UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
Přírodovědecká fakulta
Katedra algebry a geometrie

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Agregační funkce a jejich klasifikace

Autor: Radek Talášek
Jméno vedoucího práce: RNDr. Jozef Pócs, Ph.D.
Rok: 2017
Název studijního oboru: Diskrétní matematika
Forma studia: Prezenční

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Jozefa Pócse, Ph.D., a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Olomouci dne 21. června 2017 ....

Poděkování

Zde bych velice rád poděkoval RNDr. Jozefu Pócsovi, Ph.D., vedoucímu mé práce, za konzultace a cenné rady, které mi poskytl během vypracování.

Obsah

Úvod **5**

1 Úvodní definice **6**

2 Agregační funkce a jejich klasifikace **9**
2.1 Agregační funkce na uspořádaných množinách 9
2.2 Konjunktivní a disjunktivní klasifikace 10
2.3 Obecná klasifikace 13
2.4 Klasifikace agregačních funkcí na řetězcích a svazech 13

3 Příklady klasifikací **15**
3.1 Klasifikace agregačních funkcí na řetězcích 15
3.2 Klasifikace agregačních funkcí na svazech 22
3.3 Příklad agregačních funkcí na uspořádané množině 26
3.3.1 Obecný postup hledání agregačních funkcí 29

Závěr **32**

Úvod

Tématem této závěrečné práce jsou klasifikace agregačních funkcí na různých uspořádaných množinách. Pod pojmem agregace si lze představit proces, jak z nějaké množiny hodnot získat jednu reprezentativní hodnotu. Agregační funkcí pak budeme rozumět nějakou numerickou funkci provádějící daný proces. Typickým příkladem jednoduché agregační funkce je všem dobře známý aritmetický průměr. Agregační funkce mají velké využití v různých disciplínách a odvětvích. V aplikované matematice se využívá například v pravděpodobnosti a statistice, dále můžeme agregační funkce využívat ve finančnictví, ekonomice, v počítačových technologiích a v mnoha dalších odvětvích. Pokud budeme chtít využít nějakou agregační funkci k vyřešení nějakého problému, tak nalezení vhodné agregační funkce může být docela složité. Proto se množina všech agregačních funkcí klasifikuje do různých tříd, kde každá třída má nějaké specifické vlastnosti, které ji odlišují od ostatních tříd.

Cílem této práce bude seznámit se s existující klasifikací agregačních funkcí na různých uspořádaných množinách a poté sestavit příklady daných agregačních funkcí splňující určité vlastnosti, kterými jsou klasifikovány. V úvodní kapitole se seznámíme se základními pojmy z teorie uspořádaných množin, které budeme využívat v dalších částech práce. Na začátku druhé kapitoly ve stručnosti popíšeme klasifikaci agregačních funkcí na reálném intervalu. Poté definujeme agregační funkce na uspořádané množině s nejmenším a největším prvkem, abychom mohli uvést klasifikaci agregačních funkcí na uspořádaných množinách. V další podkapitole pak námi uvažovanou klasifikaci rozšíříme o klasifikaci na řetězcích a svazech. V poslední kapitole pak námi uvedené definice klasifikací aplikujeme na příklady agregačních funkcí patřících do různých tříd. Nejprve ukážeme příklady agregačních funkcí na řetězcích a svazech. Na závěr ukážeme příklady agregačních funkcí na konečné uspořádané množině, která není svazem, a poté uvedeme obecný postup hledání agregačních funkcí na libovolné konečné uspořádané množině.

1 Úvodní definice

Nechť A je neprázdná množina, na které definujeme relaci $R \subseteq A \times A$. O dané relaci R lze říct, že je

- *reflexivní*, pokud $\forall a \in A : \langle a, a \rangle \in R$
- *symetrická*, pokud $\forall a, b \in A : \langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$
- *antisymetrická*, pokud $\forall a, b \in A : \langle a, b \rangle \in R$ a $\langle b, a \rangle \in R \Rightarrow a = b$
- *tranzitivní*, pokud $\forall a, b, c \in A : \langle a, b \rangle \in R$ a $\langle b, c \rangle \in R \Rightarrow \langle a, c \rangle \in R$

Definice 1.1. Pokud je relace R reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, budeme ji nazývat *uspořádání*. Relaci uspořádaní budeme značit symbolem $\leq$ a zápisem $a \leq b$ budeme rozumět, že $\langle a, b \rangle \in R$.

Definice 1.2. Nechť A je množina a nechť $\leq$ je uspořádání na množině A. Pak dvojice $(A, \leq)$ se nazývá *uspořádaná množina*. Je-li uspořádání na A takové, že $\forall x, y \in A$ je $x \leq y$ nebo $y \leq x$, pak $\leq$ se nazývá *úplné uspořádání* a A se nazývá *řetězec*.

Definice 1.3. Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina a $X \subseteq A$. Prvek $a \in X$ se nazývá

největší prvek množiny X, jestliže $\forall x \in X$ platí $x \leq a$,
nejmenší prvek množiny X, jestliže $\forall x \in X$ platí $x \geq a$.

Uvažujme nyní uspořádanou množinu $(A, \leq)$ a libovolnou podmnožinu $X \subseteq A$. Potom můžeme definovat množiny

$$U(X) = \{x \in A; y \leq x \text{ pro každé } y \in X\},$$

$$L(X) = \{x \in A; y \geq x \text{ pro každé } y \in X\}.$$

Definice 1.4. Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina a nechť $X \subseteq A$. Množina $U(X)$ definována výše se nazývá *horní kužel množiny* X. Množina $L(X)$ definována výše se nazývá *dolní kužel množiny* X. Jestliže má množina $U(X)$ nejmenší prvek, pak tento prvek budeme nazývat *supremum množiny* X a budeme ho značit $\sup X$. Jestliže má množina $L(X)$ největší prvek, pak tento prvek budeme nazývat *infimum množiny* X a budeme ho značit $\inf X$.

