

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Tomáš Studený

Vztahy mezi funkcemi úhlů

Olomouc 2015

vedoucí práce: Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci s názvem *Vztahy mezi funkcemi úhlů* vypracoval samostatně, a že veškeré zdroje jsou uvedeny v jejím závěru.

V Olomouci

.....
Tomáš Studený

Chtěl bych poděkovat Mgr. Jitce Hodaňové, Ph.D. za její čas při konzultacích, připomínky a cenné rady při zpracování mé bakalářské práce. Dále bych poděkoval své rodině, přítelkyni a blízkým za jejich podporu.

Obsah

1. Goniometrické funkce	7
1.1. Goniometrické funkce ostrého úhlu	7
1.2. Velikost úhlu v stupňové a obloukové míře	8
1.2.1. Stupňová míra	8
1.2.2. Oblouková míra	8
1.2.3. Vztah mezi stupňovou a obloukovou mírou	9
1.3. Orientovaný úhel	9
1.4. Funkce sinus a cosinus	10
1.4.1. Sinus a cosinus	10
1.4.2. Grafy funkcí sinus a cosinus	11
1.4.3. Tabulka funkcí sinus a kosinus	12
1.5. Funkce tangens a kotangens	13
1.5.1. Tangens a kotangens	13
1.5.2. Grafy funkcí tangens a kotangens	13
1.5.3. Tabulka funkcí tangens a kotangens	14
1.6. Goniometrické rovnice	14
1.6.1. Příklady	15
2. Goniometrické vzorce	19
2.1. Základní vztahy mezi hodnotami goniometrických funkcí	19
2.1.1. Vztahy mezi funkcemi jednoho argumentu	19
2.2. Součtové vzorce	22
2.2.1. Součtové vzorce goniometrických funkcí sinus a kosinus	22
2.3. Další goniometrické vzorce	23
2.3.1. Vztahy mezi funkcemi dvojnásobného argumentu	23
2.3.2. Vztahy mezi funkcemi polovičního argumentu	25
2.3.3. Vztahy mezi součtem a rozdílem goniometrických funkcí	27
3. Trigonometrie	29
3.1. Historie trigonometrie	29
3.1.1. Starověké Řecko	29
3.1.2. Středověká trigonometrie	30
3.1.3. Arabská trigonometrie	30
3.1.4. Evropská trigonometrie	30
3.2. Sinová věta	31

3.3 Kosinová věta.....	33
3.4. Další trigonometrické věty a vzorce.....	34
3.4.1. Věty a vzorce pro výpočty obsahů trojúhelníku.....	34
3.4.2. Vzorec pro poloměr kružnice opsané trojúhelníku	36
3.5. Využití sinové, kosinové věty a vzorců pro obsah trojúhelníku v praktických úlohách	36
4. Praktické úlohy ve stavebnictví.....	41
4.1. Úlohy.....	41
Závěr	53
Seznam použitých zdrojů	54
Seznam grafů.....	55
Seznam tabulek	56
Seznam obrázků	57
Seznam použitých matematických symbolů a značek	58

Úvod

Lidé, nacházející se na dvou-oborovém studiu, mají vždy možnost výběru oproti jedno-oborovému, kde budou svou bakalářskou, respektive diplomovou práci vypracovávat. Je na každém z nás, jak se rozhodneme. Většinou volíme ten předmět, který je nám bližší. Vzhledem k tomu, že se nacházím na dvou-oborovém studiu, měl jsem možnost rozhodnout se mezi matematikou a geografii. Nějakou dobu jsem se rozmýšlel a zvolil tedy matematiku. Výběr témat k závěrečným pracím na matematice bylo opravdu mnoho. Vybral jsem si téma, které se zabývá vztahy mezi funkcemi úhlů, protože se mi jeví jako zajímavé a využitelné v praktickém životě.

Cílem mojí práce je shrnutí základních a důležitých poznatků v oblasti goniometrických funkcí, vzorců, trigonometrie s její historií a řešení praktických úloh ve stavebním oboru. Práci rozdělím do čtyř kapitol a budu ji vytvářet tak, aby mohla sloužit jako příručka k řešení daných problematik.

V první kapitole se budu zabývat goniometrickými funkcemi, jejich vlastnostmi, grafy a pojmy, které s nimi souvisí. Závěrečná část této kapitoly bude náležet příkladům goniometrických rovnic s nejvhodnějším řešením a slovním komentářem.

Další kapitola bude obsahovat goniometrické vzorce, které rozdělím do třech skupin. Ke každému vzorci se pokusím přiřadit ukázkový příklad s řešením a slovním komentářem.

Trigonometrii přidělím předposlední kapitole mojí práce. V úvodu se budu zabývat především historií této matematické disciplíny. Další stránky budou náležet trigonometrickým větám a vzorcům, kde bych chtěl uvést ukázkové příklady s řešením. Poslední části této kapitoly přiřadím praktické úlohy, se kterými by se mohli studenti gymnázií a středních škol, setkat v nižších ročnících.

Praktické úlohy v oboru stavebnictví budou obsaženy v poslední kapitole. Zde se pokusím vytvořit takové situace, se kterými by se lidé, nebo studenti v daném oboru, mohli setkat. Pro lepší představivost se pokusím vytvořit pro většinu úloh obrázky.

Návrhy jednotlivých úloh budou využitelné pro výuku dané tematiky v matematice především na středních školách.

1. Goniometrické funkce

S goniometrickými funkcemi mají studenti možnost se poprvé setkat na konci druhého stupně základních škol. Jedná se o matematickou tematiku, která se dále probírá hlouběji v nižších ročnících středních škol a gymnázií. Goniometrické funkce představují základ celé goniometrie a využívají se při zkoumání trojúhelníků nebo periodických jevů. V této kapitole se nachází goniometrické funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens. Jsou zde uvedeny jejich vlastnosti, grafy s průběhy, tabulky a vyřešeny příklady související s touto tematikou.

1.1. Goniometrické funkce ostrého úhlu

Goniometrické funkce ostrého úhlu lze uplatnit v pravoúhlém trojúhelníku. Ten má velikost jednoho úhlu $\frac{\pi}{2}$, proti němuž leží přepona trojúhelníku. Další dva úhly jsou ostré a protilehlé s rameny trojúhelníku. Ostrým úhlem nazýváme úhel $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Goniometrické funkce pro ostrý úhel α se dají definovat pomocí pravoúhlého trojúhelníku ABC , kde c je přeponou, následovně:

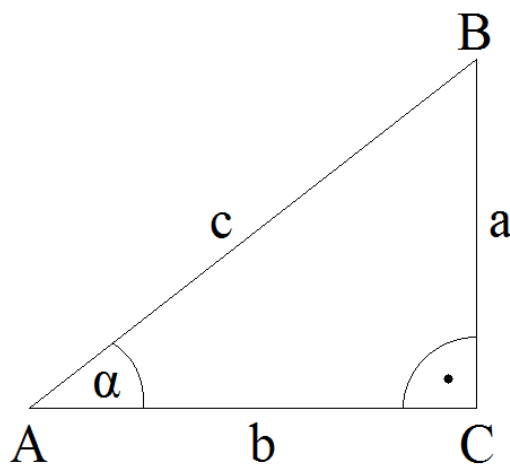
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}}$$

(Bartsch, H-J., str. 357)



Obr. 1.1.1 – Pravoúhlý trojúhelník

1.2. Velikost úhlu v stupňové a obloukové míře

Stupňová a oblouková míra představuje dvě možnosti, jak velikosti úhlů měřit. Nejprve následuje popis stupňové míry, pak míry obloukové a nakonec vztah mezi nimi.

1.2.1. Stupňová míra

Ve stupňové míře se velikost úhlu představuje jako nezáporné číslo vyjadřující, kolikrát je velikost úhlu větší než jeden stupeň. Základní jednotkou je jednotkový úhel stupňové míry, zkráceně se nazývá stupeň. Tento stupeň znázorňuje $\frac{1}{360}$ plného úhlu, $\frac{1}{180}$ přímého úhlu, $\frac{1}{90}$ pravého úhlu. Další menší jednotky se nazývají minuta a vteřina. Jedna minuta představuje $\frac{1}{60}$ stupně a jedna vteřina $\frac{1}{60}$ minuty. Odtud tedy platí:

$$1^\circ = 60' = 3600''.$$

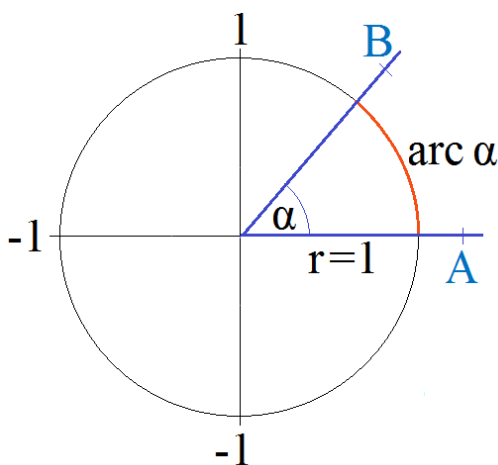
(Odvárko, O., 2008, 24-25)

1.2.2. Oblouková míra

Pro obloukovou míru je nezbytně nutná jednotková kružnice k , kde její poloměr $r = 1$ a úhel α , který se nachází ve středu této kružnice a skládá se ze dvou ramen s body A, B . Velikost úhlu α je rovna délce oblouku. Arkus α představuje číselnou velikost pro tento oblouk. Jeden radián představuje velikost takového úhlu, který se středem ve vrcholu úhlu na jednotkové kružnici, vytíná oblouk jednotkové délky. Radián je tedy úhlovou jednotkou obloukové míry a lze zapsat následovně:

$$1\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 45''$$

(Rektorys, K., 1995, str. 70-71)



Obr. 1.2.2.1 – Jednotková kružnice

Značka *rad* se při zápisech velikostí v obloukové míře většinou vynechává.

1.2.3. Vztah mezi stupňovou a obloukovou mírou

Jak již bylo uvedeno, tak úhel se dá měřit pomocí stupňové a obloukové míry. Existuje rovněž vztah mezi těmito dvěma mírami a jejich převod z jedné do druhé a naopak. Velikost úhlu α náleží stupňové míře a velikost úhlu ω je přiřazena obloukové míře. Plný úhel $\alpha = 360^\circ$ a plný úhel $\omega = 2\pi$. Platí tedy vztah:

$$\frac{\alpha}{\omega} = \frac{180^\circ}{\pi},$$

odkud lze zjistit hodnotu úhlu α i ω . Následuje tabulkový přehled s převody stupňové a obloukové míry.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
ω	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

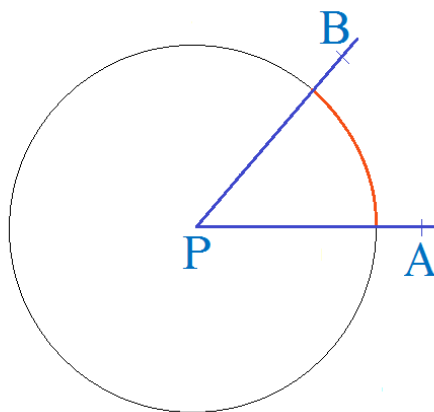
Tab. 1.2.3.1 – Převody mezi stupňovou a obloukovou mírou

(Rektorys, K., 1995, str. 70-71)

V dnešní době se pro převody z obloukové míry do stupňové a obráceně, využívají především kalkulátory nebo počítačové programy.

1.3. Orientovaný úhel

Orientovaný úhel je pojem, který je nezbytně nutný uvést k problematice goniometrických funkcí. Představuje uspořádanou dvojici polopřímek, které mají počátek ve společném bodě. Na obr. 1.3.1 jsou sestrojeny dvě polopřímky AP a BP , kde bod P představuje počáteční bod. Pokud byly polopřímky zapsány v pořadí AP a BP , znamená to, že AP je počátečním ramenem a BP koncovým ramenem orientovaného úhlu $\angle APB$. Kdyby polopřímky byly zapsány v obráceném pořadí, tedy BP a AP , jednalo by se o úhel $\angle BPA$, který je jiným úhlem, než ten v předcházejícím případě. (Šmakal, S.; Budínský, B., 1968, str. 5-14)



Obr. 1.3.1 – Orientovaný úhel

Velikost úhlu spočívá v otáčení s rameny. Pokud se otočí koncové rameno v protisměru hodinových ručiček BP znamená to, že se velikost úhlu zvětšuje, když se však pootočí ve směru hodinových ručiček, úhel se zmenšuje. V případě, že se otočí počátečním ramenem AP , tak se jedná o neorientovaný, nikoliv o orientovaný. Pro velikost $\angle APB$ platí:

$$0 \leq \angle APB \leq 360^\circ,$$

$$0 \leq \angle APB \leq 2\pi.$$

Pro velikost orientovaného úhlu se nejběžněji užívá název argument. (Šmakal, S.; Budínský, B., 1968, str. 5-14)

1.4. Funkce sinus a cosinus

V této části se nachází goniometrické funkce s jejich grafy, vlastnostmi a tabulkami.

