

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

AHP - její silné a slabé stránky



Vedoucí diplomové práce:
Doc. RNDr. Jana Talašová, CSc.
Rok odevzdání: 2012

Vypracovala:
Bc. Věra Jandová
AME, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně za vedení Doc. RNDr. Jany Talašové, CSc. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 30. března 2012

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí diplomové práce Doc. RNDr. Janě Talašové, CSc. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích. Dále chci poděkovat rodině a přátelům za podporu po celou dobu studia, vyučujícím na PŘF UP za to, že nás učili správnému matematickému myšlení, a v neposlední řadě také svým spolužákům, kteří mě svým zběsilým tempem na vlastních diplomových pracích motivovali, abych nezhálela.

Obsah

Použité značení	5
Úvod	6
1 Základy vícekritériálního rozhodování	8
1.1 Základní pojmy rozhodování	8
1.2 Kritéria a jejich váhy	9
1.3 Metoda párového srovnávání	12
2 Analytický hierarchický proces (AHP)	21
2.1 Fáze rozhodování pomocí AHP	21
2.2 Hierarchie	23
2.3 Párové srovnávání	25
2.3.1 Saatyho škála	26
2.3.2 Saatyho matice	28
2.3.3 Vlastní čísla a vlastní vektory reciprokových matic	30
2.4 Geometrický průměr řádků	32
2.5 Konzistence	35
2.6 Slabá konzistence	38
2.7 Dílčí hodnocení variant	49
2.7.1 Relativní hodnocení	49
2.7.2 Absolutní hodnocení	53
2.8 Syntéza hodnocení	56
2.9 Přidání varianty do modelu nebo její odebrání	61
2.10 Výhody a nevýhody	67
2.10.1 Výhody AHP	68
2.10.2 Nevýhody AHP	71
3 Aplikace metody AHP na příkladu	76
3.1 Model I	78
3.1.1 Relativní hodnocení	79
3.1.2 Absolutní hodnocení	87
3.1.3 Srovnání hodnocení	94
3.2 Model II - přidání varianty	96
3.2.1 Relativní hodnocení	96
3.2.2 Absolutní hodnocení	104
3.2.3 Srovnání hodnocení	105
3.3 Srovnání preferenčního pořadí variant po přidání varianty	106
3.4 Závěrečné rozhodnutí o výběru varianty	108
Závěr	109

Seznam obrázků	111
Seznam tabulek	111
Literatura	113

Použité značení

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$a \geq b$	a je větší nebo rovno b
$a > b$	a je větší než b
$a \leq b$	a je menší nebo rovno b
$a < b$	a je menší než b
$A \succsim B$	A je preferováno před B nebo je stejně preferované jako B
$A \succ B$	A je preferováno před B
$A \not\succ B$	A není preferováno před B
$A \sim B$	A je preferováno stejně jako B
$A \subseteq B$	A je podmnožina B
$A \times B$	kartézský součin množin A a B
$P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^n$	matice P , která má n řádků a n sloupců
P^T	transponovaná matice k $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^n$, tj. $P^T = \{p_{ji}\}_{i,j=1}^n$
$m \times n$	rozměry matice, tj. matice má m řádků a n sloupců
$(v_1, v_2, \dots, v_n)^T$	n -rozměrný sloupcový vektor
$\sum_{i=1}^n v_i$	součet n prvků: $v_1 + v_2 + \dots + v_n$
$\prod_{i=1}^n a_i$	součin n prvků: $a_1 a_2 \dots a_n$
$\binom{n}{k}$	kombinační číslo, čteme „ n nad k “
min	minimum
max	maximum
$f(x) \rightarrow \min$	minimalizace výrazu $f(x)$
$f : X \rightarrow Y$	zobrazení f z X do Y
$\ln x$	přirozený logaritmus x o základu e , kde e je Euleirovo číslo
$\hat{b}$	odhad prvku b
$P(\cdot)$	pravděpodobnost výrazu v závorce
$K(m)$	konstanta K , která je závislá na čísle m
(a, b)	uspořádaná dvojice prvků a, b
$\{a, b, c\}$	množina prvků a, b, c
$a \in A$	a náleží A
$a \notin A$	a nenáleží A
$a \approx b$	a je přibližně rovno b
$a \neq b$	a se nerovná b
$a \doteq b$	a zaokrouhlíme na b
$a := b$	a definujeme jako b
$a \wedge b$	a a zároveň b
$a \vee b$	a nebo b
$a \Rightarrow b$	a implikuje b , resp. jestliže platí a , pak platí také b
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval od a po b (tj. obsahuje oba tyto prvky)
$\square$	konec důkazu
$\triangle$	konec příkladu

Úvod

V podstatě vše, co v životě děláme - ať už vědomě či podvědomě, je výsledkem nějakého rozhodovacího procesu. Pokud jde o vědomé rozhodování, pak vždy usilujeme o to, abychom získali o problému co nejvíce informací, a na jejich základě se snažíme dojít k co nejlepšímu závěru. Jedná-li se ale o problém, kde se stýká několik protichůdných hledisek, nejsme už schopni jednoduše rozhodnout, která alternativa pro nás bude mít největší přínos. Potřebujeme nějaké jednoduché a komplexní řešení, které nám umožní rozčlenit problém do přehledné struktury a pracovat vždy s co nejméně prvky současně. Potřebujeme tedy aparát, který je koncepčně jednoduchý a lze jej snadno použít. Na druhou stranu ale musí být dostatečně robustní, aby se pomocí něj daly řešit problémy reálného světa. Z toho důvodu je také nutné, aby dokázal pracovat nejen s kritérii, jejichž důsledky jsou dány kvantitativně, ale také s těmi, které nabývají kvalitativních důsledků.

Právě takovou metodu představuje Analytický hierarchický proces (AHP), který je v současnosti jednou z nejpoužívanějších metod vícekriteriálního rozhodování. AHP nám umožňuje členit celý problém do hierarchií a následně spolu vždy porovnávat pouze dva prvky a tak získat váhy kritérií a dílčí hodnocení alternativ. Celkové hodnocení potom získáme jednoduchou syntézou. V této práci se budeme zabývat právě metodou AHP a podíváme se blíže na její silné a slabé stránky. Konkrétně se zaměříme na požadavek konzistence.

Nejprve si v první kapitole představíme základní pojmy vícekriteriálního rozhodování a seznámíme se s metodou párového srovnání, která patří stejně jako AHP mezi metody, kde jsou váhy kritérií vypočteny pomocí párového srovnávání.

Ve druhé kapitole se zaměříme na samotnou metodu AHP. Nejprve si popíšeme fáze rozhodování pomocí této metody a potom ukážeme, jakou úlohu zde hrají hierarchie. Následně si vysvětlíme, jak se provádí párové srovnání kritérií a jak pomocí něj získáme jejich váhy. V dalších podkapitolách se budeme zabývat konzistencí matice párových srovnávání a oslabením tohoto požadavku. Dále si ukážeme, jak probíhá dílčí relativní a absolutní hodnocení alternativ a jak potom probíhá syntéza takových hodnocení. Potom si uvedeme, co se může stát

s preferenčním pořadím variant, když do modelu přidáme nebo z něj odebereme variantu. Nakonec se v této kapitole zaměříme na výhody a nevýhody AHP.

Ve třetí kapitole potom celou metodu aplikujeme na praktickém příkladu, kde budeme uvažovat koupi bytu. Hodnocení jednotlivých bytů zjistíme pomocí relativního i absolutního dílčího hodnocení a podíváme se také, jestli se změni preferenční pořadí variant, když do modelu přibude jedna nová alternativa.

1 Základy vícekritériálního rozhodování

Kapitoly 1.1 a 1.2 jsou zpracovány podle literatury [1], [2], [3] a [4].

1.1 Základní pojmy rozhodování

Vícekritériálním rozhodovacím procesem rozumíme proces řešení problému, kde máme na výběr více než jednu možnost řešení a kde se rozhodujeme na základě více než jednoho kritéria. Tato kritéria jsou většinou protichůdná (jako např. koupit co nejlepší auto, ale utratit přitom co nejméně peněz), proto je málokdy výsledkem takového procesu varianta, která by byla nejlepší vzhledem ke všem kritériím. Vybraná varianta je pak nutně kompromisem mezi dílčími optimy a při jejím určení jsou důležité preference rozhodovatele vzhledem k jednotlivým kritériím. Tím se dostáváme k základním pojmům vícekritériálního rozhodování.

Cílem rozhodování rozumíme určitý budoucí stav, kterého chceme pomocí rozhodovacího procesu dosáhnout. Většinou jej rozkládáme na podcíle, tzv. *dílčí cíle*, ze kterých potom tvoříme buď omezující podmínky ke zmenšení počtu variant, mezi kterými se rozhodujeme, nebo kritéria rozhodování.

Kritérium tedy chápeme jako hodnotící hledisko, na jehož základě se rozhodujeme, která z variant je pro nás nejvhodnější.

Varianty nebo *alternativy* rozhodování jsou prvky, které má smysl vzájemně porovnávat vzhledem k jednotlivým kritériím a ze kterých vybíráme tu, která nejvíce naplňuje cíl rozhodování.

Jednotlivce nebo skupinu lidí, která rozhoduje, nazýváme *subjektem* rozhodování. *Objekt* rozhodování potom představuje systém, jehož se týká rozhodování a na jehož základě byl stanoven cíl.

Důsledky variant vzhledem ke kritériím nám vyjadřují stav objektu rozhodování, o kterém se předpokládá, že nastane po realizaci této varianty. Můžou být vyjádřeny slovně nebo číslem.

Důsledky variant závisí někdy také na *stavech světa*, které chápeme jako vzájemně se vylučující stavy, které mohou ovlivnit řešení problému a které nemůže subjekt rozhodování ovlivnit.

Proces vícekritériálního rozhodování se tedy skládá z těchto fází:

- stanovení a formulace cíle (problému), popř. dílčích cílů rozhodování;
- stanovení souboru kritérií, na jejichž základě se budeme rozhodovat;
- volba variant řešících daný problém;
- vyhodnocení důsledků variant vzhledem k jednotlivým kritériím;
- určení důsledků variant při změně vnějších podmínek;
- agregace dílčích hodnocení variant a výběr optimální varianty řešící problém.

Nyní, když máme definované základní pojmy, můžeme rozčlenit rozhodovací procesy podle informací o stavech světa. Když v dané situaci můžeme zanedbat náhodné vlivy, potom hovoříme o *rozhodování za jistoty*. Jsme-li dostatečně informovaní o možných stavech světa a o pravděpodobnostech, se kterými mohou nastat, pak mluvíme o *rozhodování za rizika*. Pokud navíc tyto pravděpodobnosti neznáme a ani je nemůžeme zjistit, jedná se o *rozhodování za nejistoty*. My se v této práci budeme zabývat rozhodováním za jistoty.

1.2 Kritéria a jejich váhy

Kritéria jsou jedním z nejdůležitějších prvků rozhodování. Na jejich základě hodnotíme varianty a zjišťujeme, jak moc naplňují celkový cíl. Aby toto hodnocení bylo co nejkvalitnější, měl by soubor kritérií splňovat určité požadavky, mezi něž řadíme:

- *úplnost*, tj. na základě souboru kritérií jsme schopni posoudit naplnění cíle řešeného problému;
- *měřitelnost*, tj. jsme na základě každého kritéria schopni určit důsledky jednotlivých variant a díky nim varianty uspořádat;

- *operacionalita*, tj. každé kritérium musí být jasně definované a srozumitelné;
- *neredundance*, tj. každé kritérium zohledňuje jinou část problému, vzájemně se nepřekrývají;
- *minimální rozsah*, tj. rozhodovacího procesu by se mělo účastnit tolik kritérií, aby na jejich základě bylo možné rozhodnout o naplnění cíle, ale zároveň jen tolik kritérií, kolik je nutných k rozhodnutí, čímž se zjednodušuje celý rozhodovací proces;
- *dekomponovatelnost*, tj. umožnění zjednodušení rozhodovacího problému na základě kritérií na jednodušší úlohy.

Kritéria rozlišujeme z hlediska preferencí na *kritéria s rostoucí preferencí*, u nichž jsou preferovány vyšší hodnoty před nižšími (např. zisk), a *kritéria s klesající preferencí*, kde jsou preferovány nižší hodnoty před vyššími (např. náklady).

Podle způsobu vyjádření důsledků variant vzhledem ke kritériím rozlišujeme *kvantitativní kritéria*, kde důsledky variant nabývají číselných hodnot, a *kvalitativní kritéria*, na jejichž základě jsou důsledky variant popsány nejčastěji slovně nebo mohou být také vyjádřeny vizuálními prostředky (např. konkrétní barva auta).

Hodnocení variant dle uvažovaného kritéria může být dáno na jedné ze tří stupnic: *nominální*, kde jsme schopni říct pouze to, jestli se jednotlivé důsledky variant rovnají nebo ne. Tedy můžeme říct, že varianty jsou stejně dobré nebo nikoliv, ale nemůžeme je nijak uspořádat; *ordinální*, na níž můžeme jednotlivé varianty uspořádat od nejhorší k nejlepší; *kardinální*, která může mít podobu *intervalové* nebo *poměrové* stupnice. U obou těchto stupnic musíme mít danu nějakou jednotku měření. Intervalová stupnice má stanoven nějaký počátek a jsme na ní schopni říct, o kolik se varianty liší při dané jednotce měření, tj. o kolik je jedna varianta lepší či horší než jiná. U poměrové stupnice je ale její počátek dán přirozeně a vyplývá z vlastností měřeného kritéria. Díky této stupnici můžeme říci, kolikrát je jedna varianta lepší či horší než ostatní varianty.

Váhy kritérií

Soubor kritérií můžeme dělit na *neporovnatelný*, tj. kritéria nemůže uspořádat podle jejich významnosti; *ordinálně porovnatelný*, kde můžeme jednotlivá kritéria uspořádat podle významnosti; a *kardinálně porovnatelný*, kde můžeme určit významnost kritérií, tzv. *váhy*.

Definice 1.1. Mějme kritéria $K_1, K_2, \dots, K_n$. Potom $v_1, \dots, v_n$ taková, že $v_i \in \mathbb{R}$, $v_i \geq 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ nazveme *váhami kritérií* $K_1, K_2, \dots, K_n$, jestliže pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$ platí, že $v_i \geq v_j$ právě tehdy, když K_i je významnější nebo stejně významné jako K_j . Pokud navíc váhy splňují podmínku $\sum_{i=1}^n v_i = 1$, potom řekneme, že $v_1, v_2, \dots, v_n$ tvoří *normované váhy*.

Poznámka 1.1. Vlastnost, že kritérium K_i je významnější nebo stejně významné jako kritérium K_j , značíme $K_i \succsim K_j$.

Poznámka 1.2. Pojem významnější v definici 1.1 můžeme nahradit slovem *preferovanější*.

Poznámka 1.3. Máme-li nenormované váhy $w_1, w_2, \dots, w_n$, potom normované váhy $v_1, v_2, \dots, v_n$ dostaneme pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ pomocí vzorce

$$v_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j}. \quad (1.1)$$

Definice 1.1 nám popisuje, kdy v obecném případě nazveme n -tici reálných čísel váhami. Jak je ale vidět, tyto váhy nám umožňují pouze uspořádat kritéria od nejvýznamnějšího po nejméně významné, nesou tedy pouze ordinální informaci o významnostech kritérií. Aby nám tyto váhy určovaly i konkrétní významnost kritérií, je třeba také, aby představovaly i informaci o tom, o kolik nebo kolikrát je jedno kritérium významnější nebo méně významné než jiné. Interpretace vah kritérií se potom u různých metod liší - jednou můžou popisovat podíl významnosti kritéria na celkovém cíli (popř. procentuální podíl), jindy zase poměry

významnosti jednotlivých kritérií, jak je tomu v Saatyho metodě, kterou se v této práci budeme dále zabývat.

Metody pro stanovení vah kritérií můžeme rozdělit do dvou skupin a to na metody, u kterých není potřeba znát důsledky variant vzhledem k jednotlivým kritériím, a na ty, a u kterých je tato znalost nezbytná.

Metody, které nevyžadují znalosti důsledků variant, potom ještě můžeme dělit na metody přímé a nepřímé. U přímých metod rozhodovatel přiděluje kritériím přímo jednotlivé váhy. Tyto metody jsou proto jednodušší a nekladou na hodnotitele velké nároky. Mezi takovéto metody patří např. klasifikace kritérií do tříd, přiřazení bodů z hodnotící stupnice, Metfesselova alokace nebo srovnání významu kritérií z jejich preferenčního pořadí.

U nepřímých metod váhy kritérií stanovujeme pomocí preferencí dvojic kritérií (resp. intenzit těchto preferencí). Řadíme mezi ně metodu párového srovnávání a Saatyho metodu párového srovnávání.

Mezi metody, u kterých je třeba znát důsledky variant vzhledem ke kritériím, řadíme kompenzační metodu a regresní metodu.

Všechny zde zmíněné metody lze nalézt v [1]. My se v této práci budeme dále zabývat jen metodami párového srovnávání, speciálně pak Saatyho metodou.

1.3 Metoda párového srovnávání

Jak již bylo zmíněno výše, tato metoda spadá mezi nepřímé metody určení vah kritérií a lze ji použít také jako metodu hodnocení variant. Abychom se na ni mohli podívat blíže, je neprve potřeba zadefinovat pojem relace. Níže uvedené definice a věty lze nalézt v [4] a [5].

Základní pojmy z teorie relací

Definice 1.2. Mějme množiny A a B . Potom množinu uspořádaných dvojic $A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$ nazveme *kartézský součin* množin A a B . Podmnožinu $R \subseteq A \times B$ nazveme *relace* na $A \times B$. Zápisem $(a, b) \in R$ nebo $a R b$ značíme to, že prvky $a \in A$, $b \in B$ jsou spolu v relaci R .

Definice 1.3. Nechť R je relace na $A \times A$. Potom řekneme, že R je:

a) *reflexivní*, jestliže pro každé $a \in A$ platí:

$$(a, a) \in R;$$

b) *ireflexivní*, jestliže pro každé $a \in A$ platí:

$$(a, a) \notin R;$$

c) *symetrická*, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí:

$$(a, b) \in R \implies (b, a) \in R;$$

d) *antisymetrická*, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí:

$$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \implies a = b;$$

e) *asymetrická*, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí:

$$(a, b) \in R \implies (b, a) \notin R;$$

f) *tranzitivní*, jestliže pro každé $a, b, c \in A$ platí:

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R;$$

g) *negativně tranzitivní*, jestliže pro každé $a, b, c \in A$ platí:

$$(a, b) \notin R \wedge (b, c) \notin R \implies (a, c) \notin R;$$

e) *úplná*, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí:

$$(a, b) \in R \vee (b, a) \in R;$$

f) *slabě úplná*, jestliže pro každé $a, b \in A$, $a \neq b$ platí:

$$(a, b) \in R \vee (b, a) \in R.$$

Definice 1.4. Nechť R je relace na $A \times A$. Potom řekneme, že R je:

- a) *ostré (lineární) uspořádání*, jestliže R je asymetrická, tranzitivní a slabě úplná;
- b) *kvaziuspořádání*, jestliže R je tranzitivní a úplná;
- c) *relace ekvivalence*, jestliže R je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Věta 1.1. Nechť R je ostré lineární uspořádání na $A \times A$. Potom je R ireflexivní.

Důkaz: Nechť R je ostré lineární uspořádání na $A \times A$, tedy je to relace asymetrická, tranzitivní a slabě úplná. Dále nechť $a \in A$. Předpokládejme, že $(a, a) \in R$. Potom z asymetrie plyne, že $(a, a) \notin R$, což je ale spor s předpokladem. Tudíž platí $(a, a) \notin R$ a R je ireflexivní. $\square$

Věta 1.2. Nechť P a I jsou relace na $A \times A$. Potom relace $R = P \cup I$ na $A \times A$ je kvaziuspořádání, jestliže P a I splňují následující podmínky:

- 1) pro každé $a, b \in A$ platí právě jeden ze vztahů (tj. trichotomie)

$$(a, b) \in P, \quad (b, a) \in P, \quad (a, b) \in I;$$

- 2) I je relace ekvivalence;

- 3) P je tranzitivní relace;

- 4) pro P a I platí tzv. smíšená tranzitivita, tj. pro každé $a, b, c \in A$ platí

$$(a, b) \in P \wedge (b, c) \in I \implies (a, c) \in P;$$

$$(a, b) \in I \wedge (b, c) \in P \implies (a, c) \in P.$$

Důkaz: viz [4], str. 91.

Věta 1.3. Nechť R je kvaziuspořádání na $A \times A$ a nechť P a I jsou takové relace na $A \times A$, pro které platí pro každé $a, b \in A$

$$(a, b) \in P \quad \text{právě tehdy, když} \quad (a, b) \in R \wedge (b, a) \notin R;$$

$$(a, b) \in I \quad \text{právě tehdy, když} \quad (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R.$$

Potom pro relace P a I platí vlastnosti 1) až 4) z věty 1.2.

Důkaz: viz [4], str. 91.

Definice 1.5. Nechť R je relace na $A \times A$, kde $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ je konečná množina o n prvcích. Potom matici $R' = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^n$ nazveme *incidenční maticí* relace R , jestliže pro její prvky platí pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } (a_i, a_j) \in R; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nyní se po úvodních definicích můžeme vrátit k metodě párového srovnávání. V literatuře [1] a [4] se autoři omezují jen na výklad toho, jak se v této metodě vyplňuje preferenční matice a jak z ní získat váhy kritérií, ale už se opomíjí, že preference mezi kritérii musí také splňovat tranzitivitu, aby informace o nich byla zadána racionálně. Proto se zde zaměříme na to, co vše musí splňovat prvky preferenční matice, aby byl rozhodovatelův úsudek racionální, a potom se podíváme, jak tyto vlastnosti můžeme prezentovat matematicky.

Ostré uspořádání množiny kritérií na základně jejich preferencí

Předpokládáme, že máme množinu m kritérií, kde nejsou žádná dvě stejně významná. Zavedeme následující značení.

Značení: Zápisem $K_i \succ K_j$, kde $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, budeme značit, že kritérium K_i je významnější (resp. preferovanější) než kritérium K_j .

Při zjišťování vah postupujeme tak, že pro kritéria vytvoříme preferenční matici $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^m$. Pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m$ určíme

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } K_i \succ K_j; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Musí tedy platit, že $p_{ii} = 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, m$, protože o žádném kritériu nemůžeme říct, že je významnější než ono samo. Dále musí platit pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j$

$$p_{ji} = 1 - p_{ij}, \tag{1.2}$$

protože je-li K_i preferováno před K_j , pak není K_j preferováno před K_i a naopak. Při určování vah kritérií stačí tedy v matici P napsat nuly na diagonálu a potom vyplnit horní trojúhelník (nad diagonálou). Ostatní prvky dopočteme podle vztahu (1.2). Poslední požadavek, který máme na matici P , je aby platilo pro každé $i, j, k = 1, 2, \dots, m$

$$p_{ij} = 1 \wedge p_{jk} = 1 \implies p_{ik} = 1. \quad (1.3)$$

Vztah (1.3) vyjadřuje to, že když je kritérium K_i preferováno před K_j a K_j je preferováno před K_k , kde $i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$, potom musí být i K_i preferováno před K_k .

Řádkový součet pro kritérium K_i , kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, nám reprezentuje počet kritérií, před kterými je K_i preferováno. Pomocí něj potom zjistíme nenormovanou váhu tohoto kritéria následujícím vzorcem: pro každé $i = 1, 2, \dots, m$ platí

$$w_i = \sum_{j=1}^m p_{ij} + 1. \quad (1.4)$$

Normované váhy $v_1, v_2, \dots, v_m$ potom vypočteme dle vzorce (1.1). Pokud bychom ve vzorci (1.4) nepřičetli 1, dostalo by nejméně významné kritérium váhu 0, tzn. bylo by označeno za naprosto bezvýznamné a z rozhodování bychom ho tím pádem úplně vypustili. Proto do našeho souboru kritérií jakoby přidáme naprosto bezvýznamné kritérium, které by bylo preferovanější všemi ostatními kritérii. Tím pádem toto kritérium dostane váhu 0 a ostatní kritéria budou mít váhy podle dle vzorce (1.4).

Vlastnosti, které po matici P požadujeme, zajišťují to, aby zadané informace o preferencích byly racionální. Když se na požadavky na prvky P podíváme zblízka, zjistíme, že jsou-li splněny, pak P reprezentuje incidenční matici relace $\succ$, která je ostré uspořádání. Vztah (1.2) vyjadřuje to, že relace $\succ$ je asymetrická, protože, je-li $K_i \succ K_j$, pak $K_j \not\succ K_i$ pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m$. Rovnost (1.2) ale také říká to, že $\succ$ je slabě úplná relace, protože když $K_i \not\succ K_j$, pak $K_j \succ K_i$ pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j$, tedy je splněna podmínka slabé úplnosti. No

a konečně vztah (1.3) vyjadřuje to, že $\succ$ musí být tranzitivní. Navíc platí to, že $p_{ii} = 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, m$. To nám říká, že $K_i \not\succ K_i$, tedy $\succ$ je ireflexivní, což je dle věty 1.1 další vlastnost ostrého uspořádání.

Ohlídat to, aby chování rozhodovatele bylo racionální, není v tomto případě nijak složité. Jak už bylo řečeno, necháme jej vyplnit pouze horní trojúhelník matice P (nad diagonálou). Na diagonálu doplníme 0 a prvky pod diagonálou dopočteme pomocí vztahu (1.2). Aby byl dodržen vztah (1.3), tak nejvýznamnější kritérium musí být preferováno před všemi ostatními $(m - 1)$ kritérii, druhé nejvýznamnější před $(m - 2)$ kritérii atd. až poslední kritérium není preferované před žádným. Stačí tedy spočítat řádkové součty $\sum_{j=1}^m p_{ij}$ pro každé $i = 1, 2, \dots, m$ a kritéria přeuspořádat tak, že první bude to s největším řádkovým součtem a poslední to s nejmenším součtem. Potom už stačí zkontrolovat jen horní trojúhelník matice (nad diagonálou), jestli v prvním řádku máme $(m - 1)$ jedniček, ve druhém $(m - 2)$ jedniček atd. až v posledním řádku žádnou. Neboli pro přechíslovaná kritéria, kde K_1 je nejvýznamnější a K_m je nejméně významné, musí platit pro řádkové součty $\sum_{j=1}^m p_{ij}$, že tvoří posloupnost $\{m - 1, m - 2, \dots, 0\}$. Tedy po přechíslování kritérií podle řádkových součtů musí spodní trojúhelník matice P (včetně diagonály) tvořit samé 0, tj.

$$p_{ij} = 0 \quad \text{pro každé } i, j = 1, 2, \dots, m, i \geq j.$$

a horní trojúhelník matice P (nad diagonálou) musí tvořit samé 1, tj.

$$p_{ij} = 1 \quad \text{pro každé } i, j = 1, 2, \dots, m, i < j.$$

Uvažujme nyní, že rozhodovatel zadal informace o preferencích racionálně a že jsme kritéria přechíslovali podle jejich řádkových součtů tak, že K_1 má nejvyšší řádkový součet (tedy je nejvýznamnější) a K_m má nejmenší řádkový součet (tedy je nejméně významné). Protože K_1 je preferováno před $(m - 1)$ kritérii, K_2 před $(m - 2)$ kritérii atd. až K_m není preferované před žádným, tak dostaneme ze vzorce (1.4), že nenormované váhy kritérií vypadají následovně

$$w_1 = m, \quad w_2 = m - 1, \quad \dots, \quad w_m = 1.$$

Abychom dostali normované váhy $v_1, v_2, \dots, v_m$, vydělíme původní váhy $w_1, w_2, \dots, w_m$ jejich součtem, tj. $\frac{m(m+1)}{2}$ a dostaneme

$$v_1 = \frac{2}{m+1}, \quad v_2 = \frac{2(m-1)}{m(m+1)}, \quad v_3 = \frac{2(m-2)}{m(m+1)}, \quad \dots, \quad v_m = \frac{2}{m(m+1)}.$$

Kvaziuspořádání množiny kritérií na základně jejich preferencí

Nyní uvažujeme, že mezi kritérii $K = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ máme taková, která jsou stejně významná. Zavedeme následující značení.

Značení: Zápisem $K_i \sim K_j$, kde $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, budeme značit, že kritérium K_i je stejně významné (resp. stejně preferované) jako kritérium K_j .

Opět vytvoříme preferenční matici $R' = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^m$ a to tak, že pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m$ platí:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } K_i \succ K_j; \\ 0.5, & \text{jestliže } K_i \sim K_j; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tentokrát je zřejmé, že $r_{ii} = 0.5$ pro každé $i = 1, 2, \dots, m$, neboť každé kritérium je stejně významné jako ono samo. Dále musí být pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m$ splněn vztah

$$r_{ji} = 1 - r_{ij}. \quad (1.5)$$

To je zřejmé, protože je-li kritérium K_i stejně významné jako K_j , pak musí být také K_j stejně významné jako K_i (tj. jestliže $r_{ij} = 0.5$, pak také $r_{ji} = 0.5$). Také pokud K_i preferujeme před K_j , potom nepreferujeme K_j před K_i , ani je nepovažujeme za stejně významná (tj. pokud $r_{ij} = 1$, pak $r_{ji} = 0$). A samozřejmě to musí platit také naopak - jestliže K_i nepreferujeme před K_j , ani je nepovažujeme za stejně významná, pak považujeme K_j za významnější než K_i (tj. jestliže $r_{ij} = 0$, pak $r_{ji} = 1$).