Definice 1.5. Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina. Jestliže ke každým dvěma prvkům $a, b \in A$ existuje $\sup_A\{a, b\}$ a $\inf_A\{a, b\}$, tak uspořádanou množinu $(A, \leq)$ nazveme *svaz*.

Poznámka. V literaturách se často vyskytuje i jiná definice svazu, která je s tou naší ekvivalentní: Nechť A je neprázdná množina a nechť $\wedge, \vee$ jsou binární operace splňující komutativitu, asociativitu, idempotenci a tzv. zákony absorbce:

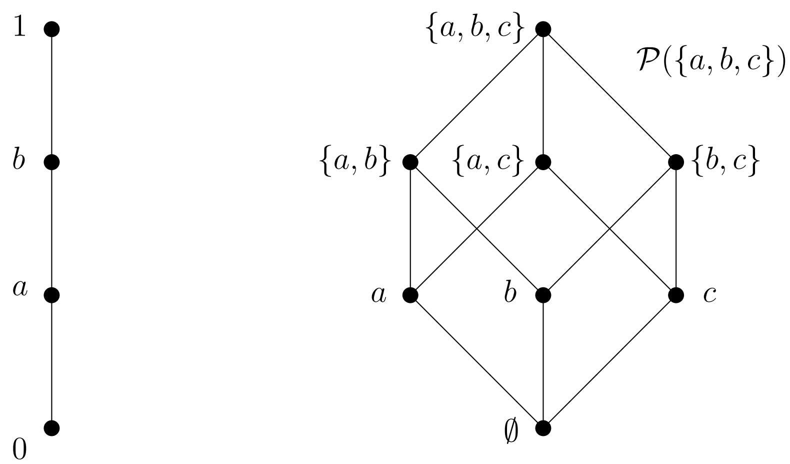
$$a \wedge (a \vee b) = a, \qquad a \vee (a \wedge b) = a.$$

Pak se trojice $(A, \vee, \wedge)$ nazývá svaz.

Příklad 1.6.

(1) Řetezce jsou svazy.

(2) Nechť M je množina a nechť $\mathcal{P}(M)$ je její potenční množina. Pak uspořádaná množina $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, kde $\subseteq$ je relace "býti podmnožinou", je svaz.



Obrázek 1: 4-prvkový řetězec a svaz $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$

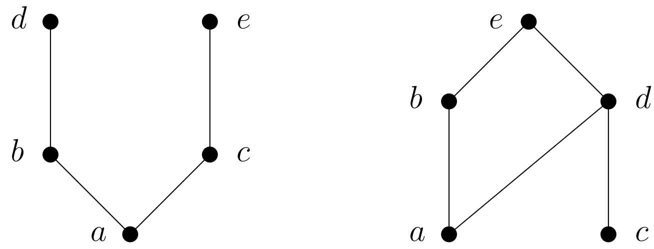
Definice 1.7. Uspořádanou množinu $(A, \leq)$ nazveme *úplný svaz*, jestliže pro každou $X \subseteq A$ existuje $\inf X$ a $\sup X$ v A.

Příklad 1.8.

(1) Konečné svazy jsou úplným svazem.

(2) Svaz $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, je úplný svaz.

(3) Svaz $(\mathbb{N}, \leq)$ není úplný, protože neexistuje supremum množiny $\mathbb{N}$.



Obrázek 2: Příklad uspořádaných množin, které nejsou svazem

2 Agregační funkce a jejich klasifikace

V oblasti agregačních funkcí na reálných intervalech ([1]) lze uvádět Dubois-Pradeův přístup, kde jsou uvažovány třídy konjunktivních, disjunktivních, průměrových a zbývajících agregačních funkcí, které jsou definovány díky jejich vztahům k funkcím Min a Max.

Třída $\mathcal{C}$ všech (n-árních) konjunktivních agregačních funkcí (probíhajících na reálném intervalu $[a, b]$) je charakterizována díky nerovnosti $A \leq Min$, zatímco nerovnost $A \geq Max$ je charakteristická pro třídu disjunktivních agregačních funkcí $\mathcal{D}$. Pokud jde o průměrové agregační funkce, tak ty mohou splňovat nerovnost $Min \leq A \leq Max$. Chceme-li vyloučit překrývání konjunktivních a průměrových (disjunktivních a průměrových) agregačních funkcí, označíme $\mathcal{P}$ třídu ryzích průměrových agregačních funkcí obsahující všechny průměrové agregační funkce kromě Min a Max. Označíme-li $\mathcal{A}$ třídu všech agregačních funkcí (n-árních na reálném intervalu $[a, b]$), pak třída $\mathcal{R} = \mathcal{A} \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{P})$ obsahuje všechny zbývající agregační funkce, které nejsou konjunktivní, disjunktivní ani průměrové. Tudíž standardní klasifikace $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$ tvoří rozklad třídy $\mathcal{A}$.

Agregační funkce nejsou definovány jen na reálných intervalech, ale lze je definovat také na libovolné uspořádané struktuře s nejmenším a největším prvkem (např. uspořádané množiny, řetězce, svazy). Na tyto struktury ve všeobecnosti nemůžeme použít námi řečený Dubois-Pradeův přístup, protože na těchto strukturách nemusí být definovány funkce Min a Max.

2.1 Agregační funkce na uspořádaných množinách

Definice 2.1 ([2], Definition 1)**.** Nechť $(P, \leq, 0, 1)$ je uspořádaná množina. Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$. Zobrazení $A : P^n \to P$ se nazývá (n-ární) *agregační funkce na* P, jestliže je neklesající,

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \quad (\text{tj. } x_1 \leq y_1, \ldots, x_n \leq y_n) \Rightarrow A(\mathbf{x}) \leq A(\mathbf{y})$$

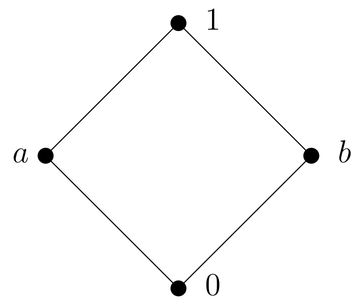
a splňuje mezní podmínky

$$A(0, \ldots, 0) = 0 \quad \text{a} \quad A(1, \ldots, 1) = 1.$$

Zobrazení $B : \cup_{n\in\mathbb{N}} P^n \to P$ se nazývá *rozšířená agregační funkce* na P, jestliže restrikce $B|P^n$ je n-ární agregační funkce na P pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Všimněme si, že pokud si zvolíme $P = [0, 1]$ spolu se standardním uspořádáním reálných čísel, tak se Definice 2.1 shoduje s definicí agregačních funkcí na číselných intervalech ([1]).