1.4.1. Sinus a cosinus

Jestliže strana a je protější pro úhel φ , a strana c je přepona, kde φ je libovolná velikost orientovaného úhlu, potom podíl $\frac{a}{c}$ se nazývá *sinus* φ . Jestliže strana b je vedlejší pro úhel φ a strana c je přepona, kde φ je libovolná velikost orientovaného úhlu, potom podíl $\frac{b}{c}$ se nazývá *kosinus* φ .

Zapisuje se tedy:

$$\sin \varphi = \frac{a}{c},$$

$$\cos \varphi = \frac{b}{c}.$$

Hodnoty goniometrických funkcí $\sin \varphi$ a $\cos \varphi$ závisí pouze na velikosti úhlu φ . (Šmakal, S.; Budínský, B., 1968, str. 14-20)

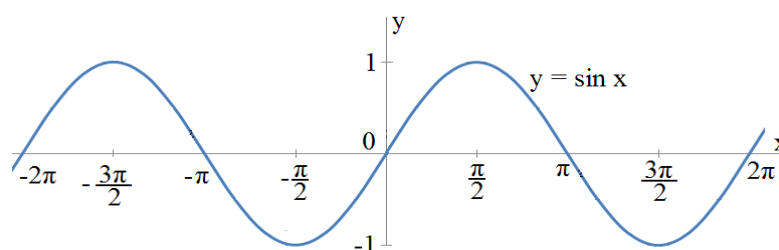
Pro obě goniometrické funkce platí stejný $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a také $\mathcal{H}(f) = \langle -1; 1 \rangle$. Značné rozdíly však jsou v místech, kde funkce rostou a kde klesají. Funkce $\sin x$ roste v každém intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ a klesá v každém intervalu $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$. Funkce $\cos x$ je rostoucí v každém intervalu $(\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi)$ a klesající v každém intervalu $(2k\pi; \pi + 2k\pi)$. Maximální hodnota obou funkcí je $+1$ avšak pro každou v jiném bodě. Funkce $\sin x$ má maximum v bodech $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kdežto funkce $\cos x$ v bodech $x = 2k\pi$. Minimální hodnota obou funkcí je -1 . Pro funkci $\sin x$ se minimum nachází v bodech $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, a minimum funkce $\cos x$ náleží v bodech $x = \pi + 2k\pi$. Pro každý bod $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin x, \\ \cos(-x) &= \cos x.\end{aligned}$$

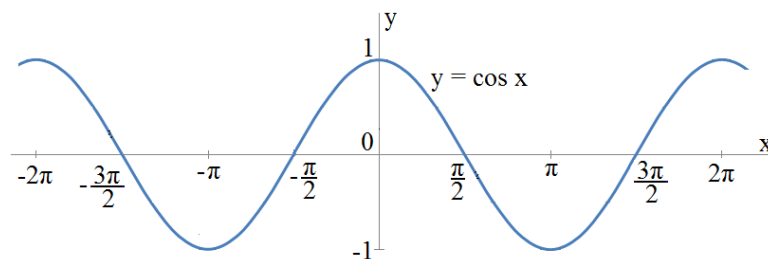
Goniometrická funkce $\sin x$ je tedy lichou funkcí. Goniometrická funkce $\cos x$ se označuje funkcí sudou. Vlastnosti těchto funkcí lze vyčíst z grafů, které se nacházejí v následujícím odstavci.

1.4.2. Grafy funkcí sinus a cosinus

Graf, který se nachází na prvním obrázku, se nazývá sinusoida a je grafem funkce $y = \sin x$. Na druhém obrázku lze vidět graf funkce $y = \cos x$, kterému se přezdívá kosinusoida. S pohledem na oba grafy lze říct, že jsou poměrně podobné. Nutno dodat, že graf kosinusoidy se dá získat posunutím sinusoidy o $\frac{\pi}{2}$ ve směru záporné poloosy x .



Graf 1.4.2.1 – Průběh funkce sinus



Graf 1.4.2.2 – Průběh funkce kosinus

Kromě grafů funkcí $\sin x$ a $\cos x$ je možné setkat se s takovými grafy funkcí, kde je amplituda nebo perioda zvýšená či zmenšená, sinusoida či kosinusoida je posunutá vpravo nebo vlevo na ose x či na ose y , nebo hodnoty funkce jsou jiné než ± 1 .

Funkce, která je dána předpisem $f: y = 2 \sin x$ je na první pohled podobná jako $y = \sin x$, ale liší se číslem 2, které zvyšuje amplitudu. To znamená $\mathcal{H}(f) = \langle -2; 2 \rangle$

V případě předpisu funkce $g: y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, lze říct, že funkce je posunutá směrem doprava o $\frac{\pi}{3}$ na ose x . Pokud existuje funkce $h: y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, znamená to, že funkce je posunutá o $\frac{\pi}{2}$ směrem vlevo na ose x .

Funkce, pro kterou platí předpis $j: y = \sin x + 1$, se liší $+1$ od funkce $y = \sin x$. Tato hodnota $+1$ posouvá funkci směrem nahoru na ose y . Pokud by $k: y = \sin x - 3$, znamená to, že funkce je posunutá směrem dolů o hodnotu -3 na ose y .

Je dán předpis funkce $l: y = \sin 4x$, a to znamená, že perioda funkce je čtyřnásobně menší. V případě $m: y = \sin \frac{x}{2}$, lze říct, že perioda je dvojnásobně větší u funkce $y = \sin x$.

1.4.3. Tabulka funkcí sinus a kosinus

Jak již bylo uvedeno, tak nejvyšší hodnota obou funkcí je $+1$, ale každá má tuto hodnotu v jiném bodě. V bodě $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ se obě funkce shodují a jejich hodnota je $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Radiány	Stupně	Sinus	Kosinus
0	0°	0	1
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0
-----------------	------------	---	---

Tab. 1.4.3.1 – Hodnoty funkcí sinus a kosinus

1.5. Funkce tangens a kotangens

1.5.1. Tangens a kotangens

Podíl $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$, pokud má smysl, nazýváme *tangens* φ , podíl $\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$, pokud má smysl, nazýváme *kotangens* φ . Platí tedy:

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

$$\cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Platí však dvě podmínky. Zlomek $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ má smysl, pokud $\cos \varphi \neq 0$. Zlomek $\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ má smysl, pokud $\sin \varphi \neq 0$. (Šmakal, S.; Budínský, B., 1968, str. 20-22)

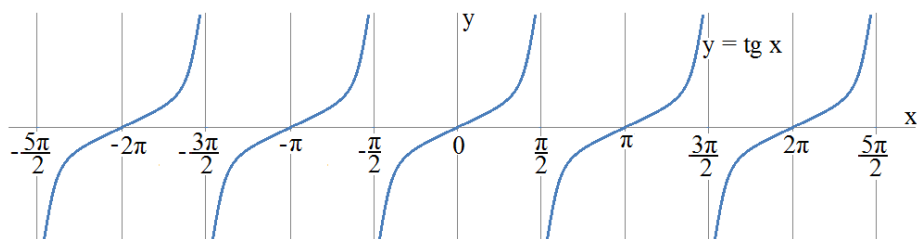
Goniometrické funkce tangens a kotangens se liší od funkcí sinus a kosinus, které byly uvedeny na předcházejících stránkách. Odlišují se definičním oborem, oborem hodnot a také tím, kde funkce rostou a klesají. Funkce $\tan x$ má $\mathcal{D}(f) = R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, pro funkci $\cot x$ je $\mathcal{D}(f) = R - \{k\pi\}$. Obě funkce mají totožný obor hodnot a odtud tedy $\mathcal{H}(f) = \langle -\infty; \infty \rangle$. Značný rozdíl mezi funkcemi je v tom, že $\tan x$ pouze roste, kdežto $\cot x$ pouze klesá. Funkce $\tan x$ je rostoucí v každém intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ a funkce $\cot x$ je klesající v každém intervalu $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$. Funkce $\tan x$ a $\cot x$ jsou liché funkce, protože platí:

$$\tan(-x) = -\tan x,$$

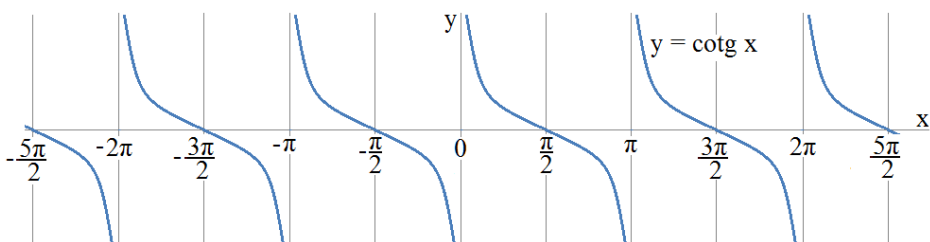
$$\cot(-x) = -\cot x.$$

1.5.2. Grafy funkcí tangens a kotangens

Na první pohled, lze říci, že grafy funkcí sinus a kosinus se značně liší od grafů funkcí tangens a kotangens. Jak již bylo uvedeno, tak obor hodnot tangens a kotangens je $\mathcal{H}(f) = \langle -\infty; \infty \rangle$, kdežto sinus a kosinus mají $\mathcal{H}(f) = \langle -1; 1 \rangle$. To znamená, že první dvě funkce jsou neomezené, ale sinus a kosinus jsou omezené shora i zdola. Grafem funkce $\tan x$ je tangentoida a graf funkce $\cot x$ se nazývá kotangentoida.



Graf 1.5.2.1 – Průběh funkce tangens



Graf 1.5.2.2 – Průběh funkce kotangens

1.5.3. Tabulka funkcí tangens a kotangens

Obě funkce mají stejnou hodnotu $+1$ v bodě $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Naopak obě funkce nejsou definovány v jednom bodě a to $\tan x$ v bodě $x = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ a $\cot x$ v bodě $x = (k\pi)$.

Radiány	Stupně	Tangens	Kotangens
0	0°	0	-
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	-	0

Tab. 1.5.3.1 – Hodnoty funkcí tangens a kotangens

1.6. Goniometrické rovnice

Jsou to rovnice pro neznámou x tvaru

$$f(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, x) = 0,$$

Základní goniometrickou rovnicí s neznámou x nazýváme rovnici typu $g(x) = k$, kde g je goniometrická funkce a k je reálné číslo. (Bartsch, H-J., str. 372)

Goniometrickou rovnici lze řešit někdy tak, že rovnici, v níž se vyskytují různé goniometrické funkce neznámé x , se upraví pomocí vhodných vzorců tak, aby obsahovala jen jednu goniometrickou funkci, podle té se pak rovnice dá řešit. (Rektorys, K., 1995, str. 78)

Nejčastějším způsobem řešení složitějších goniometrických rovnic je využití zpětné substituce. Ta se použije v případě, kdy složitější výraz je potřeba nahradit jednodušším. Výsledek jednoduššího výrazu se dosadí do složitějšího a výpočet rovnice je pak vždy snadnější.

Pro goniometrické funkce mají význam jejich znaménkové hodnoty pro jednotlivé kvadranty. Znaménkové hodnoty je potřeba znát, o čemž nás přesvědčí následující příklady pod tabulkou.

Radiány	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	$\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
Stupně	$(0^\circ; 90^\circ)$	$(90^\circ; 180^\circ)$	$(180^\circ; 270^\circ)$	$(270^\circ; 360^\circ)$
Sinus	+	+	-	-
Kosinus	+	-	-	+
Tangens	+	-	+	-
Kotangens	+	-	+	-

Tab. 1.6.1 – Znaménkové hodnoty funkcí v kvadrantech

1.6.1. Příklady

Př. 1.6.1.1: Vyřeš goniometrickou rovnici $\sin x = -1$, kde $x \in R$.

Řešení: Daná rovnice je velmi snadná. Zjišťujeme tedy hodnotu $\sin x = -1$ na jednotkové kružnici. Víme, že funkce sinus je záporná ve třetím a čtvrtém kvadrantu. Hodnota -1 se zde nachází pouze jednou, proto dostáváme pouze jeden kořen x .

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi.$$

Př. 1.6.1.2: Vyřeš goniometrickou rovnici $\frac{\tan x + 1}{2 + \sqrt{3}} = 1 - \tan x$, kde $x \in R$.

Řešení: Rovnici nejprve vynásobíme jmenovatelem zlomku. Poté závorky mezi sebou vynásobíme. Výraz zjednodušíme a funkci tangens si převedeme na levou stranu. Vytkneme

$\tan x$. Následně celou rovnici vydělíme $(3 + \sqrt{3})$ a rozšíříme o $(3 - \sqrt{3})$. Dostáváme se k závěru, kde $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, což znamená, že získáváme kořen x .

$$\tan x + 1 = (1 - \tan x) \cdot (2 + \sqrt{3})$$

$$\tan x + 1 = 2 + \sqrt{3} - 2 \tan x - \sqrt{3} \tan x$$

$$3 \tan x + \sqrt{3} \tan x = 1 + \sqrt{3}$$

$$\tan x (3 + \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}$$

$$\tan x = \frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Př. 1.6.1.3: Vyřeš goniometrickou rovnici $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, kde $x \in R$.

