hodnota zlepšení |
|----------|----------|-----------------|------------------|
| 2541A044 | 2541A009 | 4914,96 | 5,1684 |
| 2541A002 | 2532A011 | 3466,89 | 4,6858 |
| 2541A007 | 2541A004 | 2984,11 | 4,0747 |
| 2541A044 | 2541A008 | 4827,67 | 3,6019 |
| 2541A044 | 2532A109 | 4965,91 | 3,017 |



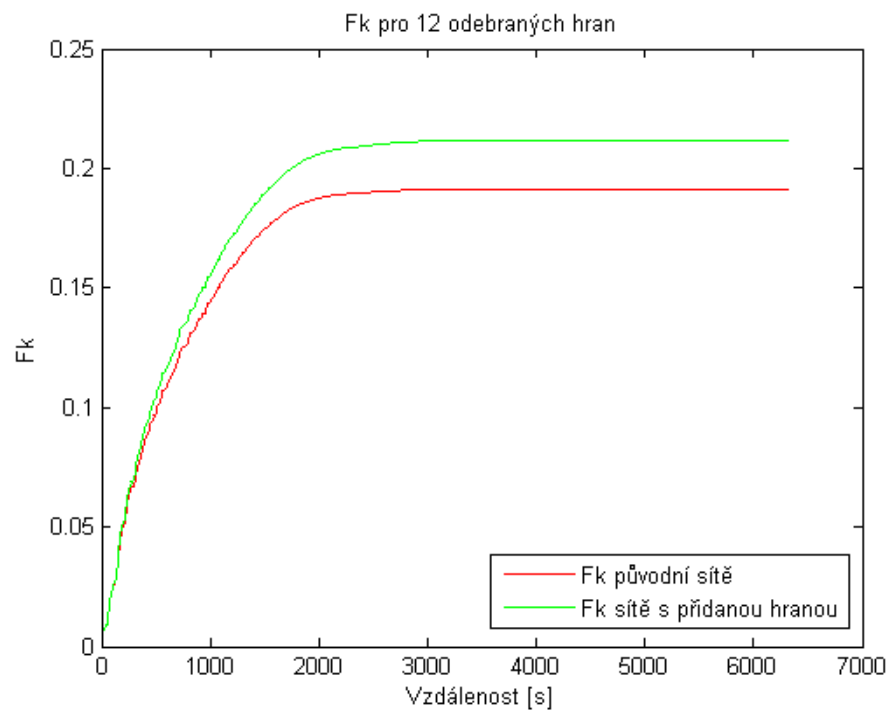
Obr. 45: Nejlepší výsledky v části 1 metodou distribuce délek nejkratších cest s omezením délky hrany 5 km

Obdrželi jsme totožné výsledky, jako metodou propojenosti, jen výsledky 4 a 5 v opačném pořadí. Jejich zlepšení se ale v metodě propojenosti liší o desetitisícinu.

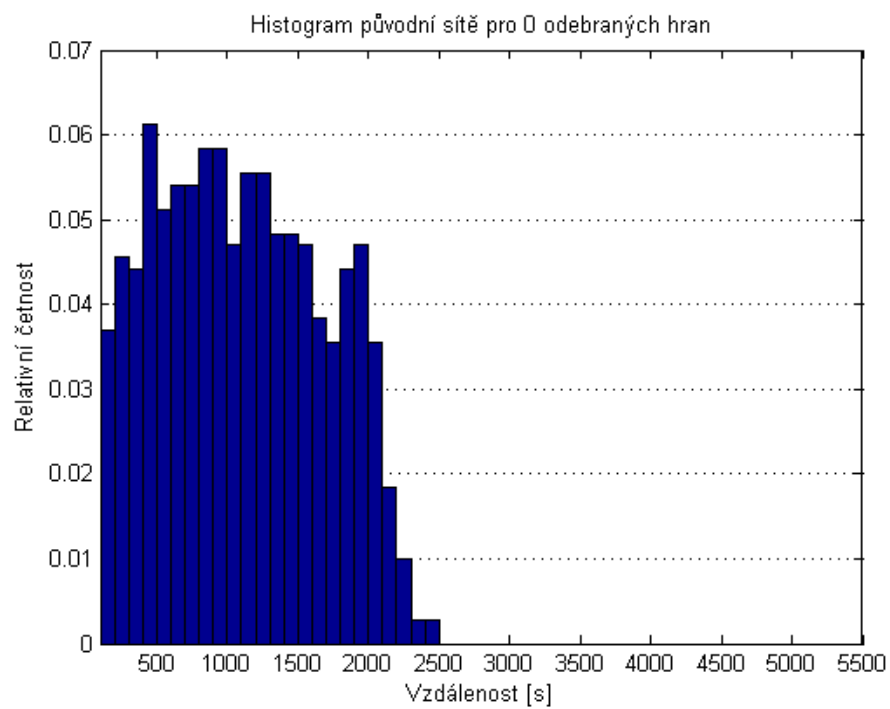
Grafické znázornění zlepšení části 1 vypadá v obou případech obdobně, ukažme si tedy jako příklad nejlepší výsledek s omezením délky hrany. Následující obrázky ukazují zlepšení F_k pro 8 a 12 odebraných hran a histogramy délek nejkratších cest pro původní a vylepšenou síť bez odebraných hran a pro 8 odebraných hran.