Příklad 2.2. Mějme uspořádanou množinu $(P, \leq)$, kde $P = \{0, a, b, 1\}$, zobrazenou na obrázku níže .



Obrázek 3: Uspořádaná množina

I. Zobrazení $A : P \to P$ je unární agregační funkcí na P tehdy a jen tehdy, když $A(0) = 0$, $A(1) = 1$, hodnoty $A(a)$ a $A(b)$ mohou být zvoleny libovolně.

II. Definujme zobrazení $B : P^2 \to P$ následovně $(x, y \in P)$:

$$B(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } x = 0 \text{ nebo } y = 0, \\ 1 & \text{jestliže } x = 1 \text{ a } y \neq 0 \text{ nebo } x \neq 0 \text{ a } y = 1 \\ x & \text{jestliže } x = y \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Pak B je binární agregační funkce na P.

2.2 Konjunktivní a disjunktivní klasifikace

Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$ a uspořádaná množina $(P, \leq, 0, 1)$. Pro danou agregační funkci $A : P^n \to P$ a $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in P^n$ označme

$$g_A(\mathbf{x}) = card\{i | x_i \geq A(\mathbf{x})\}$$

a

$$s_A(\mathbf{x}) = card\{i|x_i \leq A(\mathbf{x})\}.$$

Nechť $\mathcal{A}^n = \{A : P^n \to P; A$ je agregační funkce$\}$. Definujme dvě zobrazení $\gamma, \sigma : \mathcal{A}^n \to \{0, 1, \ldots, n\}$ vztahy

$$\gamma(A) = \inf\{g_A(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in P^n\},$$

$$\sigma(A) = \inf\{s_A(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in P^n\}.$$

Všimněme si, že $\sup\{g_A(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in P^n\} = \sup\{s_A(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in P^n\} = n$, což vyplývá z hraničních podmínek

$$g_A(0, \ldots, 0) = g_A(1, \ldots, 1) = s_A(0, \ldots, 0) = s_A(1, \ldots, 1)) = n$$

nezávisle na A.

Obě funkce γ a σ nám umožní zavést klasifikaci agregačních funkcí z $\mathcal{A}$.

Tvrzení 2.3 ([2], Proposition 1)**.** *$\mathcal{C}^n = \{\mathcal{C}_0^n, \ldots, \mathcal{C}_n^n\}$ a $\mathcal{D}^n = \{\mathcal{D}_0^n, \ldots, \mathcal{D}_n^n\}$, které jsou dány vztahem $\mathcal{C}_i^n = \gamma^{-1}(i)$ a $\mathcal{D}_i^n = \sigma^{-1}(i), i = 0, 1, \ldots, n$, tvoří rozklad množiny $\mathcal{A}^n$.*

Definice 2.4. Agregační funkce $A : P^n \to P$ je:

- *silně konjunktivní*, jestliže patří do třídy $\mathcal{C}_n^n$, značíme $A \in \mathcal{C}_s$,
- *slabě konjunktivní*, jestliže patří do tříd $\cup_{i=1}^{n-1}\mathcal{C}_i$, značíme $A \in \mathcal{C}_w$,
- *antikonjunktivní*, jestliže patří do třídy $\mathcal{C}_0$,
- *silně disjunktivní*, jestliže patří do třídy $\mathcal{D}_n^n$, značíme $A \in \mathcal{D}_s$,
- *slabě disjunktivní*, jestliže patří do tříd $\cup_{i=1}^{n-1}\mathcal{D}_i$, značíme $A \in \mathcal{D}_w$,
- *antidisjunktivní*, jestliže patří do třídy $\mathcal{D}_0$.

Poznámka. Na koncept konjunktivní a disjunktivní klasifikace lze nahlížet i jiným způsobem: mějme danou nějakou uspořádanou množinu $(P, \leq, 0, 1)$, pro kterou můžeme duálně definovat uspořádanou množinu $(Q, \preceq, 0_Q, 1_Q)$, kde $Q = P, 0_Q = 1, 1_Q = 0$ a pro $x, y \in Q, x \preceq y$ tehdy a jen tehdy, když $x \geq y$. Evidentně každá agregační funkce $A : P^n \to P$ může být také uvažována jako agregační funkce na Q. Jenže potom ale pro všechna $\mathbf{x} \in P^n = Q^n$ platí $g_A^P(\mathbf{x}) = s_A^Q(\mathbf{x}), s_A^P(\mathbf{x}) = g_A^Q(\mathbf{x})$, a tudíž $A \in \mathcal{C}_i^P(\mathcal{D}_i^P)$ v případě uspořádané množiny $(P, \leq, 0, 1)$ tehdy a jen tehdy, když $A \in \mathcal{D}_i^Q(\mathcal{C}_i^Q)$ v případě uspořádané množiny $(Q, \preceq, 0_Q, 1_Q)$.