Dále požadujeme, aby platily následující vztahy

$$r_{ij} = 1 \wedge r_{jk} = 1 \implies r_{ik} = 1; \quad (1.6)$$

$$r_{ij} = 0.5 \wedge r_{jk} = 0.5 \implies r_{ik} = 0.5; \quad (1.7)$$

$$r_{ij} = 1 \wedge r_{jk} = 0.5 \implies r_{ik} = 1; \quad (1.8)$$

$$r_{ij} = 0.5 \wedge r_{jk} = 1 \implies r_{ik} = 1. \quad (1.9)$$

Tj. jako u předchozí metody: jestliže K_i preferujeme před K_j a K_j před K_k , pak také preferujeme K_i před K_k . Dále pokud považujeme K_i za stejně významné jako K_j a to za stejně významné jako K_k , pak také K_i musí být stejně významné jako K_k . V posledních dvou vztazích požadujeme, aby platilo, že je-li K_i významnější než K_j a K_j je stejně významné jako K_k , pak K_i musí být významnější než K_k . Analogicky je-li K_i stejně významné jako K_j a K_j preferujeme před K_k , pak musíme K_i preferovat před K_k .

Protože na diagonále matice P máme číslo 0.5, tak se nemůže stát, že by součet prvků v nějakém řádku byl nulový. Proto k váhám už nemusíme přičítat 1 jako v předchozím případě. Nenormované váhy kritérií $K_1, K_2, \dots, K_m$ tedy pro $i = 1, 2, \dots, m$ vypočteme

$$w_i = \sum_{j=1}^m r_{ij}. \quad (1.10)$$

Normované váhy potom dostaneme pro $i = 1, 2, \dots, m$ ze vzorce (1.1).

Podíváme-li se na matici R' , pak vidíme, že ji můžeme psát ve tvaru

$$R' = P + 0.5I,$$

kde P je incidenční matice relace $\succ$ a I je incidenční matice relace $\sim$. Můžeme tedy definovat relaci

$$R := \succ \cup \sim.$$

Aby chování rozhodovatele bylo racionální, požadujeme, aby matice R' splňovala vztahy (1.5) až (1.9). To odpovídá tomu, že relace R je kvaziuspořádání. Z toho, jak jsme si definovali matici R' , je vidět, že pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m$ platí vztahy

$$K_i \succ K_j \quad \text{právě tehdy, když} \quad (K_i, K_j) \in R \wedge (K_i, K_j) \notin R;$$

$$K_i \sim K_j \quad \text{právě tehdy, když} \quad (K_i, K_j) \in R \wedge (K_j, K_i) \in R.$$

Pak tedy dle vět 1.2 a 1.3 je R kvaziuspořádání právě tehdy, když $\succ$ a $\sim$ splňují vlastnosti 1) až 4) ve větě 1.2. Jak vidíme, vztah (1.6) reprezentuje tranzitivitu relace $\succ$, (1.7) tranzitivitu relace $\sim$ a vztahy (1.8) a (1.9) vyjadřují smíšenou tranzitivitu relací $\succ$ a $\sim$. Rovnost (1.5) zase reprezentuje trichotomii a reflexivitu a symetrii relace $\sim$.

Tedy aby chování rozhodovatele bylo racionální, musí relace R být kvazisupořádání. To se dá reprezentovat maticí, která má na diagonále bloky čtvercových matic, které obsahují jen čísla 0.5, nad diagonálou jsou bloky matic, které obsahují samé 1 a pod diagonálou bloky, které obsahují samé 0. Když tedy přechísľujeme kritéria podle jejich řádkových součtů $\sum_{j=1}^m r_{ij}$, kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, tak, že K_1 bude mít největší řádkový součet a K_m bude mít nejmenší řádkový součet, a matice R' bude tohoto tvaru, tak je chování rozhodovatele racionální.

Hodnocení variant

Analogicky, jak sme získali pomocí metody párového srovnávání váhy kritérií, můžeme také porovnat soubor variant vzhledem k jednomu kritériu, a získat tak hodnocení variant vzhledem k danému kritériu. Symbolem $\succ$ budeme tentokrát značit to, že jedna varianta je *lepší* než druhá, a $\sim$, že jsou obě varianty *stejně dobré*. Máme-li varianty $a_1, a_2, \dots, a_n$, potom pomocí metody párového srovnávání vypočteme dle vzorce (1.4) nebo (1.10) vzhledem ke každému kritériu K_j , kde $j = 1, 2, \dots, m$, hodnocení variant $g_1^j, g_2^j, \dots, g_n^j$, které následně znormujeme dle (1.1) a dostaneme hodnocení $h_1^j, h_2^j, \dots, h_n^j$. Celkové hodnocení varianty a_i potom bude pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ ve tvaru váženého průměru

$$h_i = \sum_{j=1}^m v_j h_i^j.$$

2 Analytický hierarchický proces (AHP)

Analytický hierarchický proces (dále jen AHP) je metoda, kterou vymyslel T.L. Saaty (proto je také často zvaná Saatyho metoda), a je v současnosti jednou z nejznámějších a nejpoužívanějších metod vícekritériálního rozhodování. Umožňuje rozhodovateli rozdělit složité problémy na problémy menšího charakteru, přiřadit k nim příslušná kritéria a členit je tak do hierarchií. Díky tomu má rozhodovatel větší přehled o řešeném problému a také mu to usnadňuje přiřazování vah kritériím. Jedním z důvodů široké použitelnosti této metody je to, že dokáže pracovat jak s kritérii, vůči nimž jsou důsledky variant vyjádřeny kvantitativně, tak i s těmi, jejichž důsledky jsou popsány kvalitativně.

Metodu AHP řadíme mezi metody párového srovnávání. Nespočívá ale jen v určování preferencí mezi kritérii, ale také v určování intenzit těchto preferencí. Rozhodovatel (expert) má k dispozici škálu se slovními popisy, podle které určuje, jak moc je jedno kritérium významnější než druhé. Stejně tak potom vzhledem ke každému z těchto kritérií porovnává, jak moc je jedna varianta lepší než druhá. Na rozhodovatele je opět kladen požadavek, aby jeho rozhodování bylo alespoň do jisté míry konzistentní. Za takového předpokladu můžeme potom pomocí získaných vah kritérií jednoduše agregovat dílčí hodnocení variant.

2.1 Fáze rozhodování pomocí AHP

Metoda AHP představuje komplexní způsob, jak činit rozhodnutí ohledně různě složitých problémů. Zároveň nám umožňuje tyto problémy řešit pomocí jednoduchého konceptu a jednoduchých výpočetních metod. Celý proces můžeme dle [2] shrnout do následujících kroků:

1. Definování a analýza rozhodovacího problému:
 - definice problému a stanovení cíle rozhodování;
 - sestavení souboru kritérií: Tento soubor kritérií musí být kardinálně porovnatelný, přičemž metoda akceptuje kritéria, vzhledem k nimž se dají důsledky variant vyjádřit kvantitativně i kvalitativně;

- výběr alternativ, mezi kterými budeme hledat tu, která nejlépe řeší náš problém. Pro každou variantu musíme být schopni vyjádřit její důsledky vzhledem ke všem kritériím, která jsme definovali. Tedy o každé variantě musíme mít plnou informaci. Navíc bychom neměli uvažovat příliš velké množství variant, abychom udrželi svá hodnocení v relevantní rovině;
 - určení důsledků variant vzhledem ke každému kritériu z definovaného souboru;
 - nastavení tzv. *aspirační úrovně* pro jednotlivá kritéria, tj. pro každé kritérium můžeme definovat minimální nebo maximální úroveň, kterou vůči němu musí splňovat důsledky variant. Pokud nějaká varianta této aspirační úrovně nedosahuje, můžeme ji z našeho rozhodování úplně vyloučit (např. máme omezené finanční prostředky a chceme kupovat automobil, pak všechny alternativy, jejichž cena je vyšší než naše úspory, vyloučíme).
2. Strukturování hierarchického modelu: V této fázi vytvoříme hierarchickou strukturu, kde na první úrovni bude cíl rozhodování, na poslední úrovni varianty, ze kterých budeme vybírat, která z nich nejvíce naplňuje daný cíl, a na meziúrovních budeme konkretizovat cíl rozhodování, tj. členit jej na jednotlivá kritéria a ta popř. postupně ještě na subkritéria.
3. Dílčí vyhodnocení:
- párové srovnání kritérií vzhledem k celkovému cíli nebo vzhledem k nadřazenému kritériu, které se nachází v předchozí hierarchické úrovni;
 - párové srovnání všech alternativ vzhledem ke každému z kritérií, z něhož už nevychází žádné subkritérium.
4. Syntéza dílčích hodnocení a výběr nejlepší varianty: Vytvoření celkového hodnocení pomocí vah kritérií a dílčích hodnocení variant.

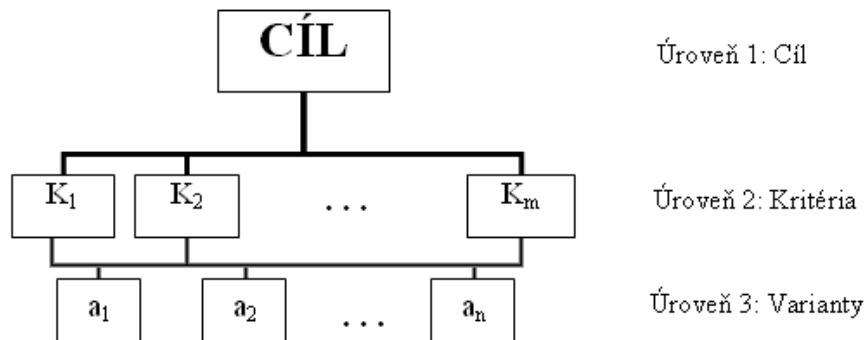
5. Analýza citlivosti modelu: Do modelu můžeme zkusit přidat nebo odebrat nějakou variantu a sledovat, jestli se změní preferenční pořadí jednotlivých variant.

2.2 Hierarchie

Členění problému, kritérií a variant do hierarchií má několik důvodů. Jedním z nich je, že nám umožňuje komplexní pohled na celý problém. Ten totiž rozdělíme na jednotlivá hlediska, která mohou ovlivňovat dosažení našeho cíle. Tyto aspekty můžeme dále dělit na jednodušší a jednodušší (čímž tvoříme jednotlivé hierarchie), dokud náš problém uspokojivě nerozdělíme na jednotlivé části, které má pak smysl spolu porovnávat vzhledem k jednotlivým aspektům v předchozí hierarchické úrovni. Získáme tak přehlednou strukturu, díky níž jsme schopni říct, zda jsme do rozhodování zahrnuli všechno, co by ovlivňovalo náš celkový cíl.

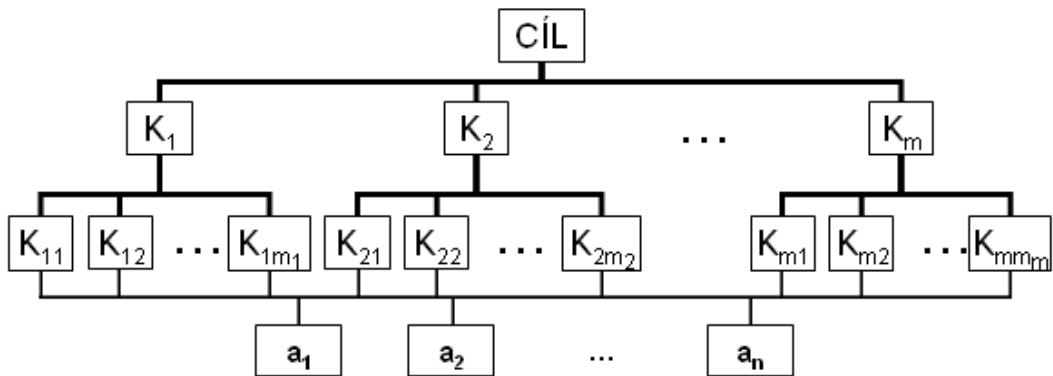
Druhým důvodem je jednodušší přístup k porovnávání kritérií. Máme-li velký počet kritérií, je pro nás často velmi obtížné určit, které z nich je pro nás významnější, natož o kolik. Měli-li bychom kritéria $K_1, K_2, \dots, K_m$, potom bychom museli porovnat $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$ párů kritérií. Také s větším počtem porovnávání klesá pozornost rozhodovatele a jeho úsudek není natolik relevantní. Tento problém řeší právě hierarchie. Na vyšších úrovních máme kritéria globálního významu a postupně je konkretizujeme. Potom spolu porovnáváme jen ta kritéria, která spolu souvisí a mají stejný charakter, tj. ta, která jsou na stejné hierarchické úrovni a jež mají nadřazené stejné kritérium (popř. celkový cíl).

Nejjednodušší hierarchie je tříúrovňová. Na první hierarchické úrovni se nachází náš rozhodovací problém nebo-li cíl, kterého chceme při rozhodovacím procesu dosáhnout. Na druhé úrovni tento cíl členíme na kritéria, podle kterých budeme posuzovat jednotlivé varianty. Na poslední hierarchické úrovni se potom nachází samotné alternativy, ze kterých vybíráme tu nejlepší. Následující schéma je zobrazeno na obrázku 1.



Obrázek 1: Tříúrovňová hierarchie

Můžeme-li kritéria na třetí úrovni rozčlenit na specifitější části, dostaneme tzv. *subkritéria*. Přitom z každého kritéria může vycházet libovolný počet subkritérií. Z nich potom vytvoříme čtvrtou hierarchickou úroveň, jak je vidět na obrázku 2. Tímto způsobem bychom mohli pokračovat dále a tvořit další a další hierarchické úrovně.



Obrázek 2: Čtyřúrovňová hierarchie

Při utváření hierarchie můžeme postupovat zezdola nahoru, tj. nejprve určit alternativy, z nichž budeme vybírat tu nejvhodnější, a podle jejich vlastností potom určit kritéria, podle kterých budeme rozhodovat. Také můžeme použít postup shora dolů, tedy nejprve definujeme kritéria a podle nich specifikujeme alternativy. Stejně tak můžeme postupovat při utváření souboru kritérií. Buď

můžeme nejprve stanovit konkrétní kritéria, na jejichž základě se budeme rozhodovat, a potom se je budeme snažit podle věcné souvislosti zařadit do jednotlivých skupin, které by tvořily prvky nadřazené hierarchické úrovni. Nebo můžeme nejprve stanovit obecnější kritéria a ty se potom snažit konkretizovat až dojdeme ke kritériím, na jejichž základě budeme posuzovat varianty.

2.3 Párové srovnávání

Máme-li náš rozhodovací problém strukturovaný do hierarchie, můžeme přistoupit k vyčíslení vah kritérií a zjištění dílčích hodnocení variant vzhledem k jednotlivým kritériím. Toho docílíme párovým srovnáváním, přičemž budeme vycházet z námi vytvořené hierarchie.

Nášemu hlavnímu cíli, který se nachází na první hierarchické úrovni, přidělíme váhu 1. Tu potom chceme rozdělit mezi všechna kritéria $K_1, K_2, \dots, K_m$ na druhé hierarchické úrovni. Pomocí párového srovnávání jednotlivých kritérií vzhledem k celkovému cíli potom dostaneme pro tato kritéria váhy $w_1, w_2, \dots, w_m$, které následně znormujeme na váhy $v_1, v_2, \dots, v_m$.

Má-li nějaké kritérium K_i , kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, subkritéria $K_{i1}, K_{i2}, \dots, K_{ip_i}$, chceme mezi ně opět rozdělit váhu o velikosti 1 a dostat tak normované váhy $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ip_i}$. Proto ve třetí hierarchické úrovni a také všech ostatních kromě poslední (tj. ve všech úrovních, které obsahují subkritéria) postupujeme následovně: Vezmeme všechna kritéria, která mají nadřazené stejné kritérium, a párově je porovnáme vzhledem k tomuto nadřazenému kritériu, přičemž mezi tato subkritéria rozdělíme váhu o velikosti 1.

Na poslední hierarchické úrovni máme alternativy $a_1, a_2, \dots, a_n$. Nyní spolu tyto varianty párově porovnáme vzhledem ke každému kritériu, jemuž už nejsou podřízena žádná subkritéria. Označme počet takových kritérií s . Potom pro naše varianty dostaneme hodnocení $h_1^{(j)}, h_2^{(j)}, \dots, h_n^{(j)}$ pro každé $j = 1, 2, \dots, s$, kde $h_i^{(j)}$ představuje hodnocení i -té varianty vzhledem k j -tému kritériu.

Představme si nyní, že bychom ke kritériům $K_1, K_2, \dots, K_m$ znali jejich váhy $w_1, w_2, \dots, w_m$. Potom můžeme sestavit matici W relativních preferencí kritérií,

která bude v následujícím tvaru:

$$W = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_m} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_m}{w_1} & \frac{w_m}{w_2} & \dots & \frac{w_m}{w_m} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Při rozhodování však váhy $w_1, w_2, \dots, w_m$ většinou neznáme, proto se pokusíme odhadnout matici relativních preferencí kritérií a váhy následně dopočítat.

2.3.1 Saatyho škála

Abychom mohli párově porovnat jednotlivá kritéria nejen z hlediska toho, které je významnější než to druhé, ale také podle toho, jak moc je významnější, musíme si nadefinovat stupnici, na které budeme tato porovnání provádět. K tomu stanovil T. L. Saaty devítibodovou škálu určující významnost jednotlivých prvků, již doplnil slovními popisy, které vyjadřují význam těchto intenzit a umožňují rozhodovateli snadněji své preference vyjádřit.

V tabulce 1 vidíme tzv. *základní Saatyho škálu* skládající se z hodnot 1, 3, 5, 7 a 9 a k nim odpovídající slovní popisy včetně originálních anglických názvů.

hodnotící stupeň	porovnání prvků A a B A je ... než B	vysvětlení
1	stejně významný <i>equal importance</i>	oba prvky přispívají stejnou měrou cíli
3	mírně významnější <i>moderate importance</i>	zkušenosti a úsudek mírně preferují první prvek před druhým
5	silně významnější <i>strong importance</i>	silná preference prvního prvku před druhým
7	velmi silně významnější <i>very strong importance</i>	velmi silná preference prvního prvku před druhým
9	extrémně významnější <i>extreme importance</i>	skutečnosti upřednostňující první prvek před druhým mají nejvyšší stupeň průkaznosti

Tabulka 1: Saatyho škála

Poznámka 2.1. Pro slovní popisy v tabulce 1 jsme použili výraz *významnější*. Ten však použijeme pouze v případě, že spolu porovnáváme kritéria. Použili-li bychom Saatyho metodu ke srovnávání variant, museli bychom výraz nahradit slovem *lepší*.

Hodnoty $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ nám v jednodušších případech stačí k tomu, abychom porovnali významnosti jednotlivých kritérií. Avšak nejsou-li pro nás dostačující a slovní popisy nám připadají příliš hrubě rozlišující, můžeme přidat do stupnice i sudé hodnoty, potom hodnocení vyjadřujeme na množině $\{1, 2, \dots, 9\}$. Hodnoty 2, 4, 6 a 8 jsou tzv. *mezihodnoty*, které použijeme, nemůžeme-li se rozhodnout mezi dvěma hodnotami ze základní škály. U mezihodnot většinou neužíváme slovních popisů. Sám Saaty ve svých článcích [6] a [7] upřednostňuje vysvětlení hodnot jako kompromis mezi dvěma lichými hodnotami. Ale abychom měli úplné slovní popisy celé devítibodové škály, přidáme anglické termíny pro mezihodnoty (české ekvivalenty se neužívají): pro hodnoty 2, 4, 6 a 8 je to po řadě *weak or slightly importance*, *moderate plus importance*, *strong plus importance* a *very, very strong importance*.

Saaty definoval tyto slovní popisy na základě tzv. *sémantického diferenciálu*, což je metoda měření intenzity psychologických a sociologických postojů daného člověka k dané situaci a to na nějaké definované bodové škále, která představuje intenzitu postoje subjektu k dané situaci. Konce škály přitom představují protichůdné pojmy (např. tmavý a světlý). Více o sémantickém diferenciálu lze nalézt v [8].

Srovnání dvou prvků A a B provedeme tak, že si tyto prvky zapíšeme do tabulky, viz tabulka 2, a zakroužkováním čísla ze stupnice určíme, který prvek je pro nás významnější. Označením čísla nalevo od 1 řekneme, že A je významnější než B, naopak výběrem čísla vpravo od 1 určíme prvek B jako významnější. Intenzitu preference nám potom určuje konkrétní hodnota ze škály.

A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	5	7	8	9	B
----------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----------

Tabulka 2: Určení relativní významnosti prvků A a B na Saatyho škále

Pokud bychom uvažovali, že máme pouze dvě kritéria, pak nám čísla z hodnotící škály určují také to, jak se podílí dílčí hodnocení variant na celkovém hodnocení této skupiny. Řekneme-li, že kritérium A je stejně významné jako kritérium B, potom se hodnocení jednotlivých variant bude řídit oběma kritérii stejnou měrou, tedy v poměru 1 : 1. Hodnocení varianty tedy bude určovat z $\frac{1}{2}$ kritérium A a též z $\frac{1}{2}$ kritérium B. Analogická vlastnost platí i pro všechny ostatní hodnoty rozšířené škály, viz tabulka 3.

stupeň preference A před B	v jakém poměru se podílí dílčí hodnocení dle A a dle B na celkovém hodnocení	podíl hodnocení dle A na celkovém hodnocení	podíl hodnocení dle B na celkovém hodnocení
1	1:1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	2:1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	3:1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
4	4:1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
5	5:1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$
6	6:1	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$
7	7:1	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$
8	8:1	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$
9	9:1	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$

Tabulka 3: Podíl dílčích hodnocení na celkovém hodnocení skupiny

2.3.2 Saatyho matice

Když nyní opět vezmeme kritéria $K_1, K_2, \dots, K_m$ a pomocí Saatyho škály je párově porovnáme a výsledky uspořádáme do matice, dostaneme tzv. *Saatyho*

matici S , která je v následujícím tvaru:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mm} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Přičemž pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m$ nám prvek s_{ij} říká, že kritérium K_i je s_{ij} -krát významnější než K_j neboli že významnost kritéria K_j tvoří $\frac{1}{s_{ij}}$ tinu významnosti kritéria K_i . Z toho je tedy vidět, že matice S musí být *reciproká*, tzn. že pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m$ musí platit

$$s_{ij} = \frac{1}{s_{ji}}. \quad (2.3)$$

Proto tedy pokud porovnáme kritéria K_i a K_j , kde $i, j = 1, 2, \dots, m$, a na pozici s_{ij} doplníme hodnotu z ze Saatyho stupnice $\{1, 2, \dots, 9\}$, pak kritéria K_j a K_i už nemusíme znovu porovnávat a na pozici s_{ji} vepíšeme jeho převrácenou hodnotu $\frac{1}{z}$.

V matici S nám tedy stačí pomocí párového srovnávání doplnit pouze horník trojúhelník. Na symetrických pozicích se potom budou nacházet převrácené hodnoty a na hlavní diagonále samé 1, protože když spolu porovnáme dvě stejná kritéria, je zřejmé, že budou mít obě stejnou významnost, což v Saatyho stupnici odpovídá právě hodnotě 1.

Pro větší přehlednost je velmi vhodné (ne však nutné) kritéria nejprve uspořádat dle významnosti od nejvýznamnějšího po nejméně významné (např. pomocí metody párového srovnávání, viz kapitola 1.3). Potom se při racionálním chování rozhodovatele budou v horním trojúhelníku matice S nacházet jen hodnoty $\{1, 2, \dots, 9\}$ a žádná z hodnot $\{\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$.

Saatyho matice S , kterou jsme takto zkonstruovali, je odhadem matice W , tj.

$$s_{ij} \approx \frac{w_i}{w_j} \quad \text{pro každé } i, j = 1, 2, \dots, m.$$

2.3.3 Vlastní čísla a vlastní vektory reciprokových matic

Nyní si uvedeme několik vět týkajících se kladných a reciprokových matic, které nám ukáží některé užitečné vlastnosti matic S a W . Nejprve potřebujeme zavést pojem ireducibilní matice.

Definice 2.1. Nechť A je matice typu $m \times m$. Potom matici A nazveme *ireducibilní*, jestliže neexistuje *permutační* matice P typu $m \times m$ (tj. taková matice, která má v každém řádku a každém sloupci právě jednu 1 a všechny ostatní prvky 0), tak, že platí

$$PAP^T = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ C & B_2 \end{pmatrix},$$

kde 0 je nulová matice typu $p \times (m - p)$, B_1 je čtvercová matice typu $p \times p$, kde $p \leq m$, B_2 je čtvercová matice typu $(m - p) \times (m - p)$ a C je libovolná matice typu $(m - p) \times p$.

Kladná matice je tedy speciálním případem ireducibilní matice, protože její řádky a sloupce nelze přeskládat tak, abychom dostali v pravém horním rohu nulovou submatici. Tedy Saatyho matice S i matice W jsou ireducibilní.

Věta 2.1. (*Perron-Frobeniova*) Nechť P je nezáporná čtvercová ireducibilní matice typu $m \times m$. Potom P má jednoduché maximální vlastní číslo $\lambda_{max} > 0$, k němuž přísluší vlastní vektor $\mathbf{v}$, který má všechny složky kladné.

Důkaz: viz [9], str. 673.

K maticím S a W tedy existuje vlastní vektor, který má všechny složky kladné a který přísluší λ_{max} .

Věta 2.2. Nechť $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je kladná čtvercová matice typu $m \times m$, která je reciproká, tj.

$$p_{ij} = \frac{1}{p_{ji}} \quad \text{pro každé } i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.4)$$

Potom pro její maximální vlastní číslo platí $\lambda_{max} \geq m$.

Důkaz: viz [2], str. 90.

Maximální vlastní číslo matic S a W bude tedy alespoň m .

Věta 2.3. *Nechť $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je kladná reciproká matice typu $m \times m$, jejíž prvky se dají psát ve tvaru*

$$p_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \quad \text{pro každé } i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.5)$$

kde $w_i > 0$, $w_j > 0$. Označme $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$. Potom m je vlastní číslo matice P a $\mathbf{w}$ je k němu příslušný vlastní vektor, tj.

$$P\mathbf{w} = m\mathbf{w}.$$

Důkaz: viz [2], str. 87.

Věta 2.4. *Nechť $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je kladná čtvercová matice typu $m \times m$, pro jejíž prvky platí (2.5), kde $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ je vektor s kladnými složkami, tj. $w_l > 0$ pro každé $l = 1, 2, \dots, m$. Potom platí*

$$\lambda_{max} = \lambda_m = m \quad (2.6)$$

a pro všechna ostatní vlastní čísla platí

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m-1} = 0. \quad (2.7)$$

Důkaz: viz [2], str. 87.

Tyto dvě věty nám říkají, že m je jediné nenulové vlastní číslo matice W a že pokud bychom tuto matici znali, pak váhy kritérií $K_1, K_2, \dots, K_m$ můžeme hledat jako složky vlastního vektoru $\mathbf{w}$ příslušnému $\lambda_{max} = m$.

Protože S je aproximací W , budeme nenormované váhy kritérií zapsané vektorově $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ hledat také jako řešení soustavy m rovnic o m neznámých zapsané vektorově

$$S\mathbf{w} = \lambda_{max}\mathbf{w},$$

kterou můžeme vyjádřit také ve tvaru

$$(S - \lambda_{max}I)\mathbf{w} = \mathbf{0},$$

kde I je jednotková matice typu $m \times m$ a $\mathbf{0}$ je sloupcový nulový vektor o m prvcích. Přitom je z předchozích vět zřejmé, že čím více se bude λ_{max} blížit m , tím více se bude S blížit W .

2.4 Geometrický průměr řádků

Protože matice S je odhadem matice W , chceme minimalizovat rozdíl mezi jejich prvky s_{ij} a $\frac{w_i}{w_j}$ pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m$. Pokud budeme $w_1, w_2, \dots, w_m$ považovat za normované váhy kritérií, můžeme je hledat také minimalizací součtu čtverců

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(s_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2 \rightarrow \min \quad (2.8)$$

za podmínky

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1, w_i > 0 \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.9)$$

Dostali jsme se tak k metodě nejmenších čtverců, tedy k úloze kvadratického programování, jejíž řešení by bylo třeba hledat numericky. Vyjdeme-li z úvahy, že s_{ij} se má blížit $\frac{w_i}{w_j}$, potom také $\ln s_{ij}$ se musí blížit $\ln \frac{w_i}{w_j}$. Přitom podobně jako platí $s_{ij}s_{ji} = s_{ij}\frac{1}{s_{ij}} = 1$, platí podobná vlastnost i pro zlogaritmování tohoto vztahu:

$$\ln s_{ij} + \ln s_{ji} = \ln s_{ij} + \ln \frac{1}{s_{ij}} = \ln s_{ij} - \ln s_{ij} = 0 = \ln 1.$$

Od multiplikativního vztahu jsme tedy přešli k aditivnímu. Pokud tedy s_{ij} nahradíme $\ln s_{ij}$ a $\frac{w_i}{w_j}$ nahradíme $\ln \frac{w_i}{w_j}$, pak od úlohy (2.8), (2.9) přejdeme k metodě nejmenších logaritmických čtverců, tedy dostaneme úlohu

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\ln s_{ij} - (\ln w_i - \ln w_j))^2 \rightarrow \min \quad (2.10)$$

za podmínky (2.9).