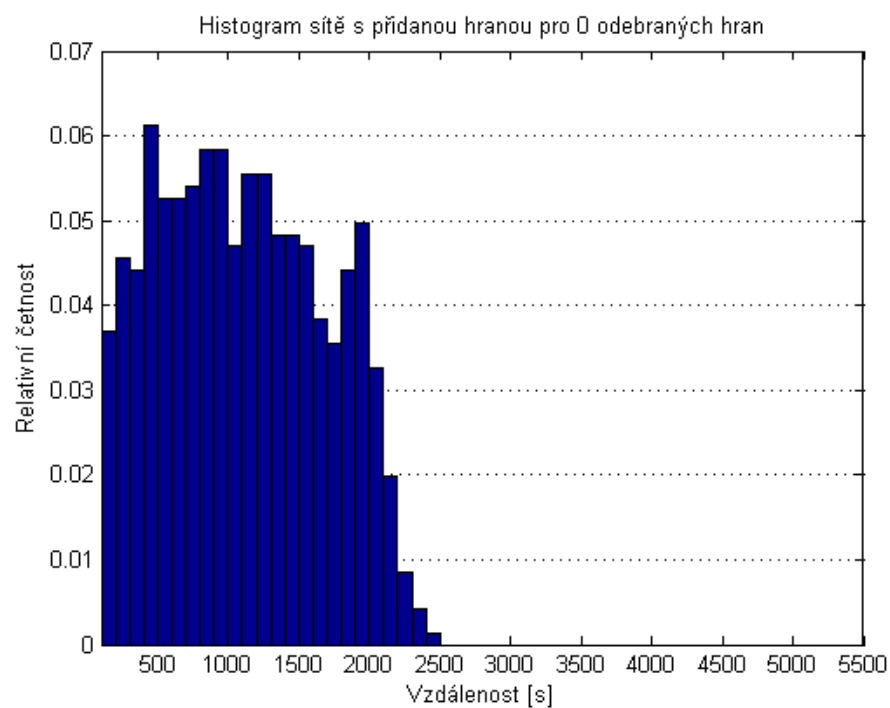
Obr. 46: Zlepšení F_k části 1 po přidání nejlepší hrany pro 8 odebraných hran



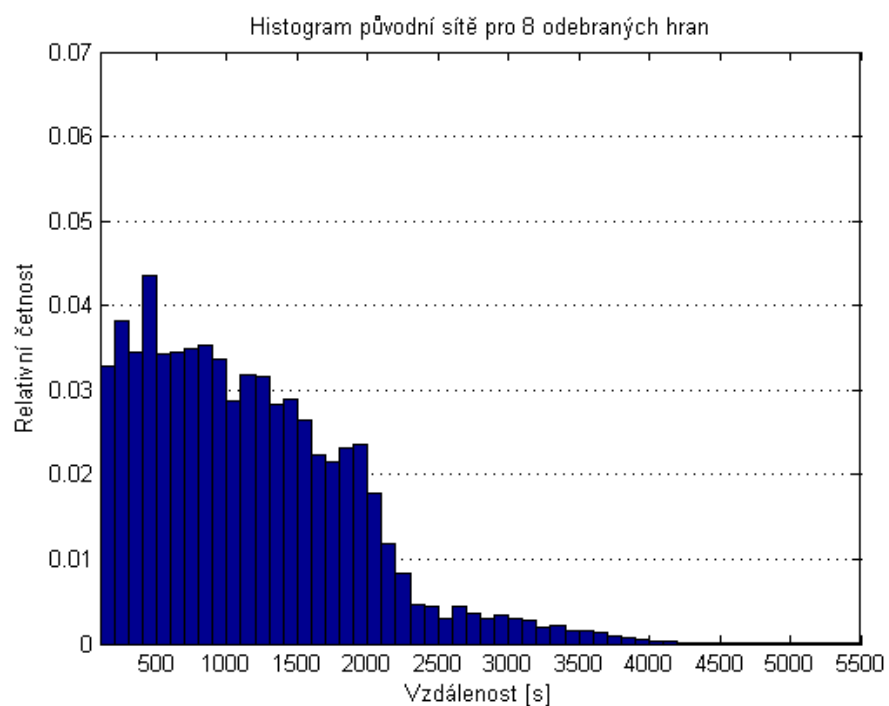
Obr. 47: Zlepšení F_k části 1 po přidání nejlepší hrany pro 12 odebraných hran



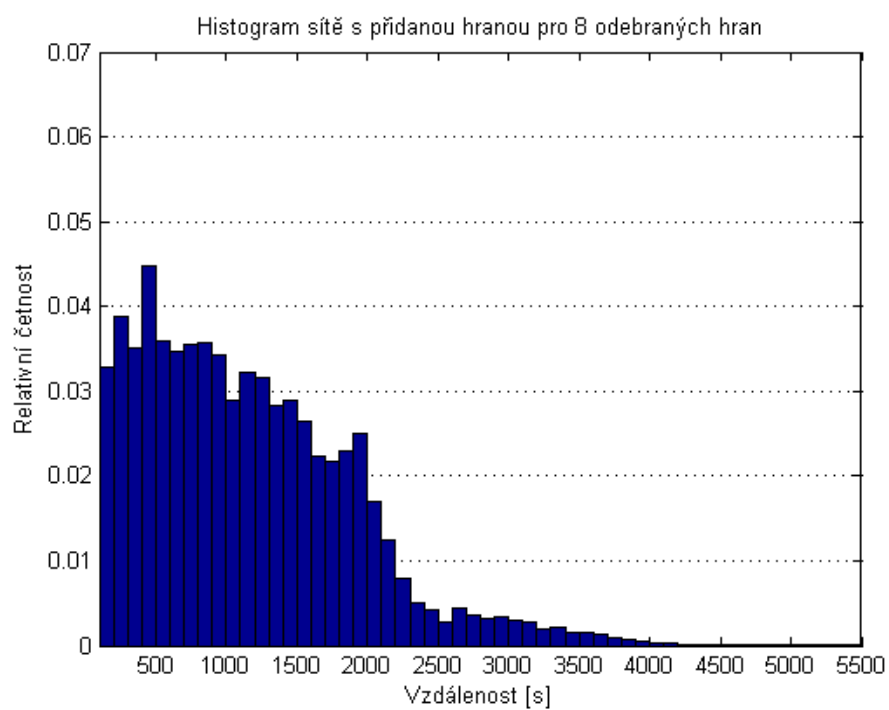
Obr. 48: Histogram nejkrat. cest v původní síti části 1 bez vypuštěných hran