Tvrzení 2.5 ([2], Proposition 2)**.** *Nechť $A : P^n \to P$ je agregační funkce. Potom platí $\gamma(A) + \sigma(A) \leq n + 1$, a jestliže P není řetězec, potom $\gamma(A) = n$ implikuje $\sigma(A) = 0$ a $\sigma(A) = n$ implikuje $\gamma(A) = 0$.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{x} \in P^n$ je takové, že množina $\{x_1, \ldots, x_n\}$ má mohutnost n, tj. všechny hodnoty $x_1, \ldots, x_n$ jsou navzájem různé. Dále označme $e_A(\mathbf{x}) = card\{i|x_i = A(\mathbf{x})\}$ a $in_A(\mathbf{x}) = card\{i|x_i \parallel A(\mathbf{x})\}$. Potom $e_A(\mathbf{x}) \in \{0, 1\}$ a platí $g_A(\mathbf{x}) + s_A(\mathbf{x}) + in_A(\mathbf{x}) = n + e_A(\mathbf{x})$. Tudíž $\gamma(A) + \sigma(A) \leq n + 1$. Jestliže $\gamma(A) = 0$ nebo $\sigma(A) = 0$, potom také nezbytně $e_A(\mathbf{x}) = 0$ pro nějaké $\mathbf{x} \in P^n$ a evidentně $\gamma(A) + \sigma(A) \leq n$.

Předpokládejme, že P není řetězec, tj. existují $a, b \in P$ takové, že $a \parallel b$ a že platí $\gamma(A) = n$. Z toho plyne, že pro libovolné $\mathbf{x} \in P^n$ platí $g_A(\mathbf{x}) = n$, tedy i $g_A(a, b, \ldots, b) = n$, tj. $A(a, b, \ldots, b) \leq a$ a $A(a, b, \ldots, b) \leq b$. Tudíž $A(a, b, \ldots, b) = c$ nemůže splňovat $c \geq a$ a $c \geq b$, tj. $s_A(a, b, \ldots, b) = 0 = \sigma(A)$. Zbytek důkazu probíhá obdobně. $\square$

Z daného tvrzení plyne důležitý důsledek.

Důsledek 2.6 ([2], Corollary 1)**.** *Silně konjunktivní (disjunktivní) agregační funkce A je nutně antidisjunktivní (antikonjunktivní).*

Všimněme si, že třída $\mathcal{A}$ všech agregačních funkcí na uspořádané množině P je sama o sobě ohraničená uspořádaná množina se zděděným uspořádáním $\leq$; $A_1 \leq A_2$ právě když $A_1(\mathbf{x}) \leq A_2(\mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x} \in P^n$. Největší prvek je zde funkce $A^* : P^n \to P$, kde

$$A^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } \mathbf{x} = (0, \ldots, 0), \\ 1 & \text{v ostatních případech,} \end{cases}$$

nejmenší prvek je zde funkce $A_* : P^n \to P$, kde

$$A_*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } \mathbf{x} = (1, \ldots, 1), \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Evidentně $A^* \in \mathcal{D}_s$ je silně disjunktivní a $A_* \in \mathcal{C}_s$ je silně konjunktivní. Navíc zobrazení $\gamma, \sigma : \mathcal{A} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ jsou monotónní; γ je klesající, $A_1 \leq A_2$ implikuje $\gamma(A_1) \geq \gamma(A_2)$, zatímco σ je rostoucí, $A_1 \leq A_2$ implikuje $\sigma(A_1) \leq \sigma(A_2)$.

2.3 Obecná klasifikace

Definice 2.7 ([2], Definition 2)**.** Nechť $A : P^n \to P$ je agregační funkce. Potom

1. A se nazývá *silně průměrová*, jestliže je slabě konjunktivní a současně i slabě disjunktivní, $A \in \mathcal{A}_s = \mathcal{C}_w \cap \mathcal{D}_w$;

2. A se nazývá *slabě průměrová*, jestliže je slabě konjunktivní nebo slabě disjunktivní, $A \in \mathcal{A}_w = \mathcal{C}_w \cup \mathcal{D}_w$.

Na základě této definice jsme schopni představit dvě obecné klasifikace agregačních funkcí na uspořádaných množinách.

Definice 2.8 ([2], Definition 3)**.** Nechť $(P, \leq, 0, 1)$ je uspořádaná množina.

1. Množina $\{\mathcal{C}_s, \mathcal{A}_w, \mathcal{D}_s, \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{D}_0\}$ se nazývá *slabá klasifikace* třídy $\mathcal{A}$ všech n-árních agregačních funkcí na dané uspořádané množině.

2. Množina $\{\mathcal{C}_s, \mathcal{A}_s, \mathcal{D}_s, \mathcal{C}_w \backslash \mathcal{D}_w, \mathcal{D}_w \backslash \mathcal{C}_w, \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{D}_0\}$ se nazývá *silná klasifikace* třídy $\mathcal{A}$ všech n-árních agregačních funkcí na dané uspořádané množině.

2.4 Klasifikace agregačních funkcí na řetězcích a svazech

Uvažujme případ $(P, \leq, 0, 1)$, kde $\leq$ je úplné uspořádání, tj. P je ohraničený řetězec. Pak nerovnost $A(\mathbf{x}) \geq x_i$ pro některé $i \in \{1, \ldots, n\}$ je ekvivalentní nerovnosti $A(\mathbf{x}) \geq Min(\mathbf{x})$. Obdobně jsou ekvivalentní i $A(\mathbf{x}) \leq Max(\mathbf{x})$ a $A(\mathbf{x}) \leq x_i$. Tudíž silná průměrová agregační funkce A je charakterizována díky nerovnosti $Min \leq A \leq Max$, která se shoduje s Dubois-Pradeovým přístupem k průměrovým agregačním funkcím. Navíc v tomto případě je rovnost $\gamma(A) = 0(\sigma(A) = 0)$ ekvivalentní s rovností $\sigma(A) = n(\gamma(A) = 0)$. Když to shrneme, dostáváme výsledek ověřující, že náš přístup rozšiřuje originální Dubois-Pradeovu klasifikaci.

Tvrzení 2.9 ([2], Proposition 3)**.** *Nechť* $(P, \leq, 0, 1)$ *je řetězec. Pak se silná a slabá klasifikace (n-árních) agregačních funkcí na* P *kryjí a obě odpovídají Dubois-Pradeově klasifikací* $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{P}, \mathcal{R})$.