V literatuře [10] na straně 15 je ukázáno, že řešením úlohy (2.10), (2.9) je

geometrický průměr řádků matice S , tj. pro každé $i = 1, 2, \dots, m$ platí

$$w_i = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m s_{ij}}. \quad (2.11)$$

Nemáme-li tedy k dispozici software, můžeme k výpočtu vah kritérií použít právě tuto výpočetně nenáročnou metodu geometrického průměru. Takto vypočtené váhy mají ještě jednu důležitou vlastnost - podíváme-li se na ně jako na kompoziční data, tak nám také minimalizují chybu, které se dopouštíme při odhadu vah.

Kompozičními daty ve statistice rozumíme kladná reálná čísla, která nesou pouze relativní informaci, jejich hodnoty tedy reprezentují podíly mezi nějakými čísly (více v [11]). Protože matice S nám poskytuje odhad matice W , můžeme podle [10] její sloupce považovat za vektory kompozičních dat, která jsou zatížena chybami e_{ij} pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m$, $i < j$, tj.

$$s_{ij} = \frac{w_i}{w_j} e_{ij}. \quad (2.12)$$

Prvek s_{ij} je odhadem $\frac{w_i}{w_j}$, tedy s_{ji} je odhadem $\frac{w_j}{w_i}$. Proto pro rozdělení pravděpodobností chyb musí platit, že je reciproce symetrické, tj.

$$P(a < e_{ij} \leq b) = P(a < \frac{1}{e_{ij}} \leq b).$$

Pro chyby v multiplikativním tvaru používáme logaritmicko normální rozdělení (více o tomto rozdělení v [12]), které splňuje také to, že je reciproce symetrické. Proto nyní zlogaritmujeme výraz (2.12). Pak dostaneme

$$\ln s_{ij} = \ln w_i - \ln w_j + \ln e_{ij}, \quad (2.13)$$

kde $i, j = 1, 2, \dots, m$, $i < j$. O chybách e_{ij} předpokládáme, že jsou nezávislé a mají logaritmicko-normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem σ^2 .

Uděláme-li substituci

$$Y = \begin{pmatrix} \ln s_{12} \\ \ln s_{13} \\ \vdots \\ \ln s_{m-1,m} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \ln w_1 \\ \ln w_2 \\ \vdots \\ \ln w_m \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \ln e_{12} \\ \ln e_{13} \\ \vdots \\ \ln e_{m-1,m} \end{pmatrix},$$

můžeme potom vztah (2.13) přepsat do tvaru

$$Y = XB + E, \quad (2.14)$$

kde X je matice typu $\frac{m(m-1)}{2} \times m$, jejíž prvky tvoří čísla 1, -1 a 0 tak, aby vztah (2.14) po roznásobení odpovídal vztahu (2.13). Vztah (2.14) představuje lineární regresní model (více o lineární regresi v [13]), kde nejlepším nestranným lineárním odhadem parametrů $b_i := \ln w_i$ pro každé $i = 1, 2, \dots, m$ je odhad metodou nejmenších čtverců

$$\hat{b}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \ln s_{ij} = \frac{1}{m} \ln \prod_{j=1}^m s_{ij}.$$

Odtud dostaneme maximálně věrohodný odhad váhy w_i pro každé $i = 1, 2, \dots, m$:

$$\hat{w}_i = e^{\hat{b}_i} = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m s_{ij}}.$$

Pro odhad vah jsme tedy dostali stejný vzorec jako je (2.11). Navíc je v [10] ukázáno, že nestranný odhad rozptylu chyb σ^2 je ve tvaru

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\ln s_{ij} - (\ln w_i - \ln w_j))^2}{d},$$

kde d udává počet porovnání, které jsme provedli, snížený o počet lineárně nezávislých parametrů, tj.

$$d = \frac{m(m-1)}{2} - (m-1) = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Tedy geometrický průměr nám také minimalizuje rozptyl chyb, kterými jsou zatíženy odhady vah, od jejich střední hodnoty, tj. od 0.

Bude-li platit $\ln s_{ij} = \ln w_i - \ln w_j$, tedy $s_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m$, potom bude matice S konzistentní, tedy naše rozhodování nebude protichůdné. Čím bude větší rozdíl mezi prvky s_{ij} a $\frac{w_i}{w_j}$, tím bude matice méně konzistentní.

2.5 Konzistence

Jak už bylo řečeno v kapitole 2.3.2, o Saatyho matici S předpokládáme, že je kladná a reciproká. Dalším přirozeným předpokladem pro tuto matici je, aby platilo, že je-li kritérium K_i s_{ij} -krát významnější než kritérium K_j a kritérium K_j je s_{jk} -krát významnější než K_k , kde $i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$, pak by mělo být také kritérium K_i s_{ik} -krát významnější než K_k , kde $s_{ik} = s_{ij}s_{jk}$. To vyjadřuje následující definice.

Definice 2.2. Nechť $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je čtvercová matice typu $m \times m$, pro jejíž prvky platí

$$p_{ik} = p_{ij}p_{jk} \quad \text{pro každé } i, j, k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.15)$$

Potom řekneme, že matice P je *konzistentní*.

Nyní si ukážeme, co platí pro konzistentní matice a také za jakých podmínek je matice konzistentní.

Věta 2.5. Nechť $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je čtvercová matice typu $m \times m$, pro jejíž prvky platí (2.5), kde $w_l > 0$ pro každé $l = 1, 2, \dots, m$. Potom matice P je konzistentní a reciproká.

Důkaz: viz [2], str. 86.

Odtud je vidět, že matice W je konzistentní.

Věta 2.6. Nechť $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je čtvercová matice typu $m \times m$, která je konzistentní. Potom existuje vektor $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$, kde $w_l > 0$ pro každé $l = 1, 2, \dots, m$, takový, že prvky matice splňují vztah (2.5).

Důkaz: viz [2], str. 88.

Věta 2.7. *Nechť P je čtvercová matice typu $m \times m$, která je konzistentní. Potom P je reciproká a pro její vlastní čísla platí vztahy (2.6) a (2.7).*

Důkaz: viz [2], str. 89.

Věta 2.8. *Nechť P je kladná čtvercová matice typu $m \times m$, která je reciproká, a pro její maximální vlastní číslo platí vztah (2.6). Potom matice P je konzistentní.*

Důkaz: viz [2], str. 91.

Z předchozích dvou vět plyne následující tvrzení.

Důsledek 2.1. *Matice $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je konzistentní právě tehdy, když pro její maximální vlastní číslo platí $\lambda_{max} = m$.*

Důsledek 2.1 spolu s větou 2.4 nám tedy říká, že matice W je konzistentní. Kdežto matice S , jejíž prvky jsou pouze odhadem prvků matice W a pro niž podle věty 2.2 platí, že $\lambda_{max} \geq m$, nemusí být podle naší definice konzistentní. Tento výsledek jsme očekávali, protože v reálných situacích se málokdy setkáme s tím, aby naše úsudek byl úplně konzistentní. Čím více se ale pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m$ prvky s_{ij} budou blížit poměru vah $\frac{w_i}{w_j}$, tím více se matice S bude blížit konzistentní matici W . Proto nyní zavedeme následující pojem.

Definice 2.3. *Nechť S je kladná čtvercová matice typu $m \times m$ a λ_{max} je její maximální vlastní číslo. Pak *indexem nekonzistence* matice S rozumíme číslo CI vyjádřené vztahem*

$$CI = \frac{\lambda_{max} - m}{m - 1}. \quad (2.16)$$

Protože platí $\lambda_{max} \geq m$, je CI nezáporné. Pro absolutně konzistentní matici (tedy pro W) platí, že $CI = 0$. Čím více se index nekonzistence vzdaluje od nuly, tím je nekonzistence matice větší a hodnocení rozhodovatele je méně relevantní. Otázkou je, jak velkou nekonzistenci matice S jsme ochotni tolerovat. Do jaké hodnoty bude hodnocení považováno za relativně konzistentní a kdy řekneme rozhodovateli, aby se pokusil své hodnocení přehodnotit. Z toho důvodu byl zaveden

tzv. *podílový koeficient nekonzistence* CR , který je definován jako

$$CR = \frac{CI}{RI(m)}, \quad (2.17)$$

kde $RI(m)$ je tzv. *náhodný koeficient nekonzistence*, což je průměrná hodnota koeficientu CI získaná z náhodně vygenerovaných reciprokových matic řádu $m \times m$, které mají na hlavní diagonále samé jedničky a ostatní prvky tvoří hodnoty $\{\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots, 1, 2, \dots, 9\}$. Saaty provedl experiment s 50 000 takovými náhodně vygenerovanými maticemi typu $m \times m$, kde $m = 3, 4, \dots, 15$, a u každé takové matice spočítal koeficient CI , viz [14]. Koeficient $RI(m)$ potom určil jako aritmetický průměr všech vypočtených CI pro dané m , čímž získal následující výsledky:

m	2	3	4	5	6	7	8
RI(m)	0	0.52	0.89	1.11	1.25	1.35	1.40
m	9	10	11	12	13	14	15
RI(m)	1.45	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59

Tabulka 4: Hodnoty náhodného koeficientu nekonzistence $RI(m)$

Saaty stanovil, že pokud je index nekonzistence CI matice S roven maximálně desetině indexu nekonzistence náhodné matice $RI(m)$, tj. pokud

$$CR \leq 0.1,$$

potom považujeme S za konzistentní.

Budeme-li mít Saatyho matici S typu 2×2 , bude vždy konzistentní. Taková matice je totiž tvaru

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} \\ \frac{1}{s_{12}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Je vidět, že platí:

$$\begin{aligned} s_{11}s_{12} &= 1 \cdot s_{12} = s_{12} & s_{21}s_{11} &= \frac{1}{s_{12}} \cdot 1 = \frac{1}{s_{12}} = s_{21} \\ s_{12}s_{21} &= s_{12} \frac{1}{s_{12}} = 1 = s_{11} & s_{21}s_{12} &= \frac{1}{s_{12}} s_{12} = 1 = s_{22} \\ s_{12}s_{22} &= s_{12} \cdot 1 = s_{12} & s_{22}s_{21} &= 1 \cdot \frac{1}{s_{12}} = \frac{1}{s_{12}} = s_{21} \end{aligned}$$

Pro Saatyho matici vyššího řádu než 2 už ale tato podmínka není elementárně splněna.

2.6 Slabá konzistence

Jak už bylo řečeno, úplné konzistence je v reálných případech rozhodování těžké, ba přímo nemožné dosáhnout. Definice konzistence, kterou jsme si uvedli, vychází z přirozeného požadavku tranzitivity. Podívejme se ale na tento požadavek více zblízka.

Zaměříme-li se na slovní popisy, zjistíme, že podle této definice by mělo platit, že je-li kritérium A mírně významnější než B (tj. $s_{AB} = 3$) a B je mírně významnější než C (tj. $s_{BC} = 3$), pak by muselo být A extrémně významnější než C (tj. $s_{AC} = 9$). To je ale příliš silná preference. V takovémto případě bychom čekali, že A bude alespoň mírně významnější než C , ale určitě bychom si nemysleli, že ze dvou mírných preferencí nám vyplyne preference extrémní.

Kdybychom pokračovali v této úvaze, zjistíme, že např. je-li kritérium A silně významnější než B (tj. $s_{AB} = 5$) a B je velmi silně významnější než C (tj. $s_{BC} = 7$), pak by muselo platit $s_{AC} = 35$, ale takovouto hodnotu v Saatyho škále nenalezneme. Tedy pro všechny dvojice porovnání, dostaneme-li v jednom případě číslo z množiny $\{3, 4, \dots, 9\}$ a ve druhém případě číslo z množiny $\{4, 5, \dots, 9\}$, nemůže už naše matice být konzistentní.

Požadavek konzistence, jak jej nadefinoval Saaty, je tedy pro slovní popisy příliš silný a je těžké jej dosáhnout - v reálných situacích je to v podstatě nemožné. Proto tento požadavek na chování rozhodovatele můžeme považovat za jednu z hlavních nevýhod metody. Zavedme si nyní tedy jinou definici konzistence, která bude více zohledňovat slovní popisy Saatyho škály.

Pro potřebu následující definice a vět si nejprve označíme pro zjednodušení následující množiny $A = \{2, 3, \dots, 9\}$, $A^* = \{1, 2, \dots, 9\}$, $B = \{\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2}\}$, $B^* = \{\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots, 1\}$, $C = \{\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots, 9\}$.

Dále připomeňme, že Saatyho matice $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je reciproká, tj. pro každé

$i, j = 1, 2, \dots, m$ jsou tyto dva zápisy ekvivalentní: $s_{ij} = a \in A^*$ a $s_{ji} = \frac{1}{a} \in B^*$.

Definice 2.4. Nechť $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je Saatyho matice. Potom řekneme, že matice S je *slabě konzistentní*, jestliže pro každé $i, j, k = 1, 2, \dots, m$, kde $i \neq j, j \neq k, k \neq i$, platí:

$$s_{ij} = a \in A \wedge s_{jk} = b \in A \implies s_{ik} = c \geq \max\{a, b\}; \quad (2.18)$$

$$s_{ij} = 1 \wedge s_{jk} = a \in A^* \implies s_{ik} = a. \quad (2.19)$$

$$s_{ij} = a \in A^* \wedge s_{jk} = 1 \implies s_{ik} = a. \quad (2.20)$$

Poznámka 2.2. Výsledkem implikace ve vztazích (2.19) a (2.20) je vlastně $s_{ik} = \max\{s_{ij}, s_{jk}\}$.

Poznámka 2.3. V definici 2.4 můžeme připustit i $i = j, j = k$ a $k = i$, protože pro ně jsou vztahy (2.19) a (2.20) triviálně splněny.

Definice 2.4 lépe odpovídá slovním popisům než definice 2.2. Vráťme-li se k našim předchozím příkladům, je-li kritérium A mírně významnější než B (tj. $s_{AB} = 3$) a B mírně významnější než C (tj. $s_{BC} = 3$), tak aby bylo naše rozhodnutí slabě konzistentní, stačí aby kritérium A bylo alespoň mírně významnější než C (tj. $s_{AC} \geq 3$).

Stejně tak bude-li A silně významnější než B (tj. $s_{AB} = 5$) a B je velmi silně významnější než C (tj. $s_{BC} = 7$), pak A musí být alespoň velmi silně významnější než C (tj. $s_{AC} \geq 7$).

V definici 2.4 uvažujeme pouze prvky z A^* . Vlastnosti pro ostatní prvky plynou z toho, že matice S je reciproká, jak si dále ukážeme.

To, jestli je matice slabě konzistentní, můžeme nejlépe kontrolovat, uspořádáme-li kritéria $K_1, K_2, \dots, K_m$ dle významosti tak, že $K_1 \succsim K_2 \succsim \dots \succsim K_m$. Toto preferenční uspořádání většinou intuitivně víme nebo jej můžeme jednoduše zjistit pomocí metody párového srovnávání popsané v kapitole 1.3. Jsou-li kritéria

uspořádana od nejvýznamnějšího po nejméně významné, pak se v horním trojúhelníku matice nachází jen čísla z množiny A^* . Stačí se tedy zaměřit jen na ně, jestli splňují vlastnosti (2.18), (2.19) a (2.20) pro všechna $i, j, k = 1, 2, \dots, m$, $i < j < k$.

Analogicky ale také můžeme ověřit slabou konzistenci pomocí prvků z B^* , jak ukazuje následující věta.

Věta 2.9. *Saatyho matice $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je slabě konzistentní právě tehdy, když pro každé $i, j = 1, 2, \dots, m$, kde $i \neq j, j \neq k, k \neq i$, platí*

$$s_{ij} = \frac{1}{a} \in B \wedge s_{jk} = \frac{1}{b} \in B \implies s_{ik} = \frac{1}{c} \leq \min \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right\}; \quad (2.21)$$

$$s_{ij} = 1 \wedge s_{jk} = \frac{1}{a} \in B^* \implies s_{ik} = \frac{1}{a}. \quad (2.22)$$

$$s_{ij} = \frac{1}{a} \in B^* \wedge s_{jk} = 1 \implies s_{ik} = \frac{1}{a}. \quad (2.23)$$

Důkaz: 1) Nejprve provedeme důkaz pro implikaci zleva doprava. Tedy předpokládejme, že S je slabě konzistentní, tj. pro každé $i, j, k = 1, 2, \dots, m$, kde $i \neq j, j \neq k, k \neq i$, platí (2.18), (2.19) a (2.20). Dále v následujících bodech předpokládejme, že $i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i \neq j, j \neq k, k \neq i$.

- a) Nechť $s_{ij} = \frac{1}{a} \in B$ a $s_{jk} = \frac{1}{b} \in B$. Z reciprocity Saatyho matice S plyne, že $s_{ji} = a \in A$ a $s_{kj} = b \in A$. Tedy dle vztahu (2.18) dostaneme $s_{ki} = c \geq \max\{a, b\}$ neboli

$$\frac{1}{c} \leq \frac{1}{\max\{a, b\}} \implies \frac{1}{c} \leq \frac{1}{a} \wedge \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} \implies \frac{1}{c} \leq \min \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right\},$$

tedy platí vztah (2.21).

- b) Jestliže $s_{ij} = 1$ a $s_{jk} = \frac{1}{a} \in B^*$, pak opět z reciprocity matice S dostáváme $s_{ji} = 1$ a $s_{kj} = a \in A^*$. Tedy dle (2.20) $s_{ki} = a$, tj. $s_{ik} = \frac{1}{a}$, tj. platí (2.22).
- c) Je-li $s_{ij} = \frac{1}{a} \in B^*$ a $s_{jk} = 1$, pak $s_{ji} = a \in A^*$ a $s_{kj} = 1$, tedy dle (2.19) platí $s_{ki} = a$ neboli $s_{ik} = \frac{1}{a}$. Tím jsme dokázali vztah (2.23).

V bodech a), b) a c) jsme dokázali, že je-li matice S slabě konzistentní, pak platí vztahy (2.21), (2.22) a (2.23) pro každé $i, j, k = 1, 2, \dots, m$.

2) Nyní dokážeme implikaci ve směru zprava doleva. Opět nechť $i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i \neq j, j \neq k, k \neq i$.

a) Předpokládejme, že $s_{ji} = a \in A$ a $s_{kj} = b \in A$, tj. $s_{ij} = \frac{1}{a} \in B$ a $s_{jk} = \frac{1}{b} \in B$, a že pro tyto prvky platí vztah (2.21), tj. $s_{ik} = \frac{1}{c} \leq \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$. Z toho

$$\frac{1}{c} \leq \frac{1}{a} \quad \wedge \quad \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} \quad \implies \quad c \geq a \quad \wedge \quad c \geq b \quad \implies \quad c \geq \max\{a, b\}.$$

Z reciprocity S můžeme zároveň psát $s_{ki} = c \in A$. Tedy $s_{ki} \geq \max\{s_{kj}, s_{ji}\}$ a platí vztah (2.18).

b) Předpokládejme nyní, že $s_{ji} = 1$ a $s_{kj} = a \in A^*$, tj. $s_{ij} = 1$ a $s_{jk} = \frac{1}{a} \in B^*$, a nechť z s_{ij} a s_{jk} plyne, že $s_{ik} = \frac{1}{a}$. Pak z reciprocity můžeme psát $s_{ki} = a$, tj. dostali jsme vztah (2.20):

$$s_{kj} = a \in A^* \wedge s_{ji} = 1 \quad \implies \quad s_{ki} = a.$$

c) Nyní předpokládejme, že $s_{ji} = a \in A^*$ a $s_{kj} = 1$, tj. $s_{ij} = \frac{1}{a} \in B^*$ a $s_{jk} = 1$, a nechť z s_{ij} a s_{jk} plyne, že $s_{ik} = \frac{1}{a}$. Pak z reciprocity můžeme psát $s_{ki} = a$, tj. dostali jsme vztah (2.19):

$$s_{kj} = 1 \wedge s_{ji} = a \in A^* \quad \implies \quad s_{ki} = a.$$

V bodech a), b) a c) jsme právě odvodili, že platí-li pro prvky S vztahy (2.21), (2.22) a (2.23), tak je tato matice slabě konzistentní. $\square$

Věta 2.10. *Nechť matice $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je slabě konzistentní. Jestliže*

$$s_{ij} = a \in A \text{ a } s_{jk} = \frac{1}{b} \in B,$$

kde $i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i \neq j, j \neq k, k \neq i$, pak platí

$$a > b \quad \implies \quad s_{ik} = c \in A, \quad c \leq a; \quad (2.24)$$

$$a < b \implies s_{ik} = \frac{1}{d} \in B, \quad \frac{1}{d} \geq \frac{1}{b}; \quad (2.25)$$

$$a = b \implies s_{ik} = c \in C, \quad \frac{1}{a} \leq c \leq a. \quad (2.26)$$

Důkaz: Nechť $s_{ij} = a \in A$ a $s_{jk} = \frac{1}{b} \in B$. Protože S je reciproká, platí $s_{kj} = b \in A$. Dále nechť S je slabě konzistentní, tj. platí vztahy (2.18), (2.19) a (2.20), a nechť $i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i \neq j, j \neq k, k \neq i$.

1) Nechť $a > b$.

a) Předpokládejme, že $s_{ik} < 1$. Označme $s_{ik} = \frac{1}{d} \in B$, tj. $s_{ki} = d \in A$. Podle (2.18) musí platit

$$s_{ki} = d \wedge s_{ij} = a \implies s_{kj} = b \geq \max\{a, d\}, \quad (2.27)$$

tedy $b \geq a$, což je spor s předpokladem.

b) Nechť nyní $s_{ik} = 1$. Potom z (2.19) dostaneme

$$s_{ik} = 1 \wedge s_{kj} = b \implies s_{ij} = b, \quad (2.28)$$

zároveň dle předpokladu $s_{ij} = a$, tedy $a = b$, což je opět spor s předpokladem.

c) Tedy musí platit $s_{ik} > 1$. Označme $s_{ik} = c \in A$. Nyní z (2.18) plyne

$$s_{ik} = c \wedge s_{kj} = b \implies s_{ij} = a \geq \max\{b, c\}, \quad (2.29)$$

tedy $a \geq c$. Nyní jsme dostali tvrzení (2.24), neboť $c \in A$, $c \leq a$.

2) Nechť $a < b$.

a) Předpokládejme, že $s_{ik} > 1$. Označme $s_{ik} = c \in A$. Z (2.18) opět dostaneme vztah (2.29), tedy $a \geq b$, což je spor s předpokladem.

b) Uvažujme nyní $s_{ik} = 1$. Potom opět z (2.19) dostaneme vztah (2.28), tedy $s_{ij} = a = b$, což je ale opět spor s předpokladem.

c) Musí tedy platit $s_{ik} < 1$. Označme $s_{ik} = \frac{1}{d} \in B$, tj. $s_{ki} = d \in A$. Opět z (2.18) dostaneme vztah (2.27), tedy $b \geq d$, tj. $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{d}$. Dokázali jsme tak vztah (2.25).

3) Nechť $a = b$.

Dle předpokladu platí $s_{ij} = a$ a $s_{jk} = \frac{1}{b}$ a protože $a = b$, pak $s_{jk} = \frac{1}{a} \in B$, tj. $s_{kj} = a \in A$. Protože matice S je slabě konzistentní, může nastat jeden z následujících případů:

a) $s_{ik} = c \in A$. Pak z (2.18) dostáváme implikaci

$$s_{ik} = c \wedge s_{kj} = a \implies s_{ij} = a \geq \max\{a, c\}.$$

Pak tedy, aby byl výsledek implikace splněn, $a \geq s_{ik} > 1$.

b) Nebo $s_{ik} = \frac{1}{d} \in B$, tj. $s_{ki} = d \in A$. Pak opět z (2.18) musí platit

$$s_{ki} = d \wedge s_{ij} = a \implies s_{kj} = a \geq \max\{a, d\}.$$

Tj. v tomto případě $a \geq s_{ki}$ neboli $\frac{1}{a} \leq s_{ik} < 1$.

c) Poslední možnost, která může nastat, je $s_{ik} = 1$. Pak z (2.19) platí

$$s_{ik} = 1 \wedge s_{kj} = a \implies s_{ij} = a.$$

Tato implikace platí, tudíž může nastat i možnost $s_{ik} = 1$.

Sjednotíme-li výsledky, ke kterým jsme došli v a), b) a c), pak dostaneme $s_{ik} \in C$, $\frac{1}{a} \leq s_{ik} \leq a$, tj. vztah (2.26). $\square$

Věta 2.10 nám říká, že pokud v matici S nebude pro nějaké $i, j, k = 1, 2, \dots, m$, $i \neq j, j \neq k, k \neq i$ splněn vztah (2.24), (2.25) nebo (2.26), pak S není slabě konzistentní. Pokud bude první prvek z B a druhý z A , platí pro ně podobná vlastnost.

Věta 2.11. *Nechť matice $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^m$ je slabě konzistentní. Jestliže*

$$s_{ij} = \frac{1}{a} \in B \text{ a } s_{jk} = b \in A,$$

kde $i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i \neq j, j \neq k, k \neq i$, pak platí

$$b > a \implies s_{ik} = c \in A, \quad c \leq b; \quad (2.30)$$

$$b < a \implies s_{ik} = \frac{1}{d} \in B, \quad \frac{1}{d} \geq \frac{1}{a}; \quad (2.31)$$

$$b = a \implies s_{ik} = c \in C, \quad \frac{1}{b} \leq c \leq b. \quad (2.32)$$

Důkaz: Nechť $s_{ij} = \frac{1}{a} \in B$ a $s_{jk} = b$. Protože S je reciproká, platí $s_{ji} = a \in A$. Dále nechť S je slabě konzistentní, tj. platí vztahy (2.18), (2.19) a (2.22), a nechť $i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i \neq j, j \neq k, k \neq i$.

1) Nechť $b > a$.

a) Předpokládejme, že $s_{ik} < 1$. Označme $s_{ik} = \frac{1}{d} \in B$, tj. $s_{ki} = d \in A$. Potom podle (2.18) musí platit

$$s_{jk} = b \wedge s_{ki} = d \implies s_{ji} = a \geq \max\{b, d\}, \quad (2.33)$$

tedy $a \geq b$, což je spor s předpokladem.

b) Nechť nyní $s_{ik} = 1$. Potom z (2.20) dostaneme

$$s_{ji} = a \wedge s_{ik} = 1 \implies s_{jk} = a, \quad (2.34)$$

zároveň dle předpokladu $s_{jk} = b$, tedy $a = b$, což je opět spor s předpokladem.

c) Tedy musí platit $s_{ik} > 1$. Označme $s_{ik} = c \in A$. Nyní z (2.18) plyne

$$s_{ji} = a \wedge s_{ik} = c \implies s_{jk} = b \geq \max\{a, c\}, \quad (2.35)$$

tedy $b \geq c$. Nyní jsme dostali tvrzení (2.30), neboť $c \in A$, $c \leq b$.

2) Nechť $b < a$.

a) Předpokládejme, že $s_{ik} > 1$. Označme $s_{ik} = c \in A$. Z (2.18) opět dostaneme vztah (2.35), tedy $b \geq a$, což je spor s předpokladem.

b) Uvažujme nyní $s_{ik} = 1$. Potom opět podle (2.20) dostaneme vztah (2.34), tedy $s_{ik} = a = b$, což je opět spor s předpokladem.

c) Musí tedy platit $s_{ik} < 1$. Označme $s_{ik} = \frac{1}{d} \in B$, tj. $s_{ki} = d \in A$. Opět z (2.18) dostaneme vztah (2.33), tedy $a \geq \max\{b, d\}$, tj. $a \geq d$, tj. $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{d}$. Dokázali jsme tak vztah (2.31).

3) Nechť $b = a$.

Dle předpokladu $s_{ij} = \frac{1}{a}$, tj. $s_{ij} = \frac{1}{b}$ neboli $s_{ji} = b$. Protože matice S je slabě konzistentní, může nastat jeden z následujících případů:

a) $s_{ik} = c \in A$. Pak podle (2.18) musí platit tato implikace:

$$s_{ji} = b \wedge s_{ik} = c \implies s_{jk} = b \geq \max\{b, c\},$$

tj. výsledek implikace je splněn, když $b \geq s_{ik} > 1$.

b) Nebo $s_{ik} = \frac{1}{d} \in B$, tj. $s_{ki} = d \in A$. Pak platí

$$s_{jk} = b \wedge s_{ki} = d \implies s_{ji} = b \geq \max\{b, d\}.$$

Dostali jsme $b \geq s_{ki}$ neboli $\frac{1}{b} \leq s_{ik} < 1$.

c) Poslední možnost, která může nastat, je $s_{ik} = 1$. Pak ze vztahu (2.20) dostaneme

$$s_{ji} = b \wedge s_{ik} = 1 \implies s_{jk} = b,$$

což platí. Může tedy nastat tato možnost $s_{ik} = 1$.

Body a), b) a c) nám dohromady daly, že $s_{ik} \in C$, $\frac{1}{b} \leq s_{ik} \leq b$. □

Věta 2.11 nám říká, že pokud pro nějaké $i, j, k = 1, 2, \dots, m$, $i \neq j, j \neq k, k \neq i$ nebude pro prvky matice S splněn některý ze vztahů (2.30), (2.31) nebo (2.32), pak S není slabě konzistentní.

Věta 2.12. Jestliže Saatyho matice S je konzistentní dle definice 2.2, pak je také slabě konzistentní.