Obr. 49: Histogram nejkrat. cest ve vylepšené síti části 1 bez vypuštěných hran



Obr. 50: Histogram nejkrat. cest v původní síti části 1 pro 8 vypuštěných hran



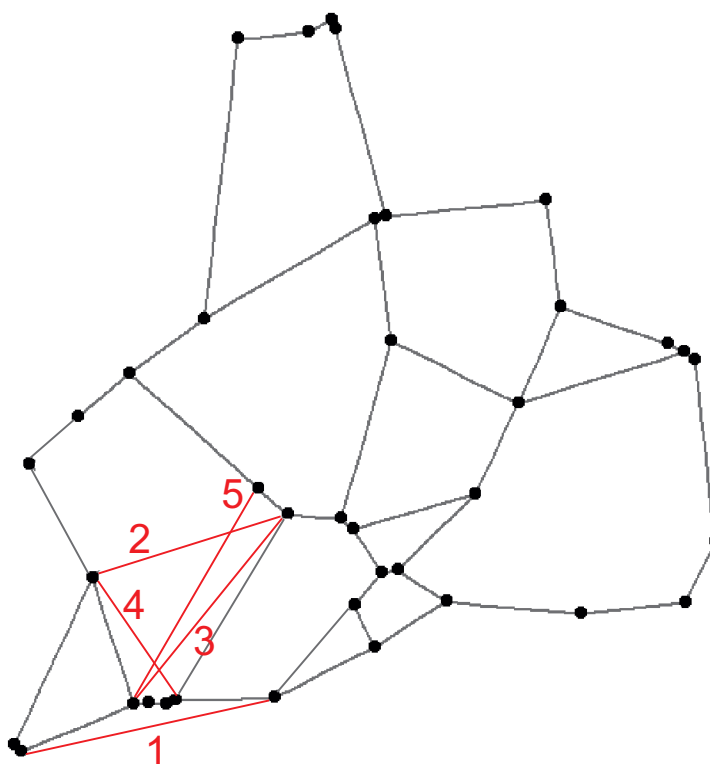
Obr. 51: Histogram nejkrat. cest ve vylepšené síti části 1 pro 8 vypuštěných hran

5.5.2 Zlínský kraj, část 2

Distribuce F_k počítáme pro takové k -tice vypouštěných hran, které odpovídají zhruba násobkům 10 % hran až do 50 % vypuštěných hran, což odpovídá počtům 0, 5, 10, ..., 25 hran.

Tabulka 15: Nejlepší výsledky v části 2 metodou distribuce délek nejkratších cest bez omezení délky hrany.

| z | do | Délka hrany [m] | Hodnota zlepšení |
|----------|----------|-----------------|------------------|
| 3512A014 | 2534A026 | 7544,06 | 14,7028 |
| 2534A032 | 2534A021 | 5972,25 | 13,8557 |
| 2534A004 | 2534A021 | 7112,15 | 13,1381 |
| 2534A032 | 2534A025 | 4297,87 | 11,6438 |
| 2534A020 | 2534A004 | 7253,30 | 11,6206 |



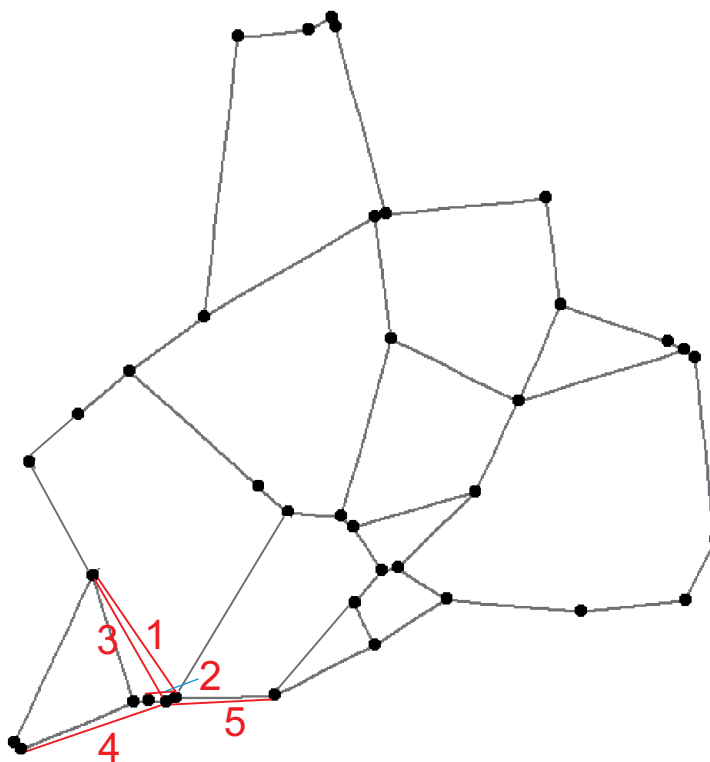
Obr. 52: Nejlepší výsledky v části 2 metodou distribuce délek nejkratších cest bez omezení délky hrany