Pokud budeme uvažovat libovolný ohraničený svaz $(S, \leq, 0, 1)$, tak situace bude úplně odlišná. Nejprve si uveďme třídu $\mathcal{A}_l$ všech svazově průměrových agregačních funkcí.

Definice 2.10. Agregační funkce $A : S^n \to S$ patří do třídy $\mathcal{A}_l$ tehdy a jen tehdy, když $Inf \leq A \leq Sup$ a $A \notin \{Inf, Sup\}$.

Tvrzení 2.11 ([2], Proposition 4)**.** *Nechť* $A : L^n \to L$ *je agregační funkce na svazu* $(L, \leq, 0, 1)$. *Jestliže je* A *silně průměrová, pak je* A *také svazově průměrová (tj.* $\mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{A}_l$*).*

Důkaz. Také u svazů platí, jestliže $x_i \leq A(\mathbf{x})$ pro nějaké $i \in \{1, \ldots, n\}$, pak $A(\mathbf{x}) \geq Inf(\mathbf{x})$ ($x_i \geq A(\mathbf{x})$ implikuje $A(\mathbf{x}) \leq Sup(\mathbf{x})$). Tudíž každá silně průměrová agregační funkce A je nezbytně také svazově průměrová.

□

V případě ohraničených svazů, které nejsou řetězce, dostáváme s pomocí předchozího tvrzení tři různé obecné klasifikace agregačních funkcí.

Definice 2.12. Nechť $(S, \leq, 0, 1)$ je ohraničený svaz, který není řetězcem. Nechť $\mathcal{A}$ je třída všech n-árních agregačních funkcí na daném svazu. Pak

1. množina $\{\mathcal{C}_s, \mathcal{D}_s, \mathcal{A}_w, \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{D}_0\}$ se bude nazývat *slabá klasifikace* všech n-árních agregačních funkcí;

2. množina $\{\mathcal{C}_s, \mathcal{D}_s, \mathcal{A}_s, \mathcal{C}_w \setminus \mathcal{A}_s, \mathcal{D}_w \setminus \mathcal{A}_s, \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{D}_0\}$ se bude nazývat *silná klasifikace* všech n-árních agregačních funkcí;

3. množina $\{\mathcal{C}_s, \mathcal{D}_s, \mathcal{A}_l, \mathcal{R}\}$, kde $\mathcal{R} = \mathcal{A} \setminus (\mathcal{C}_s \cup \mathcal{D}_s \cup \mathcal{A}_l)$ se bude nazývat *svazová klasifikace* všech n-árních agregačních funkcí.

Všimněme si, že každá silně konjunktivní agregační funkce A splňuje $A(\mathbf{x}) \leq x_i$ (pro každé i a pro každé $\mathbf{x}$), a tudíž $A \leq Inf$. Z toho plyne, že $\mathcal{C}_s \cap \mathcal{A}_l = \emptyset$. Podobně $\mathcal{D}_s \cap \mathcal{A}_l = \emptyset$.

3 Příklady klasifikací

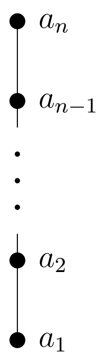
V této části práce se budeme zabývat některými příklady agregačních funkcí na ohraničených uspořádaných množinách, které budou patřit do různých tříd. Nejprve se zaměříme na agregační funkce na řetězcích a později i na svazech. Na závěr poté ukážeme příklad na uspořádané množině s největším a nejmenším prvkem, která není svazem.

Poznámka. Budeme uvádět příklady agregačních funkcí na dané uspořádané struktuře patřících do tříd $\mathcal{C}_k$, kde $k = 0, \ldots, m$ a m značí počet proměnných dané funkce. Agregační funkce, které patří do tříd $\mathcal{D}_k$, se budou řešit podobně jako u agregačních funkcí, které patří do tříd $\mathcal{C}_k$, jen namísto používání $g_A(\mathbf{x}) = card\{i|x_i \geq A(\mathbf{x})\}$ bychom používali $s_A(\mathbf{x}) = card\{i|x_i \leq A(\mathbf{x})\}$, kde A je nějaká m-ární agregační funkce.

3.1 Klasifikace agregačních funkcí na řetězcích

V této kapitole se nejprve zabýváme příklady ternárních agregačních funkcí na řetězcích, které pak později zobecníme na libovolné m-ární agregační funkce.

Nechť $R_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ je konečný n-prvkový řetězec, kde $n \geq 4$, jenž je vyobrazený na obrázku níže.



Obrázek 4: konečný n-prvkový řetězec

Příklad 3.1. Nechť $A_3 : R_n^3 \to R_n$ je funkce definována následovně:

$$A_3(x, y, z) = \inf\{x, y, z\}.$$

Dokážeme, že daná funkce je agregační funkce na řetězci R_n, která patří do třídy $\mathcal{C}_3$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce A_3 je agregační funkce. To znamená dokázat, že splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Po dosazení trojic (a_1, a_1, a_1) a (a_n, a_n, a_n) do předpisu funkce dostáváme $A_3(a_1, a_1, a_1) = a_1$ a $A_3(a_n, a_n, a_n) = a_n$. Jelikož inf je svazová operace, která je monotónní (viz. [3]), je i naše funkce A_3 monotónní. Tedy dostáváme, že funkce A_3 je agregační funkce.

Nyní dokážeme, že agregační funkce A_3 patří do třídy $\mathcal{C}_3$. Agregační funkce A_3 patří do $\mathcal{C}_3$, jestliže pro každou trojici (x, y, z), kde $x, y, z \in R_n$, platí $g_{A_3}(x, y, z) = 3$. Jinak řečeno, prvky x, y, z musí být větší nebo rovno než $A_3(x, y, z)$. V našem případě je podmínka splněna, neboť $\inf\{x, y, z\}$ je menší nebo rovno než prvky x, y, z.