Důkaz: Nechť S je konzistentní, tj. pro každé $i, j, k = 1, 2, \dots, m$ platí

$$s_{ij} = a \wedge s_{jk} = b \implies s_{ik} = ab.$$

Tedy pro $a \in A$ a $b \in B$ platí $s_{ik} = ab > \max\{a, b\}$, tedy je splněn vztah (2.18). Dále jestliže $a = 1$, pak $s_{ik} = b$, a pokud $b = 1$, pak $s_{ik} = a$. Tedy platí také (2.19) a (2.20) a matice je slabě konzistentní. $\square$

Pozor! Věta 2.12 nám říká, že pokud je matice S konzistentní dle definice, pak je také slabě konzistentní. Pokud ovšem budeme S považovat za konzistentní, protože její podílový koeficient nekonzistence je menší nebo roven 0.1, pak ještě matice S nemusí být slabě konzistentní. Ukažme si to na příkladu.

Příklad 2.1. Mějme následující Saatyho matici.

$$\begin{array}{c} A \ B \ C \\ A \ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ B \ \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ C \ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Její maximální vlastní číslo je $\lambda_{max} = 3.0940$. Potom index nekonzistence je $CI = \frac{3.0940-3}{3-1} = 0.0470$ a podílový koeficient nekonzistence je roven

$$CR = \frac{0.047}{0.52} = 0.0904 < 0.1,$$

tedy Saaty tuto matici považuje za konzistentní. Přitom v této matici ani není zachováno preferenční pořadí prvků. Podíváme-li se na první řádek matice, vidíme, že preferenční pořadí prvků je: A, C, B . Když se ale zaměříme na druhý řádek matice, všimneme si, že B je preferovanější než C . Přestože Saaty považuje matici za konzistentní, vidíme, že zároveň není slabě konzistentní, protože z toho, že $s_{12} = 5$ a $s_{23} = 2$ by muselo plynout, že s_{13} je alespoň 5, ale tady je to 4. $\triangle$

Protože definice konzistence se na devítibodové škále nedá v reálných situacích splnit, vymyslel Saaty pro její zeslabení podílový koeficient nekonzistence, který pomáhá rozhodovateli určit, jestli je jeho určení preferencí dostatečně konzistentní. Jak ale vidíme, můžeme v takovém případě považovat za konzistentní i matici, v níž rozhodovatel protichůdně označuje jednou první prvek za preferovanější než druhý, podruhé zase druhý prvek preferuje před prvním, což určitě není konzistentní rozhodnutí. Proto je definice slabé konzistence lepším zeslabením podmínky konzistence i v tomto ohledu, protože v takovém případě matici označíme za slabě nekonzistentní.

Další výhodou je, že pokud si kritéria uspořádáme od nejvýznamnějšího po nejméně významné, pak se stačí zaměřit na horní trojúhelník Saatyho matice a slabou konzistenci můžeme jednoduše ověřit i ručně bez použití softwaru, což by pro ověření toho, jestli je $CR \leq 0.1$ bylo u více kritérií dost obtížné.

Pro rychlejší ověření slabé konzistence Saatyho matice můžeme použít následující algoritmus, který je naprogramován v matematickém softwaru Matlab. Vstupem je Saatyho matice S (ať s prvky uspořádanými dle významnosti nebo ne) a výstupem je oznámení o tom, jestli je tato matice slabě konzistentní nebo ne, popř. na kterých pozicích se nachází nekonzistentní rozhodnutí. Některé příkazy, které musí být v Matlabu na 1 řádku, se nevejdou na šířku stránky, proto jsou v textu zalomeny na více řádků.

Text m-souboru `sl_konzist.m`:

```
%ověření slabé konzistence Saatyho matice
%podm. 1: S(i,j)>1 a S(j,k)>1, pak S(i,k)>=max{S(i,j),S(j,k)}
%podm. 2: S(i,j)=1 a S(j,k)>=1, pak S(i,k)=max{S(i,j),S(j,k)}
%podm. 3: S(i,j)>=1 a S(j,k)=1, pak S(i,k)=max{S(i,j),S(j,k)}
function sl_konzist(S) %vstup Saatyho matice S
n=length(S); %dimenze matice S, tj. počet porovnávaných prvků
nekonzistence=0; %pomocná proměnná, do které sčítáme počet
    % rozhodnutí, která nejsou slabě konzistentní
for i=1:n
```

```

for j=1:n
    for k=1:n
        if ~(i==j)|(j==k)|(k==i)) %dle definice stačí zkontrolovat
            %jen prvky s různými indexy
            if (S(i,j)>=1&S(j,k)>=1) %kontrolujeme všechny dvojice
                %prvků větší nebo rovny 1
                if (S(i,j)==1|S(j,k)==1) %ověření podmínky 2 a 3
                    if ~(S(i,k)==max(S(i,j),S(j,k)))
                        fprintf('Není splněna podmínka slabé konzistence:\n
                            z toho, že S(%i,%i)=%i a S(%i,%i)=%i, plyne
                            S(%i,%i)=%i,\n\n',i,j,S(i,j),j,k,S(j,k),i,k,S(i,k))
                            nekonzistence=nekonzistence+1;
                    end;
                else %ověření podmínky 1
                    if ~(S(i,k)>=max(S(i,j),S(j,k)))
                        fprintf('Není splněna podmínka slabé konzistence:\n
                            z toho, že S(%i,%i)=%i a S(%i,%i)=%i, plyne
                            S(%i,%i)=%i,\n\n',i,j,S(i,j),j,k,S(j,k),i,k,S(i,k))
                            nekonzistence=nekonzistence+1;
                    end;
                end;
            end;
        end;
    end;
end;

%vyhodnotíme, jestli je Saatyho matice slabě konzistentní
if nekonzistence==0
    disp('Saatyho matice je slabě konzistentní.')
else

```

```
disp('Saatyho matice není slabě konzistentní.')
```

```
end;
```

2.7 Dílčí hodnocení variant

Saaty navrhl ve svých člancích [15], [16] a [17] dva způsoby hodnocení variant: relativní a absolutní. Při *relativním hodnocení* srovnáváme každou variantu se všemi ostatními variantami, které se účastní našeho rozhodovacího problému. Tento přístup je deskriptivní (tj. říká nám, co je - např. papír je bílý) a je ovlivněn našimi pozorovacími schopnostmi a zkušenostmi.

U *absolutního hodnocení* spolu nesrovnáváme všechny varianty, pouze určíme, která varianta je ideální a jak moc se jí ostatní blíží. Tento přístup je normativní (tj. říká nám, co by mělo být - např. člověk by měl být čestný) a závisí na tom, co považujeme za nejlepší.

2.7.1 Relativní hodnocení

Při relativním hodnocení spolu párově srovnáváme alternativy analogicky jako kritéria. Hodnocení variant potom můžeme vyjádřit dvěma způsoby - buď použijeme distributivní mód nebo ideální mód. Nejčastěji užívaný je *distributivní mód*, kde hodnocení každé varianty vyjadřuje, jak moc se daná alternativa podílí na celku vzhledem ke všem ostatním variantám. Tedy každé získané hodnocení vydělíme součtem hodnocení všech variant. Tím docílíme toho, že součet všech hodnocení bude 1.

U *ideálního módu* identifikujeme, která varianta ze souboru uvažovaných variant je nejlepší a hodnocení ostatních variant vyjádříme vzhledem k této variantě. Tedy hodnocení každé varianty vydělíme hodnocením nejlepší varianty. Díky tomu bude mít nejlepší varianta hodnocení 1.

Počáteční postup pro získání hodnocení je společný. Jak už bylo řečeno výše, při párovém srovnávání variant postupujeme analogicky jako u kritérií. Uvažujme pro náš rozhodovací problém alternativy $a_1, a_2, \dots, a_n$, ty spolu párově porovnáme vzhledem ke každému kritériu, jemuž už nejsou podřízena žádná subkri-

téria. Řekněme, že je takových kritérií s . Pro každé takové kritérium vytvoříme matici párových srovnání variant vzhledem k tomuto kritériu, dostaneme tedy s Saatyho matic rozměru $n \times n$. Opět si musíme dát pozor na to, aby matice byly konzistentní. Hodnocení $(g_1^j, g_2^j, \dots, g_n^j)$ variant vzhledem k danému kritériu K_j , kde $j = 1, 2, \dots, s$, opět získáme buď pomocí vlastního vektoru, nebo metodou geometrického průměru.

U *distributivního módu* tato hodnocení stejně jako u zjišťování vah kritérií ještě znormujeme a získáme hodnocení $(h_1^j, h_2^j, \dots, h_n^j)$:

$$h_i^j = \frac{g_i^j}{\sum_{i=1}^n g_i^j} \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, n.$$

Je vidět, že $\sum_{i=1}^n h_i^j = 1$.

Pokud použijeme *ideální mód*, najdeme $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že $g_k^j \geq g_i^j$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Hodnocení variant $(h_1^j, h_2^j, \dots, h_n^j)$ dostaneme následovně:

$$h_i^j = \frac{g_i^j}{g_k^j} \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, n.$$

Je vidět, že $h_k^j = 1$. Považujeme ji tedy za ideální variantu vzhledem ke kritériu K_j , tj. splňuje jej na 100%. O alternativě a_i , kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, můžeme potom říct, že je vzhledem ke K_j na $h_i^j \cdot 100\%$ stejně tak dobrá jako varianta a_k .

Hodnocení pro kvantitativní kritéria

Máme-li však mezi kritérii nějaké kvantitativní, pro něž je nula přirozeným počátkem, a náš uvažovaný soubor variant nabývá pouze kladných hodnot, situace se nám značně zjednoduší. Pro takováto kritéria není nutné sestavovat matici párových porovnání variant, ale využijeme rovnou hodnot, kterých nabývají kritéria pro naše varianty. Tím se také zbavíme starostí s konzistencí hodnocení.

Uvažujme alternativy $a_1, a_2, \dots, a_n$ a k nim příslušné hodnoty $u_1^j, u_2^j, \dots, u_n^j$ kvantitativního kritéria K_j s rostoucí preferencí, kde $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. Přičemž

platí $u_i^j > 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ a u_k^j je největší hodnota z nich. Potom hodnocení varianty vzhledem k takovému kritériu získáme tak, že hodnotu kritéria pro tuto variantu u *distributivního módu* vydělíme součtem hodnot kritéria pro všechny varianty (resp. u *ideálního módu* vydělíme největší hodnotou kritéria). Tedy hodnocení bude vypadat takto:

$$h_i^j = \frac{u_i^j}{\sum_{i=1}^n u_i^j} \quad \left(\text{resp.} \quad h_i^j = \frac{u_i^j}{u_k^j} \right) \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.36)$$

Uvažujme nyní varianty $a_1, a_2, \dots, a_n$ a k nim příslušné hodnoty $u_1^j, u_2^j, \dots, u_n^j$ kvantitativního kritéria K_j s klesající preferencí, kde $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. Přičemž platí $u_i^j > 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ a u_k^j je nejmenší hodnota z nich. Potom hodnocení variant vzhledem k tomuto kritériu získáme analogicky. Nejprve však musíme hodnoty kritéria převrátit, aby nejmenší hodnota měla nejlepší hodnocení, kdežto největší hodnota měla nejhorší hodnocení. Tedy pro *distributivní mód* (resp. *ideální mód*):

$$h_i^j = \frac{\frac{1}{u_i^j}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i^j}} \quad \left(\text{resp.} \quad h_i^j = \frac{\frac{1}{u_i^j}}{\frac{1}{u_k^j}} \right) \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.37)$$

Pokud by pro kvantitativní kritérium nabývaly všechny varianty záporných hodnot, můžeme pro jejich hodnocení u kritéria s rostoucí preferencí použít vzorec (2.37) a u kritéria s klesající preferencí vzorec (2.36).

Jestliže ale mezi hodnotami bude nějaká záporná nebo nula, pak už nemůžeme těchto vztahů použít, protože bychom tak dostali záporné nebo nulové hodnocení. Ramík doporučuje v [18] transformovat v takovém případě tyto hodnoty na kladé tak, že nejmenší hodnota bude vždy 1. Tedy pokud by se mezi hodnotami kritéria $u_1, u_2, \dots, u_n$ vyskytovala hodnota menší nebo rovna nule, transformovali bychom tyto hodnoty pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ takto

$$u_i \longrightarrow u_i - \min\{u_1, u_2, \dots, u_n\} + 1.$$

Tato transformace ale není ideální, protože nula zde už není přirozeným počátkem a vyvstává otázka, proč jako nejnižší hodnotu kritéria volit jedničku. Hodnocení kritérii se totiž mohou velmi různit v závislosti na tom, jakou hodnotu k nim přičteme. Uvažujme např. že máme v distributivním módu rostoucí kritérium, podle kterého nabývají čtyři varianty hodnot $(-5, -1, 3, 10)$. Transformujeme-li je dle Ramíka, dostaneme nové hodnoty $(1, 5, 9, 16)$ a podle vzorce (2.36) dostaneme hodnocení $(0.03, 0.16, 0.29, 0.52)$. Pokud bychom ale provedli transformaci např. tak, aby nejmenší hodnota byla absolutní hodnota z původní hodnoty, dostali bychom hodnoty $(5, 9, 13, 20)$ a k nim příslušné hodnocení $(0.10, 0.19, 0.27, 0.42)$. Tedy vidíme, že hodnocení variant je závislé na tom, jakou hodnotu jsme k původním hodnotám přičetli. Podobné výsledky bychom dostali i v ideálním módu.

Tedy lepší než transformovat hodnoty takového kritéria na kladné, je párově je porovnat v Saatyho matici. To samé platí pro kvantitativní kritéria, pro něž nula není přirozeným počátkem. Např. budeme-li mít jako kritérium teplotu ve stupních Celsia, není zde nula přirozeným, ale dohodnutým počátkem. Proto nemůžeme říct, že když je venku 6 stupňů Celsia, že je dvakrát takové teplo, jako když jsou jen 3 stupně Celsia. Řešením v takovém případě by bylo buď převést stupně Celsia na stupně Kelvina, nebo spolu varianty porovnat Saatyho metodou.

Který mód použít?

Nyní vyvstává otázka, kdy máme který z těchto módů použít. Distributivní mód je vhodný, když chceme vědět, jak moc každá alternativa dominuje všechny ostatní varianty. Ideální mód bychom měli použít, když nás zajímá v jakém vztahu je každá varianta k nejlépe hodnocené variantě. Uvažujme např. dva rozhodvatele, kteří si chtějí koupit auto. První, který bude požadovat co nejvýkonnější auto, by měl použít ideální mód. Druhý, který chce auto, které bude vyčnívat mezi těmi, co mají jeho přátelé a sousedi, použije distributivní mód.

2.7.2 Absolutní hodnocení

Při absolutním hodnocení postupujeme tak, že pro každé kritérium vytvoříme kategorie, do kterých můžeme zařadit jednotlivé alternativy, a následně také každé variantě přiřadíme kategorii, která ji nejlépe popisuje, tj. takovou, do které by nejlépe spadala hodnota kritéria vzhledem k této variantě. Pro každé kritérium tedy vytvoříme úplnou hodnotící škálu, která pojme všechny myslitelné varianty. Takovou škálu může tedy tvořit např. pět výrazů, přičemž v našem modelu uvažujeme jen tři alternativy. Škálu můžou tvořit např. výrazy vynikající, velmi dobrý, dobrý, průměrný, podprůměrný, špatný a velmi špatný. Přitom pro každé kritérium předpokládáme jeho vlastní škálu, která odpovídá charakteru tohoto kritéria. Tyto kategorie spolu potom párově porovnáme Saatyho metodou vzhledem ke kritériu, ke kterému jsme je vytvořili, a hodnocení vyjádříme vzhledem k ideální variantě, tj. k takové variantě, která představuje dílčí cíl rozhodovatele vzhledem k celkovému cíli (tedy pro zde zmíněnou škálu vzhledem ke kategorii výborný). Přiřadíme-li dvěma kritériím stejné kategorie hodnocení, nemusí to ještě nutně znamenat, že pro stejné kategorie dostaneme stejné hodnocení. Kategorie spolu totiž vždy porovnáváme vzhledem ke konkrétnímu kritériu a zde se může intenzita našich preferencí lišit.

Pro každé kritérium spolu tedy pomocí Saatyho metody párově srovnáme všechny příslušné kategorie. Můžeme opět použít buď metodu vlastního vektoru nebo geometrických průměrů řádků. Hodnocení, které dostaneme, vydělíme hodnocením nejlepší kategorie tak, aby tato kategorie měla hodnocení 1 (tj. je ideální) a ostatní měly hodnocení menší než 1. Potom už stačí jen přiřadit výsledná hodnocení alternativám, které jsme do těchto kategorií zařadili. Varianty tedy spolu nejsou v tomto případě párově srovnány, ale jsou pouze ohodnoceny podle toho, do které kategorie spadají. Nespadá-li žádná varianta do ideální kategorie, může se stát, že žádná z alternativ nebude mít hodnocení 1 (narozdíl od ideálního módu, kde u každého kritéria byla vždy alespoň jedna alternativa s hodnocením 1, protože jako ideální jsme brali nejlépe hodnocenou variantu z uvažovaného souboru variant).

Máme-li kvantitativní kritérium, i pro něj musíme vytvořit kategorie, do kterých by hodnoty kritéria spadaly. Pro výšku dospělého muže můžeme např. vytvořit škálu: pod 170 cm malý, 170 až 185 cm průměrně vysoký, nad 185 cm vysoký.

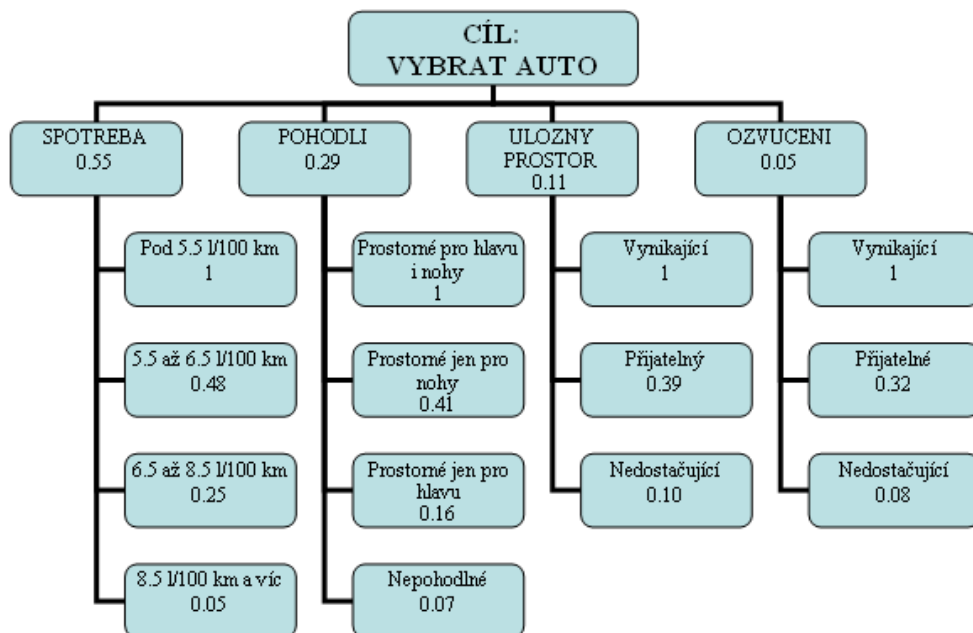
Absolutní hodnocení je výhodné v tom, že jak jednou vytvoříme pro kritéria příslušné kategorie a ohodnotíme je, můžeme potom takto obodovat (ohodnotit) nepřeberné množství variant. Tento způsob hodnocení je pro nás tedy také výpočetně jednodušší, protože když rozdělíme varianty do kategorií, zmenšíme tak většinou počet elementů, které budeme porovnávat. Na druhou stranu tento způsob nemusí být vždy vhodný. Přidělením kategorií variantám totiž snižujeme rozdíly mezi variantami a můžeme se tak dopustit větší chybovosti. Jemné odlišnosti mezi variantami se ztrácejí, neboť takové varianty jsou zaraženy do stejné kategorie. Proto jsou při tomto způsobu hodnocení důležité zkušenosti rozhodovatele. Tato metoda je vhodná např. řešíme-li problém týkající se přijetí studentů ke studiu, kde máme velký počet uchazečů a máme také jasnou představu o tom, jak by měl vypadat „ideální student“.

Nyní si ukážeme na příkladu, jak funguje metoda AHP s absolutním hodnocením variant.

Příklad 2.2. Představme si, že chceme koupit automobil kolem 300 000 Kč. Varianty, které zvažujeme jsou Škoda Fabia, Volkswagen Golf a Opel Astra, a posuzujeme je podle 4 kritérií, která máme znázorněna i s jejich váhami získanými ze Saatyho matice na obrázku 3.

Dále zde vidíme kategorie, které jsme pro každé kritérium vytvořili a jejich hodnocení vyjádřené vzhledem k ideální variantě. Přičemž u Spotřeby bereme intervaly zleva uzavřené, zprava otevřené.

Na následující matici si ukážeme, jak sme pomocí párového srovnání v Saatyho matici došli k hodnocení kategorií pro kritérium Spotřeba. Pro ostatní kritéria jsme hodnocení získali analogicky.



Obrázek 3: Výběr auta pomocí absolutního hodnocení

	pod 5.5 5.5 – 6.5 6.5 – 8.5 8.5 a víc	znormovaný vlastní vektor	zidealizované hodnocení
pod 5.5	1	0.56	1
5.5 – 6.5	$\frac{1}{3}$	0.27	0.48
6.5 – 8.5	$\frac{1}{3}$	0.14	0.25
8.5 a víc	$\frac{1}{9}$	0.03	0.05

Přitom podílový koeficient nekonzistence této matice je 0.0981. Nejprve všechny tři varianty zařadíme podle všech kritérií do kategorií, do nichž spadají, viz tabulka 5. Následně alternativám přiřadíme dílčí hodnocení, viz tabulka 6.

varianta	spotřeba	pohodlí	úložný prostor	ozvučení
Škoda Fabia	pod 5.5 l/100 km	prostorné jen pro hlavu	nedostačující	nedostačující
Volkswagen Golf	6.5 až 8.5 l/100 km	pohodlné pro hlavu i nohy	příjemný	příjemné
Opel Astra	5.5 až 6.5 l/100 km	pohodlné pro hlavu i nohy	příjemný	vynikající

Tabulka 5: Přiřazení kategorií alternativám

varianta	spotřeba (0.55)	pohodlí (0.29)	úložný prostor (0.11)	ozvučení (0.05)
Škoda Fabia	1	0.16	0.10	0.08
Volkswagen Golf	0.25	1	0.39	0.32
Opel Astra	0.48	1	0.39	1

Tabulka 6: Přiřazení dílčích hodnocení alternativám

Celkové hodnocení variant už potom získáme jako vážený součet dílčích hodnocení, kde jako váhy bereme významnosti jednotlivých kritérií (viz následující kapitola 2.8):

$$\text{Škoda Fabia: } 0.55 \cdot 1 + 0.29 \cdot 0.16 + 0.11 \cdot 0.10 + 0.05 \cdot 0.08 \doteq 0.61$$

$$\text{Volkswagen Golf: } 0.55 \cdot 0.25 + 0.29 \cdot 1 + 0.11 \cdot 0.39 + 0.05 \cdot 0.32 \doteq 0.48$$

$$\text{Opel Astra: } 0.55 \cdot 0.48 + 0.29 \cdot 1 + 0.11 \cdot 0.39 + 0.05 \cdot 1 \doteq 0.65$$

Vidíme, že jako nejlepší vyšlo auto Opel Astra. Pokud hodnocení znormujeme, dostaneme Škoda Fabia 0.35, Volkswagen Golf 0.28 a Opel Astra 0.37. $\triangle$

2.8 Syntéza hodnocení

Poté, co přidělíme váhy všem kritériím a subkritériím a vzhledem ke každému kritériu, ze kterého už nevycházejí žádná jiná kritéria, ohodnotíme všechny varianty, přichází na řadu syntéza dílčích hodnocení, díky které získáme celkové hodnocení všech variant vzhledem k celkovému cíli.

V AHP při vytváření celkového hodnocení postupujeme tak, že spolu nejprve párově porovnáváme kritéria vzhledem k celkovému cíli. Tím vyjadřujeme kolikrát je pro nás jedno kritérium významnější než druhé. Ze Saatyho matice párových srovnání potom získáme váhy kritérií, které následně znormujeme, tj. převedeme je na interval $\langle 0, 1 \rangle$ tak, aby jejich součet byl 1.

Dále ohodnotíme varianty vzhledem ke každému kritériu. Použijeme buď relativní nebo absolutní hodnocení. U relativního hodnocení můžeme varianty hodnotit buď pomocí distributivního nebo ideálního módu. U distributivního módu spolu varianty porovnáme analogicky jako kritéria a výsledná hodnocení vyjádříme na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ tak, že jejich součet je 1. Každé hodnocení nám říká,

jak velkou měrou se daná varianta podílí na celku. Při použití ideálního módu po párovém srovnání alternativ vyjádříme pro každou variantu jak je hodnocena vzhledem k variantě, která je pro dané kritérium nejlepší (tato alternativa je součástí našeho modelu). Tato hodnocení budou tedy vyjádřena na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, přičemž nejlepší varianta z námi uvažovaných bude mít hodnocení 1. U absolutního hodnocení pro každé kritérium vytvoříme kategorie, které spolu párově srovnáme a jejichž hodnocení vyjádříme vzhledem k ideální (nejlépe hodnocené) kategorii. Následně obodujeme všechny varianty podle kategorie, do které spadají. Hodnocení variant tedy bude opět náležet intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, kde 1 bude mít ideální varianta, tj. taková, která spadá do ideální kategorie. V tomto případě tedy nemusí být součástí našeho modelu.

Celkové hodnocení každé varianty potom získáme jako vážený průměr všech dílčích hodnocení dané varianty vzhledem ke všem kritériím. Jako váhy použijeme vypočtené váhy kritérií, protože ty nám určují důležitost daného hodnocení varianty vzhledem k problému, který řešíme.

Shrňme si nejprve v krátkosti, jak dojdeme k dílčím hodnocením variant:

- Vytvoříme hierarchii s kritérii, subkritérii a variantami.
- Pomocí Saatyho metody párově porovnáme všechna kritéria, která jsou na stejné hierarchické úrovni a mají nadřazen stejný prvek. Váhy $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ takovéto skupiny kritérií získáme jako vlastní vektor Saatyho matice S příslušný maximálnímu vlastnímu číslu λ_{max} , tj.

$$S\mathbf{w} = \lambda_{max}\mathbf{w}.$$

Nebo pomocí metody geometrického průměru řádků, tj.

$$w_i = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m s_{ij}} \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, m.$$

Tyto váhy obecně nedávají v součtu 1, proto je vydělíme jejich součtem

a získáme normované váhy $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}}{\sum_{i=1}^m w_i}.$$

- Vzhledem ke každému kritériu, z něhož už nevycházejí žádná jiná kritéria, vyjádříme hodnocení všech variant. Můžeme použít relativní hodnocení pomocí distributivního nebo ideálního módu nebo absolutní hodnocení, viz kapitola 2.7. Máme-li varianty $a_1, a_2, \dots, a_n$ a kritéria $K_1, K_2, \dots, K_s$, dostaneme vzhledem ke kritériu K_j , kde $j = 1, 2, \dots, s$, hodnocení h_i^j varianty a_i , kde $i = 1, 2, \dots, n$. Přitom $h_i^j \in \langle 0, 1 \rangle$ pro každé i a j . Navíc u distributivního módu $\sum_{i=1}^n h_i^j = 1$ pro každé j , u ideálního módu má nejlepší varianta hodnocení 1.

Při sestavování hodnocení variant vzhledem k celkovému cíli postupujeme následovně:

1. Vezmeme všechna kritéria, ze kterých již nevychází žádné jiné kritérium, tedy kritéria $K_1, K_2, \dots, K_s$. Nyní vypočteme váhu každého takového kritéria vzhledem k celkovému cíli. Uvažujme l hierarchických úrovní, přičemž kritérium K_j se bude nacházet v úrovni k , kde $k \in \{1, 2, \dots, l\}$ a $j = 1, 2, \dots, s$. Potom pro kritérium K_j bude jeho váha v_j^c vzhledem k celkovému cíli vypadat následovně:

$$v_j^c = \prod_{i=1}^k v_j^{(i)},$$

kde $v_j^{(1)}$ je váha celkového cíle (tedy 1), $v_j^{(k)}$ je váha kritéria K_j a $v_j^{(2)}, v_j^{(3)}, \dots, v_j^{(k-1)}$ jsou váhy nadřazených kritérií kritériu K_j , které se nachází ve 2., 3., $\dots$, $(k-1)$ -ní hierarchické úrovni. Váhu kritéria vzhledem k celkovému cíli získáme tedy jako součin váhy tohoto kritéria vzhledem k nadřazenému kritériu a vah všech kritérií, které jsou mu v hierarchii nadřazeny.