Řešení: Prvním krokem je zavedení substituce, kterou budeme značit t . Závorku v levé část rovnice tedy položíme substituci, kde $t = 3x - \frac{\pi}{2}$. V tuto chvíli dosadíme t na místo $3x - \frac{\pi}{2}$. Dostáváme tedy $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Funkce sinus je kladná v prvním a druhém kvadrantu na jednotkové kružnici, proto tedy získáváme dva kořeny t_1, t_2 . Kořeny t_1, t_2 už známe, dosadíme je tedy do pravé strany původní rovnice místo $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a vypočítáme původní neznámou x , tedy kořeny x_1, x_2 .

$$\text{Substituce: } t = 3x - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; t_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$3x_1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; 3x_2 - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi ; x_2 = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi.$$

Př. 1.6.1.4: Vyřeš goniometrickou rovnici $\sqrt{2} \cos(2x + 4\pi) = -1$, kde $x \in R$.

Řešení: Nejprve rovnici vydělíme $\sqrt{2}$ a pak zavedeme substituci $t = 2x + 4\pi$. Dostaneme dva kořeny t_1, t_2 , protože funkce cosinus je záporná ve druhém a třetím kvadrantu. Kořeny t_1, t_2 dosadíme do pravé části původní rovnice a počítáme s původní neznámou x . Získáme tedy kořeny x_1, x_2 .

$$\cos(2x + 4\pi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(2x + 4\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\textit{Substituce: } t = 2x + 4\pi$$

$$\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$t_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; t_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x_1 + 4\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; 2x_2 + 4\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x_1 = -\frac{13}{8} + k\pi ; x_2 = -\frac{11}{8} + k\pi.$$

Př. 1.6.1.5: Vyřeš goniometrickou rovnici $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$, kde $x \in R$.

Řešení: Prvním krokem zavedeme substituci $t = \cos x$. Vyřešíme kvadratickou rovnici přes diskriminant, jehož hodnota je 25. Abychom mohli vypočítat kořeny t_1, t_2 , musíme zjistit druhou odmocninu diskriminantu. Její hodnota je 5. Následně určujeme hodnoty kořenů, přičemž hodnota kořenu $t_1 = 3$ neleží v oboru hodnot. Proto počítáme pouze s kořenem t_2 . Hodnotu kořene t_2 položíme rovnu funkci $\cos x$, odkud dostáváme kořeny x_1, x_2 .

$$\textit{Substituce } t = \cos x$$

$$2t^2 - 7t + 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25$$

$$\sqrt{D} = 5$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + 5}{4} ; t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - 5}{4}$$

$$t_1 = 3 ; t_2 = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi.$$

2. Goniometrické vzorce

Existuje spousta řad goniometrických vzorců. Tato část práce se týká vzorců, které vyjadřují vztahy mezi goniometrickými funkcemi sinus, kosinus, tangens a kotangens. Je zde popsáno zjišťování hodnot těchto funkcí a úpravy goniometrických výrazů při řešení goniometrických rovnic. K některým řešeným příkladům jsou uvedeny podmínky pro jejich výpočet.

2.1. Základní vztahy mezi hodnotami goniometrických funkcí

2.1.1. Vztahy mezi funkcemi jednoho argumentu

S goniometrickými rovnicemi je možné se setkat v nižších ročnících středních škol a gymnázií. Pro tyto rovnice hrají podstatnou roli vzorce, které jsou potřebné pro jejich úpravy a zjednodušení. Jeden ze základních a nejznámějších vzorců je nazýván jako goniometrická jednička, kde pro každé $x \in R$, platí:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(Bartsch, H-J., str. 362)

Dalším základním a známým vzorcem po goniometrické jedničce je součin goniometrických funkcí tangens a kotangens, který je roven jedné pro $x \in R - \left\{k \frac{\pi}{2}; k \in Z\right\}$ a tedy platí:

$$\tan x \cdot \cot x = 1.$$

Tyto vzorce se dají použít v případě, kdy goniometrická rovnice obsahuje funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens. (Bartsch, H-J., str. 362)

Př. 2.1.1.1: Vyřeš goniometrickou rovnici $2\sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x + 2 = 0$, kde $x \in R$.

Řešení: V rovnici se vyskytují dvě goniometrické funkce. Pro snadnější postup využijeme vzorec goniometrické jedničky, odkud dostaneme rovnici s jednou goniometrickou funkcí sinus. Dalším krokem je zavedení substituce a následný výpočet kvadratické rovnice přes diskriminant. Po tomto kroku získáváme dva kořeny t_1, t_2 , které můžeme dosadit zpátky do námi zavedené substituce, kde dostáváme dvě hodnoty $\sin x = 1$ a $\sin x = \frac{1}{3}$. Pro první hodnotu získáváme jeden kořen x_1 , kdežto pro druhou hodnotu dva kořeny x_2, x_3 , které se nachází v prvním a druhém kvadrantu funkce sinus.

$$2\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - 4\sin x + 2 = 0$$

$$3\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$$

$$\textit{Substituce } t = \sin x$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$$

$$\sqrt{D} = 2$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + 2}{6} ; t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - 2}{6}$$

$$t_1 = 1 ; t_2 = \frac{1}{3}$$

$$\sin x = 1 ; \sin x = \frac{1}{3}$$

$$x_1 = 90^\circ + k360^\circ ; x_2 = 19^\circ 28' + k360^\circ ; x_3 = 160^\circ 32' + k360^\circ.$$

Př. 2.1.1.2: Vyřeš goniometrickou rovnici $\tan x + \cot x - 2 = 0$, kde $x \in R$.

Řešení: Rovnice obsahuje dvě goniometrické funkce a pro snadnější počítání převedeme funkci kotangens na funkci tangens. Obdržíme však zlomek, jehož jmenovatel obsahuje funkci tangens. Zlomku se chceme zbavit, proto celou rovnici vynásobíme jmenovatelem zlomku a dostaneme kvadratickou rovnici. Pro nekomplikované počítání zavedeme substituci. Tu řešíme přes diskriminant, který nám vyjde nulový. Odmocninu diskriminantu můžeme vynechat a kořen t , tak snadno vypočítat. Výsledek kořenu t pak vrátíme zpátky do zavedené substituce a získáváme kořen x .

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} - 2 = 0$$

$$\tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0$$

$$\textit{Substituce } t = \tan x$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$t = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2} = 1$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Podmínky:

$$\tan x \neq 0$$

$$x \neq k\pi.$$

Př. 2.1.1.3: Je dán výraz $\frac{\cos^3 x - \cos x}{\sin^3 x - \sin x}$. Urči všechna x , pro která má výraz smysl a zjednoduš ho.

Řešení: Jako první vytkneme v čitateli $\cos x$ a ve jmenovateli $\sin x$. Následně celý výraz vynásobíme -1 . Můžeme si všimnout, že v závorkách jsme dostali goniometrickou jedničku, proto závorka v čitateli je rovna $\sin^2 x$ a závorka ve jmenovateli $\cos^2 x$ v dalším kroku. Celý výraz opět vynásobíme -1 . Nyní můžeme výraz zkrátit a upravit, proto dostáváme $\tan x$.

$$\frac{\cos x \cdot (\cos^2 x - 1)}{\sin x \cdot (\sin^2 x - 1)}$$

$$\frac{-\cos x \cdot (1 - \cos^2 x)}{-\sin x \cdot (1 - \sin^2 x)}$$

$$\frac{-\cos x \cdot \sin^2 x}{-\sin x \cdot \cos^2 x}$$

$$\frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos^2 x}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Podmínky:

$$\sin x \cdot (\sin^2 x - 1) \neq 0$$

$$\sin x \neq 0 ; \sin^2 x - 1 \neq 0$$

$$x \neq k\pi; \sin^2 x - 1 \neq 0$$

$$\sin x \neq \pm 1$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x \in R - \left\{ k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z \right\}.$$

2.2. Součtové vzorce

Součtové vzorce představují skupinu dalších základních goniometrických vzorců.

2.2.1. Součtové vzorce goniometrických funkcí sinus a kosinus

Díky součtovým vzorcům lze odvodit další významné vzorce, které zjednoduší úpravy výrazů, kde se goniometrické funkce nachází. Pro součtové vzorce funkcí sinus a kosinus, kde $x, y \in R$, tedy platí:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y,$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y.$$

(Bartsch, H-J., str. 362)

Př. 2.2.1.1: Vyjádři výraz $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ pomocí součtových vzorců a zjednoduš ho.

Řešení: Levou část výrazu $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ upravíme pomocí třetího součtového vzorce, který je výše uveden. Pravá část $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ se upraví podle čtvrtého součtového vzorce. Následně poměrně dlouhý výraz zjednodušíme a dostáváme $-2 \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin x$, což lze rovněž upravit. Konečný výraz je tedy $-\sqrt{3} \sin x$.

$$\begin{aligned} & \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin x - \left(\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin x \right) \\ & - 2 \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin x \\ & - 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x = -\sqrt{3} \sin x. \end{aligned}$$

Př. 2.2.1.2: Vyjádři výraz $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ pomocí součtových vzorců a zjednoduš ho.

Řešení: Tento příklad řešíme podobným způsobem jako ten předcházející. Levou část výrazu $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ upravíme podle prvního součtového vzorce a pravou část $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ pomocí druhého součtového vzorce. Dlouhý výraz pak tedy zjednodušíme a upravíme. Na závěr se dostáváme k výsledku $\sqrt{2} \sin x$.

$$\begin{aligned} & \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x - \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x \right) \\ & 2 \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} \\ & 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin x = \sqrt{2} \sin x. \end{aligned}$$

2.3. Další goniometrické vzorce

Existuje opravdu mnoho goniometrických vzorců. V předchozích listech se nachází nejzákladnější a součtové vzorce, které jsou důležité pro zjednodušování a úpravy výrazů a odvozování dalších vzorců. V této části jsou uvedeny vzorce, kde funkce mají dvojnásobný nebo poloviční argument, případně vztahy mezi součtem a rozdílem goniometrických funkcí sinus a kosinus.

2.3.1. Vztahy mezi funkcemi dvojnásobného argumentu

Pro goniometrické funkce sinus a kosinus, které mají dvojnásobný argument $x \in R$, platí následující tvrzení:

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cdot \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x. \end{aligned}$$

(Bartsch, H-J., str. 362)

Př. 2.3.1.1: Vyřeš goniometrickou rovnici $\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \sin x - \frac{1}{2}$.

Řešení: Vidíme, že v levé straně rovnice se v čitateli nachází vzorec $\cos 2x$. Rozložíme jej a následně upravíme pomocí vzorce $A^2 - B^2$. Nyní můžeme $(\cos x - \sin x)$ v čitateli a jmenovateli vykrátit. Rovnici upravíme k závěru $\cos x = -\frac{1}{2}$, odkud dostáváme dva kořeny x_1, x_2 .

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \sin x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)} = \sin x - \frac{1}{2}$$

$$\cos x + \sin x = \sin x - \frac{1}{2}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

Podmínky:

$$\cos x - \sin x \neq 0$$

$$\cos x \neq \sin x$$

$$\cos^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi; x_2 \neq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x \in R - \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi; k \in Z \right\}$$

Př. 2.3.1.2: Je dán $\sin x = 0,6$. Zjisti hodnoty pro $\sin 2x$, $\cos 2x$, jestliže $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Řešení: Nejprve zjistíme hodnotu $\cos x$ pomocí goniometrické jedničky. Dostaneme hodnotu $\pm 0,8$. Počítat budeme pouze s hodnotou $-0,8$, protože se nachází ve druhém kvadrantu, jelikož máme dáno $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Následně můžeme dosazovat hodnoty $\sin x$, $\cos x$ do vzorců $\sin 2x$, $\cos 2x$ a provést jejich výpočet.

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - 0,6^2$$

$$\cos x = \pm 0,8$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\sin 2x = 2 \cdot 0,6 \cdot (-0,8) = -0,96$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = (-0,8)^2 - (0,6)^2 = 0,28.$$

2.3.2. Vztahy mezi funkcemi polovičního argumentu

V minulém odstavci jsou uvedeny vztahy pro dvojnásobný argument funkcí sinus a kosinus. Pochopitelně je možné se setkat i s nižšími argumenty. V tomhle případě se jedná o poloviční argument $x \in R$ funkcí sinus a kosinus, kde platí:

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}},$$

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

(Bartsch, H-J., str. 362)

Př. 2.3.2.1: Vypočítej $\cos \frac{\pi}{24}$ bez využití kalkulačky.

Řešení: V případě, že $\cos \frac{x}{2} = \cos \frac{\pi}{24}$ bude nutné nejprve zjistit $\cos \frac{\pi}{12}$, pomocí výše uvedeného vzorce. Po dosazení do vzorce, jsme schopni lehce určit hodnotu $\cos \frac{\pi}{6}$ a tím

pádem vypočítat $\cos \frac{\pi}{12}$. Hodnotu $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ už tedy známe a můžeme ji dosadit do výpočtu $\left| \cos \frac{\pi}{24} \right|$. Odtud se tedy dostáváme se k výsledku $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$.

$$\left| \cos \frac{\pi}{24} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{12}}{2}}$$

$$\left| \cos \frac{\pi}{12} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}}$$

$$\left| \cos \frac{\pi}{12} \right| = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}}$$

$$\left| \cos \frac{\pi}{12} \right| = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\left| \cos \frac{\pi}{24} \right| = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}{2}}$$

$$\left| \cos \frac{\pi}{24} \right| = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}$$

Př. 2.3.2.2: Vypočítej $\sin \frac{x}{2}$ a $\cos \frac{x}{2}$, jestliže je dáno $\sin x = \frac{1}{2}$.