Dostali jsme naprosto shodné výsledky, jako u metody propojenosti, a to i včetně pořadí přidávaných hran. I závěr tedy bude s touto metodou shodný.

Omezíme-li délku přidávaných hran na 5 km, výsledky budou následující:

Tabulka 16: Nejlepší výsledky v části 2 metodou distribuce délek nejkratších cest s omezením délky hrany 5 km.

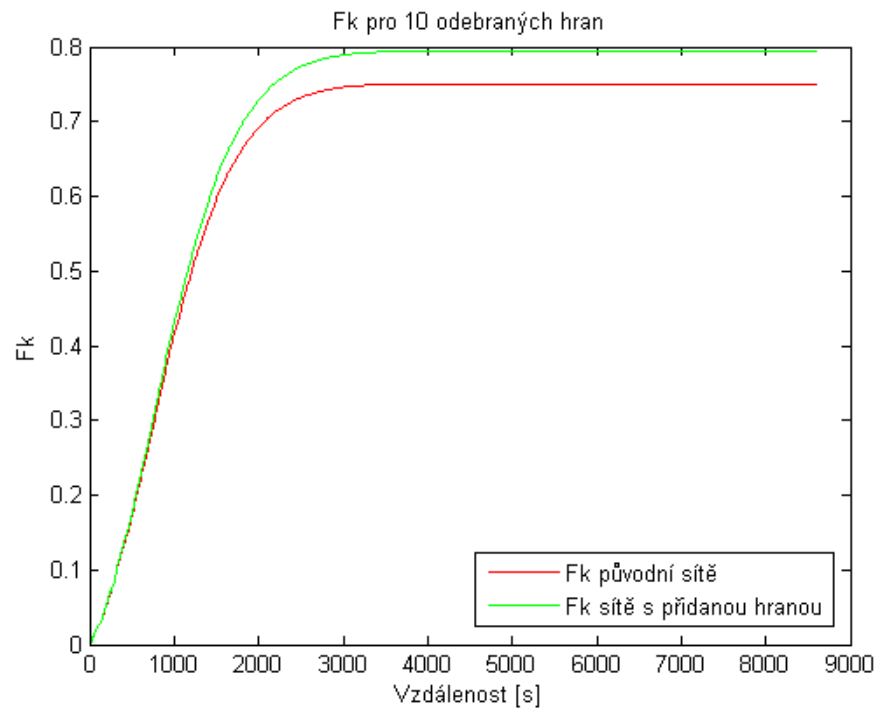
| z | do | Délka hrany [m] | Hodnota zlepšení |
|----------|----------|-----------------|------------------|
| 2534A032 | 2534A025 | 4297,87 | 9,0767 |
| 2534A005 | 2534A025 | 785,43 | 5,392 |
| 2534A032 | 2534A024 | 4248,18 | 5,1366 |
| 3512A014 | 2534A024 | 4413,10 | 4,4062 |
| 2534A024 | 2534A026 | 3191,48 | 4,0422 |



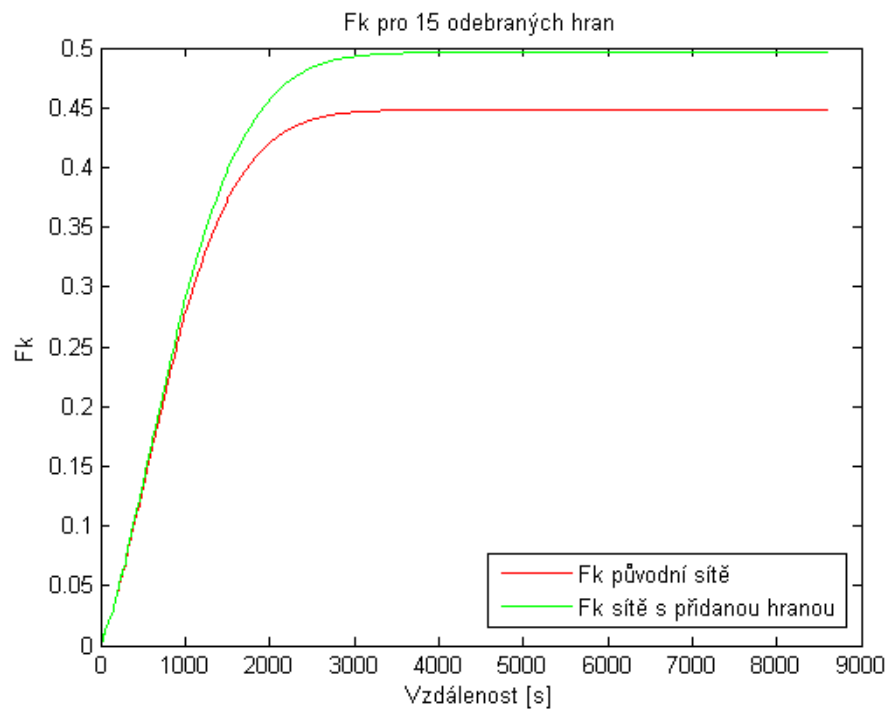
Obr. 53: Nejlepší výsledky v části 2 metodou distribuce délek nejkratších cest s omezením délky hrany 5 km