Platí: Součet vah kritérií vzhledem k celkovému cíli je roven 1, tj.

$$\sum_{j=1}^s v_j^c = 1. \quad (2.38)$$

Důkaz: Značení vah, které jsme nyní použili je vhodné, chceme-li spočítat celkovou váhu kritéria. Pokud bychom ale chtěli ukázat, že nám tyto váhy dávají v součtu váhu celkového cíle, tedy 1, je vhodné použít jiné značení, protože kdyby např. první 3 kritéria měla ve 2. hierarchické úrovni nadřazeno stejné kritérium, platilo by $v_1^{(2)} = v_2^{(2)} = v_3^{(2)}$. Pokud bychom pracovali se součtem vah kritérií na této hierarchické úrovni, museli bychom tuto váhu počítat pouze jednou. V obecném případě ale nevíme, kolik kritérií má ve které úrovni společné nadřazené kritérium. Proto nyní použijeme jiné značení. Předpokládejme, že ve druhé hierarchické úrovni máme z kritérií, kde $z \leq s$, a jejich váhy označme $V_1, V_2, \dots, V_z$. Váhu celkového cíle jsme tedy rozdělili mezi tato kritéria, tedy platí $\sum_{j=1}^z V_j = 1$. Součet se nezmění, když každou z těchto vah vynásobíme číslem 1, které představuje součet vah, které vycházejí z kritéria, jemuž přísluší váha V_i , $i = 1, 2, \dots, z$. Tedy platí

$$1 = \sum_{j=1}^z V_j = V_1 \sum_i V_{1i}^{(3)} + V_2 \sum_i V_{2i}^{(3)} + \dots + V_z \sum_i V_{zi}^{(3)}, \quad (2.39)$$

kde $\sum_i V_{ji}^{(3)} = 1$ je součet vah kritérií, které vycházejí z kritéria K_j a jsou na třetí hierarchické úrovni. Přitom každý ze sčítanců v této sumě $V_j \sum_i V_{ji}^{(3)}$, kde $j = 1, 2, \dots, z$, představuje váhu nějakého kritéria ze 3. hierarchické úrovně vzhledem k celkovému cíli. Analogicky po rozepsání sum ve vztahu (2.39) můžeme každý sčítanec vynásobit číslem 1, které bude představovat součet vah kritérií podřízených kritériu, které tyto váhy reprezentují. Takto můžeme pokračovat až se dostaneme k váhám všech kritérií, ze kterých už žádné jiné nevychází. Protože jsme stále jen rozepisovali vztah (2.39), platí, že součet vah těchto kritérií vzhledem k celkovému cíli je 1. $\square$

2. Nyní pro varianty $a_1, a_2, \dots, a_n$ vypočteme jejich hodnocení $h_1^c, h_2^c, \dots, h_n^c$ vzhledem k celkovému cíli. Celkové hodnocení každé varianty bude váženým průměrem hodnocení této varianty vzhledem k jednotlivým kritériím $K_1, K_2, \dots, K_s$, kde váhami budou právě námi vypočtené váhy těchto kritérií vzhledem k celkovému cíli. Tedy pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ platí

$$h_i^c = \sum_{j=1}^s v_j^c h_i^j,$$

kde h_i^j je hodnocení varianty a_i vzhledem ke kritériu K_j .

Platí: Hodnocení variant vzhledem k celkovému cíli při použití distributivního módu dává v součtu 1, tj.

$$\sum_{i=1}^n h_i^c = 1. \quad (2.40)$$

Důkaz: Vztah (2.40) vychází přímo ze vztahu (2.38). Protože víme, že součet hodnocení všech variant vzhledem ke každému kritériu je roven 1, tedy

$\sum_{i=1}^n h_i^j = 1$ pro každé $j = 1, 2, \dots, s$, můžeme psát

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=1}^s v_j^c = v_1^c + v_2^c + \dots + v_s^c = v_1^c \sum_{i=1}^n h_i^1 + v_2^c \sum_{i=1}^n h_i^2 + \dots + v_s^c \sum_{i=1}^n h_i^s = \\ &= (v_1^c h_1^1 + v_2^c h_1^2 + \dots + v_s^c h_1^s) + \dots + (v_1^c h_n^1 + v_2^c h_n^2 + \dots + v_s^c h_n^s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s v_j^c h_i^j. \end{aligned}$$

Tedy platí vztah (2.40). $\square$

Nejlepší variantou je pro nás nyní ta varianta a_i , kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, pro kterou platí $h_i^c \geq h_k^c$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$. Pokud dostaneme pro jednu variantu celkové hodnocení, které se bude od ostatních hodnocení výrazně lišit, je zřejmé, že vybereme tuto variantu. Avšak dostaneme-li např. pro tři varianty celková hodnocení, která se budou lišit jen nepatrně, je vhodné se před rozhodnutím o výběru varianty nejprve podívat, jakých hodnocení nabývaly tyto varianty u nejvýznamnější kritérií a porovnat také tyto hodnoty.

2.9 Přidání varianty do modelu nebo její odebrání

Další otázkou je, co se stane s preferenčním pořadím hodnocení variant, když do modelu přidáme nějakou novou nebo naopak jednu z nich odebereme. Touto otázkou se ve svých článcích [15], [16] a [19] zabýval nejen sám Saaty, ale také kritici této metody, viz [20], [21] a [22]. Takový přirozený předpoklad, který je často rozhodovatelem očekáván, je, aby se přidáním nové varianty či odebráním staré, nezměnilo preferenční pořadí variant.

Absolutní hodnocení

Podíváme-li se na model s absolutním hodnocením variant, tak v tomto případě vytvoříme pro každé kritérium úplnou škálu kategorií, které ohodnotíme pomocí Saatyho metody a konkrétním variantám už potom jenom přiřadíme hodnocení podle toho, do které kategorie dle daného kritéria spadají. Je tedy úplně jedno, kolik máme v modelu variant. Ať přidáme či odebereme libovolné množství variant, hodnocení zbylých variant bude vždy stejné.

Relativní hodnocení - distributivní mód

Zaměřme se nyní na relativní hodnocení variant. Metoda AHP byla původně navržena pouze pro distributivní mód. Zde se ale můžeme setkat s tím, že přidáním či odebráním varianty z modelu se nám změní preferenční pořadí ostatních variant a to aniž bychom měnili hodnocení ostatních variant, kritéria nebo jejich priority. Představme si, že se rozhodujeme o nejlepší variantě a AHP nám určí varianty od nejlepší po nejhorší takto: A, B, C. Nyní do rozhodovacího procesu přidáme variantu D a nové pořadí variant, které dostaneme bude: B, D, A, C. Tedy varianta B je lépe hodnocena než varianta A, i když tomu předtím bylo naopak.

Tento jev může kromě nekonzistence zapříčinit přidání (resp. odebrání) i jediné varianty, speciálně pak přidání stejně nebo podobně hodnocené varianty do modelu. Je to způsobeno tím, že pro každé kritérium je součet hodnocení variant roven jedné. Tedy přidáme-li variantu, pak se nám hodnocení ostatních vari-

ant proporciálně zmenší. Vzhledem k tomuto kritériu sice zůstává pořadí variant stejné, ale při syntéze tato dílčí hodnocení násobíme váhami kritérií a následně je sčítáme a v důsledku toho se může potom při celkovém hodnocení pořadí variant lišit od toho původního. U odebrání se děje podobná věc - tedy hodnocení varianty můžeme zlepšit, snížíme-li hodnocení ostatních variant nebo když nějakou z nich dáme z modelu pryč.

V reálných situacích existují případy, kdy může po přidání/odebrání varianty nastat změna preferencí. Je to v takovém případě, jsou-li na sobě varianty určitým způsobem závislé. Potom můžeme bez obav použít distributivní mód. Např. předpovídáme-li kdo vyhraje výsledky voleb, dostaneme, že kandidát *A* je preferován před kandidátem *B*. Když se na scéně objeví kandidát *C*, tak i když nebude preferovanější než ostatní, může zamíchat s pořadím původních dvou kandidátů, protože voliči, kteří teď volí jej, předtím volili *A* nebo *B*. Tedy i když získá nejméně hlasů, ale většinu jich sebere kandidátovi *A*, tak může být nový výsledek v pořadí: *B*, *A*, *C*. Dalším příkladem je hodnocení pracovníků. Máme-li mezi zaměstnanci někoho, kdo je celkově průměrný, ale má dovednost, kterou nikdo jiný ve firmě neumí, může se tak stát celkově nejhodnotnějším zaměstnancem společnosti. Přijme-li ale firma několik nových pracovníků, kteří tuto dovednost také ovládají, pak se v důsledku toho může pro firmu stát nepostradatelný úplně jiný zaměstnanec, který je např. nadprůměrný ve všech ostatních sférách, ale protože neovládá onu dovednost, byl předtím hodnocen až za zmíněným pracovníkem.

Relativní hodnocení - ideální mód

Změna preferenčního pořadí variant ale není vždy žádaná. V takovém případě nás jistě napadne, že bychom měli v modelu použít absolutní hodnocení variant. To ale není vždy vhodné, protože rozdělením alternativ do kategorií můžeme setřít rozdíly mezi variantami, které bychom jinak v dílčím hodnocení zohlednili např. alespoň mírnou preferencí. Také musíme u tohoto typu hodnocení být schopni pro každé kritérium vytvořit úpnou škálu a každou variantu být schopni bez pochyb zařadit do příslušné kategorie.

Je tedy vidět, že chceme-li zachovat preferenční pořadí variant, nemusí pro nás být absolutní hodnocení variant vždy vhodné. Proto byl následně Saatyem navržen pro relativní hodnocení ještě ideální mód, kde se většinou pouze tím, že do modelu přidáme větší počet variant, nezmění preferenční pořadí variant, protože při dílčím hodnocení vyjadřujeme priority vzhledem k nejlepší variantě a ne ke všem současně. Při syntéze se potom častěji zachová preferenční pořadí alternativ. Ukažme si na příkladu rozdíl mezi preferenčním pořadím variant v distributivním a ideálním módu po přidání nové varianty do modelu.

Příklad 2.3. Uvažujme dvě kritéria K_1 s váhou 0.65 a K_2 s váhou 0.35.

1. Dále mějme dvě varianty A a B . Srovnáním těchto variant dostaneme následující Saatyho matice.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

srovnání variant vzhledem ke K_1 srovnání variant vzhledem ke K_2

Pro obě matice dostaneme maximální vlastní číslo 2.

- a) Při použití relativního módu je vzhledem ke K_1 dílčí hodnocení $(0.75, 0.25)$ a vzhledem ke K_2 je to $(0.125, 0.875)$. Celkové hodnocení alternativ je tedy:

$$h_A = 0.65 \cdot 0.75 + 0.35 \cdot 0.125 \doteq 0.53;$$

$$h_B = 0.65 \cdot 0.25 + 0.35 \cdot 0.875 \doteq 0.47.$$

Celkově je tedy varianta A lepší než B .

- b) Nyní použijeme pro dílčí hodnocení ideální mód a dostaneme pro K_1 dílčí hodnocení $(1, 0.33)$ a pro K_2 je to $(0.14, 1)$. Celkové hodnocení alternativ je tedy:

$$h_A = 0.65 \cdot 1 + 0.35 \cdot 0.14 \doteq 0.70;$$

$$h_B = 0.65 \cdot 0.33 + 0.35 \cdot 1 \doteq 0.56.$$

Tedy opět je celkově varianta A lepší než B . Pokud bychom tato hodnocení ještě znormovali, dostaneme celkové hodnocení $h_A = 0.56$ a $h_B = 0.44$. Vidíme tedy, že se hodnocení trochu odlišuje od toho, co jsme dostali v distributivním módu.

2. Nyní přidáme variantu C , která bude vzhledem k oběma kritériím hodnocena stejně jako A , tedy

$$\begin{array}{c} A \ B \ C \\ A \ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ B \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \ B \ C \\ A \ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & 1 \\ 7 & 1 & 7 \\ 1 & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} \\ B \\ C \end{array}$$

rovnání variant vzhledem ke K_1 rovnání variant vzhledem ke K_2

Pro obě matice dostaneme maximální vlastní číslo 3, tedy obě matice jsou absolutně konzistentní.

a) Nyní při použití distributivního módu pro kritérium K_1 dostaneme dílčí hodnocení $(0.43, 0.14, 0.43)$ a pro K_2 dílčí hodnocení $(0.11, 0.78, 0.11)$. Celkové hodnocení variant vypadá následovně:

$$h_A = 0.65 \cdot 0.43 + 0.35 \cdot 0.11 \doteq 0.32;$$

$$h_B = 0.65 \cdot 0.14 + 0.35 \cdot 0.78 \doteq 0.36;$$

$$h_C = 0.65 \cdot 0.43 + 0.35 \cdot 0.11 \doteq 0.32.$$

Ve výsledku je nyní varianta B lepší než A , i když tomu v předchozím případě bylo naopak. A to i přestože hodnotící matice byly absolutně konzistentní.

b) Při použití ideálního módu bude dílčí hodnocení pro K_1 tvořit vektor $(1, 0.33, 1)$ a pro K_2 je dílčí hodnocení $(0.14, 1, 0.14)$. Celkové hodnocení tentokrát vypadá takto:

$$h_A = 0.65 \cdot 1 + 0.35 \cdot 0.14 \doteq 0.70;$$

$$h_B = 0.65 \cdot 0.33 + 0.35 \cdot 1 \doteq 0.56;$$

$$h_C = 0.65 \cdot 1 + 0.35 \cdot 0.14 \doteq 0.70.$$

Tedy vidíme, že pořád platí, že A je lepší než B . Znormujeme-li hodnocení, dostaneme $h_A = 0.36$, $h_B = 0.28$ a $h_C = 0.36$.

Tedy přidáním varianty C , která je kopií varianty A , tak zůstalo u ideálního módu hodnocení stejné. U distributivního módu došlo k rozložení poměru hodnocení vzhledem k daným kritériím mezi varianty A a C , což způsobilo změnu preferenčního pořadí alternativ. Původně totiž vzhledem ke K_1 byla hodnocení rozložena v poměru $3 : 1$, tj. hodnocení A činilo $\frac{3}{4}$ a hodnocení B bylo $\frac{1}{4}$. Nově je hodnocení v poměru $3 : 1 : 3$, tj. hodnocení variant A, B a C je rozděleno na $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{7}$ a $\frac{3}{7}$. Analogicky se mezi A a C rozložilo hodnocení pro K_2 . Preferenční pořadí u dílčích hodnocení zůstalo stejné, u celkového hodnocení však v důsledu syntézy došlo ke změně pořadí. $\triangle$

Na příkladu 2.3 vidíme, jak se po přidání varianty do modelu v ideálním módu zachovalo preferenční pořadí variant. Ovšem není to vždy pravidlem. Při syntéze může i zde dojít k převrácení preferencí. Kdybychom např. u ideálního módu přidali variantu, která by byla podle nějakého kritéria hodnocena lépe než všechny stávající, nebo bychom naopak odebrali nejlépe hodnocenou variantu, stala by se tak variantou s nejvyšším hodnocením jiná varianta a k ní bychom potom vztahovali všechna ostatní hodnocení. Tím pádem může opět dojít ke změně preferenčního pořadí, jak si ukážeme na příkladu 2.4. Tedy ani tento mód úplně neřeší problém se změnou preferencí na množině variant.

Relativní hodnocení - modifikovaný ideální mód

Pokud bychom při přidání/odebrání varianty s nejlepším hodnocením dle nějakého kritéria chtěli zachovat pořadí preferencí, pak bychom museli podle Saatyho, viz [15], ideální mód modifikovat a jako ideální variantu při dílčím hodnocení brát pořád tu samou a to i když je v modelu nějaká s lepším hodnocením. Tím by potom nejlépe hodnocená varianta neměla přiřazenou 1, ale číslo větší než 1. V opačném případě, kdy bychom variantu, která byla původně nejlepší, už

nechtěli brát v potaz, bychom ji museli v modelu ponechat, abychom k ní mohli i nadále vztahovat hodnocení všech ostatních variant. V případě modifikovaného ideálního módu tedy připouštíme jen přidávání variant a odebírání takových variant, které nejsou nejlepší podle nějakého kritéria. Odebírání variant, které mají dle nějakého kritéria nejlepší hodnocení už neprovádíme - v takovém případě pouze nebereme mezi výslednými hodnoceními v potaz hodnocení varianty, kterou jsme chtěli dát pryč.

Tímto způsobem můžeme tedy vyřešit problém se zachováním preferenčního pořadí mezi variantami, ale při reálném problému nemusí být jeho použití zrovna nejšťastnější, protože otázkou zůstává, proč vztahovat všechna hodnocení k variantě, kterou už v modelu neuvažujeme, nebo naopak proč vyjadřovat hodnocení všech ostatních alternativ k takové, která byla na začátku považována za nejlepší, ale od té doby už do modelu bylo přidáno několik takových, které jsou mnohonásobně lepší.

Nyní si ukážeme na příkladu, jak se může změnit preferenční pořadí variant u ideálního módu a jak toto pořadí zachová modifikovaný ideální mód.

Příklad 2.4. Vraťme se k předchozímu příkladu 2.3, kde máme kritérium K_1 s váhou 0.65 a K_2 s váhou 0.35 a varianty A a B , které mají v ideálním módu hodnocení 0.70 a 0.56. Nyní do modelu přidáme variantu C , která bude dle kritéria K_1 preferována před A i B .

$$\begin{array}{c} A \ B \ C \\ A \ \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ B \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \ B \ C \\ A \ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & 1 \\ 7 & 1 & 7 \\ 1 & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} \\ B \\ C \end{array}$$

rovnání variant vzhledem ke K_1 rovnání variant vzhledem ke K_2

Pro matici příslušnou K_1 dostaneme vlastní číslo $\lambda_{max} = 3.0037$ a k němu příslušný znormovaný vlastní vektor (0.33, 0.11, 0.56). Podílový koeficient nekonzistence je $CR = 0.0036$, tedy matice je dle Saatyho konzistentní. Také podle definice 2.4 je matice slabě konzistentní. Pro matici příslušnou K_2 dostáváme vlastní

číslo $\mu_{max} = 3$ (tj. matice je konzistentní) a příslušný znormovaný vlastní vektor $(0.11, 0.78, 0.11)$.

- a) Nyní použijeme ideální mód. Pro K_1 má nejlepší hodnocení varianta C , proto všechna hodnocení vydělíme hodnocením C a dostaneme zidealizované hodnocení $(0.59, 0.20, 1)$. U K_2 je nejlépe hodnoceno B , proto je zidealizované dílčí hodnocení tvaru $(0.14, 1, 0.14)$. Celkové hodnocení variant vypadá následovně:

$$h_A = 0.65 \cdot 0.59 + 0.35 \cdot 0.14 \doteq 0.43;$$

$$h_B = 0.65 \cdot 0.20 + 0.35 \cdot 1 \doteq 0.48;$$

$$h_C = 0.65 \cdot 0.1 + 0.35 \cdot 0.14 \doteq 0.70.$$

Tedy tím, že jsme pro K_1 přidali variantu, která je preferována před všemi původními, se změnilo preferenční pořadí variant. Nyní je B lepší než A .

- b) Při použití modifikovaného ideálního módu bereme jako ideální variantu tu, která byla nejlepší v původním modelu, viz příklad 2.3 část 1. b). Tedy pro K_1 hodnocení varianty A vypadá takto $(1, 0.33, 1.70)$. U K_2 byla a pořád je nejlépe hodnocena B , tj. hodnocení je opět $(0.14, 1, 0.14)$. Celkové hodnocení variant je potom tvaru:

$$h_A = 0.65 \cdot 1 + 0.35 \cdot 0.14 \doteq 0.70;$$

$$h_B = 0.65 \cdot 0.33 + 0.35 \cdot 1 \doteq 0.56;$$

$$h_C = 0.65 \cdot 1.70 + 0.35 \cdot 0.14 \doteq 1.15.$$

Jak je vidět, stejně jako v původním modelu je A preferovanější než B . Δ

2.10 Výhody a nevýhody

Analytický hierarchický proces má stejně jako všechny ostatní metody své silné i slabé stránky, o kterých toho bylo mnoho napsáno, např. v [19], [20], [21], [22] a [23]. My se na ně nyní podíváme zblízka.

2.10.1 Výhody AHP

1. Jednoduchost pro rozhodovatele (uživatele)

Jednou z výhod, které má AHP před ostatními metodami vícekritériálního hodnocení, je to, že na rozhodovatele neklade příliš velké nároky. Párové srovnávání, které musí rozhodovatel provést, je přímá a intuitivní metoda, při které pracuje vždy jen se dvěma prvky a je pro něj tudíž celkem snadné říci, který prvek preferuje. Sílu preference rozhodovatel vyjadřuje slovně, což je považováno také za výhodu, protože pro mnoho lidí je těžké vyjádřit své preference číselně.

2. Jednoduchost pro řešitele (matematika)

Také výpočet dílčích vah kritérií a dílčího a celkového hodnocení variant není v dnešní době počítačů složitou záležitostí. Existují také programy vytvořené přímo pro výpočet hodnocení pomocí metody AHP. V případě, že nemáme k dispozici software, můžeme pro výpočet dílčích vah kritérií použít metodu geometrického průměru řádků, která vede také na velmi dobré výsledky, velice podobné výsledkům získaným metodou maximálního vlastního čísla.

3. Vytváření hierarchií

Další výhodou je členění rozhodovacího problému do hierarchie. Rozhodovací problém se tak pro nás stává přehlednější, protože díky hierarchii získáme strukturu, která umožňuje komplexní pohled na celý problém, a jsme tak schopni říct, jestli jsme do modelu zahrnuli všechny důležité aspekty. Dále je díky členění kritérií do hierarchií výhodné z matematického hlediska, protože je pak výpočetně jednodušší určování vah kritérií.

Např. máme-li na druhé rozhodovací úrovni šest kritérií, musíme pro ně provést $\binom{6}{2} = 15$ párových porovnání. Pokud by se nám ale povedlo těchto šest kritérií rozdělit do dvou skupin po třech, tak na druhé hierarchické úrovni spolu porovnáme tyto dvě skupiny (tj. 1 porovnání) a na třetí úrovni spolu párově porovnáme tři kritéria nacházející se v první skupině (tj. 3 porovnání) a ve druhé skupině také tři kritéria (tedy opět 3 porovnání). Celkem takto tedy provedeme 7

párových porovnání, což není ani polovina z původního počtu. Stejně tak i kdyby se nám kritéria povedla zařadit do dvou skupin, kde v jedné jich bude pět a ve druhé jen jedno, tak je to pro nás stále výhodné, protože provedeme $1 + \binom{5}{2} + 0 = 11$ párových porovnání, což je stále méně než 15.

Pozor. Je však nutné kritéria členit do nadřazených hierarchických skupin s rozvahou. Tedy nejen kvůli zjednodušení výpočtu. Je totiž sice pravda, že takto snížíme počet párových porovnání, ale musíme si přitom také uvědomit, jestli je takovéto členění pro náš rozhodovací problém vhodné. Kritéria, která spolu zařadíme do jedné skupiny, spolu musí opravdu věcně souviset a my zase musíme být schopni říct, jestli a o kolik je tato skupina kritérií pro nás významnější než jiná skupina.

4. Akceptace různých typů kritérií

AHP dokáže pracovat s různými typy kritérií. Metoda akceptuje jak kritéria, jejichž důsledky variant jsou dány kvantitativně, tak také taková kritéria, jejichž důsledky jsou popsány kvalitativně. S tím souvisí také to, že metoda umí kombinovat kritéria, jejichž hodnoty jsou dány objektivně, a kritéria, jejichž hodnoty jsou definovány subjektivně rozhodovatelem.

5. Dokumentace jednotlivých kroků

Pro všechny získané váhy kritérií a dílčí hodnocení variant existuje dokumentace, která ukazuje, jak se k nim došlo, tj. Saatyho matice, pomocí kterých rozhodovatel vyjádřil své preference v souboru kritérií a na množině variant. Nebudou-li se tedy rozhodovateli zdát výsledky, které mu řešitel předložil, úplně relevantní, může snadno zkontrolovat, jestli data, ze kterých bylo výsledné hodnocení vypočteno, skutečně odpovídají vstupům, které zadal. Také je možno snadno přepočítat dílčí a celková hodnocení variant a zjistit, jestli řešitel neudělal chybu při výpočtu. Tato dokumentace tedy může jednak sloužit ke kontrole výsledků, ale také může být použita jako podklad pro případné oponenty. Saatyho matice jim totiž jasně ukazují, jak spolu které prvky rozhodovatel porovnával. A tak nad

nimi mohou s rozhodovatelem vyvolat diskuzi o tom, proč volil pro dané prvky zrovna takovéto hodnocení.

6. Měřitelnost míry konzistence

V případě dílčích vah kritérií získaných metodou vlastního vektoru dokážeme v AHP měřit míru konzistence úsudků rozhodvatele. Dokonce připouštíme i určitou nekonzistenci, což je velmi důležité, protože reálný svět není vždy úplně konzistentní. Např. když hráč A porazí v šachu hráče B a hráč B porazí hráče C, nemůžeme říci, že by hráč A byl lepší než C, protože příště se klidně může stát, že hráč C porazí hráče A.

Vyjde-li nám koeficient nekonzistence příliš velký, můžeme se podívat na Saatyho matici, kterou rozhodovatel vytvořil, a zjistit, které hodnoty jsou zde zadány nekonzistentně. Potom můžeme rozhodovatele požádat, aby se nad svým úsudkem zamyslel a rozhodl, zda chce zadanou intenzitu preference přehodnotit nebo ponechat. Nekonzistence je totiž často způsobena tím, že se rozhodovatel na zadávání preferencí dostatečně nesoustředil a může si to nyní v klidu rozmyslet. Také se může stát, že měl rozhodovatel málo informací o aspektech, které spolu srovnával, a může tyto informace dodatečně získat a zlepšit své hodnocení.

7. Široké spektrum aplikací

Další výhodou AHP je její všestrannost. Tato metoda má totiž velmi široké spektrum uplatnění. Dá se použít k výběru nejlepší varianty z dané množiny a k ohodnocení souboru variant. V [2] je také ukázáno, že se metoda dá efektivně využít např. k odhadu vzdáleností, velikostí apod. Mimoto se AHP dá využít také v problémech, kde hraje roli riziko, a to tak, že přidáme hierarchickou úroveň, na které budou stavy světa.

2.10.2 Nevýhody AHP

1. Počet párových srovnání

Jednou z nevýhod AHP může být celkový počet párových srovnání, které musíme provést. Jednak musíme porovnat všechny varianty vzhledem ke každému kritériu, takže máme-li n variant a m kritérií, pak je pro varianty nutno provést $m\binom{n}{2}$ párových srovnání. Dále spolu musíme porovnat kritéria. Pokud budou všechna na druhé hierarchické úrovni, dostáváme dalších $\binom{m}{2}$ párových srovnání. Toto číslo můžeme snížit právě tak, že je rozdělíme do skupin a rozvětvíme do dalších hierarchických úrovní.

Velký počet párových porovnání může být jednak časově náročný na výpočet, jednak při něm může rozhodovatel ztratit pozornost a začít dělat nekonzistentní rozhodnutí. Jednou z možností, jak v tomto ohledu metodu pro uživatele zjednodušit, je seřadit porovnávané elementy od nejpreferovanějšího po nejméně preferovaný. Potom při vyplňování horního trojúhelníku matice budou jen čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 9\}$ a v každém řádku budou seřazena do neklesající posloupnosti. Nejprve totiž budou vzhledem k danému prvku prvky, které budou stejně preferované (pokud takové existují), a následně bude míra preference uvažovaného prvku před ostatními růst. Rozhodovatel tedy vezme prvek v řádku a srovná ho s prvním prvkem ve sloupci, který se nachází nad hlavní diagonálou, a do Saatyho matice doplní nějaké číslo ze Saatyho škály. Potom prvek v řádku srovná s dalším prvkem ve sloupci. Ten se mu buď zdá stejně preferovaný jako předchozí prvek, a proto doplní do matice stejné číslo jako v přechodím kroku, nebo zvýší preferenci a doplní větší číslo ze Saatyho škály. Takto pokračuje až do konce řádku a tento postup opakuje ve všech řádcích.

2. Devítibodová stupnice

Při vyplňování Saatyho matice musíme své preference vyjádřit jedním z čísel $1, 2, \dots, 9$. Toto rozlišení může být pro rozhodovatele příliš hrubé. Pokud chceme porovnávat hodně prvků a chceme je od sebe dostatečně rozlišit, může pro nás být dost obtížné určit, např. jestli preferujeme jeden prvek před druhým s intenzitou

4 nebo 5. Navíc budeme-li mít více než 9 alternativ a žádné z nich nebudeme vzhledem k danému kritériu považovat za stejně hodnocené, můžou nám také dojít čísla ze škály a nebudeme je moct všechny preferenčně odlišit.

3. Konzistence na devítibodové stupnici

Podstatným problémem při práci s AHP je udržení konzistence v hodnocení. Jak jsme si ukázali v kapitole 2.5, je Saatyho definice konzistence pro slovní popisy příliš silná a nedá se v reálných situacích splnit, protože nám k ní ve většině případů nestačí devítibodová stupnice. Řešením této situace je místo konzistence zavést pojem slabá konzistence, který bude lépe odpovídat slovním popisům hodnocení tak, jak jsme to provedli v kapitole 2.5 v definici 2.4. Slabá konzistence je navíc lepším ukazatelem konzistence hodnocení než podílový koeficient nekonzistence, který definoval Saaty, v tom smyslu, že se nemůže stát, že bychom za konzistentní považovali matici, v níž rozhodovatel neudržel pořadí preference prvků a jeho hodnocení je tedy protichůdné, viz příklad 2.1.

4. Změna preferenčního pořadí variant

Použijeme-li AHP s relativním hodnocením variant, tak se přidáním nové varianty do modelu nebo odebráním staré varianty z modelu může změnit preferenční pořadí ostatních variant a to aniž bychom v modelu měnili hodnoty párových srovnání variant vzhledem k jednotlivým kritériím, kritéria nebo jejich preference. Tato vlastnost je jednou z nejvíce kritizovaných nedostatků metody AHP.