Řešení: Jako první určíme hodnotu $\cos x$, která je potřebná pro určení polovičních argumentu. Využijeme vzorec goniometrické jedničky, odkud dostaneme hodnotu $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nyní již můžeme použít vzorce pro poloviční argumenty goniometrických funkcí sinus a kosinus.

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

2.3.3. Vztahy mezi součtem a rozdílem goniometrických funkcí

Posledními vzorci v této kapitole jsou vztahy mezi součtem a rozdílem goniometrických funkcí sinus a kosinus, kde pro každé $x, y \in \mathbb{R}$, platí:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}.$$

(Bartsch, H-J., str. 364)

Př. 2.3.3.1: Vyjádři výraz $\sin 3y + \sin y$ pomocí vzorce $\sin x + \sin y$

Řešení: Tento typ příkladu je poměrně snadno řešitelný. Zaprvé dosadíme do vzorce $\sin x + \sin y$, kde $\sin 3y$ představuje $\sin x$, a $\sin y$ je dáno samo sebou. Následně provedeme pouze součet a rozdíl v čitatelích zlomků a využijeme procesu krácení, odkud dostáváme výsledek $2 \sin 2y \cdot \cos y$.

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin 3y + \sin y = 2 \sin \frac{3y+y}{2} \cdot \cos \frac{3y-y}{2}$$

$$\sin 3y + \sin y = 2 \sin 2y \cdot \cos y .$$

Př. 2.3.3.2: Zjednoduš výraz $\frac{\sin 50^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 45^\circ + \cos 35^\circ}$.

Řešení: Čítec výrazu upravíme pomocí vzorce $\sin x + \sin y$. Pro jmenovatele využijeme vzorec $\cos x + \cos y$. Pak v čitateli a jmenovateli provedeme krácení, odkud dostáváme výsledek $\frac{\sin 10^\circ}{\cos 80^\circ}$.

$$\frac{2 \sin \frac{50^\circ + 40^\circ}{2} \cdot \cos \frac{50^\circ - 40^\circ}{2}}{2 \cos \frac{45^\circ + 35^\circ}{2} \cdot \cos \frac{45^\circ - 35^\circ}{2}}$$

$$\frac{\sin 90^\circ \cdot \cos 5^\circ}{\cos 80^\circ \cdot \cos 5^\circ}$$

$$\frac{\sin 90^\circ}{\cos 80^\circ} .$$

3. Trigonometrie

V této kapitole je popsána trigonometrie s historií, větami a vzorci, se kterými je možno se setkat i v praktických úlohách.

Význam pojmu Trigonometrie je složen z páru starověkých řeckých slov trigon a metro. Trigon představuje trojúhelník a metro znamená měření. Jedná se o vědu, která nám pomocí goniometrických funkcí pomáhá s řešením úloh týkající se trojúhelníků. Trigonometrie se rozkládá na dvě skupiny, na rovinnou a sférickou.

3.1. Historie trigonometrie

Počáteční vývoj trigonometrie byl spojený s dalšími počátečními vývoji dvou věd a to astronomie a mořeplavectví. Zde bylo velmi podstatné stanovit správnou cestu plavby lodi na otevřeném vodním prostoru za pomoci polohy hvězd. První základní znalosti trigonometrie jsou připojeny k Egypťanům a Babyloňanům. Tyto vědomosti se pomocí výprav a cest Alexandra Velikého rozšířily k Řekům, a dále byly rozvíjeny. Počáteční práce z matematiky, které měly souvislost s oborem trigonometrie, se týkaly výpočtu délky tětiv kružnice příslušejících k danému středovému úhlu. Kružnice s pevně stanoveným poloměrem byla rozčleněna na 60 jednotek a musela se nalézt délka tětivy pro daný středový úhel. (SMÝKALOVÁ, R., 2009, str. 213-216)

3.1.1. Starověké Řecko

Hipparchos byl řecký matematik a astronom, který žil ve druhém stol. př. n. l. a stanovil první známé tabulky s délkami tětiv kružnice pro její různé středové úhly o pevně stálém poloměru. Ty nebyly dochovány, ale je dokázáno, že během svého života napsal celkově dvanáct knih tabulek tětiv.

Řecký matematik Menelaus přibližně na přelomu druhého a prvního stol. př. n. l. sepsal další tabulky. Napsal celkově šest knih, které se také nedochovaly. Jeho práce představovala obrovský přínos pro sférickou trigonometrii. Menelaus objevil závislosti pro rovinný a sférický trojúhelník.

Klaudios Ptolemaios byl geografem, matematikem a astronomem, který žil na přelomu druhého a prvního stol. př. n. l. Byl to zastánce geocentrického systému a ve svých dílech uvedl tabulky, které udávaly délku tětiv v kruhu jako funkci středového uhlu, který ji omezuje. (SMÝKALOVÁ, R., 2009, str. 213-216)

3.1.2. Středověká trigonometrie

Na počátku pátého století se začala budovat trigonometrie díky Indům. Ti přinesli mnoho nového, kde největší význam pro ně měly díla od Ptolemaia. Kvůli zdlouhavým a náročným tabulkám, které jeho díla obsahovala, byli indiští učenci nuceni zavést nové trigonometrické veličiny. Příkladem bylo založení termínu sinus i kosinus. Matematik Arybhata vytvořil novou tabulku polovičních tětiv, která je v podstatě tabulkou sinu úhlu. Stejná tabulka byla použita v díle matematika Brahmagupty. Indové na rozdíl od Řeků nepracovali při trigonometrických dílech s celou tětivou, ale její polovinou. V této době mohly siny nabývat hodnot větších než jedna. (SMÝKALOVÁ, R., 2009, str. 213-216)

3.1.3. Arabská trigonometrie

I zde představovala trigonometrie svou podstatnost. Je spojena s matematikou a astronomií, ale i s výpočtem kalendáře a vědou zabývající se slunečními hodinami. Arabové měli ve zvyku překládat díla svých předchůdců a to v poměrném velkém rozsahu. Pomocí nich si pak sami vytvářeli své vlastní práce. Z této doby je zavedení čtyř goniometrických funkcí považováno jako nejpodstatnější. Jedná se o funkce tangens, kotangens, sekans, kosekans. První dvě uvedené funkce byly známy při procesu měření stínu tyče a také u srovnání všech stran pravoúhlého trojúhelníka.

Ve třináctém století byla trigonometrie převedena na úroveň samostatné nauky a zapadala tak do části geometrie. Byla tedy zařazena jako samostatná matematická disciplína a vyčleněna z oblasti astronomie. Na tom má zásluhu perský filozof Násir ad-Dín at-Túsí. (SMÝKALOVÁ, R., 2009, str. 213-216)

3.1.4. Evropská trigonometrie

Překlady z řeckého a arabského jazyka do latiny a reforma v zápisu číslic měly obrovský význam pro vývoj matematiky na Evropském kontinentu. V osmém století byla Evropa seznámena s indo-arabskými číslicemi. Přijetí tohoto systému bylo uskutečněno až v roce 1202 pomocí výkladu těchto číslic v písemném dílu od Leonarda Pisana. Desítková soustava tak tedy dostala podporu ve vědeckých oblastech.

V polovině patnáctého století sestavil rakouský matematik a astronom Georg Peurbach první trigonometrické tabulky, které využily tento nový systém.

Další velký přínos učinil Johannes Müller, což byl Peurbachův žák. Napsal dílo, kde sjednotil znalosti Ptolemaia, arabských a indických učenců. V jeho díle je trigonometrie pochopena jako samostatná disciplína. Nalezneme v ní tabulky sinů úhlů, které postupují po

minutách a tabulku tangens úhlů po stupních. Navíc tabulky byly psány již v desítkové soustavě, což znamenalo obrovský krok směrem dopředu.

V roce 1614 zavedl anglický matematik John Napier logaritmy. Ty měly obrovský význam pro celou oblast matematiky včetně trigonometrie. Objevil je při snaze převodu součinu nebo podílu trigonometrických veličin na jejich součet nebo rozdíl. (SMÝKALOVÁ, R., 2009, str. 201-212)

Leonhard Euler žil v osmnáctém století a představoval pro celý matematický obor velice důležitou osobnost. Trigonometrii označil jako vědu, která se zabývá goniometrickými funkcemi. Zkoumal hodnoty $\sin x$ a $\cos x$ jako čísla, nikoliv jako úsečky. Pracoval s goniometrickými funkcemi pro plný úhel a ne pro interval. Pro určování znamének zavedl pravidla pro jednotlivé kvadranty. Připustil jak kladná čísla, tak i záporná. Podoba trigonometrie, kterou známe v dnešní době, je dána od tohoto vědce. (SMÝKALOVÁ, R., 2009, str. 14-27)

K dalším významným matematikům pro evropskou trigonometrii patří Mikuláš Koperník, Willebrord Snell, Francois Viete, Tycho Brahe a další.

3.2 Sinová věta

Pro každý trojúhelník ABC , jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ a strany délky a, b, c , platí:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r ,$$

Kde r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku. Poměr délek stran trojúhelníku se rovná poměru sinů velikostí protilehlých úhlů. Sinová věta se může použít, jestliže je známa délka dvou (resp. jednu) stran a velikost jednoho (resp. dvou) protějšího úhlu.

Zápis je možný provést také následujícími způsoby:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma ,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}; \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}; \frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} .$$

(Polák, J., 2008, str. 443)

Př. 3.2.1: Je dán trojúhelník ABC , délka strany $a = 32mm$, a velikost vnitřních úhlů $\alpha = 64^\circ, \gamma = 45^\circ$. Zjisti délku stran b, c a velikost vnitřního úhlu β .

Řešení: Vzhledem k tomu, že známe vnitřní úhly α, γ a stranu a , můžeme zjistit jak stranu c , tak i úhel β . Nejprve vypočítáme délku strany c pomocí sinové věty. Velikost úhlu β zjistíme, když od součtu všech vnitřních úhlů odečteme úhly α, γ . Následně už zbývá zjištění délky strany b s využitím sinové věty.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{32 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 64^\circ} = 28 \text{ cm}$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 64^\circ - 45^\circ = 71^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{32 \cdot \sin 71^\circ}{\sin 64^\circ} = 33,7 \text{ cm}.$$

Př. 3.2.2: V trojúhelníku ABC známe délku stran $b = 7 \text{ cm}, c = 7,2 \text{ cm}$ a velikost vnitřního úhlu $\beta = 48^\circ$. Jaká jsou velikosti vnitřních úhlů α, γ a délka strany a ?

Řešení: Prvním krokem je zjištění velikosti úhlu γ , protože známe strany b, c a velikost úhlu β . Vzhledem k tomu, že velikost všech vnitřních úhlů trojúhelníku je rovna 180° , tak umíme určit velikost úhlu α , jelikož zbylé dva úhly známe. Teď zbývá pouze zjistit délku strany a , což není obtížné vyřešit pomocí sinové věty.

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin \beta \cdot c}{b} = \frac{\sin 48^\circ \cdot 7,2}{7}$$

$$\gamma = 49^\circ 50'$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 48^\circ - 49^\circ 50' = 82^\circ 10'$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{7 \cdot \sin 82^\circ 10'}{\sin 48^\circ} = 9,3.$$

3.3 Kosinová věta

Pro každý trojúhelník ABC , jehož strany mají délky a, b, c a jehož vnitřní úhly mají velikosti α, β, γ , platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Tuto větu lze použít v případě, jestliže je známa velikost dvou stran a velikost vnitřního úhlu trojúhelníku, který tyto strany svírá. Pokud nastane případ, kdy vnitřní úhel bude pravý, pak se jedná o Pythagorovu větu. (Polák, J., 2008, str. 443)

Př. 3.3.1: Je dán trojúhelník ABC a velikosti stran $a = 6,3\text{cm}, b = 57\text{mm}, c = 0,71\text{dm}$. Zjisti velikost úhlu β .

Řešení: Pro tento případ odvodíme z druhého výše uvedeného vzorce výpočet pro úhel β a následně budeme do něj dosazovat velikosti stran trojúhelníku. Musíme však dát pozor na to, že musíme strany převést na stejnou jednotku, např. cm.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{6,3^2 + 7,1^2 - 5,7^2}{2 \cdot 6,3 \cdot 7,1}$$

$$\beta = 49^\circ 54'.$$

Př. 3.3.2: U rovnoběžníku $KLMN$ známe strany $|KL|=12\text{cm}, |LM|=5,6\text{cm}$ a $\sphericalangle KLM=63^\circ$. Jak dlouhé jsou jeho úhlopříčky?