Dle definice 2.4 je agregační funkce A_3 silně konjunktivní, tj. $A_3 \in \mathcal{C}_s$. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_1$ a je tedy slabě disjunktivní, tj. $A_3 \in \mathcal{D}_w$. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že A_3 je slabě průměrová, tj. $A_3 \in \mathcal{A}_w$. Z definice 2.8 plyne, že ve slabé klasifikaci patří do třídy $\mathcal{C}_s$ a $\mathcal{A}_w$. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{C}_s$ a $\mathcal{D}_w \setminus \mathcal{C}_w$.

Příklad 3.2. Nechť $A_2 : R_n^3 \to R_n$ je funkce definována následovně:

$$A_2(x, y, z) = \inf\{x, \sup\{y, z\}\}.$$

Dokážeme, že daná funkce je agregační funkce na řetězci R_n, která patří do třídy $\mathcal{C}_2$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce A_2 je agregační funkce. To znamená dokázat, že splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Po dosazení trojic (a_1, a_1, a_1) a (a_n, a_n, a_n) do předpisu funkce dostáváme $A_2(a_1, a_1, a_1) = a_1$ a $A_2(a_n, a_n, a_n) = a_n$. Jelikož inf a sup jsou svazové operace, které jsou monotónní (viz. [3]), je i naše funkce A_2 monotónní. Dohromady dostáváme, že funkce A_2 je agregační funkce.

Nyní dokážeme, že agregační funkce A_2 patří do třídy $\mathcal{C}_2$. Agregační funkce A_2 patří do $\mathcal{C}_2$, jestliže pro každou trojici (x, y, z), kde $x, y, z \in R_n$, platí $g_{A_2}(x, y, z) \geq 2$ a existují $x_0, y_0, z_0 \in R_n$ tak, že $g_{A_2}(x_0, y_0, z_0) = 2$. U naší funkce platí: pokud je x největší prvek z trojice, tak výsledná hodnota $A_2(x, y, z)$ bude rovna jednomu z prvků y nebo z a $g_{A_2}(x, y, z) \geq 2$. Pokud x bude nejmenší prvek z trojice, pak $A_2(x, y, z) = x$ a $g_{A_2}(x, y, z) = 3$. Poslední případ je, když bude platit $y \leq x \leq z$ nebo $z \leq x \leq y$. V tomto případě bude výsledná hodnota rovna opět x, a tudíž bude opět platit, že $g_{A_2}(x, y, z) \geq 2$. Příklad trojice, pro kterou platí $g_{A_2}(x, y, z) = 2$ je například (a_3, a_1, a_5), pro kterou platí $A_2(a_3, a_1, a_5) = a_3$ a tudíž $g_{A_2}(a_3, a_1, a_5) = 2$.

Dle definice 2.4 je agregační funkce A_2 slabě konjunktivní, tj. $A_2 \in \mathcal{C}_w$. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_1$ a je tedy slabě disjunktivní, tj. $A_2 \in \mathcal{D}_w$. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že A_2 je silně průměrová, tj. $A_2 \in \mathcal{A}_s$. Z definice 2.8 plyne, že ve slabé klasifikaci nepatří do žádné třídy. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{A}_s$.

Příklad 3.3. Nechť $A_1 : R_n^3 \to R_n$ je funkce definována následovně:

$$A_1(x, y, z) = z.$$

Dokážeme, že daná funkce je agregační funkce na řetězci R_n, která patří do třídy $\mathcal{C}_1$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce A_1 je agregační funkce. To znamená dokázat, že splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Po dosazení trojic (a_1, a_1, a_1) a (a_n, a_n, a_n) do předpisu funkce dostáváme $A_2(a_1, a_1, a_1) = a_1$ a $A_2(a_n, a_n, a_n) = a_n$. Jestliže platí $(x_1, y_1, z_1) \leq (x_2, y_2, z_2)$, pak platí i $A_1(x_1, y_1, z_1) = z_1 \leq A_1(x_2, y_2, z_2) = z_2$. Tudíž naše funkce je monotónní a dostáváme výsledek, že funkce A_1 je agregační funkce.

Agregační funkce A_1 patří do $\mathcal{C}_1$, jestliže pro každou trojici (x, y, z), kde $x, y, z \in R_n$, platí $g_{A_1}(x, y, z) \geq 1$ a existují $x_0, y_0, z_0 \in R_n$ tak, že $g_{A_1}(x_0, y_0, z_0) = 1$. To je ale splněno, neboť díky podmínce $A_1(x, y, z) = z$ bude vždy minimálně prvek z větší nebo rovno než $A_1(x, y, z)$. Příklad trojice, pro kterou platí $g_{A_1}(x, y, z) = 1$ je například (a_2, a_2, a_3), pro kterou platí $A_1(a_2, a_2, a_3) = a_3$ a $g_{A_1}(a_2, a_2, a_3) = 1$.

Dle definice 2.4 je agregační funkce A_1 slabě konjunktivní, tj. $A_1 \in \mathcal{C}_w$. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_1$ a je tedy slabě disjunktivní, tj. $A_1 \in \mathcal{D}_w$. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že A_1 je silně průměrová, tj. $A_1 \in \mathcal{A}_s$. Z definice 2.8 plyne, že ve slabé klasifikaci nepatří do žádné třídy. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{A}_s$.