Bylo zjištěno, že preferenční pořadí variant se v AHP může změnit v důsledku nedostatečné konzistence zadaných intenzit preferencí. Nicméně i při konzistentních úsudcích se může po přidání či odebrání jediné varianty změnit pořadí preferencí mezi alternativami, a to díky syntéze dílčích hodnocení. Speciálně se tak může stát při přidání kopie existující alternativy nebo přidání varianty, která se jen nepatrně liší od již existující. Sice se může zdát, že nemá smysl do modelu přidávat variantu, která má stejné hodnoty jako jedna z již existujících, nicméně

v reálných případech se to stát může, máme-li např. model, který nám má pomoci vybrat nového zaměstnance, a přihlásí-li se v termínu další uchazeč, který pro všechna požadovaná kritéria dosahuje stejných výsledků jako jiný uchazeč, musíme ho do modelu zahrnout také. Nicméně existují i reálné případy, kde je změna preferencí možná, viz kapitola 2.9, strana 61.

Často ale takováto změna mezi původními variantami není žádaná. Proto následně Saaty vymyslel pro relativní hodnocení ideální mód, který častěji zachovává preference (kapitola 2.9, strana 62). Nicméně, pokud bychom je chtěli zkusit zachovat po přidání varianty, která je podle nějakého kritéria lepší než ta, co jsme doposud uvažovali, museli bychom tuto metodu modifikovat (kapitola 2.9, strana 65). To samé, pokud chceme odebrat z modelu nejlépe hodnocenou variantu dle nějakého kritéria. Tato modifikace ale nemusí být úplně relevantní, protože v takovém případě považujeme za ideální variantu v jednom případě takovou, která už není součástí našeho rozhodovacího problému, jindy zase takovou, která už není dle kritéria nejlepší, ale v souboru variant existuje nějaká lépe hodnocena. Otázkou tedy je, jestli je pro nás tato varianta stále ideální nebo to děláme čistě z matematického hlediska, abychom zachovali pořadí.

Pokud bychom zavrhnuli i ideální mód, zbývá nám ještě absolutní hodnocení variant, které vždy zachovává preferenční pořadí variant, protože zde spolu alternativy nesrovnáváme, ale jenom je bodujeme. Přitom body jsou vyjádřeny vzhledem k variantě, kterou rozhodovatel považuje obecně za ideální, bez ohledu na to, jestli se tato alternativa nachází v modelu. Tento způsob hodnocení ale také nemusí být vždy vhodný, protože zde musíme být schopni pro všechna kritéria vytvořit úplnou škálu kategorií, všechny varianty v modelu do nich bez pochyb zařadit a dále bychom si měli být jisti, že tímto rozdělením do kategorií nesetřeme rozdíly mezi variantami, které by jinak mohly mít podstatný vliv na konečné hodnocení.

Tedy vidíme, že je potřeba velmi pečlivě zvážit, která verze AHP je pro nás nevhodnější. Musíme totiž uvážit, co chceme výsledným hodnocením říct, s čímž souvisí i to, jestli je pro nás přijatelná změna preferencí mezi variantami nebo

ne. To záleží případ od případu. Saaty uvádí v [19] jako příklad změny preferencí následující situaci: Žena si jde koupit klobouk. V prvním obchodě prodávají dva klobouky. Ženě se více líbí klobouk A než klobouk B. Následně se jde podívat do dalších obchodů, přičemž všude prodávají jen klobouk A. Proto se nakonec vrátí do prvního obchodu a raději koupí klobouk B. Tato situace je v běžném životě celkem běžná, protože když je něčeho příliš, tak to často ztrácí svou cenu. Nicméně, kdybychom místo klobouků uvažovali počítače, žena by určitě nezměnila svou preferenci z A na B , protože by usoudila, že počítač A je lepší, když ho prodávají v tolika obchodech.

5. Výsledná hodnocení vyjádřena jen číselně

Další z věcí, která je na AHP kritizována, je to, že vstupní hodnocení variant preference mezi a kritérii zadáváme slovně, kdežto výsledky jsou prezentovány pouze číselně. Jako řešení této situace navrhuje Holder v [20] a [21] vydělit spolu výsledná hodnocení každých dvou variant a interpertovat je na slovní stupnici stejně jako v případě dílčích hodnocení. Tedy výslednou hodnotu bychom ztotožnili s nejnižší hodnotou na Saatyho škále. Pokud např. vyjde celkové hodnocení varianty A 0.1 a varianty B 0.28, potom bychom řekli, že B je mírně lepší než A , protože poměr jejich hodnocení je $0.28/0.1 = 2.8$, což je přibližně 3.

Pro tento postup argumentuje Holder tím, že dekompozici rozhodovacího problému do hierarchie a aplikaci párového srovnávání děláme jen proto, že nejsme schopni hodnotit varianty vzhledem ke všem kritériím současně, nýbrž vždy jen vzhledem k jednomu jedinému. A řekneme-li, že vzhledem k jednomu kritériu platí, že poměr vah mezi A a B , který je roven 3, znamená mírnou preferenci, potom takováto definice musí platit v celém modelu, tedy i pro celková hodnocení. Výsledná hodnocení se stejně snažíme vždy nějak okomentovat slovně větami typu „ A je o hodně lepší než B .“, proč tedy nepoužít rovnou škálu, na níž jsme hodnocení původně prováděli?

Nicméně na tuto otázku odpovídá záporně sám autor metody v [19] tím, že celková hodnocení jsou výsledkem váženého průměru dílčích hodnocení, tedy vznikly

pomocí aritmetických operací s váhami a hodnoceními. Saaty tedy odmítá, že by syntézou jazykových hodnocení provedených v dílčích problémech mohly vzniknout jazykové termíny pro celkové hodnocení variant, a říká, že slovní pojmy by měly být použity jen jako pomůcka pro odhad vah a hodnocení v dílčích úlohách metody AHP.

3 Aplikace metody AHP na příkladu

Nyní si ukážeme aplikaci metody AHP na příkladu. Uvažujme rozhodovatele, který chce **koupit v Olomouci byt o velikosti 2+1**. Všechny byty, mezi kterými bude vybírat, musí splňovat následující požadavky (tím tedy definujeme *aspirační úroveň*):

- byt nesmí stát více než 1 750 000 Kč;
- byt musí být zateplený, mít nové podlahy, rozvody a plastová okna;
- pokud se byt bude nacházet výše než v 1. patře, musí být v domě výtah;
- byt nesmí být umístěn v posledním patře domu.

Dále definujeme *kritéria*, podle kterých budeme vybírat nejvhodnější byt:

- K_1 : velikost bytu v m^2 ;
- K_2 : cena bytu v milionech Kč;
- K_3 : patro domu, ve kterém se byt nachází;
- K_4 : materiál, ze kterého je postaven dům (cihlový, panelový);
- K_5 : nebezpečí výskytu povodně;
- K_6 : další podlahová plocha, která patří k bytu (sklep, balkon, lodžie);
- K_7 : jak často jezdí z blízkosti bytu spoje do centra města.

Na stránkách DomyBytyPozemky.cz [24] jsme našli 11 bytů, které splňují nastavené aspirační úroveň. Údaje pro kritérium K_5 poskytla stránka [25], kde se povodňové nebezpečí dělí na 4 stupně: zanedbatelné, nízké, středí a vysoké. Data pro kritérium K_7 máme ze stránek [26] a [27] a údaje pro ostatní kritéria poskytla přímo stránka [24].

V tabulkách 7 a 8 si představíme *varianty*, které budeme hodnotit dle definovaných kritérií, a podíváme se, jakých důsledků dle daných kritérií tyto varianty nabývají.

BYT (ulice)	K_1 : velikost [m ²]	K_2 : cena [mil Kč]	K_3 : patro	K_4 : materiál
a_1 : Masarykova	50	1.400	2.	cihla
a_2 : Heleny Malířové	52	1.410	1.	panel
a_3 : Hodolanská	65	1.450	2.	cihla
a_4 : I. P. Pavlova	58	1.512	5.	panel
a_5 : Rooseveltova	70	1.520	2.	cihla
a_6 : Kmochova	53	1.540	4.	panel
a_7 : Velkomoravská	56	1.540	2.	cihla
a_8 : Blanická	57	1.575	přízemí	cihla
a_9 : Přichystalova	56	1.590	přízemí	cihla
a_{10} : Topolová	65	1.590	1.	cihla
a_{11} : Divišova	67	1.650	2.	cihla

Tabulka 7: Důsledky variant vzhledem ke kritériím K_1 až K_4

BYT (ulice)	K_5 : nebezpečí povodně	K_6 : další podlahová plocha	K_7 : spoje do centra
a_1 : Masarykova	střední	lodžie	1 x za 4 min
a_2 : Heleny Malířové	nízké	balkon	1 x za 6 min
a_3 : Hodolanská	střední	sklep	1 x za 12 min
a_4 : I. P. Pavlova	zanedbatelné	2 lodžie a sklep	1 x za 4 min
a_5 : Rooseveltova	střední	žádná	1 x za 20 min
a_6 : Kmochova	zanedbatelné	balkon	1 x za 10 min
a_7 : Velkomoravská	střední	lodžie a sklep	1 x za 30 min
a_8 : Blanická	střední	žádná	1 x za 4 min
a_9 : Přichystalova	nízké	balkon a sklep	1 x za 30 min
a_{10} : Topolová	střední	2 balkony a sklep	1 x za 10 min
a_{11} : Divišova	nízké	2 balkony a sklep	1 x za 12 min

Tabulka 8: Důsledky variant vzhledem ke kritériím K_5 až K_7

Když máme nyní definována kritéria, identifikovány varianty rozhodování a známe jejich důsledky vzhledem ke všem kritériím, můžeme přistoupit ke zjišťování vah jednotlivých kritérií. V našem příkladu se přitom omezíme pouze na nejjednodušší hierarchii - tříúrovňovou, tj. nebudeme uvažovat žádná subkritéria. Abychom rozhodovateli zjednodušili párové srovnávání jednotlivých kritérií,

požádáme ho, aby kritéria nejprve seřadil od nejvýznamnějšího po nejméně významné. Následně vytvoříme Saatyho matici, do které zapíšeme stupně intenzit preferencí ze Saatyho škály (viz tabulka 1), kterými rozhodovatel hodnotil jednotlivé dvojice kritérií. To můžeme vidět v tabulce 9.

	K_5	K_1	K_3	K_4	K_2	K_6	K_7	w_j	v_j
K_5	1	3	5	5	5	7	9	0.7750	0.3856
K_1	$\frac{1}{3}$	1	3	5	5	5	7	0.4852	0.2414
K_3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	4	5	5	6	0.3235	0.1610
K_4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	1	4	5	5	0.1932	0.0961
K_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	1	5	5	0.1265	0.0629
K_6	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	3	0.0650	0.0323
K_7	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	0.0416	0.0207
						Σ :		2.0100	

Tabulka 9: Párové srovnání kritérií na Saatyho škále

Ze Saatyho matice jsme pomocí příkazu eig v programu Matlab vypočetli maximální vlastní číslo λ_{max} a k němu příslušný vlastní vektor $\mathbf{w}$. Jeho složky jsou v tabulce 9 označeny jako w_j , kde w_j značí též nenormovanou váhu kritéria K_j , kde $j = 1, 2, \dots, 7$. Po vydělení každé w_j součtem $\sum_{j=1}^7 w_j$, který je uveden dole v tabulce, jsme dostali normované váhy v_j . Pomocí vztahu (2.16) jsme potom vypočetli koeficient nekonzistence CI a následně pomocí (2.17) podílový koeficient nekonzistence CR . Jejich hodnoty vypadají takto:

$$\lambda_{max} = 8.0973, \quad CI = 0.1829, \quad CR = 0.1355.$$

Dostali jsme, že $CR > 0.1$, matice je tedy podle Saatyho nekonzistentní. Použijeme-li v Matlabu příkazu sl_konzist (tedy použijeme algoritmus, který jsme uvedli na straně 47), dostaneme, že matice je slabě konzistentní.

3.1 Model I

Nyní můžeme přistoupit k dílčímu hodnocení variant dle jednotlivých kritérií. Nejprve se zaměříme na relativní hodnocení. Použijeme distributivní i ide-

ální mód. Rozdíl v dílčích hodnoceních je jen v tom, že jednou hodnocení získaná pomocí metody vlastního vektoru vydělíme součtem hodnocení všech variant, podruhé hodnocením nejlepší varianty, můžeme je tedy zapsat do stejné tabulky. Dílčí hodnocení varianty a_i vzhledem ke kritériu K_j , kde $i = 1, 2, \dots, 11$ a $j = 1, 2, \dots, 7$, pro distributivní mód budeme značit ${}^D h_i^j$ a pro ideální mód ${}^I h_i^j$. Pokud bude potřeba použít hodnoty kritéria K_j pro jednotlivé varianty, budeme je značit u_i^j . Hodnoty λ_{max} , $\mathbf{g}$ (nenormované hodnocení získané jako vlastní vektor příslušný λ_{max}), CI a CR budeme zjišťovat stejným způsobem jako u kritérií. Ke zjištění slabé konzistence opět použijeme v Matlabu příkaz `sl_konzist`. Při srovnávání variant v Saatyho matici rozhodovatele nejprve požádáme, aby varianty seřadil od nejlepší po nejhorší dle daného kritéria.

3.1.1 Relativní hodnocení

Kritérium K_1 velikost bytu

Rozhodovatel by chtěl co největší byt, tudíž K_1 je kvantitativní kritérium s rostoucí preferencí a nula je zde přirozeným počátkem. Dílčí hodnocení tedy můžeme spočítat podle vzorce (2.36) a nemusíme vytvářet Saatyho matici.

K_1	u_i^1	${}^D h_i^1$	${}^I h_i^1$
a_1	50	0.0770	0.7143
a_2	52	0.0801	0.7429
a_3	65	0.1002	0.9286
a_4	58	0.0894	0.8286
a_5	70	0.1079	1
a_6	53	0.0817	0.7571
a_7	56	0.0863	0.8000
a_8	57	0.0878	0.8143
a_9	56	0.0863	0.8000
a_{10}	65	0.1002	0.9286
a_{11}	67	0.1032	0.9571
Σ :	649		

Tabulka 10: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_1

V tabulce 10 vidíme dílčí hodnocení variant dle K_1 . Nejlépe hodnocená je

alternativa a_5 .

Kritérium K_2 cena bytu

Hledáme co nejlevnější byt, tudíž K_2 je opět kvantitativní kritérium, kde je 0 přirozeným počátkem. Tentokrát je to ale kritérium s klesající preferencí, proto použijeme ke stanovení dílčího hodnocení variant vzorec (2.37).

K_2	u_i^2	$\frac{1}{u_i^2}$	$^D h_i^2$	$^I h_i^2$
a_1	1.400	0.7143	0.0988	1
a_2	1.410	0.7092	0.0981	0.9929
a_3	1.450	0.6897	0.0954	0.9655
a_4	1.512	0.6614	0.0915	0.9259
a_5	1.520	0.6579	0.0910	0.9211
a_6	1.540	0.6494	0.0898	0.9091
a_7	1.540	0.6494	0.0898	0.9091
a_8	1.575	0.6349	0.0878	0.8889
a_9	1.590	0.6289	0.0870	0.8805
a_{10}	1.590	0.6289	0.0870	0.8805
a_{11}	1.650	0.6061	0.0838	0.8485
Σ :		7.2301		

Tabulka 11: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_2

V tabulce 11 vidíme, že dle K_2 má nejlepší hodnocení varianta a_1 .

Kritérium K_3 patro domu, ve kterém se byt nachází

Kdybychom přízemí označili jako nulté patro, pak bychom mohli K_3 považovat za kvantitativní kritérium s klesající preferencí. Rozhodovatel sice preferuje byt v co nejnižším patře, ale zároveň považuje některá patra za lepší než přízemí, proto musíme varianty porovnat v Saatyho matici, viz tabulka 12. Nejprve seřadíme varianty od nejlepší po nejhorší, tj. $a_2, a_{10}, a_1, a_3, a_5, a_7, a_{11}, a_6, a_8, a_9, a_4$. Nejlépe tedy budou hodnoceny varianty a_2 a a_{10} , které se nachází v 1. patře.

Pro Saatyho matici opět vypočteme podílový index nekonzistence:

$$\lambda_{max} = 11.5978 \quad CI = 0.0598 \quad CR = 0.0393.$$

K_3	a_2	a_{10}	a_1	a_3	a_5	a_7	a_{11}	a_6	a_8	a_9	a_4	g_i^3	Dh_i^3	Ih_i^3
a_2	1	1	3	3	3	3	3	5	5	5	9	0.5674	0.2091	1
a_{10}	1	1	3	3	3	3	3	5	5	5	9	0.5674	0.2091	1
a_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	8	0.2573	0.0948	0.4535
a_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	8	0.2573	0.0948	0.4535
a_5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	8	0.2573	0.0948	0.4535
a_7	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	8	0.2573	0.0948	0.4535
a_{11}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	8	0.2573	0.0948	0.4535
a_6	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	3	3	5	0.1173	0.0432	0.2067
a_8	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	1	1	5	0.0712	0.0262	0.1255
a_9	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	1	1	5	0.0712	0.0262	0.1255
a_4	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0.0320	0.0118	0.0564
Σ :												2.7132		

Tabulka 12: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_3

Dle Saatyho tedy matici považujeme za konzistentní. Zároveň je po ověření matice také slabě konzistentní.

Kritérium K_4 materiál domu, ve kterém se byt nachází

Pro kritérium K_4 varianty nabývají pouze dvou hodnot: cihla a panel, přičemž preferujeme cihlový dům. Srovnání variant si ukážeme v tabulce 13.

K_4	a_1	a_3	a_5	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_2	a_4	a_6	g_i^4	Dh_i^4	Ih_i^4
a_1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	0.3509	0.1163	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	0.3509	0.1163	1
a_5	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	0.3509	0.1163	1
a_7	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	0.3509	0.1163	1
a_8	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	0.3509	0.1163	1
a_9	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	0.3509	0.1163	1
a_{10}	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	0.3509	0.1163	1
a_{11}	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	0.3509	0.1163	1
a_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	0.0702	0.0233	0.2000
a_4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	0.0702	0.0233	0.2000
a_6	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	0.0702	0.0233	0.2000
Σ :												3.0180		

Tabulka 13: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_4

Matice je absolutně konzistentní, neboť

$$\lambda_{max} = 11, \quad CI = 0, \quad CR = 0.$$

Je vidět, že matice je konzistentní dle definice 2.2, tedy je i slabě konzistentní.

Kritérium K_5 nebezpečí výskytu povodně

Kritérium K_5 představuje kvantitativní kritérium, kde preferujeme lokalitu s nejmenším nebezpečím výskytu povodně. Saatyho matice bude vypadat následovně:

K_5	a_4	a_6	a_2	a_9	a_{11}	a_1	a_3	a_5	a_7	a_8	a_{10}	g_i^5	$^D h_i^5$	$^I h_i^5$
a_4	1	1	3	3	3	6	6	6	6	6	6	0.5831	0.2304	1
a_6	1	1	3	3	3	6	6	6	6	6	6	0.5831	0.2304	1
a_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	5	5	5	5	5	5	0.3101	0.1225	0.5319
a_9	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	5	5	5	5	5	5	0.3101	0.1225	0.5319
a_{11}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	5	5	5	5	5	5	0.3101	0.1225	0.5319
a_1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	1	1	0.0724	0.0286	0.1241
a_3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	1	1	0.0724	0.0286	0.1241
a_5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	1	1	0.0724	0.0286	0.1241
a_7	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	1	1	0.0724	0.0286	0.1241
a_8	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	1	1	0.0724	0.0286	0.1241
a_{10}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	1	1	0.0724	0.0286	0.1241
Σ :												2.5309		

Tabulka 14: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_5

Matice v tabulce 14 pro kritérium K_5 je slabě konzistentní a dle Saatyho je také konzistentní, neboť:

$$\lambda_{max} = 11.2557, \quad CI = 0.0256, \quad CR = 0.0168.$$

Nejlépe jsme podle K_5 hodnotili varianty a_4 a a_6 .

Kritérium K_6 další podlahová plocha, která náleží bytu

Při hodnocení dle kritéria K_6 se budeme dívat, jestli má byt balkon, lodžii nebo sklep. Rozhodovatel nejvíce upřednostňuje byt, ke kterému patří sklep a balkon. Varianty dle K_6 spolu porovnáme v tabulce 15.

Nejlépe jsme podle K_6 hodnotili varianty a_{10} a a_{11} . Matice je dle Saatyho konzistentní, neboť:

$$\lambda_{max} = 12.4085, \quad CI = 0.1408, \quad CR = 0.0927.$$

Matice je také slabě konzistentní.

K_6	a_{10}	a_{11}	a_4	a_9	a_7	a_2	a_6	a_1	a_3	a_5	a_8	g_i^6	Dh_i^6	Ih_i^6
a_{10}	1	1	2	3	3	6	6	7	7	9	9	0.5446	0.2128	1
a_{11}	1	1	2	3	3	6	6	7	7	9	9	0.5446	0.2128	1
a_4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3	3	6	6	6	7	9	9	0.4568	0.1785	0.8388
a_9	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	2	4	4	5	7	9	9	0.2999	0.1172	0.5507
a_7	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	3	3	5	7	9	9	0.2467	0.0964	0.4531
a_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1	1	3	5	7	7	0.1315	0.0514	0.2415
a_6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1	1	3	5	7	7	0.1315	0.0514	0.2415
a_1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	5	5	5	0.0880	0.0344	0.1616
a_3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	1	5	5	0.0576	0.0225	0.1057
a_5	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	0.0287	0.0112	0.0528
a_8	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	0.0287	0.0112	0.0528
$\Sigma:$												2.5588		

Tabulka 15: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_6

Kritérium K_7 jak často jezdí z blízkosti bytu spoje do centra

Rozhodovatel upřednostně byt, který se nachází v domě, z jehož blízkosti jezdí co nejčastěji spoje MHD do centra města. K_7 je tedy kvantitativní kritérium s klesající preferencí (kde 0 je přirozený počátek), proto pro výpočet dílčího hodnocení můžeme použít vzorec (2.37).

K_7	u_i^7	$\frac{1}{u_i^7}$	Dh_i^7	Ih_i^7
a_1	4	0.2500	0.1786	1
a_2	6	0.1667	0.1190	0.6667
a_3	12	0.0833	0.0595	0.3333
a_4	4	0.2500	0.1786	1
a_5	20	0.0500	0.0357	0.2000
a_6	10	0.1000	0.0714	0.4000
a_7	30	0.0333	0.0238	0.1333
a_8	4	0.2500	0.1786	1
a_9	30	0.0333	0.0238	0.1333
a_{10}	10	0.1000	0.0714	0.4000
a_{11}	12	0.0833	0.0595	0.3333
$\Sigma:$		1.3999		

Tabulka 16: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_7

V tabulce 16 vidíme, že dle K_7 jsme nejlépe hodnotili varianty a_1 , a_4 a a_8 .

Syntéza dílčích hodnocení vzhledem k celkovému cíli

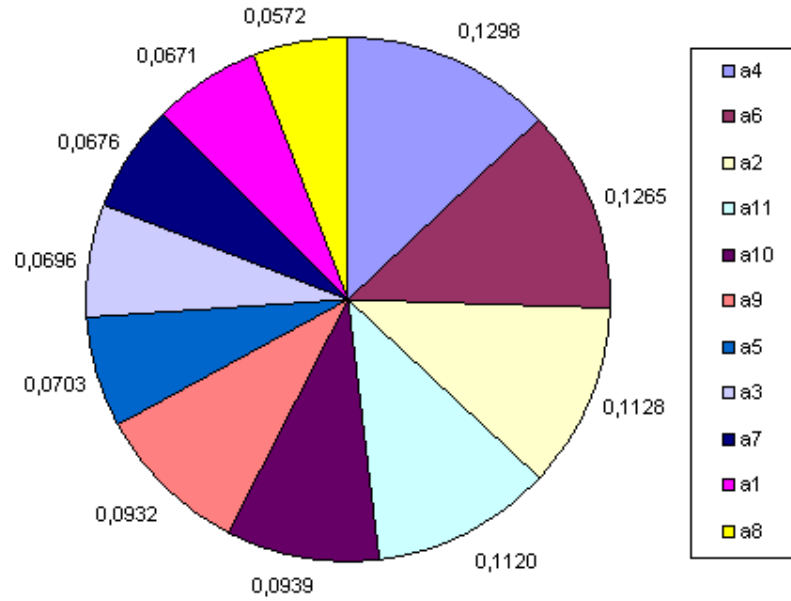
Nyní můžeme přistoupit k syntéze dílčích hodnocení. Nejprve se zaměříme na hodnocení pomocí distributivního módu. Podle předchozích tabulek sestavíme tabulku 17. V jednotlivých řádcích se budou nacházet hodnocení ${}^D h_i^j$ varianty a_i dle kritéria K_j . Pomocí váženého průměru potom získáme celkové hodnocení variant ${}^D h_i^C = \sum_{j=1}^7 v_j {}^D h_i^j$ pro každé $i = 1, 2, \dots, 11$.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	${}^D h_i^C$
	0.2414	0.0629	0.1610	0.0961	0.3856	0.0323	0.0207	
a_1	0.0770	0.0988	0.0948	0.1163	0.0286	0.0344	0.1786	0.0671
a_2	0.0801	0.0981	0.2091	0.0233	0.1225	0.0514	0.1190	0.1128
a_3	0.1002	0.0954	0.0948	0.1163	0.0286	0.0225	0.0595	0.0696
a_4	0.0894	0.0915	0.0118	0.0233	0.2304	0.1785	0.1786	0.1298
a_5	0.1079	0.0910	0.0948	0.1163	0.0286	0.0112	0.0357	0.0703
a_6	0.0817	0.0898	0.0432	0.0233	0.2304	0.0514	0.0714	0.1265
a_7	0.0863	0.0898	0.0948	0.1163	0.0286	0.0964	0.0238	0.0676
a_8	0.0878	0.0898	0.0262	0.1163	0.0286	0.0112	0.1786	0.0572
a_9	0.0863	0.0870	0.0262	0.1163	0.1225	0.1172	0.0238	0.0932
a_{10}	0.1002	0.0870	0.2091	0.1163	0.0286	0.2128	0.0238	0.0939
a_{11}	0.1032	0.0838	0.0948	0.1163	0.1225	0.2128	0.0595	0.1120

Tabulka 17: Distributivní mód: Syntéza dílčích hodnocení

V tabulce 17 vidíme, že nejlepší hodnocení dostala varianta a_4 , ale hned těsně za ní je varianta a_6 . Protože se jejich hodnocení liší jen nepatrně, tak bychom rozhodovateli doporučili, aby si vybral jednu z nich. Za nimi následují varianty a_2 a a_{11} . Rozdíl v jejich hodnocení je rovněž zanedbatelný. Potom následují varianty a_{10} a a_9 . Po nich se umístili varianty a_5 , a_3 , a_7 a a_1 - rovněž s nepatrným rozdílem. Jako nejhorší vyšla varianta a_8 .

Pro lepší představu, jak dopadlo hodnocení jednotlivých alternativ, si nyní ukážeme obrázek 4.



Obrázek 4: Relativní hodnocení alternativ dle distributivního módu

Ted' se podíváme, jak dopadlo hodnocení variant podle ideálního módu. Opět si z předchozích tabulek sestavíme tabulku 18, kde se v jednotlivých řádních bu-
dou nacházet dílčí hodnocení $^I h_i^j$. Celková hodnocení jednotlivých variant vypoč-
teme opět pomocí váženého průměru: $^I h_i^C = \sum_{j=1}^7 v_j ^I h_i^j$ pro každé $i = 1, 2, \dots, 11$.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	$^I h_i^C$
	0.2414	0.0629	0.1610	0.0961	0.3856	0.0323	0.0207	
a_1	0.7143	1	0.4535	1	0.1241	0.1616	1	0.4782
a_2	0.7429	0.9929	1	0.2000	0.5319	0.2415	0.6667	0.6487
a_3	0.9286	0.9655	0.4535	1	0.1241	0.1057	0.3333	0.5122
a_4	0.8286	0.9259	0.0564	0.2000	1	0.8388	1	0.7200
a_5	1	0.9211	0.4535	1	0.1241	0.0528	0.2000	0.5221
a_6	0.7571	0.9091	0.2067	0.2000	1	0.2415	0.4000	0.6941
a_7	0.8000	0.9091	0.4535	1	0.1241	0.4531	0.1333	0.4847
a_8	0.8143	0.8889	0.1255	1	0.1241	0.0528	1	0.4390
a_9	0.8000	0.8805	0.1255	1	0.5319	0.5507	0.1333	0.5905
a_{10}	0.9286	0.8805	1	1	0.1241	1	0.4000	0.6251
a_{11}	0.9571	0.8485	0.4535	1	0.5319	1	0.3333	0.6978

Tabulka 18: Ideální mód: Syntéza dílčích hodnocení

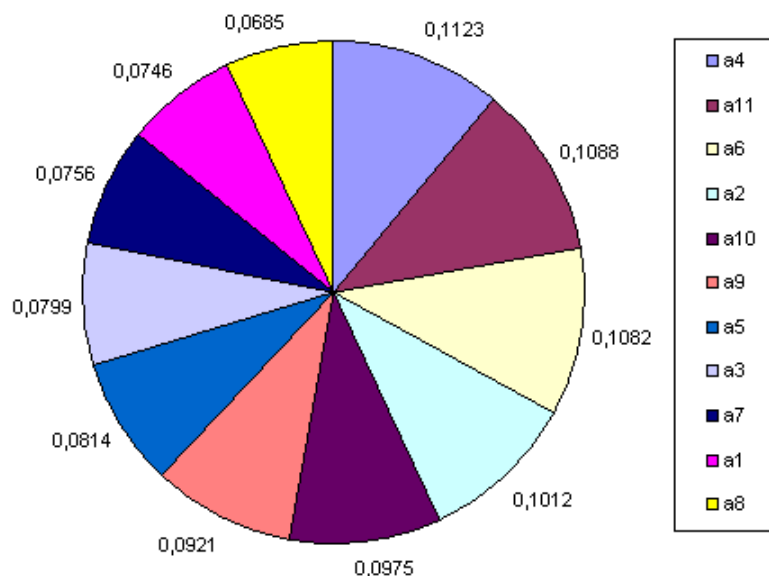
V tabulce 18 vidíme, že nejlépe hodnocena je opět varianta a_4 . Chceme-li srovnat tato hodnocení s hodnocením dle distributivního módu, musíme každé $^I h_i^C$ vydělit $\sum_{i=1}^{11} ^I h_i^C = 6.4124$. Tato znormovaná hodnocení můžeme spolu s hodnocením dle distributivního módu vidět v tabulce 19, kde dle obou módů rovnou seřadíme varianty od nejlepší po nejhorší.

	distributivní mód		ideální mód
a_4	0.1298	a_4	0.1123
a_6	0.1265	a_{11}	0.1088
a_2	0.1128	a_6	0.1082
a_{11}	0.1120	a_2	0.1012
a_{10}	0.0939	a_{10}	0.0975
a_9	0.0932	a_9	0.0921
a_5	0.0703	a_5	0.0814
a_3	0.0696	a_3	0.0799
a_7	0.0676	a_7	0.0756
a_1	0.0671	a_1	0.0746
a_8	0.0572	a_8	0.0685

Tabulka 19: Srovnání hodnocení dle ideálního a distributivního módu

Vidíme, že hodnocení se trochu se liší. Pořadí variant je stejné až na variantu a_{11} , která se v ideálním módu umístila na druhém pořadí před a_6 a a_2 . Na obrázku 5 si znázorníme znormovaná hodnocení variant dle ideálního módu. Obrázek je velmi podobný jako obrázek 4.