Kromě prvních čtyř výsledků, které jsou až na pořadí shodné s prvními čtyřmi výsledky metody propojenosti, tato metoda navrhuje přidat hranu, která se ještě neobjevila mezi výsledky žádné z předešlých metod. Nachází se ve stejné oblasti jako ostatní přidané hrany, ale stejně jako čtvrtý nejlepší výsledek vede vně sítě, kde by mohla křížit jiné hrany. Hodnota zlepšení nejlepšího výsledku, který se shoduje s nejlepším výsledkem metody propojenosti, je výrazně vyšší než hodnoty zlepšení ostatních výsledků. Přidat nějakou hranu do této oblasti a zvýšit tak poměr hran a vrcholů by určitě mělo smysl.

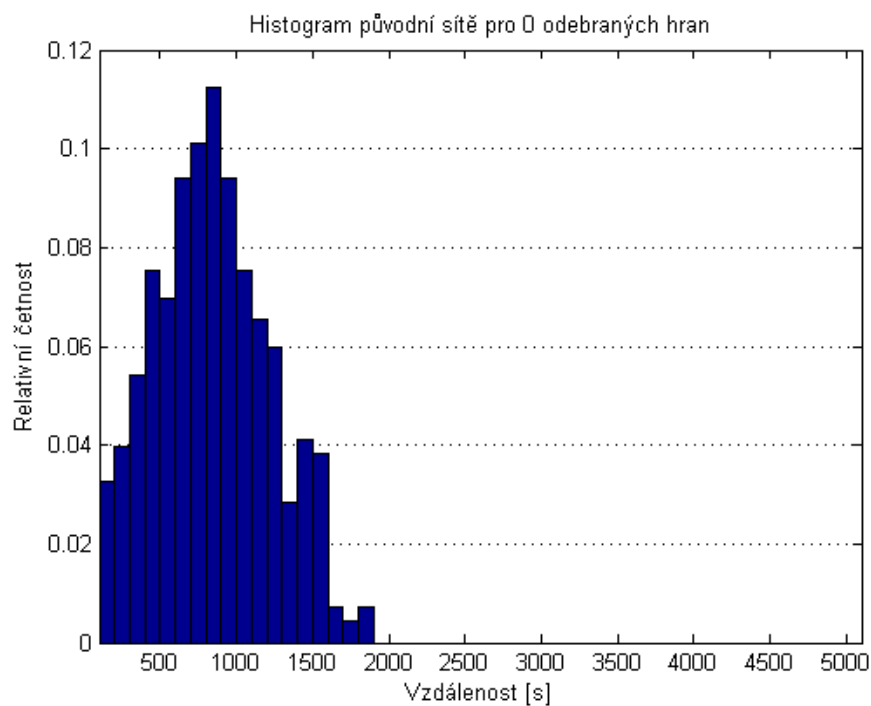
Grafická podoba zlepšení části 2 vypadá v obou případech obdobně. Jako příklad si ukážeme nejlepší výsledek s omezením délky hrany. Následující obrázky znázorňují zlepšení F_k pro 10 a 15 odebraných hran a histogramy délek nejkratších cest pro původní a vylepšenou síť bez odebraných hran a pro 10 odebraných hran.



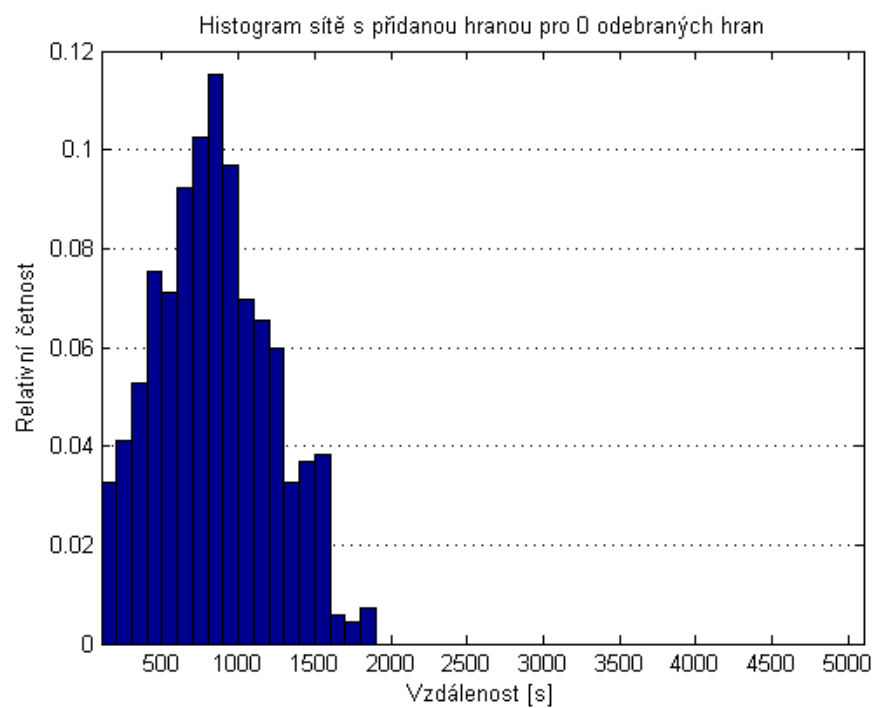
Obr. 54: Zlepšení F_k části 2 po přidání nejlepší hrany pro 10 odebraných hran