Řešení: Úhlopříčku KM vypočítáme snadno, jelikož známe strany KL, LM a úhel, který tyto strany svírá. Využijeme tedy kosinovu větu. Abychom mohli vypočítat druhou úhlopříčku, je potřeba znát vzorec úhlopříčky rovnoběžníku přes strany a jednu známou úhlopříčku.

$$|KM|^2 = |KL|^2 + |LM|^2 - 2|KL| \cdot |LM| \cos \sphericalangle KLM = 12^2 + 5,6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 5,6 \cdot \cos 63^\circ$$

$$KM = \sqrt{114,3424} = 10,7\text{cm}$$

$$|LN|^2 = 2|KL|^2 + 2|LM|^2 - |KM|^2 = 2 \cdot 12^2 + 2 \cdot 5,6^2 - 10,7^2$$

$$LN = \sqrt{236,23} = 15,37cm.$$

3.4. Další trigonometrické věty a vzorce

Existuje několik dalších způsobů výpočtů pro trojúhelníky, kde je potřeba znát jejich velikosti vnitřních úhlů a délky stran. V těchto odstavcích je popsáno několik způsobů výpočtu obsahu trojúhelníku, a vzorec pro poloměr kružnice opsané trojúhelníku.

3.4.1. Věty a vzorce pro výpočty obsahů trojúhelníku

Pomocí Heronova vzorce lze vypočítat obsah trojúhelníku ABC. Pokud jsou známy velikosti stran a , b , c a dá se určit poloviční obvod trojúhelníku s , pak platí:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Další tři vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku:

$$S = \frac{abc}{4r},$$

$$S = \rho s,$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta,$$

kde r je poloměrem opsané kružnice a ρ poloměrem vepsané kružnice.

Př. 3.4.1.1: Je dán trojúhelník KLM , u kterého známe obvod $o = 45,8cm$ a jeho dvě strany $k = 12cm, m = 19,3cm$. Zjisti obsah trojúhelníku.

Řešení: Abychom mohli aplikovat Heronův vzorec na tento příklad, musíme zjistit velikost strany l . Tu zjistíme, když od obvodu trojúhelníku odečteme zbylé dvě strany. Následně určíme poloviční obvod trojúhelníku. Po zjištění polovičního obvodu trojúhelníku stačí pouze dosadit do Heronova vzorce, odkud dostaneme obsah.

$$l = o - k - m = 45,8 - 12 - 19,3 = 14,5cm$$

$$s = \frac{o}{2} = \frac{45,8}{2} = 22,9cm$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{22,9(22,9-12) \cdot (22,9-14,5) \cdot (22,9-19,3)}$$

$$S = \sqrt{7548,2064} = 86,88 \text{ cm}^2.$$

Př. 3.4.1.2: Máme zjistit všechny délky stran a vnitřní úhly trojúhelníku ABC , jestliže je nám známo $b = 74 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$, obvod trojúhelníku $o = 162,2 \text{ cm}$ a poloměr kružnice vepsané trojúhelníku $\rho = 8,89 \text{ cm}$.

Řešení: Prvním krokem je zjištění obsahu trojúhelníku, který je potřebný k dalším výpočtům. Ten snadno zjistíme, protože jsme schopni určit poloviční obvod trojúhelníku a známe poloměr kružnice jemu vepsané. Druhým krokem je výpočet strany c , protože známe obsah, jeden vnitřní úhel a jednu stranu trojúhelníku. Snadně určíme velikost strany a , když známe obvod a dvě strany trojúhelníku. Předposledním krokem je zjištění vnitřního úhlu γ pomocí sinové věty. Na to následuje už jen snadný výpočet úhlu β .

$$s = \frac{o}{2} = \frac{162,2}{2} = 81,1 \text{ cm}$$

$$S = \rho s = 8,89 \cdot 81,1 = 720,9 \text{ cm}^2$$

$$S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha$$

$$c = \frac{2S}{b \cdot \sin \alpha} = \frac{2 \cdot 720,9}{74 \cdot \sin 60^\circ} = 22,5 \text{ cm}$$

$$o = a + b + c$$

$$a = o - b - c = 162,2 - 74 - 22,5 = 65,7 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\sin \gamma = \frac{c \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{22,5 \cdot \sin 60^\circ}{65,7}$$

$$\gamma = 17^\circ 15'$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 60^\circ - 17^\circ 15' = 103^\circ 45'.$$

3.4.2. Vzorec pro poloměr kružnice opsané trojúhelníku

Pro zápis poloměru r kružnice opsané trojúhelníku ABC platí:

$$\frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma} = r.$$

Aby se dal zjistit poloměr kružnice r , je nutno znát velikost jednoho vnitřního úhlu a délku protější strany trojúhelníku.

Př. 3.4.2.1: Máme zjistit délku strany a , poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC a jeho obsah, jestliže je nám známo $b = 74\text{cm}$, $c = 53\text{cm}$, $\alpha = 60^\circ$.

Řešení: Známe délku dvou stran a velikost úhlu, který je svírá, tím pádem budeme zjišťovat velikost strany a , pomocí kosinové věty. Po výpočtu strany a , jsme schopní určit poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC . Vzhledem ke zjištění poloměru, můžeme zjistit i obsah trojúhelníku. Je pouze na našem rozhodnutí, který vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku použijeme.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha = 74^2 + 53^2 - 2 \cdot 74 \cdot 53 \cdot \cos 60^\circ$$

$$a = \sqrt{4363} = 66,05\text{cm}$$

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{66,05}{2 \cdot \sin 60^\circ} = 38,14\text{cm}$$

$$S = \frac{abc}{4r} = \frac{66,05 \cdot 74 \cdot 53}{4 \cdot 38,14} = 1698\text{cm}^2.$$

3.5. Využití sinové, kosinové věty a vzorců pro obsah trojúhelníku v praktických úlohách

V následujících úlohách jsou vysvětlena řešení s výsledky několika praktických příkladů, kde bude potřeba určit délku strany, velikost vnitřního úhlu, obsahu, obvodu nebo poloměru opsané kružnice trojúhelníku. Pro počítání následujících úloh jsou využity vzorce z předešlých stran. S podobným typem příkladů se lze běžně setkat v nižších ročnících gymnázií nebo středních škol.

Úloha 3.5.1: Zahrada trojúhelníkového tvaru se nachází mezi třemi světelnými sloupy. Ty jsou od sebe vzdáleny 25m, 27m a 34m. Na kolika m^2 je tvořena plocha zahrady?

Řešení: Pro výpočet této úlohy využijeme Heronův vzorec, protože známe velikosti stran zahrady. Nejdříve však musíme vypočítat poloviční obvod zahrady a následně můžeme dosazovat do Heronova vzorce. Po správném početním postupu můžeme prohlásit, že plocha zahrady činí $333,85\text{m}^2$.

$$s = \frac{25 + 27 + 34}{2}$$

$$s = 43\text{m}$$

$$S = \sqrt{43(43 - 25) \cdot (43 - 27) \cdot (43 - 34)}$$

$$S = \sqrt{43(18) \cdot (16) \cdot (9)}$$

$$S = 333,85\text{m}^2$$

Úloha 3.5.2: Vrchol věže stojící na rovině vidíme z určitého místa A ve výškovém úhlu $\alpha = 34^\circ 30'$. Pokud půjdeme směrem k věži, dostaneme se k místu B, které je vzdáleno od místa A 14m. Z bodu B vidíme vrchol věže ve výškovém úhlu $\beta = 41^\circ$. Jaká je výška věže?

Řešení: Pro zjištění výšky věže bude potřeba udělat více kroků. Jako první je potřeba určit velikosti vnitřních úhlů, které jsem označil ω a τ . Velikost úhlu τ zjistíme tak, že od přímého úhlu odečteme velikost úhlu β . Součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku činí 180° , když tedy odečteme od tohoto součtu úhly α a τ , dostaneme velikost vnitřního úhlu ω . Nyní můžeme snadno určit délku strany a pomocí sinové věty, když známe velikosti úhlů α a β a vzdálenost mezi body A a B. Konečně se dostáváme k zjištění výšky věže, tu vypočítáme opět pomocí sinové věty, kde je potřeba znát stranu a , velikost úhlu β a vědět, že věž je kolmá k zemské půdě. Můžeme tedy prohlásit, že výška věže je 45,9 metru.

$$\tau = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 41^\circ = 139^\circ$$

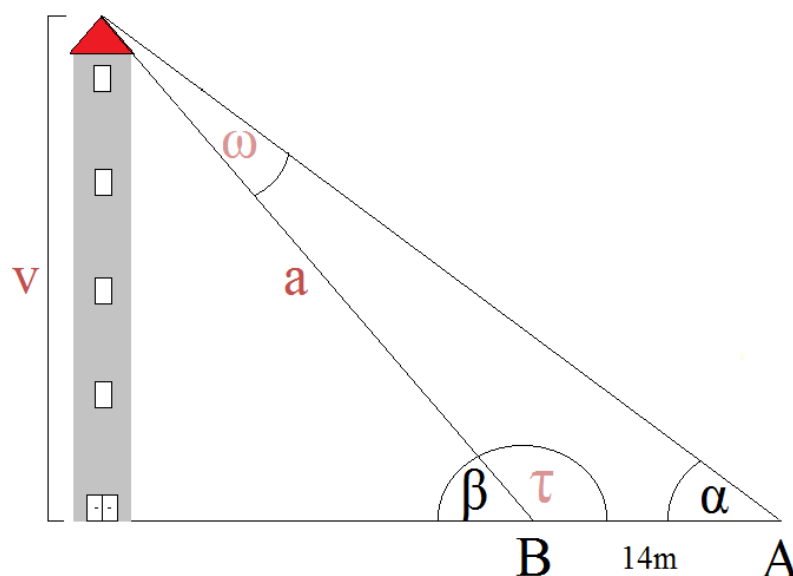
$$\omega = 180^\circ - \alpha - \tau = 180^\circ - 34^\circ 30' - 139^\circ = 6^\circ 30'$$

$$\frac{|AB|}{\sin \omega} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$a = \frac{|AB| \cdot \sin \alpha}{\sin \omega} = \frac{14 \cdot \sin 34^\circ 30'}{\sin 6^\circ 30'} = 70\text{m}$$

$$\frac{a}{\sin 90^\circ} = \frac{v}{\sin \beta}$$

$$v = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin 90^\circ} = \frac{70 \cdot \sin 41^\circ}{\sin 90^\circ} = 45,9m$$



Obr. 3.5.2.1 – Úloha 3.5.2

Úloha 3.5.3: Máme dvě místa A, B a mezi nimi překážku takovou, že z místa B nejde místo A vidět. Místo A leží v rovině s dalšími místy K a M , vzdálenost $|AK|=50m$, $|AM|=56m$ a velikosti vnitřních úhlů $\kappa = 125^\circ$ a $\rho = 103^\circ$, kde κ je vnitřní úhel ramen AK, KB a ρ je vnitřní úhel ramen AM, MB . Jaká je vzdálenost míst A, B ?

Řešení: Pro zjištění vzdálenosti míst A, B budeme muset nejdříve určit velikosti úhlů δ a κ . Velikost úhlu δ vypočítáme tak, že od přímého úhlu odečteme velikost úhlu κ . Následuje výpočet úhlu λ , který lze určit pomocí odečtení úhlů δ a ρ od celkového součtu vnitřních úhlů trojúhelníku. Předposledním krokem je výpočet vzdálenosti míst K, B pomocí sinové věty, protože známe velikosti vnitřních úhlů λ, δ a vzdálenost mezi místy K, M . Samotným závěrem je použití kosinové věty pro výpočet A, B , jelikož máme vše potřebné pro dosazení do vzorce.

$$\delta = 180^\circ - \kappa = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

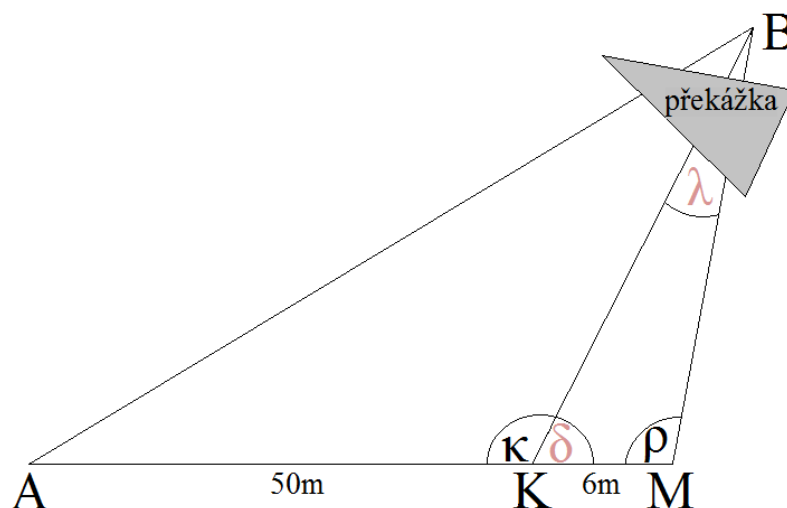
$$\lambda = 180^\circ - \rho - \delta = 180^\circ - 103^\circ - 55^\circ = 22^\circ$$

$$\frac{|KB|}{\sin \rho} = \frac{|KM|}{\sin \lambda}$$

$$|KB| = \frac{|KM| \cdot \sin \rho}{\sin \lambda} = \frac{6 \cdot \sin 103^\circ}{\sin 22^\circ} = 15,6m$$

$$|AB|^2 = |AK|^2 + |KB|^2 - 2|AK| \cdot |KB| \cos \kappa = 50^2 + 15,6^2 - 2(50) \cdot (15,6) \cos 125^\circ$$

$$|AB| = \sqrt{3638,14} = 60,3m$$



Obr. 3.5.3.1 – Úloha 3.5.3

Úloha 3.5.4: Maruška si chce v obchodě koupit triangel a na něj kožený obal. Hudební nástroj je rovnostranný a délka jedné jeho strany je 18cm. Kožený obal je na prodej pouze v kruhovitém tvaru. Jak musí být velký průměr obalu, aby šel do něj triangel uschovat?