Pomocí obou módů nám tedy vyšla jako nejlepší varianta a_4 . U distributivního módu se jí svým hodnocením velmi blížila varianta a_6 . U ideálního módu se jí zase blížilo hodnocení a_{11} a a_6 , které se od sebe lišily jen nepatrně. Narozdíl od toho v distributivním módu byl rozdíl v hodnocení a_6 a a_{11} větší.



Obrázek 5: Relativní hodnocení alternativ dle ideálního módu

3.1.2 Absolutní hodnocení

Nyní se podíváme, jaký byt vyjde jako nejlepší, pokud použijeme absolutní hodnocení variant. Nejprve požádáme rozhodovatele, aby pro každé kritérium vytvořil kategorie stejně hodnocených variant a to tak, aby libovolnou myslitelnou variantu týkající se našeho rozhodovacího problému mohl zařadit do některé kategorie. Pro jednotlivá kritéria vytvořil hodnotitel tyto *kategorie*:

K_1 velikost bytu:

- do 40 m², 40 - 45 m², 45 - 50 m², 50 - 55 m², 55 - 60 m², nad 60 m² (v uvedených intervalech vždy uvažujeme, že levá hodnota sem nepatří a pravá sem patří);

K_2 cena bytu:

- do 1.5 mil Kč, 1.5 - 1.6 mil Kč, 1.6 - 1.7 mil Kč, nad 1.7 mil Kč (opět uvažujeme intervaly zleva otevřené, zprava uzavřené);

K_3 patro, ve kterém se byt nachází:

- 1. patro, 2. patro, 3. - 5. patro, přízemí, 6. a vyšší patro;

K_4 materiál domu, ve kterém se byt nachází:

- cihla, panel;

K_5 nebezpečí výskytu povodně:

- zanedbatelné, nízké, střední, vysoké;

K_6 další podlahová plocha, která náleží k bytu:

- balkon a sklep, lodžie a sklep, balkon, lodžie, sklep, žádná;

K_7 četnost spojů, které z blízkosti bytu jezdí do centra města:

- každých 10 min a častěji, každých 10 - 15 min, každých 15 - 20 min, méně často než každých 20 min (opět uvažujeme intervaly zleva otevřené, zprava uzavřené).

Po definování kategorií pro jednotlivá kritéria následuje jejich párové srovnání.

Kritérium K_1 velikost bytu

Velikost bytu rozdělil rozhodovatel do kategorií po 5 m², přičemž za ideální byt považuje takový, který má více než 60 m². Nejhůře by hodnotil takový, který by měl 40 m² a méně. Poznamenejme, že mezi variantami nemáme žádnou, která by nabývala hodnot posledních třech kategorií, tj. do 40 m², 40 - 45 m² a 45 - 50 m². Srovnání jednotlivých kategorií vidíme v tabulce 20, názvy kategorií zkrátíme, aby se tabulka vešla na šířku stránky.

K_1	nad 60	55 - 60	50 - 55	45 - 50	40 - 45	do 40	g_i^1	h_i^1
nad 60	1	3	4	5	7	9	0.7736	1
55 - 60	$\frac{1}{3}$	1	3	5	7	9	0.5037	0.6511
50 - 55	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1	5	6	9	0.3367	0.4352
45 - 50	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	5	7	0.1646	0.2128
40 - 45	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	1	5	0.0775	0.1002
do 40	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	1	0.0371	0.0479

Tabulka 20: Hodnocení kategorií dle kritéria K_1

Matice je slabě konzistentní. Dle Saatyho není konzistentní, neboť

$$\lambda_{max} = 6.8913, \quad CI = 0.1783, \quad CR = 0.1426.$$

Kritérium K_2 cena bytu

Jako ideální kategorii zvolil rozhodovatel cenu do 1.5 mil Kč. Srovnání kategorií pro K_2 vidíme v tabulce 21, názvy kategorií zkrátíme, aby se tabulka vešla na šířku stránky.

K_2	do 1.5 mil	1.5 - 1.6 mil	1.6 - 1.7 mil	nad 1.7 mil	g_i^2	h_i^2
do 1.5 mil	1	5	7	9	0.9303	1
1.5 - 1.6 mil	$\frac{1}{5}$	1	4	7	0.3337	0.3587
1.6 - 1.7 mil	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$	1	5	0.1426	0.1532
nad 1.7 mil	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	1	0.0531	0.0571

Tabulka 21: Hodnocení kategorií dle kritéria K_2

Ze Saatyho matice vypočteme následující hodnoty:

$$\lambda_{max} = 4.3803, \quad CI = 0.1268, \quad CR = 0.1424.$$

$CR > 0.1$, takže dle Saatyho není matice konzistentní. Ale dle naší definice je matice slabě konzistentní.

Kritérium K_3 patro domu, ve kterém se byt nachází

Při vytváření kategorií se ukázalo, že uživatel nejvíce preferuje 1. patro a bydlení ve více než 5. patře ho moc neláká. Srovnání kategorií dle K_3 nalezneme v tabulce 22, názvy kategorií zkrátíme, aby se tabulka vešla na šířku stránky.

Pro tuto matici platí:

$$\lambda_{max} = 5.4816, \quad CI = 0.1204, \quad CR = 0.1085.$$

Matice je tedy dle Saatyho lehce nekonzistentní, zároveň je ale slabě konzistentní.

K_3	1.	2.	3. - 5.	přízemí	6. a vyšší	g_i^3	h_i^3
1.	1	3	4	7	9	0.8139	1
2.	$\frac{1}{3}$	1	4	6	8	0.5055	0.6211
3. - 5.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	5	7	0.2682	0.3295
přízemí	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1	3	0.0878	0.1078
6. a vyšší	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	1	0.0494	0.0606

Tabulka 22: Hodnocení kategorií dle kritéria K_3

Kritérium K_4 materiál domu, ve kterém se byt nachází

Zde rozlišujeme pouze dvě kategorie, cihlu a panel. Rozhodovatel preferuje cihlový dům.

V tabulce 23 máme matici typu 2×2 a ta je vždy konzistentní. Je samozřejmě také slabě konzistentní.

K_4	cihla	panel	g_i^4	h_i^4
cihla	1	5	0.9806	1
panel	$\frac{1}{5}$	1	0.1961	0.2000

Tabulka 23: Hodnocení kategorií dle kritéria K_4

Kritérium K_5 nebezpečí výskytu povodně

Zde využijeme označení, které bylo použito na stránkách [25], odkud jsme čerpali data. Tedy K_5 rozdělíme na kategorie: zanedbatelné, nízké, střední a vysoké nebezpečí výskytu povodně.

K_5	zanedbatelné	nízké	střední	vysoké	g_i^5	h_i^5
zanedbatelné	1	3	6	9	0.8720	1
nízké	$\frac{1}{3}$	1	5	7	0.4583	0.5256
střední	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	1	5	0.1614	0.1851
vysoké	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	1	0.0590	0.0677

Tabulka 24: Hodnocení kategorií dle kritéria K_5

Pro matici v tabulce 24 platí:

$$\lambda_{max} = 4.2969, \quad CI = 0.0990, \quad CR = 0.1112.$$

Matice je tedy dle Saatyho nekonzistentní. Zároveň je ale slabě konzistentní.

Kritérium K_6 další podlahová plocha patřící k bytu

U tohoto kritéria uvažujeme, že byt nemůže mít balkon a lodžii zároveň. Do kritéria nezahrnujeme společné prostory domu. Při rozdělování možných důsledků variant do kategorií se ukázalo, že rozhodovatel rozlišuje mezi tím, jestli má dům balkon nebo lodžii, na druhou stranu už mu je jedno, kolik jich je. Srovnání jednotlivých kategorií je možno vidět v tabulce 25.

K_6	balkon a sklep	lodžie a sklep	balkon	lodžie	sklep	nic	g_i^6	h_i^6
balkon a sklep	1	2	4	5	7	9	0.7463	1
lodžie a sklep	$\frac{1}{2}$	1	3	5	7	9	0.5610	0.7517
balkon	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1	3	5	7	0.2939	0.3938
lodžie	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	5	5	0.1801	0.2414
sklep	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	5	0.0881	0.1180
nic	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0.0428	0.0574

Tabulka 25: Hodnocení kategorií dle kritéria K_6

Pro matici jsme vypočetli následující:

$$\lambda_{max} = 6.6277, \quad CI = 0.1255, \quad CR = 0.1004.$$

CR bychom zaokrouhlili na 0.1, můžeme tedy říct, že je matice konzistentní. Matice je také slabě konzistentní.

Kritérium K_7 četnost spojů, které z blízkosti bytu jezdí do centra města

Rozhodovatel by byl nejraději, kdyby od bytu jezdily do centra města spoje MHD alespoň jednou za deset minut. Četnost menší než jednou za dvacet minut už považuje za nevyhovující. Srovnání jednotlivých kategorií pro K_7 je zobrazeno v tabulce 26, názvy kategorií zkrátíme, aby se tabulka vešla na šířku stránky.

Pro Saatyho matici zjistíme hodnotu koeficientu CR :

$$\lambda_{max} = 4.2404, \quad CI = 0.0801, \quad CR = 0.0900.$$

K_7	do 10 min	10 - 15 min	15 - 20 min	nad 20 min	g_i^7	h_i^7
do 10 min	1	3	5	7	0.8822	1
10 - 15 min	$\frac{1}{3}$	1	3	5	0.4109	0.4658
15 - 20 min	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	5	0.2165	0.2454
nad 20 min	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0.0776	0.0880

Tabulka 26: Hodnocení kategorií dle kritéria K_7

Matice je tedy dle Saatyho považována za konzistentní a je také slabě konzistentní.

Určení celkového hodnocení variant

Nyní, když máme vytvořené a ohodnocené kategorie pro jednotlivá kritéria, můžeme přistoupit k přiřazení kategorií alternativám a_1 až a_{11} . To provedeme v tabulce 27 a 28.

	K_1 : velikost	K_2 : cena	K_3 : patro	K_4 : materiál
a_1	45 - 50 m ²	do 1.5 mil Kč	2. patro	cihla
a_2	50 - 55 m ²	do 1.5 mil Kč	1. patro	panel
a_3	nad 60 m ²	do 1.5 mil Kč	2. patro	cihla
a_4	55 - 60 m ²	1.5 - 1.6 mil Kč	3. - 5. patro	panel
a_5	nad 60 m ²	1.5 - 1.6 mil Kč	2. patro	cihla
a_6	50 - 55 m ²	1.5 - 1.6 mil Kč	3. - 5. patro	panel
a_7	55 - 60 m ²	1.5 - 1.6 mil Kč	2. patro	cihla
a_8	55 - 60 m ²	1.5 - 1.6 mil Kč	přízemí	cihla
a_9	55 - 60 m ²	1.5 - 1.6 mil Kč	přízemí	cihla
a_{10}	nad 60 m ²	1.5 - 1.6 mil Kč	1. patro	cihla
a_{11}	nad 60 m ²	1.6 - 1.7 mil Kč	2. patro	cihla

Tabulka 27: Přiřazení kategorií variantám pro kritéria K_1 až K_4

	K_5 : nebezpečí povodně	K_6 : další podlahová plocha	K_7 : četnost spojů do centra
a_1	střední	lodžie	každých 10 min a častěji
a_2	nízké	balkon	každých 10 min a častěji
a_3	střední	sklep	každých 10 - 15 min
a_4	zanedbatelné	lodžie a sklep	každých 10 min a častěji
a_5	střední	nic	každých 15 - 20 min
a_6	zanedbatelné	balkon	každých 10 min a častěji
a_7	střední	lodžie a sklep	méně často než každých 20 min
a_8	střední	nic	každých každých 10 - 15 min
a_9	nízké	balkon a sklep	méně často než každých 20 min
a_{10}	střední	balkon a sklep	každých 10 min a častěji
a_{11}	nízké	balkon a sklep	každých 10 - 15 min

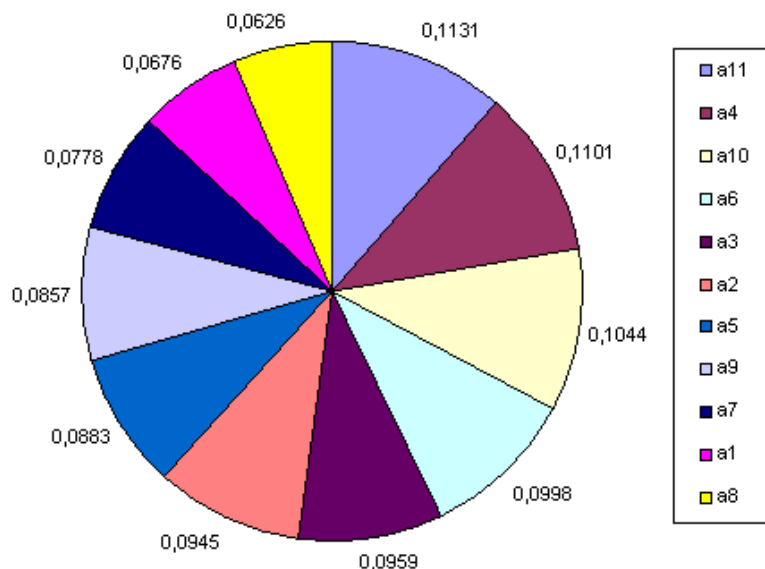
Tabulka 28: Přiřazení kategorií variantám pro kritéria K_5 až K_7

Tedy můžeme přistoupit k přiřazení hodnocení jednotlivým variantám podle toho, do které kategorie pro daná kritéria spadají, viz tabulka 29. V jednotlivých řádcích se nachází dílčí hodnocení variant ${}^A h_i^j$, kde ${}^A h_i^j$ je hodnocení h_i^j té kategorie, kterou jsme variantě přiřadili. Celková hodnocení jednotlivých variant vypočteme opět pomocí váženého průměru: ${}^A h_i^C = \sum_{j=1}^7 v_j {}^A h_i^j$ pro každé $i = 1, 2, \dots, 11$.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	${}^A h_i^C$
	0.2414	0.0629	0.1610	0.0961	0.3856	0.0323	0.0207	
a_1	0.2128	1	0.6211	1	0.1851	0.2414	1	0.4177
a_2	0.4352	1	1	0.2000	0.5256	0.3938	1	0.5843
a_3	1	1	0.6211	1	0.1851	0.1180	0.4658	0.5926
a_4	0.6511	0.3587	0.3295	0.2000	1	0.7517	1	0.6806
a_5	1	0.3587	0.6211	1	0.1851	0.0574	0.2454	0.5458
a_6	0.4352	0.3587	0.3295	0.2000	1	0.3938	1	0.6169
a_7	0.6511	0.3587	0.6211	1	0.1851	0.7517	0.0880	0.3870
a_8	0.6511	0.3587	0.1078	1	0.1851	0.0574	1	0.5299
a_9	0.6511	0.3587	0.1078	1	0.5256	1	0.0880	0.6454
a_{10}	1	0.3587	1	1	0.1851	1	1	0.6992
a_{11}	1	0.1532	0.6211	1	0.5256	1	0.4658	0.6573

Tabulka 29: Absolutní hodnocení: Syntéza dílčích hodnocení

Jako nejlepší varianta vyšla tentokrát a_{11} a a_4 se umístila až za ní. Kbychom chtěli srovnat tato hodnocení s hodnocením, která jsme dostali při použití dílčího relativního hodnocení, vydělili bychom tato hodnocení jejich součtem $\sum_{i=1}^{11} Ah_i^C = 6.1801$. Tato znormovaná hodnocení jsou zobrazena na obrázku 6.



Obrázek 6: Absolutní hodnocení alternativ

3.1.3 Srovnání hodnocení

Srovnáme nyní celková hodnocení, která nám vyšla, když jsme při dílčích problémech použili relativního a absolutní hodnocení variant. V tabulce 30 vidíme varianty srovnané podle jejich preferenčního pořadí.

Zde vidíme, že v distributivním a ideálním módu vyšla jako nejlepší varianta a_4 , kdežto pomocí absolutního hodnocení je nejlepší a_{11} . Nicméně varianta a_4 se umístila těsně za ní. Jak už jsme konstatovali dříve, v ideálním módu se oproti distributivnímu módu posunula na druhé místo varianta a_{11} , pořadí ostatních variant zůstalo stejné. Rozdíl mezi relativním a absolutním hodnocením bude větší. Vidíme, že srovnáme-li všechny tři použité způsoby, jediné, co mají na první pohled společné, je to, že se na posledních třech místech umístily varianty a_7 , a_1 a a_8 . Dále můžeme vypořádat, že hodnocení varianty a_9 bylo při relativním

	distributivní mód		ideální mód		absolutní hodnocení
a_4	0.1298	a_4	0.1123	a_{11}	0.1131
a_6	0.1265	a_{11}	0.1088	a_4	0.1101
a_2	0.1128	a_6	0.1082	a_{10}	0.1044
a_{11}	0.1120	a_2	0.1012	a_6	0.0998
a_{10}	0.0939	a_{10}	0.0975	a_3	0.0959
a_9	0.0932	a_9	0.0921	a_2	0.0945
a_5	0.0703	a_5	0.0814	a_5	0.0883
a_3	0.0696	a_3	0.0799	a_9	0.0857
a_7	0.0676	a_7	0.0756	a_7	0.0778
a_1	0.0671	a_1	0.0746	a_1	0.0676
a_8	0.0572	a_8	0.0685	a_8	0.0626

Tabulka 30: Srovnání relativního a absolutního hodnocení

hodnocení značně před a_5 , při absolutním hodnocení je naopak a_5 nepatrně lepší než a_9 . Stejně tak varianta a_3 , která byla při relativním hodnocení až za a_2 , a_5 a a_9 je v absolutním hodnocení před nimi. Je to způsobeno tím, že při absolutním hodnocení jsme pro varianty vytvořili kategorie, do nichž jsme zařadili jejich důsledky vzhledem k jednotlivým kritériím. Pro kritéria K_4 materiál a K_5 nebezpečí výskytu povodně jsme pro vytvoření kategorií použili přímo stávající důsledky variant, ale například pro kritérium K_2 cena rozhodovatel použil pro naše konkrétní varianty celkem hrubé síto. Byt a_4 za 1.512 mil Kč a byt a_{10} za 1.590 mil Kč jsme hodnotili stejně, přitom při párovém srovnání konkrétních variant bychom určitě upřednostnili byt a_4 . Stejně tak u kritéria K_1 velikost bytu rozhodovatel určil za ideální byt takový, který má nad 60 m². Mezi variantami máme i byt o rozloze 70 m², který tak dostal stejné hodnocení jako ten, co by byl o skoro 10 m² menší, což je v podstatě jeden malý pokoj navíc. Z toho důvodu bychom v tomto případě doporučili spíše relativní hodnocení variant.

Proto bychom rozhodovateli doporučili vybrat si byt a_4 na ulici I. P. Pavlova, s tím, že by měl zvážit také varianty a_6 a a_{11} , protože se obě v různých modelech hodnocením blížily variantě a_4 .

3.2 Model II - přidání varianty

Když jsme se dívali o týden později na stránky [24], našli jsme další byt, který splňuje všechny aspirační úrovně. Zároveň byly pořád v nabídce i všechny ostatní byty, které jsme doposud hodnotili. Nový byt a_{12} na ulici Hněvotínská nabýval pro naše kritéria hodnot, které jsou vidět v tabulkách 31 a 32.

BYT	K_1 : velikost [m ²]	K_2 : cena [mil Kč]	K_3 : patro	K_4 : materiál
a_{12} : Hněvotínská	52	1.440	3.	panel

Tabulka 31: Důsledky varianty a_{12} vzhledem ke kritériím K_1 až K_4

BYT	K_5 : nebezpečí povodně	K_6 : další podlahová plocha	K_7 : spoje do centra
a_{12} : Hněvotínská	nízké	balkon	1 x za 10 min

Tabulka 32: Důsledky varianty a_{12} vzhledem ke kritériím K_5 až K_7

Model zůstane stejný jako v přechozím případě, pouze do něj přidáme variantu a_{12} . Tj. nemění se kritéria, jejich váhy ani párové srovnání předchozích variant.

3.2.1 Relativní hodnocení

Nyní si v tabulkách 33 až 39 ukážeme, jak rozhodovatel hodnotil novou variantu oproti ostatním a jaké hodnocení podle toho všechny dostanou.

K_1	u_i^1	Dh_i^1	Ih_i^1
a_1	50	0.0713	0.7143
a_2	52	0.0742	0.7429
a_3	65	0.0927	0.9286
a_4	58	0.0827	0.8286
a_5	70	0.0999	1
a_6	53	0.0756	0.7571
a_7	56	0.0799	0.8000
a_8	57	0.0813	0.8143
a_9	56	0.0799	0.8000
a_{10}	65	0.0927	0.9286
a_{11}	67	0.0956	0.9571
a_{12}	52	0.0742	0.7429
Σ :	702		

Tabulka 33: Přidání varianty: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_1

K_2	u_i^2	$\frac{1}{u_i^2}$	Dh_i^2	Ih_i^2
a_1	1.400	0.7143	0.0901	1
a_2	1.410	0.7092	0.0895	0.9929
a_3	1.450	0.6897	0.0870	0.9655
a_4	1.512	0.6614	0.0835	0.9259
a_5	1.520	0.6579	0.0830	0.9211
a_6	1.540	0.6494	0.0819	0.9091
a_7	1.540	0.6494	0.0819	0.9091
a_8	1.575	0.6349	0.0801	0.8889
a_9	1.590	0.6289	0.0794	0.8805
a_{10}	1.590	0.6289	0.0794	0.8805
a_{11}	1.650	0.6061	0.0765	0.8485
a_{12}	1.440	0.6944	0.0876	0.9722
Σ :		7.9245		

Tabulka 34: Přidání varianty: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_2

K_3	a_2	a_{10}	a_1	a_3	a_5	a_7	a_{11}	a_6	a_8	a_9	a_4	a_{12}	g_i^3	Dh_i^3	Ih_i^3
a_2	1	1	3	3	3	3	3	5	5	5	9	4	0.5565	0.1970	1
a_{10}	1	1	3	3	3	3	3	5	5	5	9	4	0.5565	0.1970	1
a_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	1	1	3	5	5	8	3	0.2616	0.0926	0.4700
a_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	1	1	3	5	5	8	3	0.2616	0.0926	0.4700
a_5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	1	1	3	5	5	8	3	0.2616	0.0926	0.4700
a_7	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	1	1	3	5	5	8	3	0.2616	0.0926	0.4700
a_{11}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	1	1	3	5	5	8	3	0.2616	0.0926	0.4700
a_6	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	3	3	5	$\frac{1}{2}$	0.1098	0.0389	0.1974
a_8	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	1	5	$\frac{1}{3}$	0.0673	0.0238	0.1210
a_9	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	1	5	$\frac{1}{3}$	0.0673	0.0238	0.1210
a_4	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{5}{9}$	0.0310	0.0110	0.0557
a_{12}	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	3	3	5	1	0.1279	0.0453	0.2299
$\Sigma:$													2.8244		

Tabulka 35: Přidání varianty: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_3

K_4	a_1	a_3	a_5	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_2	a_4	a_6	a_{12}	g_i^4	Dh_i^4	Ih_i^4
a_1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	5	0.3727	0.1250	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	5	0.3727	0.1250	1
a_5	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	5	0.3727	0.1250	1
a_7	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	5	0.3727	0.1250	1
a_8	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	5	0.3727	0.1250	1
a_9	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	5	0.3727	0.1250	1
a_{10}	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	5	0.3727	0.1250	1
a_{11}	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	5	0.3727	0.1250	1
a_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	0.0745	0.0250	0.2000
a_4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	0.0745	0.0250	0.2000
a_6	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	0.0745	0.0250	0.2000
a_{12}	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	0.0745	0.0250	0.2000
$\Sigma:$													2.9814		

Tabulka 36: Přidání varianty: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_4

K_5	a_4	a_6	a_2	a_9	a_{11}	a_1	a_3	a_5	a_7	a_8	a_{10}	a_{12}	g_i^5	Dh_i^5	Ih_i^5
a_4	1	1	3	3	3	6	6	6	6	6	6	1	0.5055	0.1874	1
a_6	1	1	3	3	3	6	6	6	6	6	6	1	0.5055	0.1874	1
a_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	5	5	5	5	5	5	$\frac{1}{3}$	0.2634	0.0977	0.5212
a_9	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	5	5	5	5	5	5	$\frac{1}{3}$	0.2634	0.0977	0.5212
a_{11}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	5	5	5	5	5	5	$\frac{1}{3}$	0.2634	0.0977	0.5212
a_1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{6}$	0.0650	0.0241	0.1286
a_3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{6}$	0.0650	0.0241	0.1286
a_5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{6}$	0.0650	0.0241	0.1286
a_7	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{6}$	0.0650	0.0241	0.1286
a_8	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{6}$	0.0650	0.0241	0.1286
a_{10}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{6}$	0.0650	0.0241	0.1286
a_{12}	1	1	3	3	3	6	6	6	6	6	6	1	0.5055	0.1874	1
$\Sigma:$													2.6967		

Tabulka 37: Přidání varianty: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_5

K_6	a_{10}	a_{11}	a_4	a_9	a_7	a_2	a_6	a_1	a_3	a_5	a_8	a_{12}	g_i^6	Dh_i^6	Ih_i^6
a_{10}	1	1	2	3	3	6	6	7	7	9	9	6	0.5398	0.2044	1
a_{11}	1	1	2	3	3	6	6	7	7	9	9	6	0.5398	0.2044	1
a_4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3	3	6	6	6	7	9	9	6	0.4597	0.1741	0.8516
a_9	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	2	4	4	5	7	9	9	4	0.3000	0.1136	0.5557
a_7	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	3	3	5	7	9	9	3	0.2433	0.0921	0.4506
a_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1	1	3	5	7	7	1	0.1238	0.0469	0.2292
a_6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1	1	3	5	7	7	1	0.1238	0.0469	0.2292
a_1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	5	5	5	$\frac{1}{3}$	0.0800	0.0303	0.1482
a_3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	5	5	$\frac{1}{5}$	0.0528	0.0200	0.0978
a_5	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	$\frac{1}{7}$	0.0271	0.0103	0.0502
a_8	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	$\frac{1}{7}$	0.0271	0.0103	0.0502
a_{12}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1	1	3	5	7	7	1	0.1238	0.0469	0.2292
$\Sigma:$													2.6410		

Tabulka 38: Přidání varianty: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_6

K_7	u_i^7	$\frac{1}{u_i^7}$	Dh_i^7	Ih_i^7
a_1	4	0.2500	0.1667	1
a_2	6	0.1667	0.1111	0.6667
a_3	12	0.0833	0.0556	0.3333
a_4	4	0.2500	0.1667	1
a_5	20	0.0500	0.0333	0.2000
a_6	10	0.1000	0.0667	0.4000
a_7	30	0.0333	0.0222	0.1333
a_8	4	0.2500	0.1667	1
a_9	30	0.0333	0.0222	0.1333
a_{10}	10	0.1000	0.0667	0.4000
a_{11}	12	0.0833	0.0556	0.3333
a_{12}	10	0.1000	0.0667	0.4000
Σ :	1.5000			

Tabulka 39: Přidání varianty: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_7

V následující tabulce 40 si ještě uvedeme hodnoty λ_{max} , CI a CR pro ta kritéria, pro která jsme tvořili Saatyho matice.