Příklad 3.4. Nechť $A_0 : R_n^3 \to R_n$ je funkce definována následovně:

$$A_0(x,y,z) = \begin{cases} a_1 & \text{jestliže } (x,y,z) = (a_1,a_1,a_1) \\ a_n & \text{jestliže } (x,y,z) = (a_n,a_n,a_n) \\ a_{i+1} & \text{jestliže } z = a_i, \text{ kde } i = 1,\dots,n-2 \\ & \text{a } (x,y,z) \neq (a_1,a_1,a_1) \\ a_{n-1} & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Dokážeme, že daná funkce je agregační funkce na řetězci R_n, která patří do třídy $\mathcal{C}_0$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce A_0 je agregační funkce. To znamená dokázat, že splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Hraniční podmínky jsou zadány přímo v předpisu funkce. U dalších podmínek závisí funkční hodnota funkce A_0 na posledním prvku trojice (x,y,z). Pokud je tedy $z = a_i$ pro $i = 1,\dots,n-2$, pak $A_0(x,y,z) = a_{i+1}$. A pokud je $z = a_{n-1}$ nebo $z = a_n$, pak $A_0(x,y,z) = a_{n-1}$ (jediná výjimka je $(x,y,z) = (a_n,a_n,a_n)$). Z toho plyne, že pokud $(x_1,y_1,z_1) \leq (x_2,y_2,z_2)$ pak i $A_0(x_1,y_1,z_1) \leq A_0(x_2,y_2,z_2)$. Tudíž funkce A_0 je monotónní a dohromady dostáváme, že je to agregační funkce.

Agregační funkce A_0 bude patřit do třídy $\mathcal{C}_0$, jestliže najdeme trojici (x,y,z), kde $x,y,z \in R_n$, takovou, pro kterou platí $g_{A_0}(x,y,z) = 0$. Příklad takové trojice může být (a_1,a_1,a_{n-2}), pro kterou platí $A_0(a_1,a_1,a_{n-2}) = a_{n-1}$ a $g_{A_0}(a_1,a_1,a_{n-2}) = 0$.

Dle definice 2.4 je agregační funkce A_0 antikonjunktivní. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_1$ a je tedy slabě disjunktivní, tj. $A_0 \in \mathcal{D}_w$. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že A_0 je slabě průměrová, tj. $A_0 \in \mathcal{A}_w$. Z definice 2.8 plyne, že ve slabé klasifikaci patří do třídy $\mathcal{A}_w$. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{D}_w \setminus \mathcal{C}_w$.

V předchozích příkladech jsme ukázali příklady ternárních agregačních funkcí na n-prvkovém řetězci patřící do různých tříd. Nyní se pokusíme dané příklady zobecnit na libovolné m-ární agregační funkce, kde $m \in \mathbb{N}$ a $m \geq 4$.

Příklad 3.5. Nechť $B_m : R_n^m \to R_n$ je funkce definována následovně:

$$B_m(x_1, \ldots, x_m) = \inf\{x_1, \ldots, x_m\}.$$

Dokážeme, že daná funkce je agregační funkce na řetězci R_n, která patří do třídy $\mathcal{C}_m$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce B_m je agregační funkce. To znamená dokázat, že funkce B_m splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Po dosazení $(a_1, \ldots, a_1)$ dostáváme $B_m(a_1, \ldots, a_1) = a_1$. Po dosazení $(a_n, \ldots, a_n)$ dostáváme $B_m(a_n, \ldots, a_n) = a_n$. Jelikož inf je svazová operace, která je monotónní (viz. [3]), je i naše funkce B_m monotónní. Dohromady dostáváme, že funkce B_m je agregační funkce.

Nyní dokážeme, že agregační funkce B_m patří do třídy $\mathcal{C}_m$. Daná funkce patří do $\mathcal{C}_m$, jestliže pro každou m-tici $(x_1, \ldots, x_m)$, kde $x_1, \ldots, x_m \in R_n$, platí $g_{B_m}(x_1, \ldots, x_m) = m$. Jinak řečeno, všechny prvky dané m-tice musí být větší nebo rovno než $B_m(x_1, \ldots, x_m)$. V našem případě je podmínka splněna, neboť $\inf\{x_1, \ldots, x_m\}$ je menší nebo rovno než všechny prvky dané m-tice.

Dle definice 2.4 je agregační funkce B_m silně konjunktivní, tj. $B_m \in \mathcal{C}_s$. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_1$ a je tedy slabě disjunktivní, tj. $B_m \in \mathcal{D}_w$. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že B_m je slabě průměrová, tj. $B_m \in \mathcal{A}_w$. Z definice 2.8 plyne, že ve slabé klasifikaci patří do tříd $\mathcal{C}_s$ a $\mathcal{A}_w$. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{C}_s$ a $\mathcal{D}_w \setminus \mathcal{C}_w$.

Příklad 3.6. Nechť $B_k : R_n^m \to R_n$ je funkce definována následovně:

$$B_k(x_1, \ldots, x_m) = \inf\{x_1, \ldots, x_{k-1}, \sup\{x_k, \ldots, x_m\}\}.$$

Dokážeme, že daná funkce je agregační funkce na řetězci R_n, která patří do třídy $\mathcal{C}_k$, kde $k = 2, \ldots, m-1$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce B_k je agregační funkce. To znamená dokázat, že splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Po dosazení

$(a_1, \ldots, a_1)$ dostáváme $B_k(a_1, \ldots, a_1) = a_1$. Po dosazení $(a_n, \ldots, a_n)$ pak dostáváme $B_k(a_n, \ldots, a_n) = a_n$. Jelikož inf a sup jsou svazové operace, které jsou monotónní (viz. [3]), je i naše funkce B_k monotónní. Dohromady tedy dostáváme, že funkce B_k je agregační funkce.

Nyní dokážeme, že agregační funkce B_k patří do třídy $\mathcal{C}_k$. Daná funkce patří do $\mathcal{C}_k$, jestliže pro každou m-tici $(x_1, \ldots, x_m)$, kde $x_1, \ldots, x_m \in R_n$, platí $g_{B_k}(x_1, \ldots, x_m) \geq k$ a existují $y_1, \ldots, y_m \in R_n$, tak že $g_{B_k}(y_1, \ldots, y_m) = k$. Z předpisu funkce je zřejmé, že výsledná funkční hodnota je rovna nejmenšímu prvku z množiny $\{x_1, \ldots, x_{k-1}, \sup\{x_k, \ldots, x_m\}\}$, tj. $B_k(x_1, \ldots, x_m)$ bude menší nebo rovno než všechny prvky z dané množiny. Z toho plyne, že $g_{B_k}(x_1, \ldots, x_m) \geq k$.