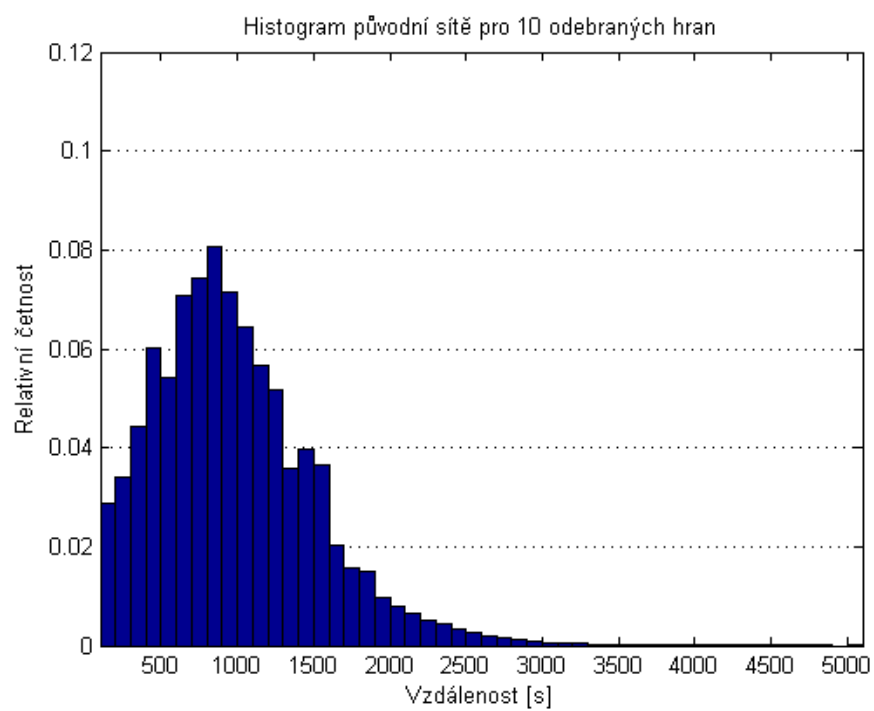
Obr. 55: Zlepšení F_k části 2 po přidání nejlepší hrany pro 15 odebraných hran



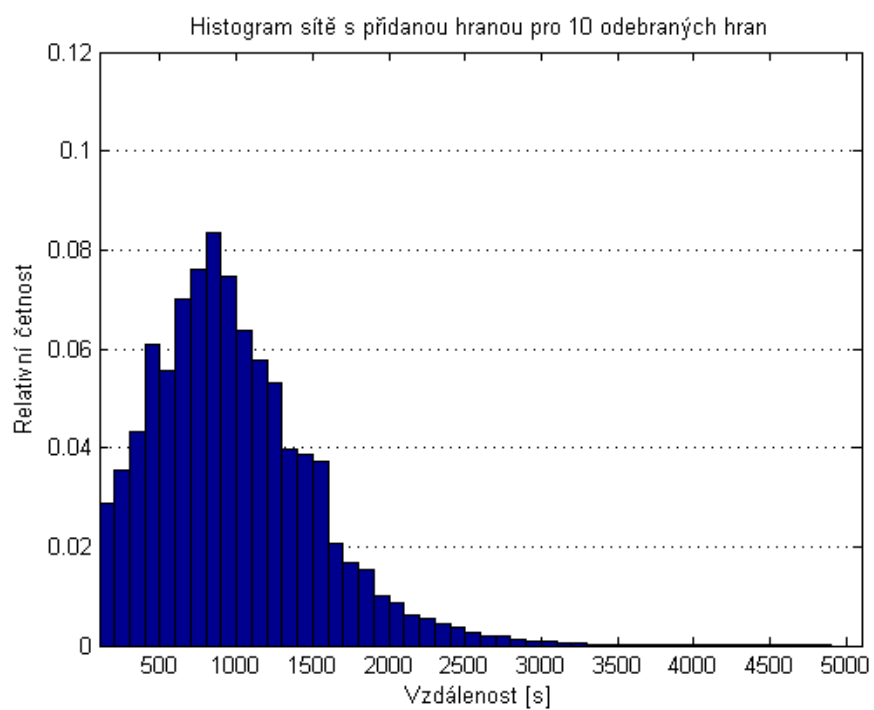
Obr. 56: Histogram nejkrat. cest v původní síti části 2 bez vypuštěných hran



Obr. 57: Histogram nejkrat. cest ve vylepšené síti části 2 bez vypuštěných hran



Obr. 58: Histogram nejkrat. cest v původní síti části 2 pro 10 vypuštěných hran



Obr. 59: Histogram nejkrat. cest ve vylepšené síti části 2 pro 10 vypuštěných hran

Závěr

V práci jsme se zabývali aplikací teorie grafů při modelování robustnosti silničních sítí, což je odolnost proti náhodným událostem, které mohou mít na síť v jistém smyslu negativní dopad. Použité postupy lze bez problému aplikovat i na jiné sítě. S ohledem na povahu sítí a důsledků náhodných událostí jsme vlastně pracovali se speciální verzí diskrétních systémů.