Řešení: Pro zjištění průměru obalu musíme nejprve zjistit obsah triangu. Známe délky všech stran a poloviční obvod není obtížné vypočítat, proto použijeme Heronův vzorec. Následně využijeme jeden ze vzorců pro obsah trojúhelníku, pomocí kterého zjistíme poloměr obalu. Posledním krokem je vynásobení poloměru dvěma, protože chceme zjistit průměr.

$$s = \frac{18 + 18 + 18}{2} = 27cm$$

$$S = \sqrt{27(27 - 18)^3} = \sqrt{19683} = 140,30cm^2$$

$$S = \frac{abc}{4r}$$

$$r = \frac{abc}{4S} = \frac{18^3}{4(140,3)} = 10,39cm$$

$$d = 2r = 2 \cdot 10,39 = 20,78cm$$

Úloha 3.5.5: Z nádraží vyjedou současně dva autobusy po přímých tratích, které svírá úhel $\omega = 141^\circ$. Jeden autobus jede rychlostí $14m \cdot s^{-1}$, druhý je o $2m \cdot s^{-1}$ rychlejší. Jaká bude vzdušná vzdálenost mezi nimi za 7 minut?

Řešení: Rychlost autobusů je uvedena v $m \cdot s^{-1}$, tím pádem musíme 7 minut převést na jednotku vteřin. Nyní zjistíme, jakou vzdálenost ujel první a druhý autobus za 420 vteřin, které jsou označeny d_1, d_2 . Abychom se vyhnuli obrovským hodnotám v metrech, tak převedeme vzdálenost na kilometry. Nyní stačí aplikovat kosinovu větu pro zjištění vzdušné vzdálenosti mezi autobusy.

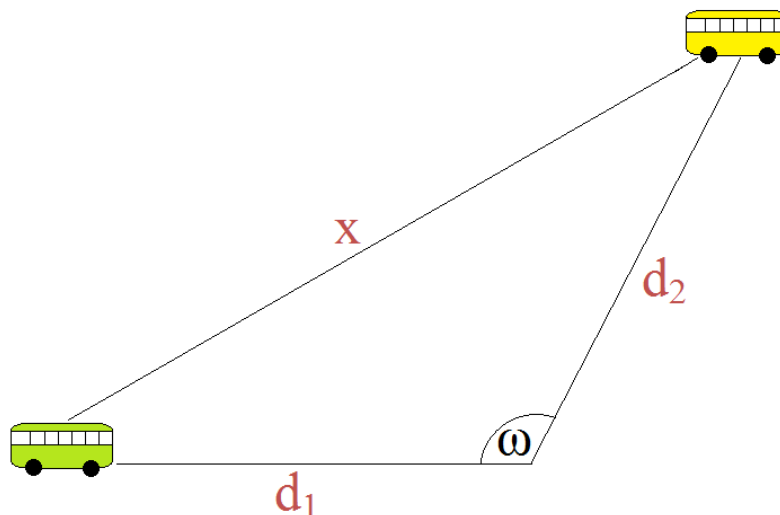
$$7 \cdot 60 = 420$$

$$d_1 = 14 \cdot 420 = 5880m = 5,88km$$

$$d_2 = (14 + 2) \cdot 420 = 6720m = 6,72km$$

$$x^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cdot \cos \omega = 5,88^2 + 6,72^2 - 2 \cdot 5,88 \cdot 6,72 \cdot \cos 141^\circ$$

$$x = \sqrt{141,15} = 11,88km$$



Obr. 3.5.5.1 – Úloha 3.5.5

4. Praktické úlohy ve stavebnictví

V dnešní době představuje matematika základ pro existenci některých oborů, nebo s nimi má nějakou spojitost. S touto vědou, jako aplikovanou, se můžeme setkat ve fyzice, geodézii, chemii, informatice a také ve stavebnictví. Do oboru stavebnictví zapadají různé druhy profesí, např. elektrikář, instalatér, malíř a natěrač, stavební inženýr, stolař, tesař, truhlář a zedník. Každý, kdo pracuje v tomhle oboru, by si měl být schopný něco vypočítat. Třeba malíř, jak velkou plochu v m^2 bude vymalovávat, zedník, jaké množství dlažby je potřeba usadit mezi obrubníky, tesař, kolik m^2 křidlic je potřeba na pokrytí střechy apod.

Následující úlohy jsou typické především pro studenty středních stavebních průmyslových škol. V úlohách se setkáme s výpočty obsahů, kde bude potřebné aplikovat goniometrické funkce a trigonometrické věty se vzorci.

4.1. Úlohy

Úloha 4.1.1: Rodinný dům má na délku 12m. Výška střechy je 4,1m. Jedna křidlice je 40cm dlouhá a 25cm široká. Kolik je potřeba křidlic pro pokrývače, jestliže svírající úhel střechy pod hřebenem je 86° ?

Řešení: Délka střechy je totožná s tou, kterou má dům. Abychom mohli vypočítat plochu střechy S_1 , musíme zjistit druhý parametr střechy, který je na obrázku označen n . Pro výpočet parametru n , zjistíme nejprve velikost úhlu ω . Pak díky využití sinové věty získáme hodnotu parametru n , který je potřebný pro určení plochy střechy S_1 . Tu snadno vypočítáme pomocí dvojnásobného obsahu obdélníku. Plocha křidlice se zjistí díky obsahu obdélníku, kde dosadíme její délku a šířku, které nejprve převedeme na metry, jelikož plochu střechy máme v m^2 . Nyní lze vypočítat kolik je potřeba křidlic, když celkový povrch střechy vydělíme s povrchem jedné křidlice.

$$\omega = \frac{180^\circ - 86^\circ}{2} = 47^\circ$$

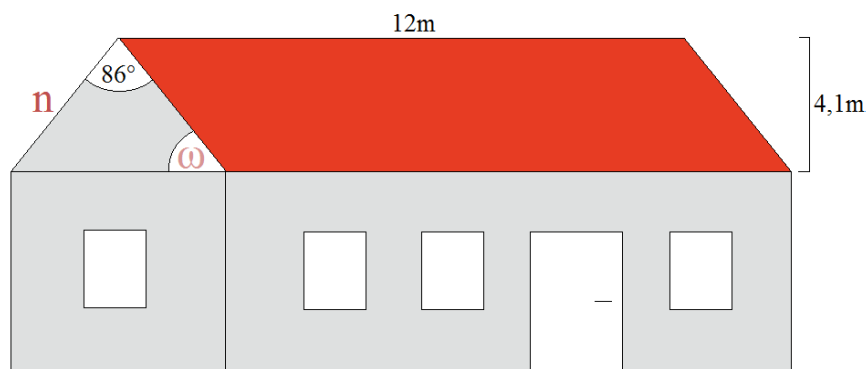
$$\frac{n}{\sin 90^\circ} = \frac{4,1}{\sin 47^\circ}$$

$$n = \frac{4,1 \cdot \sin 90^\circ}{\sin 47^\circ} = 5,61m$$

$$S_1 = (5,61 \cdot 12)2 = 134,64m^2$$

$$S_2 = 0,4 \cdot 0,25 = 0,1m^2$$

$$x = \frac{S_1}{S_2} = \frac{134,64}{0,1} = 1346,4$$



Obr. 4.1.1.1 – Úloha 4.1.1

Úloha 4.1.2: Na zahradě se nachází betonová zeď, která se skládá ze dvou sloupců a čtyř desek, přičemž horní z nich se od ostatních odlišuje trojúhelníkovým tvarem. Výšky sloupců, které jdou vidět nad zemským povrchem, jsou 2m a 1,5m. Délka jedné desky je o $\frac{1}{4}$ větší, než výška většího sloupce. Jaké jsou rozměry horní desky, jestliže délky a výšky všech desek jsou totožné?

Řešení: Protože víme, že délka desky je o jednu čtvrtinu větší, než výška dvoumetrového sloupu, tak snadno zjistíme její hodnotu. Vyšší sloupec drží všechny desky, kdežto ten menší však spodní tři. Lehce tedy určíme i výšku jedné desky. Vzhledem k tomu, že máme všechny rozměry pro spodní desky, musíme určit poslední parametr horní desky. Kosinovu větu využijeme pro zjištění posledního rozměru. Výška s délkou desky jsou na sebe kolmé, tím tedy hodnota kosinu 90° je rovna 0. To znamená, že poslední rozměr horní desky určíme Pythagorovou větou.

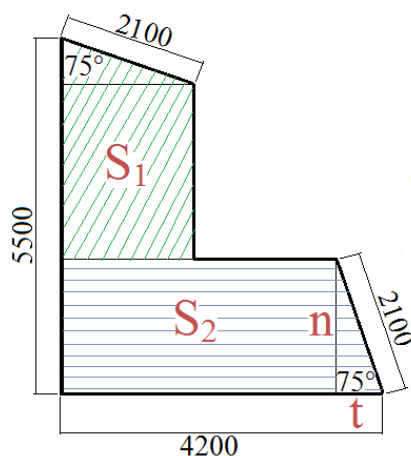
$$d = (2 \div 4) + 2 = 2,5m$$

$$v = 2 \div 4 = 0,5m$$

$$x^2 = d^2 + v^2 - 2dv \cdot \cos 90^\circ = 0,5^2 + 2,5^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 2,5 \cdot \cos 90^\circ$$

$$x = \sqrt{6,5} = 2,55m$$

Úloha 4.1.3: Malíř na natření plochy $6,8m^2$ spotřebuje 1 kg barvy. Jakou hmotnost barvy spotřebuje na natření plochy na obrázku pod zadáním?



Obr. 4.1.3.1 – Úloha 4.1.3

Řešení: Pro snadnější postup budeme počítat v metrech, abychom se vyhnuli vysokým číslům. Nejdříve zjistíme n s využitím goniometrické funkce sinus a t pomocí goniometrické funkce kosinus. Následně vypočítáme plochy, které jsou na obrázku vyšrafovány jako S_1 , S_2 a provedeme jejich součet, který označíme S . V posledním kroku plochu S vydělíme $6,8\text{m}^2$, odkud získáváme potřebnou hmotnost barvy k nátěru.

$$\sin 75^\circ = \frac{n}{2,1}$$

$$n = \sin 75^\circ \cdot 2,1 = 2,03\text{m}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{t}{2,1}$$

$$t = \cos 75^\circ \cdot 2,1 = 0,54\text{m}$$

$$S_1 = \frac{(5,5 - n) + (5,5 - n - t)}{2} n = \frac{(5,5 - 2,03) + (5,5 - 2,03 - 0,54)}{2} 2,03 = 6,5\text{m}^2$$

$$S_2 = \frac{4,2 + (4,2 - t)}{2} n = \frac{4,2 + (4,2 - 0,54)}{2} 2,03 = 8\text{m}^2$$

$$S = S_1 + S_2 = 6,5 + 8 = 14,5\text{m}^2$$

$$x = \frac{14,5}{6,8} = 2,13\text{kg}$$

Úloha 4.1.4: Paní Marešová si jede ke stolaři pořídit stůl s trojúhelníkovitou deskou do rohu místnosti na květináč o průměru 30cm. Stolař má na výběr dva stoly. První má velikost horní desky 2×48cm a 67,9cm, ten druhý má velikost horní desky 2×66cm a 93,3cm. Vyhovují oba stoly velikosti průměru květináče, tak aby přes ně nepřesahoval?

Řešení: Jako první spočítáme poloviční obvod a plochu horní desky. Poloviční obvod zjistíme součtem všech tří stran a následným dělením dvěma. Plochu desky vyřešíme pomocí Heronova vzorce. Následně plochu desky vydělíme jejím polovičním obvodem, odkud dostáváme poloměr květináče, který by se na desku vešel, aniž by přesahoval.