	λ_{max}	CI	CR	konzistence	slabá konzistence
K_3	12.6680	0.0607	0.0394	ano	ano
K_4	2	0	0	ano	ano
K_5	12.3202	0.0291	0.0189	ano	ano
K_6	13.4747	0.1341	0.0871	ano	ano

Tabulka 40: Vyšetření konzistence a slabé konzistence

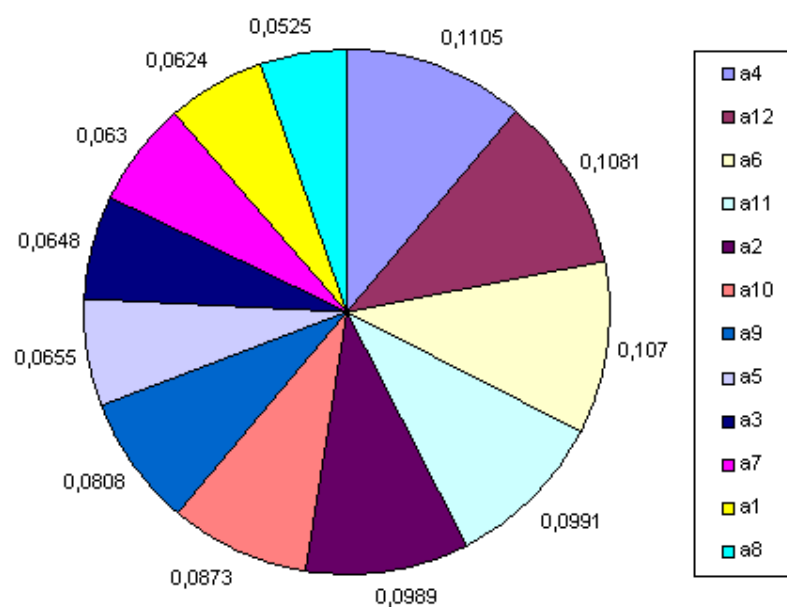
Dle tabulky 40 jsou tedy matice párových srovnání variant vzhledem ke kritériím K_3 , K_4 , K_5 i K_6 konzistentní i slabě konzistentní.

Syntéza dílčích hodnocení

Nyní můžeme přistoupit k syntéze dílčích hodnocení. To nejprve provedeme pro relativní hodnocení variant, viz tabulka 41. Hodnocení jednotlivých alternativ potom znázorníme na grafu 7.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	Dh_i^C
	0.2414	0.0629	0.1610	0.0961	0.3856	0.0323	0.0207	
a_1	0.0713	0.0901	0.0926	0.1136	0.0241	0.0303	0.1667	0.0624
a_2	0.0742	0.0895	0.1970	0.0227	0.0977	0.0469	0.1111	0.0989
a_3	0.0927	0.0870	0.0926	0.1136	0.0241	0.0200	0.0556	0.0648
a_4	0.0827	0.0835	0.0110	0.0227	0.1874	0.1741	0.1667	0.1105
a_5	0.0999	0.0830	0.0926	0.1136	0.0241	0.0103	0.0333	0.0655
a_6	0.0756	0.0819	0.0389	0.0227	0.1874	0.0469	0.0667	0.1070
a_7	0.0799	0.0819	0.0926	0.1136	0.0241	0.0921	0.0222	0.0630
a_8	0.0813	0.0801	0.0238	0.1136	0.0241	0.0103	0.1667	0.0525
a_9	0.0799	0.0794	0.0238	0.1136	0.0977	0.1136	0.0222	0.0808
a_{10}	0.0927	0.0794	0.1970	0.1136	0.0241	0.2044	0.0667	0.0873
a_{11}	0.0956	0.0765	0.0926	0.1136	0.0977	0.2044	0.0556	0.0991
a_{12}	0.0742	0.0876	0.0453	0.0227	0.1874	0.0469	0.0667	0.1081

Tabulka 41: Přidání varianty: Celkové hodnocení pro distributivní mód



Obrázek 7: Přidání alterativy: Hodnocení alternativ dle distributivního módu

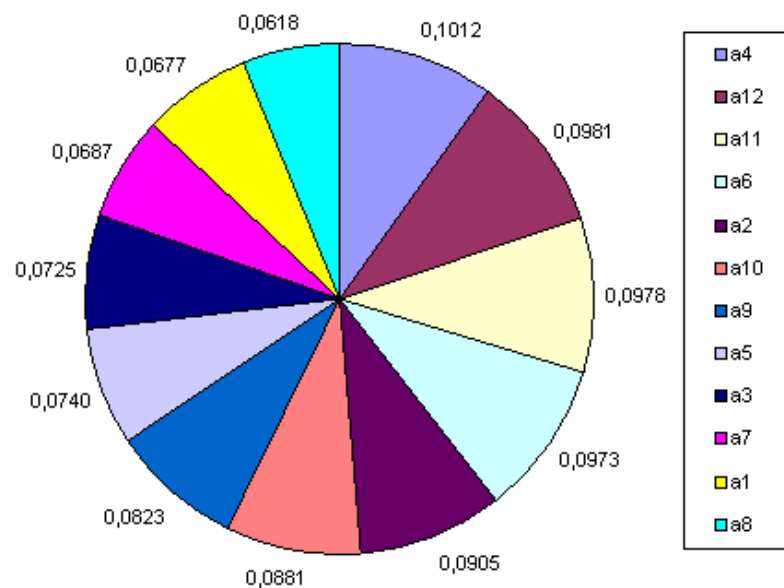
V tabulce 41 a na obrázku 7 vidíme, že i když se nám objevila nová varianta, tak pořád jako nejlepší vychází varianta a_4 . Ovšem alternativa a_{12} se umístila těsně na druhém místě a opět těsně za ní je a_6 . Protože rozdíl mezi hodnocením těchto variant je malý, doporučili bychom rozhodovateli dle distributivního módu, aby si vybral jednu z nich.

Nyní se podíváme, která varianta vyjde nejlépe hodnocena podle ideálního módu. V tabulce 42 provedeme syntézu dílčích hodnocení. Když vydělíme celková hodnocení jednotlivých alternativ jejich součtem, který je roven 7.1177, tak můžeme tato hodnocení porovnat s těmi, co jsme dostali pomocí relativního módu. Znormovaná hodnocení vidíme na obrázku 8.

Vidíme, že jako nejlepší vyšla opět varianta a_4 . Těsně za ní jsou varianty a_{12} , a_{11} a a_6 . Pouze podle ideálního módu bychom tedy rozhodovateli doporučili jednu z těchto variant.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	$I_{h_i^C}$
	0.2414	0.0629	0.1610	0.0961	0.3856	0.0323	0.0207	
a_1	0.7143	1	0.4700	1	0.1286	0.1482	1	0.4822
a_2	0.7429	0.9929	1	0.2000	0.5212	0.2292	0.6667	0.6442
a_3	0.9286	0.9655	0.4700	1	0.1286	0.0978	0.3333	0.5163
a_4	0.8286	0.9259	0.0557	0.2000	1	0.8516	1	0.7203
a_5	1	0.9211	0.4700	1	0.1286	0.0502	0.2000	0.5265
a_6	0.7571	0.9091	0.1974	0.2000	1	0.2292	0.4000	0.6922
a_7	0.8000	0.9091	0.4700	1	0.1286	0.4506	0.1333	0.4890
a_8	0.8143	0.8889	0.1210	1	0.1286	0.0502	1	0.4400
a_9	0.8000	0.8805	0.1210	1	0.5212	0.5557	0.1333	0.5858
a_{10}	0.9286	0.8805	1	1	0.1286	1	0.4000	0.6268
a_{11}	0.9571	0.8485	0.4700	1	0.5212	1	0.3333	0.6964
a_{12}	0.7429	0.9722	0.2299	0.2000	1	0.2292	0.4000	0.698

Tabulka 42: Přidání varianty: Celkové hodnocení pro ideální mód



Obrázek 8: Přidání alternativy: Hodnocení alternativ dle ideálního módu

Srovnání hodnocení dle obou módů

Spočetli jsme znormovaná hodnocení, podívejme se tedy ještě, jak se liší preferenční pořadí variant v jednotlivých módech.

	distributivní mód		ideální mód
a_4	0.1105	a_4	0.1012
a_{12}	0.1081	a_{12}	0.0981
a_6	0.1070	a_{11}	0.0978
a_{11}	0.0991	a_6	0.0973
a_2	0.0989	a_2	0.0905
a_{10}	0.0873	a_{10}	0.0881
a_9	0.0808	a_9	0.0823
a_5	0.0655	a_5	0.0740
a_3	0.0648	a_3	0.0725
a_7	0.0630	a_7	0.0687
a_1	0.0624	a_1	0.0677
a_8	0.0525	a_8	0.0618

Tabulka 43: Přidání varianty: Srovnání hodnocení dle obou módů

V tabulce 43 vidíme, že v obou případech je preferenční pořadí variant stejné až na a_6 a a_{11} . Nicméně si můžeme všimnout, že v ideálním módu se hodnocení a_{11} liší od a_6 jen nepatrně, kdežto v ideálním módu je rozdíl v hodnocení větší. Když se podíváme na hodnocení variant dle obou módů současně, tak bychom

rozhodovateli doporučili vybrat si variantu a_4 , protože vyšla pomocí obou jako nejlepší. Zároveň bychom doporučili, aby zvážil i alternativu a_{12} , protože její hodnocení je v obou případech velmi blízké.

3.2.2 Absolutní hodnocení

Nyní se podíváme, jak vyjdou hodnoceny varianty, když použijeme v dílčích problémech absolutní hodnocení variant. V tomto případě už nemusíme nic počítat, protože pro kritéria už máme vytvořeny a ohodnoceny jejich kategorie, takže vše, co musíme udělat, je přiřadit variantě a_{12} pro každé kritérium kategorii, do které padne, a k ní příslušné hodnocení.

Nejprve v tabulkách 44 a 45 přiřadíme kategorie a následně v tabulce 46 hodnocení.

	K_1 : velikost	K_2 : cena	K_3 : patro	K_4 : materiál
a_{12}	50 - 52 m ²	do 1.5 mil Kč	3. - 5. patro	panel

Tabulka 44: Přiřazení kategorií variantě a_{12} pro kritéria K_1 až K_4

	K_5 : nebezpečí povodně	K_6 : další podlahová plocha	K_7 : četnost spojů do centra
a_{12}	zanedbatelné	balkon	každých 10 min a častěji

Tabulka 45: Přiřazení kategorií variantě a_{12} pro kritéria K_5 až K_7

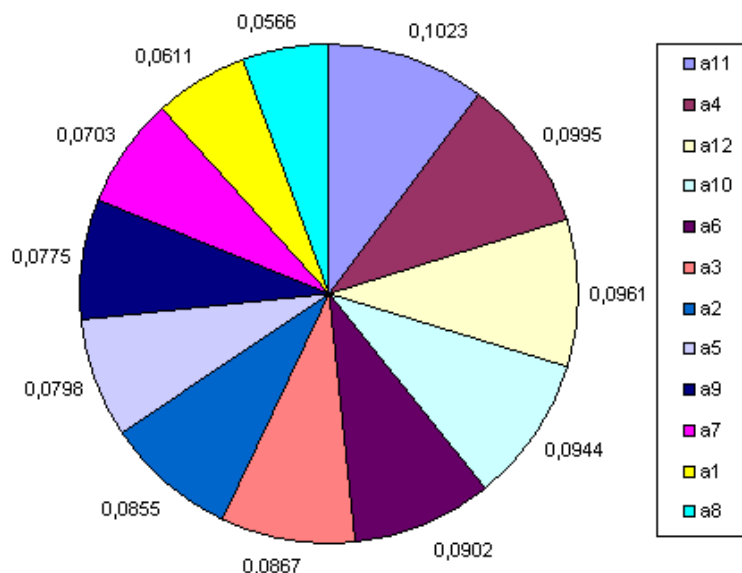
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	
	0.2414	0.0629	0.1610	0.0961	0.3856	0.0323	0.0207	Ih_i^C
a_{12}	0.4352	1	0.3295	0.2000	1	0.3938	1	0.6573

Tabulka 46: Absolutní hodnocení varianty a_{12}

Hodnocení ostatních variant, které jsou v modelu, se nemění. Můžeme jej tedy nalézt v tabulce 29. Jednotlivá hodnocení znormujeme jejich součtem, který je roven 6.8374, a ukážeme si je na obrázku 9.

Vidíme, že nejlepší je pořád varianta a_4 a za ní a_6 . Nová alternativa a_{12} je až na

třetím místě. Podle tohoto způsobu hodnocení bychom rozhodovateli doporučili jednu z variant na prvních dvou místech, protože jejich hodnocení se velmi blíží.



Obrázek 9: Přidání alternativy: Absolutní hodnocení alternativ

3.2.3 Srovnání hodnocení

V tabulce 47 se podívejme, jak se lišila všechna hodnocení, která jsme v modelu II získali. Ve všech třech případech vyšlo na posledních třech místech a_7 , a_1 a a_8 . Pomocí relativního hodnocení vyšla jako nejlepší varianta a_4 , s tím, že se jí ještě velmi blížily varianty a_{12} , a_6 a a_{11} . U absolutního hodnocení to zase vyhrála varianta a_{11} , přičemž a_4 se jí dost blížila, stejně tak byla blízko a_{12} . Srovnáme-li použité způsoby hodnocení, absolutní nám v tomto případě nepřijde příliš vhodné. V modelu máme málo alternativ a rozdělení možných důsledků variant do kategorií nám přišlo pro varianty, které jsme posuzovali, příliš hrubé. I rozhodovatel se s námi shoduje v tom, že jeho preference lépe popisuje relativní hodnocení. Z toho důvodu bychom rozhodovateli doporučili být a_4 . Ten vyšel jako nejlepší, když jsme dílčí hodnocení vztahovali ke všem variantám i k nejlepší variantě dle daného kritéria. Dále bychom doporučili před konečným rozhodnutím zvážit i být a_{12} , který se umístil na druhé pozici a jehož hodnocení bylo velmi

blízké hodnocení varianty a_4 .

	distributivní mód		ideální mód		absolutní hodnocení
a_4	0.1105	a_4	0.1012	a_{11}	0.1023
a_{12}	0.1081	a_{12}	0.0981	a_4	0.0995
a_6	0.1070	a_{11}	0.0978	a_{12}	0.0961
a_{11}	0.0991	a_6	0.0973	a_{10}	0.0944
a_2	0.0989	a_2	0.0905	a_6	0.0902
a_{10}	0.0873	a_{10}	0.0881	a_3	0.0867
a_9	0.0808	a_9	0.0823	a_2	0.0855
a_5	0.0655	a_5	0.0740	a_5	0.0798
a_3	0.0648	a_3	0.0725	a_9	0.0775
a_7	0.0630	a_7	0.0687	a_7	0.0703
a_1	0.0624	a_1	0.0677	a_1	0.0611
a_8	0.0525	a_8	0.0618	a_8	0.0566

Tabulka 47: Přidání varianty: Srovnání hodnocení

3.3 Srovnání preferenčního pořadí variant po přidání varianty

Do modelu I jsme přidali variantu a_{12} a získali jsme tak model II. Podívejme se, co se stalo s preferenčním pořadím variant. Nejprve se zaměříme na distributivní mód.

	model I		model II
a_4	0.1298	a_4	0.1105
		a_{12}	0.1081
a_6	0.1265	a_6	0.1070
a_2	0.1128	a_{11}	0.0991
a_{11}	0.1120	a_2	0.0989
a_{10}	0.0939	a_{10}	0.0873
a_9	0.0932	a_9	0.0808
a_5	0.0703	a_5	0.0655
a_3	0.0696	a_3	0.0648
a_7	0.0676	a_7	0.063
a_1	0.0671	a_1	0.0624
a_8	0.0572	a_8	0.0525

Tabulka 48: Preferenční pořadí variant pro distributivní mód

V tabulce 48 vidíme, že se po přidání varianty a_{12} změnilo preferenční pořadí variant a_2 a a_{11} . Všimněme si, že hodnocení těchto variant je v obou případech velice blízké. Navíc, když se podíváme na dílčí hodnocení těchto dvou bytů, tak podle nejdůležitějšího kritéria K_5 jsou oba hodnoceny stejně a vezmeme-li dále kritéria seřazena podle jejich významnosti K_1, K_3, K_4, K_2, K_6 a K_7 , pak se tyto varianty střídají v pořadí a_{11}, a_2 v tom, která je dle daného kritéria lepší. Tedy a_{11} je lepší dle druhého, čtvrtého a šestého nejvýznamnějšího kritéria a a_2 je lepší dle třetího, pátého a sedmého nejvýznamnějšího kritéria. Protože součet všech hodnocení dle každého kritéria je roven 1, tak se přidáním varianty a_{12} tato dílčí hodnocení proporciálně zmenšila a v důsledku syntézy potom došlo ke změně preferenčního pořadí těchto dvou alternativ.

Nyní se podíváme, co se stalo s preferencemi mezi variantami při použití ideálního módu. V tabulce 49 vidíme, že preferenční pořadí se zde zachovalo i po přidání varianty a_{12} .

	model I		model II
a_4	0.1123	a_4	0.1012
		a_{12}	0.0981
a_{11}	0.1088	a_{11}	0.0978
a_6	0.1082	a_6	0.0973
a_2	0.1012	a_2	0.0905
a_{10}	0.0975	a_{10}	0.0881
a_9	0.0921	a_9	0.0823
a_5	0.0814	a_5	0.0740
a_3	0.0799	a_3	0.0725
a_7	0.0756	a_7	0.0687
a_1	0.0746	a_1	0.0677
a_8	0.0685	a_8	0.0618

Tabulka 49: Preferenční pořadí variant pro ideální mód

Dílčí hodnocení u kvantitativních kritérií zůstalo totiž stejné, protože jsme ho vztahovali k nejlepší variantě, která zůstala stejná. Dílčí hodnocení zůstalo stejné také tam, kde byla Saatyho matice absolutně konzistentní. Dále tam, kde byla daná varianta hodnocena jako nejlepší (tedy měla hodnocení 1), se její hodnocení

nezměnilo. Díky tomu se podařilo zachovat preferenční pořadí variant. Podíváme-li se třeba na alternativy a_2 a a_{11} , tak jejich hodnocení se proporciálně zmenšilo jen u dvou kritérií, u nichž jsme použili srovnání v Saatyho matici. Díky tomu po syntéze zůstalo jejich pořadí stejné jako v původním modelu.

Pro absolutní hodnocení není třeba srovnávat preferenční pořadí variant, protože hodnocení alternativ v modelu bez původní varianty se nemění. Pořadí variant tedy vždy zůstává stejné, ať přidáme či odebereme libovolné množství variant.

3.4 Závěrečné rozhodnutí o výběru varianty

Podíváme-li se souhrnně na hodnocení variant v obou modelech a pomocí všech typů hodnocení pro dílčí problémy, pak jsme konstatovali, že absolutní hodnocení pro náš rozhodovací problém není zrovna vhodné a dali bychom přednost relativnímu hodnocení. V obou módech vyšlo pořadí variant skoro stejné, proto v tomto případě můžeme akceptovat oba přístupy. Protože nám i po přidání varianty vyšel jako nejlepší byt a_4 na ulici I.P. Pavlova, doporučili bychom rozhodovateli vybrat si ho s tím, že by měl zvážit i alternativu a_{12} na ulici Hněvotínská, která se opět v obou případech umístila na druhém místě těsně za a_4 .

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo představit si metodu AHP a poukázat nejen na její přednosti, ale také na její nedostatky.

Nejprve jsme si ukázali, jak se s touto metodou pracuje, tj. jak se získají váhy kritérií a dílčí hodnocení variant, a jak z nich potom vytvořit hodnocení celkové, podle kterého můžeme určit, která alternativa nejlépe řeší náš rozhodovací problém. Ukázali jsme si také, jaké požadavky klademe na prvky matice párových srovnávání (reciprocita, jedničky na diagonále a konzistence), aby zadané informace o preferencích byly racionální. Protože jen v takovém případě můžeme potom dojít k racionálnímu rozhodnutí. Zde jsme narazili na první nevýhodu metody AHP. Požadavek konzistence je totiž příliš silný a v reálných situacích se nedá splnit, proto jsme navrhli tzv. slabou konzistenci, která lépe odpovídá slovním popisům intenzit preferencí a již je snadnější dodržet.

V souvislosti s tím jsme se také v první kapitole zaměřili na to, co vše musí splňovat preferenční matice u metody párového srovnávání (která patří do stejné skupiny metod získání vah kritérií), abychom se při zadávání informací o preferencích chovali racionálně. Tato problematika je totiž v literatuře většinou opomíjena a autoři se omezují pouze na instrukce k vyplnění preferenční matice a na to, jak z ní získat váhy a hodnocení.

Kromě problému konzistence jsme se u metody AHP zabývali také problémem změny preferenčního pořadí variant po přidání či odebrání alternativy z modelu. Z toho důvodu jsme také metodu AHP představili v různých alternativách dílčího hodnocení variant - s relativním hodnocením, kde se toto preferenční pořadí ne vždy zachovává, a s absolutním hodnocením, kde je zachováno vždy. Metodu jsme tak popsali v širším měřítku, než se obvykle objevuje v literatuře zabývající se vícekritériálním hodnocením, protože tam je tato metoda známa pouze v podobě relativního hodnocení s distributivním módem.

I přes popsané nevýhody je ale metoda AHP v současnosti jednou z nejpoužívanějších metod vícekritériálního hodnocení, protože je jednoduchá, komplexní, má široké spektrum použití a hlavně - pokud rozhodovatel zadává racionálně in-

formace o preferencích, tak tato metoda dává dobré výsledky. Je třeba jen vědět, jak s ní pracovat a jak interpretovat získaná data.

Na závěr práce jsme potom ještě předvedli rozsáhlý realistický příklad týkající se koupě bytu v Olomouci, kde jsme si ukázali všechny možné přístupy dílčího hodnocení a podívali jsme se také na problém změny preferenčního pořadí variant.

Seznam obrázků

1	Tříúrovňová hierarchie	24
2	Čtyřúrovňová hierarchie	24
3	Výběr auta pomocí absolutního hodnocení	55
4	Relativní hodnocení alternativ dle distributivního módu	85
5	Relativní hodnocení alternativ dle ideálního módu	87
6	Absolutní hodnocení alternativ	94
7	Přidání alterativy: Hodnocení alternativ dle distributivního módu	101
8	Přidání alterativy: Hodnocení alternativ dle ideálního módu	103
9	Přidání alterativy: Absolutní hodnocení alternativ	105

Seznam tabulek

1	Saatyho škála	26
2	Určení relativní významnosti prvků A a B na Saatyho škále	28
3	Podíl dílčích hodnocení na celkovém hodnocení skupiny	28
4	Hodnoty náhodného koeficientu nekonzistence $RI(m)$	37
5	Přiřazení kategorií alternativám	55
6	Přiřazení dílčích hodnocení alternativám	56
7	Důsledky variant vzhledem ke kritériím K_1 až K_4	77
8	Důsledky variant vzhledem ke kritériím K_5 až K_7	77
9	Párové srovnání kritérií na Saatyho škále	78
10	Relativní hodnocení variant dle kritéria K_1	79
11	Relativní hodnocení variant dle kritéria K_2	80
12	Relativní hodnocení variant dle kritéria K_3	81
13	Relativní hodnocení variant dle kritéria K_4	81
14	Relativní hodnocení variant dle kritéria K_5	82
15	Relativní hodnocení variant dle kritéria K_6	83
16	Relativní hodnocení variant dle kritéria K_7	83
17	Distributivní mód: Syntéza dílčích hodnocení	84
18	Ideální mód: Syntéza dílčích hodnocení	85
19	Srovnání hodnocení dle ideálního a distributivního módu	86
20	Hodnocení kategorií dle kritéria K_1	88
21	Hodnocení kategorií dle kritéria K_2	89
22	Hodnocení kategorií dle kritéria K_3	90
23	Hodnocení kategorií dle kritéria K_4	90
24	Hodnocení kategorií dle kritéria K_5	90
25	Hodnocení kategorií dle kritéria K_6	91
26	Hodnocení kategorií dle kritéria K_7	92
27	Přiřazení kategorií variantám pro kritéria K_1 až K_4	92
28	Přiřazení kategorií variantám pro kritéria K_5 až K_7	93

29	Absolutní hodnocení: Syntéza dílčích hodnocení	93
30	Srovnání relativního a absolutního hodnocení	95
31	Důsledky varianty a_{12} vzhledem ke kritériím K_1 až K_4	96
32	Důsledky varianty a_{12} vzhledem ke kritériím K_5 až K_7	96
33	Přidání varianty: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_1	97
34	Přidání varianty: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_2	97
35	Přidání varianty: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_3	98
36	Přidání varianty: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_4	98
37	Přidání varianty: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_5	99
38	Přidání varianty: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_6	99
39	Přidání varianty: Relativní hodnocení variant dle kritéria K_7	100
40	Vyšetření konzistence a slabé konzistence	100
41	Přidání varianty: Celkové hodnocení pro distributivní mód	101
42	Přidání varianty: Celkové hodnocení pro ideální mód	102
43	Přidání varianty: Srovnání hodnocení dle obou módů	103
44	Přiřazení kategorií variantě a_{12} pro kritéria K_1 až K_4	104
45	Přiřazení kategorií variantě a_{12} pro kritéria K_5 až K_7	104
46	Absolutní hodnocení varianty a_{12}	104
47	Přidání varianty: Srovnání hodnocení	106
48	Preferenční pořadí variant pro distributivní mód	106
49	Preferenční pořadí variant pro ideální mód	107

Literatura

- [1] Fotr, J., Píšek, M.: *Exaktní metody ekonomického rozhodování*, Academia, Praha, 1986
- [2] Ramík, J.: *Analytický hierarchický proces (AHP) a jeho využití v malém a středním podnikání*, Slezská univerzita, Karviná, 2000
- [3] Fotr a kol. : *Manažerské rozhodování*, Ekopress, s.r.o., Praha, 2006
- [4] Talašová, J.: *Fuzzy metody vícekritériálního hodnocení a rozhodování*, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2003
- [5] Černý, D., Glůckařová, D., Toms, M.: *Metody komplexního vyhodnocování variant*, Academia, Praha, 1980
- [6] Saaty, T.L.: *Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process*, Management Science, Vol. 32, No. 7, 1986, 841 - 855
- [7] Saaty, T.L.: *How to make a decision: The Analytic Hierarchy Process*, European Journal of Operational Research 48, 190, 9 - 26
- [8] http://cs.wikipedia.org/wiki/Sémantický_diferenciál, citováno [8.1.2012]
- [9] Meyer, C.D.: *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra Book and Solutions Manual*, SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2000
- [10] Crawford, G., Williams C.: *The Analysis of Subjective Judgment Matrices*, The Rand Corporation, California, 1985
- [11] http://en.wikipedia.org/wiki/Compositional_data, citováno [12.1.2012]
- [12] Pavlík, J.: *Aplikovaná statistika*, Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha, 2005
- [13] Zvára, K.: *Regrese*, Matfyzpress, Praha, 2008
- [14] Saaty, T.L.: *Relative Measurement and Its Generalization in Decision Making, Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors - The Analytic Hierarchy/Network Process*, RACSAM, Vol. 102, No. 2, 2008, 251 - 318
- [15] Saaty, T.L.: *Rank from comparisons and from rating in the analytic hierarchy/network processes*, European Journal of Operational Research, Vol. 168, 2006, 557 - 570

- [16] Saaty, T.L.: *The Seven Pillars of the Analytic Hierarchy Process* kapitola v knize Multiple Criteria Decision Making in the New Millennium od kolektivu autorů, Springer, 2001, 15 - 38
- [17] Saaty, T.L.: *Decision Making with the analytic hierarchy process*, Int. J. Services Sciences, Vol. 1, No. 1, 2008, 83 - 98
- [18] Ramík, J.: *Analytický hierarchický proces (AHP) a jeho možnosti uplatnění při hodnocení a podpoře rozhodování*, dostupné online z http://www.scss.sk/dvd_lpp_0384.09_2010/METODICK%C1%20PODPORA%20Z%20INTERNETU/VIACKRITERI%C1LNE%20ROZHODOVANI E/AHP/Ramik.pdf, citováno [24.1.2012]
- [19] Saaty, T.L.: *Response to Holder's Comments on the Analytic Hierarchy Process*, The Journal of the Operational Research Society, Vol. 42, No. 10, 1991, 909 - 914
- [20] Holder, R.D.: *Some Comments on the Analytic Hierarchy Process*, The Journal of the Operational Research Society, Vol. 41, No. 11, 1990, 1073 - 1076
- [21] Holder, R.D.: *Response to Holder's Comments on the Analytic Hierarchy Process: Response to the Response*, The Journal of the Operational Research Society, Vol. 42, No. 10, 1991, 914 - 918
- [22] Kasperczyk N., Knickel K.: *The Analytic Hierarchy Process (AHP)*, dostupné online z <http://www.ivm.vu.nl/en/Images/MCA3.tcm53-161529.pdf>, citováno [27.11.2011]
- [23] Goodwin P., Wright J.: *Decision Analysis for Management Judgement*, Third edition, John Wiley & Sons, Ltd, Chicester, 2004, 413 - 427
- [24] <http://www.domybytypozemky.cz/> [citováno 5.3.2012]
- [25] https://riskportal.intermap.cz/Intermap.ISF.Web.UI/Views/CS/CAP_Public/MainWizard.aspx?culturename=cs [citováno 5.3.2012]
- [26] <http://mapy.cz/> [citováno 5.3.2012]
- [27] <http://jizdnirady.idnes.cz/olomouc/spojeni/> [citováno 5.3.2012]