První kapitola poskytuje potřebné teoretické základy nutné k porozumění celé práci. Dále byly uvedeny způsoby zadání grafu do počítače a základní algoritmy na grafech. Představili jsme tři metody určení robustnosti sítě a využití metody Monte Carlo při jejich výpočtu.

Představené metody byly použity jednak k výpočtu a porovnání robustnosti silničních sítí a jednak ke zvyšování robustnosti silničních sítí. Pracovali jsme s reálnými daty celých silničních sítí Karlovarského a Zlínského kraje a také dvou menších částí sítě Zlínského kraje. Data byla poskytnuta Centrem dopravního výzkumu, v. v. i. v rámci projektu TRISK - VG20102015057.

Jednotlivé metody se liší svojí složitostí a hlavně časovou náročností výpočtu. Výsledky jednotlivých metod závisí na zadaných vstupních parametrech.

Při porovnávání robustnosti silniční sítě Karlovarského a Zlínského kraje všechny metody shodně označily síť Karlovarského kraje za robustnější. V porovnání části 1 a části 2 Zlínského kraje rovněž všechny metody považují za robustnější část 2, což se ovšem vzhledem k rozdílné struktuře těchto sítí dalo očekávat.

Sítím části 1 a části 2 byla zvyšována robustnost přidáváním jedné hrany. Výsledky jednotlivých metod se navzájem liší, často však jen pořadím nejlepších výsledků. Hodnoty zlepšení robustnosti u jednotlivých výsledků dané metody se mnohdy navzájem moc neliší a přidáním takových hran do grafu by bylo dosaženo srovnatelného efektu vylepšení sítě. Navržené hrany propojují vrcholy v oblastech grafů s řidším propojením a přidání hran má tedy dobrý smysl.

Dále z výsledků plyne důraz na rozumné zadání vstupních parametrů, zejména omezení délky přidávaných hran. Toto omezení zavádíme z důvodu finanční náročnosti výstavby. V hustší síti (část 2) má smysl přidávat i poměrně krátké hrany (do 5 km), zatímco v řídké síti (část 1), sice přidáním kratších hran dosáhneme určitého zlepšení, ale přidané hrany jsou většinou paralelní s hranami původní sítě, což není žádoucí.

Přínos této diplomové práce spočívá zejména v aplikaci různých metod při modelování robustnosti sítí, a to nejen silničních. Popsané postupy je možno využít v praxi v mnoha oblastech lidské činnosti, neboť různých sítí je v lidské společnosti nespočet a jejich spolehlivé fungování je nutností.

Příloha 1

Seznam přiložených programů:

- cesty_MC.m
- cesty_prime_pocitani.m
- komp_hrany.m
- komponenty.m
- krizeni.m
- NACTIDATA4.m
- NACTISOURADNICE.m
- nahoda_komp_hrany.m
- nejkratsi_cesta_vsude.m
- pridavani_hran.m
- robustness_Fk.m
- robustness_Sk.m
- START.m
- TESTPOLE.m
- vypousteni_hran.m

Stručný popis přiložených programů a funkcí:

- START.m – úvodní program, ze kterého se spouští ostatní programy. Proveďte uživatele celým procesem výpočtu, slouží k volbě metody a zadání potřebných parametrů. V úvodu zdrojového textu je třeba nastavit cestu k datům, chce-li uživatel z programu načíst i graf.

Uživatel zadá tyto parametry:

- R – počet iterací metody Monte Carlo
- vyp – vektor počtů vypouštěných hran – tvoří se pomocí proměnných maxx (maximální počet vypuštěných hran) a skok (násobky počtů hran)
- opak – počet iterací m. Monte Carlo na výpočet délek nejkratších cest v algoritmu F_k v případě velkého počtu vrcholů v grafu
- chyba – ukončovací podmínka v algoritmu metody komponent a v m. Monte Carlo viz *opak*
- komponent – požadovaný počet komponent souvislosti v metodě komponent
- rychlost – max. rychlost průjezdu přidávanými hranami
- omezeni_vzdalenosti.m – omezení délky přidávaných hran v metrech

Nenačte-li uživatel graf z úvodního programu, je navíc potřeba zadat:

- uk – ukazatel na následníky vrcholů *
- nasl – seznam následníků jednotlivých vrcholů *
- hrany – seznam hran vedoucích do následníků *
- vzdal – délky hran vedoucích do následníků *
- souradnice – souřadnice vrcholů grafu v R^2