Tento postup aplikujeme pro obě desky a zjišťujeme, že první stůl je nevyhovující, kdežto druhý může paní Marešová u stolaře koupit, protože květináč nebude vyčnívat.

$$s_1 = \frac{o_1}{2} = \frac{2 \cdot 48 + 67,9}{2} = 81,95cm$$

$$S_1 = \sqrt{s(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{81,95(33,95) \cdot (33,95) \cdot (14,05)}$$

$$S_1 = \sqrt{1327103,637} = 1152cm^2$$

$$\rho_1 = \frac{S_1}{s_1} = \frac{1152}{81,95} = 14,06cm$$

$$2\rho_1 < 30cm$$

$$s_2 = \frac{o_2}{2} = \frac{2 \cdot 66 + 93,3}{2} = 112,65cm$$

$$S_2 = \sqrt{s(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{112,65(46,65) \cdot (46,65) \cdot (19,35)}$$

$$S_2 = \sqrt{4743680,84} = 2178cm^2$$

$$\rho_2 = \frac{S_2}{s_2} = \frac{2178}{112,65} = 19,03cm$$

$$2\rho_2 > 30cm$$

Úloha 4.1.5: Zedníci v podkroví místnosti nemohou zjistit dva rozměry stěny kvůli vysokému nábytku, který se nachází při její nižší výšce. Vědí však, že nejvyšší bod stěny se

nachází v 3,2m a délka stropu je 4,8m. Jaké rozměry mají šířka a nižší výška stěny, jestliže úhel, který svírá strop s větší výškou stěny je 82° ?

Řešení: Nejprve zjistíme šířku stěny, kterou označíme s . Tu zjistíme pomocí goniometrické funkce sinus, jelikož známe délku stropu a úhel, který svírá nejvyšší bod stěny se stropem. Abychom mohli určit nižší výšku stěny, tak nejdříve určíme výškový rozdíl, který označíme d . Ten vypočítáme pomocí goniometrické funkce kosinus. Nyní zbývá odečíst výškový rozdíl d od vyšší výšky stěny a získáváme hodnotu pro nižší výšku stěny n .

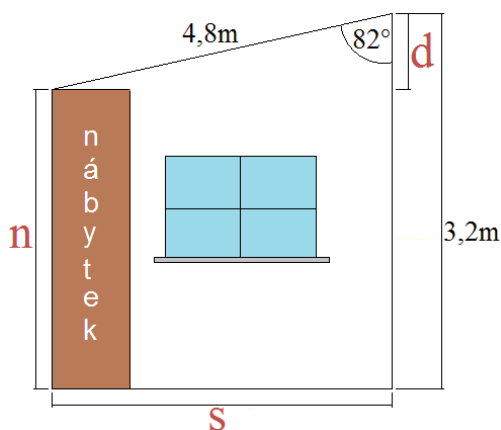
$$\sin 82^\circ = \frac{s}{4,8}$$

$$s = \sin 82^\circ \cdot 4,8 = 4,75m$$

$$\cos 82^\circ = \frac{d}{4,8}$$

$$d = \cos 82^\circ \cdot 4,8 = 0,67m$$

$$n = 3,2 - d = 3,2 - 0,67 = 2,53m$$



Obr. 4.1.5.1 – Úloha 4.1.5

Úloha 4.1.6: Manželé Kozákové si chtějí vymalovat obývací stěnu o délce 6m a výšce 2,6m třemi barvami a to béžovou, žlutou a zelenou. Béžová barva se bude nacházet v horní části stěny po celé její délce s výškou 40cm. Žlutá barva bude stěnu pokrývat pravoúhlým lichoběžníkovým tvarem o délce horní základny 2m a spodní 6m. Jak velké budou plochy všech barev, jestliže žlutá barva sahá v pravém rohu stěny do výšky 80cm?

Řešení: Vzhledem k tomu, že známe parametry pro béžovou a žlutou barvy, tak můžeme velmi snadno zjistit jejich plochu. Pod označením S_1 se nachází výpočet plochy béžové barvy pomocí obsahu obdélníku. Výpočet s označením S_2 náleží ploše se žlutou barvou, jedná se o vzorec obsahu lichoběžníku. Zbývá trojúhelníkovitá plocha zelené barvy. Od výšky stěny odečteme 80cm a výšku pro béžovou barvu, odkud dostáváme t . Když od celkové délky stěny odečteme 2m, tak získáváme u . Nyní máme vše potřebné pro zjištění plochy zelené barvy, protože víme, že t a u se svírají v pravém uhlu.

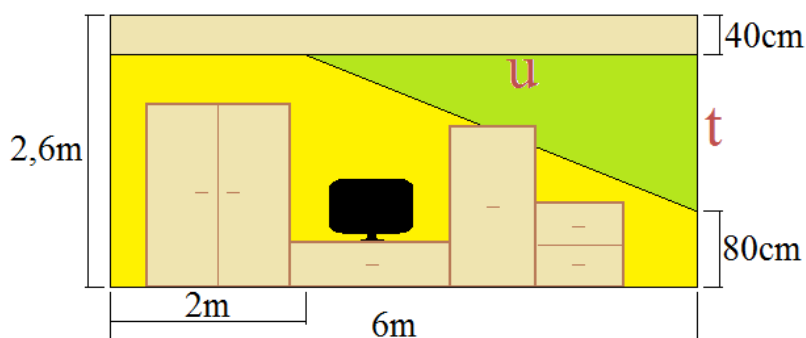
$$S_1 = 6 \cdot 0,4 = 2,4m^2$$

$$S_2 = \frac{6+2}{2} 2,2 = 8,8m^2$$

$$t = 2,6 - 0,8 - 0,4 = 1,4m$$

$$u = 6 - 2 = 4m$$

$$S_3 = \frac{1}{2} tu \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} 1,4 \cdot 4 \cdot \sin 90^\circ = 2,8m^2$$



Obr. 4.1.6.1 – Úloha 4.1.6

Úloha 4.1.7: Dalekohled měřicího přístroje je výšce 165cm nad vodorovnou rovinou vzdálen 150m od paty komína. Jak vysoký je komín, pokud výškový úhel je 32° ?

Řešení: Nejdříve použijeme goniometrickou funkci tangens, kde zjistíme částečnou výšku komínu, která je označena t . Musíme však dát pozor na jednotky, proto převedeme velikost měřicího přístroje na metry. Celkovou výšku komínu, označenou x , zjistíme, když velikost měřicího přístroje sečteme s částečnou výškou komínu t .

$$\tan 32^\circ = \frac{t}{150}$$

$$t = \tan 32^\circ \cdot 150 = 93,73m$$

$$165cm = 1,65m$$

$$x = t + 1,65 = 93,73 + 1,65 = 95,38m$$

Úloha 4.1.8: Domovní dveře mají na výšku 200cm a na šířku 70cm. Jejich součást představuje skleněná výplň kosodélníkového tvaru s rozměry 120cm a 18cm. Jakou velikost v m^2 náleží pro plochu dveří, jestliže známe velikost úhlu, který svírají strany skleněné výplně 30° ?

Řešení: V první řadě můžeme zcela snadno vypočítat plochu dveří, označenou S_1 , jelikož známe jejich šířku a výšku. Abychom mohli určit plochu skleněné plochy, tak musíme zjistit výšku kosodélníku, označenou x . Jelikož známe úhel svírající obě strany kosodélníku a jejich délky, využijeme goniometrickou funkci sinus. Nyní vynásobíme výšku kosodélníku x s jeho delší stranou, odkud získáváme S_2 . V posledních krocích zbývá odečíst menší plochu od té větší pro zjištění obsahu dveří bez skleněné výplně. Úplně na závěr převedeme plochu dveří bez výplně na m^2 .

$$S_1 = 200 \cdot 70 = 14000cm^2$$

$$\sin 30^\circ = \frac{x}{7,5}$$

$$x = \sin 30^\circ \cdot 18 = 9cm$$

$$S_2 = 120 \cdot x = 120 \cdot 9 = 1080cm^2$$

$$S = S_1 - S_2 = 14000 - 1080 = 12920cm^2 = 1,292m^2$$

Úloha 4.1.9: Vrchol budovy nadzemního parkoviště vidíme ze dvou stanovišť A pod výškovým úhlem 52° a B pod výškovým úhlem 37° . Stanoviště A je o 25m blíže k budově než B. Jaká je výška budovy nadzemního parkoviště, pokud se z obou stanovišť díváme dalekohledem ve výšce 1,6m?

Řešení: Abychom mohli určit výšku budovy nadzemního parkoviště, musíme vykonat více kroků. Zaprvé je potřeba určit velikosti vnitřních úhlů, které jsou označeny σ a φ . Velikost úhlu σ zjistíme, když od přímého úhlu odečteme velikost výškového úhlu u stanoviště A.

Víme, že součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je roven 180° , proto odečteme od 180° výškový úhel u stanoviště B a úhel σ , odkud dostaneme velikost vnitřního úhlu φ . Dalším krokem je zjištění délky strany, která je označena e , pomocí sinové věty, jelikož známe velikosti dvou potřebných úhlů a vzdálenost mezi stavišti. Nyní určíme částečnou velikost budovy s využitím sinové věty. Tato částečná velikost je označena p . Po jejím zjištění musíme přičíst výšku, ve které se nachází dalekohled, abychom měli úplnou výšku budovy nadzemního parkoviště, označenou x .

$$\sigma = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$$

$$\varphi = 180^\circ - 37^\circ - \sigma = 180^\circ - 37^\circ - 128^\circ = 15^\circ$$

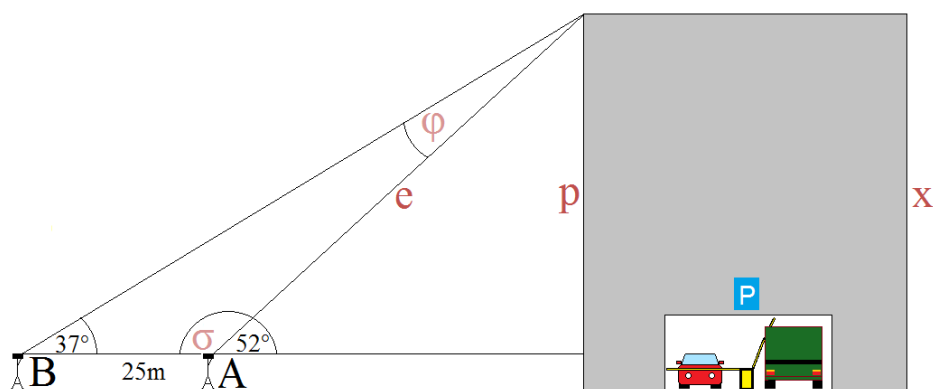
$$\frac{|AB|}{\sin \varphi} = \frac{e}{\sin 37^\circ}$$

$$e = \frac{|AB| \cdot \sin 37^\circ}{\sin \varphi} = \frac{25 \cdot \sin 37^\circ}{\sin 15^\circ} = 58,13m$$

$$\frac{e}{\sin 90^\circ} = \frac{p}{\sin 52^\circ}$$

$$p = \frac{e \cdot \sin 52^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{58,13 \cdot \sin 52^\circ}{\sin 90^\circ} = 45,8m$$

$$x = p + 1,6 = 45,8 + 1,6 = 47,4m$$



Obr. 4.1.9.1 – Úloha 4.1.9

Úloha 4.1.10: Chodba v dole klesá do hloubky 153m. Vodorovná vzdálenost mezi jejím počátkem a koncem je 525m. Jaké je průměrné stoupání a úhel sklonu chodby?

Řešení: Výpočet úhlu sklonu, který je označen α , provedeme podle goniometrické funkce tangens. Do vzorce pro tuhle funkci stačí pouze dosadit obě hodnoty ze zadání a máme jednu část úlohy splněnou. Průměrné stoupání se udává v procentech, proto musíme vodorovnou vzdálenost chodby vydělit jedním stem, odkud jedno procento je rovno hodnotě 5,25. Hloubku chodby vydělíme hodnotou 5,25 a získáváme průměrné stoupání.

$$\tan \alpha = \frac{153}{525}$$

$$\alpha = 16^{\circ}15'$$

$$525 = 100\%$$

$$5,25 = 1\%$$

$$153:5,25 = 29\%$$

Úloha 4.1.11: Exteriér stanu má podobu čtyřbokého jehlanu se čtvercovou podstavou. Stěnová výška stanu má 235cm. Jaký je objem stanu v litrech, jestliže tělesná výška svírá se stěnovou výškou stanu úhel 40° ?

Řešení: Jelikož máme za úkol určit objem stanu v litrech, tak bude potřeba znát vzorec pro jeho objem. Abychom se vyhnuli vysokým hodnotám v cm, budeme počítat v dm. Počátečním krokem zjistíme délku strany podstavy stanu pomocí goniometrické funkce sinus. Následně vypočítáme plochu podstavy pomocí obsahu čtverce. Abychom určili objem stanu, musíme zjistit jeho tělesnou výšku. Tu zjistíme pomocí goniometrické funkce kosinus. Teď už máme vše potřebné pro výpočet objemu stanu. Plochu podstavy vynásobíme tělesnou výškou stanu a následně vydělíme třemi. Výsledek dostáváme v dm^3 , které převedeme na jednotku litru.

$$\sin 40^{\circ} = \frac{\frac{a}{2}}{23,5}$$

$$\frac{a}{2} = \sin 40^{\circ} \cdot 235$$

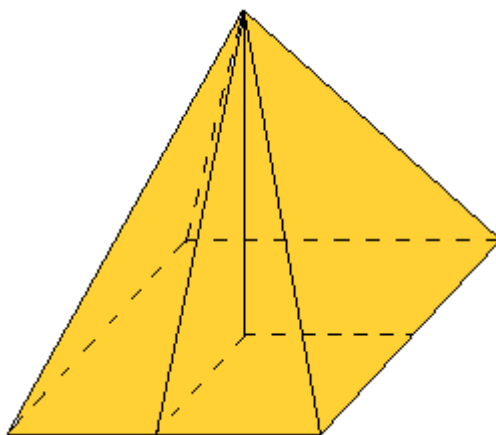
$$a = 30,2\text{dm}$$

$$S_p = a^2 = 30,2^2 = 912,04\text{dm}^2$$

$$\cos 40^\circ = \frac{v}{23,5}$$

$$v = \cos 40^\circ \cdot 23,5 = 18dm$$

$$V = \frac{S_p \cdot v}{3} = \frac{912,04 \cdot 18}{3} = 5472,24dm^3 = 5472,24l$$



Obr. 4.1.11.1 – Úloha 4.1.11

Úloha 4.1.12: Garáž má délku 6m a výšku 3m bez střechy. Plocha střechy činí $38,16m^2$. Jaká je šířka a celková výška garáže, jestliže velikost úhlu mezi pravou a levou částí střechy činí 78° ?

Řešení: Jelikož známe celkovou plochu střechy, tak nebude obtížné zjistit její polovinu S_2 . Následuje určení rozměru šikmé části střechy, označenou c . Tu vypočítáme, když polovinu plochy střechy vydělíme její délkou. Kosinovu větu využijeme pro zjištění šířky garáže, označené h . Předposledním krokem je použití goniometrické funkce tangens, odkud dostaneme výšku střechy n . Nyní pouze sečteme výšky garáže a střechy.

$$S_2 = \frac{S}{2} = \frac{38,16}{2} = 19,08m^2$$

$$S_2 = 6 \cdot c$$

$$c = \frac{S_2}{6} = \frac{19,08}{6} = 3,18m$$

$$h^2 = c^2 + c^2 - 2c^2 \cdot \cos 78^\circ = 3,18^2 + 3,18^2 - 2 \cdot 3,18^2 \cdot \cos 78^\circ$$

$$h = \sqrt{16,02} = 4m$$

$$\tan 39^\circ = \frac{h}{n}$$

$$n = \frac{h}{\tan 39^\circ} = \frac{2}{\tan 39^\circ} = 2,47m$$

$$x = 3 + n = 3 + 2,47 = 5,47m$$

Úloha 4.1.13: Kolik schodů se nachází mezi prvním a druhým patrem, jestliže je nutné překonat výšku 3,9m se sklonem 28° , pokud jeden schod je 0,26m široký?

Řešení: Tato úloha je poměrně snadná a skládá se ze dvou kroků. Zaprvé musíme určit vzdálenost mezi prvním a posledním schodem, označenou d . Zjistíme ji pomocí goniometrické funkce kosinus. Druhým a posledním krokem je podíl této vzdálenosti se šířkou jednoho schodu, odkud se dozvíme, kolik schodů se nachází mezi prvním a druhým patrem.

$$\cos 28^\circ = \frac{3,9}{d}$$

$$d = \frac{3,9}{\cos 28^\circ} = 4,42m$$

$$x = 4,42 \div 0,26 = 17$$

Úloha 4.1.14: Náměstí má tvar obdélníku, jehož úhlopříčka je dlouhá 82m a svírá s delší stranou náměstí úhel o velikosti 39° . V prostředku náměstí se nachází vodní fontána čtvercovitého tvaru o délce strany 5m. Jaká je velikost plochy náměstí bez fontány?

Řešení: Zcela snadně vypočítáme plochu, kterou zabírá fontána na náměstí pomocí obsahu čtverce. Ta je označena S_1 . Nyní zjistíme pomocí goniometrických funkcí délky stran obdélníkového náměstí, které jsou označené a , b . Využijeme vzorce pro obsah obdélníku, kde obdržíme celkovou plochu náměstí S_2 . Na závěr odečteme plochu fontány od té, kterou zabírá náměstí.

$$S_1 = 5^2 = 25m^2$$

$$\sin 39^\circ = \frac{b}{82}$$

$$b = \sin 39^\circ \cdot 82 = 51,6m$$

$$\cos 39^\circ = \frac{a}{82}$$

$$a = \cos 39^\circ \cdot 82 = 63,7m$$

$$S_2 = a \cdot b = 63,7 \cdot 51,6 = 3286,92m^2$$

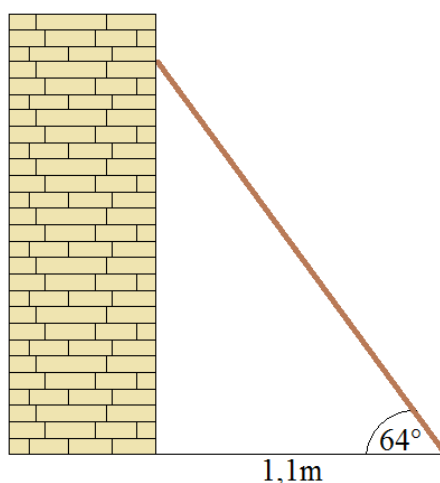
$$S_3 = S_2 - S_1 = 3286,92 - 25 = 3261,92m^2$$

Úloha 4.1.15: Do jaké výšky sahá žebřík, který s vodorovným povrchem svírá úhel 64° a jeho dolní konec je od zdi vzdálen 1,1m?

Řešení: Pro výpočet této úlohy postačí využití goniometrické funkce tangens, pomocí které zjistíme, do jaké výšky žebřík sahá.

$$\tan 64^\circ = \frac{a}{1,1}$$

$$a = \tan 64^\circ \cdot 1,1 = 2,26m$$



Obr. 4.1.15.1 – Úloha 4.1.15

Závěr

Cílem mojí práce bylo shrnutí základních a důležitých pojmů z oblasti goniometrie a trigonometrie. Vzorce a věty z oblasti goniometrie a trigonometrie jsem použil v praktických úlohách ve stavebnictví. Prostudováním této práce by měl každý získat přehled a informace o goniometrických funkcích, vzorcích a trigonometrii s využitím v praktických úlohách pro denní život.

V první kapitole mojí bakalářské práce se zabírám goniometrickými funkcemi. Tuto problematiku jsem se snažil co nejlépe popsat a vysvětlit. Nacházejí se zde goniometrické funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens s jejich definicemi, vlastnostmi, grafy a tabulkami. V této části jsem uvedl popis orientovaného úhlu, jeho velikost a měření v obloukové a stupňové míře. Závěr první kapitoly náleží goniometrickým rovnicím a příkladům. K jednotlivým výpočtům jsem přidal nejvhodnější postup a slovní řešení.

V druhé kapitole jsem se věnoval goniometrickým vzorcům. Ty jsou děleny do skupin na základní, součtové a další. Téměř ke každému goniometrickému vzorci, jsem se pokusil přiřadit několik ukázkových příkladů. K těm je opětovně uveden nejvhodnější postup a slovní komentář, který považuji za nezbytný k těmto vzorcům.

Předposlední kapitola mojí bakalářské práce zasahuje do oblasti trigonometrie, která je popsána v samém úvodu. Následuje pohled do historie trigonometrie. Další stránky náleží trigonometrickým větám a vzorcům o obecném trojúhelníku. Ke každé větě a vzorci jsem se pokusil vybrat nejvhodnější příklad se slovním řešením a postupem. V závěru kapitoly se nachází řešené praktické úlohy s obrázky.

Řešení praktických úloh ve stavebnictví je zahrnuto do poslední kapitoly. Úlohy vycházejí z konkrétních situací pro obory zednictví, malířství, tesařství, truhlářství apod. Jsou aplikovatelné pro výuku dané tematiky v devátém ročníku základních škol, či nižších ročnících středních škol a gymnázií.

Seznam použitých zdrojů

Literatura

BARTSCH, H-J., *Matematické vzorce*. Praha: Academia, 2006, ISBN 80-200-1448-9.

JUŠKEVIČ, A Pavlovič. *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha: Academia, 1978.

KUDLÁČEK, L., BURIAN, F., VÁLKA, F., *Matematika pre 1. a 2. ročník štúdia na stredných priemyselných školách pre pracujúcich*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1974.

NOVÁKOVÁ, E., DVOŘÁKOVÁ, H., *Aplikovaná matematika pro učební obory ve stavebnictví a stavební praxi*. Praha: Sobotáles, 1995, ISBN 80-85920-03-4.

ODVÁRKO, O., *Matematika pro gymnázia – Goniometrie*. Praha: Prometheus, 2008, ISBN 978-80-7196-359-2.

POLÁK, J., *Přehled středoškolské matematiky*. Praha: Prometheus, 2008, ISBN 9788071963561.

REKTORYS, K., *Přehled užití matematiky I*. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-92-5.

SMÝKALOVÁ, R., *Eulerova reforma goniometrie – článek*. Učitel matematiky, Jednota českých matematiků a fyziků, ročník 18, číslo 1, s. 14-27. ISSN 1210-9037, 2009.

SMÝKALOVÁ, R., *Trigonometrie v Evropě v 15. –17. století – článek*. Učitel matematiky, Jednota českých matematiků a fyziků, ročník 17, číslo 4, s. 201-212. ISSN 1210-9037, 2009.

SMÝKALOVÁ, R., *Středověký zrod trigonometrických veličin – článek*. Konferenční sborník, 30. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko. s. 213-216. ISBN 978-80-7378-092-0, 2009

ŠMAKAL, S., BUDINSKÝ, B., *Goniometrické funkce*. Praha: Mladá fronta, 1968.

Internetové zdroje

Slavní matematici, fyzici a vynálezci. <http://vedci.wz.cz/historie/16.htm>

Seznam grafů

Graf 1.4.2.1 – Průběh funkce sinus	11
Graf 1.4.2.2 – Průběh funkce kosinus.....	12
Graf 1.5.2.1 – Průběh funkce tangens.....	14
Graf 1.5.2.2 – Průběh funkce kotangens.....	14

Seznam tabulek

Tab. 1.2.3.1 – Převody mezi stupňovou a obloukovou mírou	9
Tab. 1.4.3.1 – Hodnoty funkcí sinus a kosinus.....	12
Tab. 1.5.3.1 – Hodnoty funkcí tangens a kotangens	14
Tab. 1.6.1 – Znaménkové hodnoty funkcí v kvadrantech.....	15

Seznam obrázků

Obr. 1.1.1 – Pravoúhlý trojúhelník	7
Obr. 1.2.2.1 – Jednotková kružnice.....	8
Obr. 1.3.1 – Orientovaný úhel.....	10
Obr. 3.5.2.1 – Úloha 3.5.2	38
Obr. 3.5.3.1 – Úloha 3.5.3	39
Obr. 3.5.5.1 – Úloha 3.5.5	40
Obr. 4.1.1.1 – Úloha 4.1.1	42
Obr. 4.1.3.1 – Úloha 4.1.3	43
Obr. 4.1.5.1 – Úloha 4.1.5	45
Obr. 4.1.6.1 – Úloha 4.1.6	46
Obr. 4.1.9.1 – Úloha 4.1.9	48
Obr. 4.1.11.1 – Úloha 4.1.11	50
Obr. 4.1.15.1 – Úloha 4.1.15	52

Seznam použitých matematických symbolů a značek

$=$	rovná se
$\neq$	nerovná se
$\leq$	menší nebo rovno
$<$	menší
$>$	větší
$a \in A$	a je prvkem množiny A
$(a; b)$	otevřený interval
$\langle a; b \rangle$	uzavřený interval
$\wedge$	a zároveň
$\sin a$	goniometrická funkce sinus
$\cos a$	goniometrická funkce kosinus
$\tan a$	goniometrická funkce tangens
$\cot a$	goniometrická funkce kotangens
1°	jeden stupeň
$1'$	jedna minuta
$1''$	jedna vteřina
rad	radián
$\angle AVB$	úhel s vrcholem V
$\sphericalangle ABC$	vnitřní úhel s vrcholem B
$ AB $	velikost strany AB
$\mathcal{D}(f)$	definiční obor
$\mathcal{H}(f)$	obor hodnot
D	diskriminant
R	množina všech reálných čísel
Z	množina všech celých čísel
f	funkce f

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Tomáš Studený
Katedra:	Matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Hodáňová, Ph.D.
Rok obhajoby:	2014/2015

Název práce:	Vztahy mezi funkcemi úhlů
Název v angličtině:	Relations between the functions of angles
Anotace práce:	Bakalářská práce se zabývá vztahy mezi funkcemi úhlů. Hlavní těžiště práce spočívá ve shrnutí základních teoretických informací z oblasti goniometrických funkcí a vzorců, trigonometrie a její historie. Postupně přechází do řešení praktických úloh z této oblasti matematiky.
Klíčová slova:	Goniometrické funkce, rovnice, trigonometrie, Sinová věta, Kosinová věta, úlohy
Anotace v angličtině:	The bachelor thesis deals with the relationship between respective angle functions. The primary purpose is to provide a comprehensive overview of theoretical basics of trigonometric functions and formulas, trigonometry as such and its history. The thesis then looks into praxis showing useful examples in this branch of mathematics.
Klíčová slova v angličtině:	Goniometric functions, formulas, trigonometry, sine theorem, cosine theorem, roles
Přílohy vázané v práci:	
Rozsah práce:	58 stran
Jazyk práce:	Český jazyk