* dle reprezentace grafu seznamem následníků

- `cesty_MC.m` – tato funkce je součástí funkce `robustness_Fk.m` a slouží k výpočtu délek nejkratších cest a dílčích hodnot F_k metodou Monte Carlo.
- `cesty_prime_pocitani.m` – funkce je součástí funkce `robustness_Fk.m` a slouží k přesnému výpočtu délek nejkratších cest a dílčích hodnot F_k , tedy postupně volí všechny vrcholy v grafu, z nichž počítá cesty do všech ostatních vrcholů.
- `komp_hrany.m` – hlavní funkce pro metodu komponent, počítá, kolik hran je průměrně potřeba odebrat, aby se síť rozpadla na požadovaný počet komponent souvislosti.
- `komponenty.m` – funkce sloužící k určení komponent souvislosti grafu. Výstupem je pole s čísly komponent jednotlivých vrcholů, přímo doplněné o číslo nejvyšší komponenty.
- `krizeni.m` – funkce na zjištění, jestli se dané hrany kříží, na základě vzájemné polohy vektorů a přímk v rovině. Výstupem je logická proměnná „krizi“. Je součástí funkce `pridavani_hran.m`.
- `NACTIDATA4.m` – funkce na načtení a kódování dat, pomocí které načteme data v požadovaném formátu. Tuto funkci poskytl vedoucí práce.
- `NACTISOURADNICE.m` – funkce pro načtení vrcholů a jejich souřadnic, navazuje na funkci `NACTIDATA4.m`. Výstupem je matice souřadnic, kde řádek odpovídá číslu vrcholu a dva sloupce jeho souřadnicím ve 2D. Funkce byla poskytnuta vedoucím práce.
- `nahoda_komp_hrany.m` – funkce na vypouštění náhodných hran tak dlouho, dokud se síť nerozpadne na požadovaný počet komponent souvislosti. Ke zjištění komponent využívá funkci `komponenty.m` a naopak je součástí funkce `komp_hrany.m`.
- `nejkratsi_cesta_vsude.m` – pomocí Dijkstrova algoritmu zjistí délky nejkratších cest ze zadaného vrcholu do všech ostatních vrcholů v grafu. Lze také

zjistit, kterými vrcholy cesta vede.

- `pridavani_hran.m` – základní funkce, která se jako první spouští z programu `START.m`. Prochází nepropojené vrcholy grafu, kontroluje křížení hran pomocí funkce `krizeni.m`, přidává přípustné hrany do grafu a spouští se z ní vybraná metoda pro posouzení robustnosti sítě, prostřednictvím programů `komp_hrany.m`, `robustness_Fk.m` a `robustness_Sk.m`. Nakonec vypíše výsledky a vykreslí grafy v počtu dle zvolené metody a počtů k -tic vypuštěných hran. V případě zvolené metody F_k vykreslí porovnání hodnot F_k původní a nové sítě a histogramy délek nejkratších cest v obou sítích pro každou zadanou k -tici hran.
- `robustness_Fk.m` – program na výpočet rozdělení délek nejkratších cest. Ze zadaného grafu vypustí požadovaný počet hran spuštěním funkce `vypousteni_hran.m`, zjistí délky cest funkcemi `cesty_MC.m` nebo `cesty_prime-_pocitani.m` a spočítá odhad F_k metodou Monte Carlo. Výstupem je matice distribucí, kde řádky odpovídají zadaným počtům vypuštěných hran, relativní četnosti délek nejkratších cest a proměnná definující osu x v histogramu.
- `robustness_Sk.m` – program na výpočet propojenosti grafu. Ze zadaného grafu vypustí požadovaný počet hran spuštěním funkce `vypousteni_hran.m`, zjistí komponenty souvislosti pomocí funkce `komponenty.m` a spočítá odhad S_k metodou Monte Carlo. Výsledkem je vektor hodnot S_k pro zadané počty vypuštěných hran.
- `TESTPOLE.m` – pomocná funkce, která testuje, zda a kde je v poli „pole“ uložen znak. Je součástí funkce `NACTIDATA4.m` a byla poskytnuta vedoucím práce.
- `vypousteni_hran.m` – pomocná funkce pro vypuštění požadovaného počtu hran z grafu, což se realizuje nastavením jejich délek v poli vzdáleností na Inf. Je součástí funkcí `robustness_Fk.m` a `robustness_Sk.m`.

Data od CDV, použita při výpočtech:

- kv_zaklad_v2.txt
- zlin_zaklad_v2.txt
- zlin_cast1_trb.txt
- zlin_cast2_trb.txt
- cast1_uzly_trb.txt
- cast2_uzly_trb.txt

Literatura

- [1] Matoušek, J., Nešetřil, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky*, 3. vydání, Nakladatelství Karolinum, Praha, 2007, ISBN 978-80-246-1411-3
- [2] Volek, J., Linda, B.: *Teorie grafů - a aplikace v dopravě a veřejné správě*, 1. vydání, Univerzita Pardubice, Pardubice, 2012, ISBN 978-80-7395-225-9
- [3] Walter, J., Vejmla, S., Fiala, P.: *Aplikace metod síťové analýzy v řízení a plánování*, 1. vydání, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha, 1989, ISBN 80-03-00101-3
- [4] Töpfer, P.: *Algoritmy a programovací techniky*, 2. vydání, Prometheus, Praha, 2007, ISBN 978-80-7196-350-9
- [5] Dřímál, J., Trunec, D.: *Úvod do metody Monte Carlo*, 1. vydání, rektorát UJEP, Brno, 1988, ISBN 80-210-022-8
- [6] Virius, M.: *Aplikace matematické statistiky: Metoda Monte Carlo*, 3. vydání, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1998, ISBN 80-01-01-01779-6
- [7] Fabian, F., Kluiber, Z.: *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění*, 1. vydání, Nakladatelství PROSPEKTRUM, Praha, 1998, ISBN 80-7175-058-1
- [8] Bíl, M., Vodák, R.: *Odolnost silniční sítě proti následkům katastrof*, Silniční obzor - roč. 74, červenec – srpen 2013, 176–179
- [9] Morohosi, H.: *Measuring the network robustness by Monte Carlo estimation of shortest path length distribution*, Mathematics and Computers in Simulation 81 (2010), 551–559