Příklad nějaké m-tice, pro kterou platí $g_{B_k}(x_1, \ldots, x_m) = k$, je například $(a_2, \ldots, a_2, a_1, \ldots, a_1)$, kde a_2 se zde vyskytuje k-krát. Z definice funkce platí, že $B_k(a_2, \ldots, a_2, a_1, \ldots, a_1) = a_2$, a tedy $g_{B_k}(a_2, \ldots, a_2, a_1, \ldots, a_1) = k$.

Dle definice 2.4 je agregační funkce B_k, pro $k = 2, \ldots, m-1$, slabě konjunktivní, tj. $B_k \in \mathcal{C}_w$. Dále se dá zjistit, že je také slabě disjunktivní, tj. $B_k \in \mathcal{D}_w$. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že B_k je silně průměrová, tj. $B_k \in \mathcal{A}_s$. Z definice 2.8 plyne, že ve slabé klasifikaci nepatří do žádné třídy. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{A}_s$.

Příklad 3.7. Nechť $B_1 : R_n^m \to R_n$ je funkce definována následovně:

$$B_1(x_1, \ldots, x_m) = x_m.$$

Dokážeme, že daná funkce je agregační funkce na řetězci R_n, která patří do třídy $\mathcal{C}_1$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce B_1 je agregační funkce. To znamená dokázat, že splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Po dosazení $(a_1, \ldots, a_1)$ dostáváme $B_1(a_1, \ldots, a_1) = a_1$. Po dosazení $(a_n, \ldots, a_n)$ pak dostáváme $B_1(a_n, \ldots, a_n) = a_n$. Jestliže platí $(x_1, \ldots, x_m) \leq (y_1, \ldots, y_m)$ (tzn. $x_1 \leq y_1, \ldots, x_m \leq y_m$), pak z předpisu funkce je vidět, že bude platit také $B_1(x_1, \ldots, x_m) = x_1 \leq B_1(y_1, \ldots, y_m) = y_m$. A tedy naše funkce je monotónní a dohromady dostáváme, že naše funkce B_1 je agregační funkce.

Nyní dokážeme, že agregační funkce B_1 patří do třídy $\mathcal{C}_1$. Daná funkce patří do $\mathcal{C}_1$, jestliže pro každou m-tici $(x_1, \ldots, x_m)$, kde $x_1, \ldots, x_m \in R_n$, platí $g_{B_1}(x_1, \dots, x_m) \geq 1$ a existují $y_1, \dots, y_m \in R_n$, že $g_{B_1}(y_1, \dots, y_m) = 1$. Což platí, protože díky $B_1(x_1, \dots, x_m) = x_m$ bude vždy minimálně prvek x_m větší nebo rovno než $B_1(x_1, \dots, x_m)$.

Příklad m-tice, pro kterou platí $g_{B_1}(x_1, \dots, x_m) = 1$, může být například $(a_2, \dots, a_2, a_6)$. Platí $B_1(a_2, \dots, a_2, a_6) = a_6$, a tedy $g_{B_1}(a_2, \dots, a_2, a_6) = 1$.

Dle definice 2.4 je agregační funkce B_1 slabě konjunktivní, tj. $B_1 \in \mathcal{C}_w$. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_1$ a je tedy slabě disjunktivní, tj. $B_1 \in \mathcal{D}_w$. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že B_1 je silně průměrová, tj. $B_1 \in \mathcal{A}_s$. Z definice 2.8 plyne, že ve slabé klasifikaci nepatří do žádné třídy. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{A}_s$.

Příklad 3.8. Nechť $B_0 : R_n^m \to R_n$ je funkce definována následovně:

$$B_0(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} a_1 & \text{jestliže } (x_1, \dots, x_m) = (a_1, \dots, a_1) \\ a_n & \text{jestliže } (x_1, \dots, x_m) = (a_n, \dots, a_n) \\ a_{i+1} & \text{jestliže } x_m = a_i, \text{ kde } i = 1, \dots, n-2 \\ & \text{a } (x_1, \dots, x_m) \neq (a_1, \dots a_1) \\ a_{n-1} & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Dokážeme, že daná funkce je agregační funkce na řetězci R_n, která patří do třídy $\mathcal{C}_0$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce B_0 je agregační funkce. To znamená dokázat, že splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Z předpisu funkce je zřejmé, že hraniční podmínky jsou splněny. U zbylých podmínek závisí funkční hodnota funkce na posledním prvku dané m-tice $(x_1, \dots, x_m)$. Pokud je tedy $x_m = a_i$ pro $i = 1, \dots, n-2$, pak $B_0(x_1, \dots, x_m) = a_{i+1}$. Pokud je $x_m = a_{n-1}$ nebo $x_m = a_n$, pak $B_0(x_1, \dots, x_m) = a_{n-1}$ (jediná výjimka nastává u $(x_1, \dots, x_m) = (a_n, \dots, a_n)$). Z toho nám tedy plyne, že pokud $(x_1, \dots, x_m) \leq (y_1, \dots, y_m)$, pak také $B_0(x_1, \dots, x_m) \leq B_0(y_1, \dots, y_m)$. Dohromady tedy dostáváme, že funkce B_0 je agregační funkce.

Agregační funkce B_0 bude patřit do třídy $\mathcal{C}_0$, jestliže najdeme alespoň jednu m-tici $(x_1, \dots, x_m)$, kde $x_1, \dots, x_m \in R_n$, takovou, pro kterou platí $g_{B_0}(x_1, \dots, x_m) = 0$. To může být například taková m-tice $(x_1, \dots, x_m)$, kde $x_1, \dots, x_{m-1}$ je menší nebo rovno než x_m a navíc $x_m \in \{a_1, \dots, a_{n-2}\}$. Pak budeme mít zaručeno, že bude platit $g_{B_0}(x_1, \dots, x_m) = 0$. Na konkrétním případě to může být například m-tice $(a_1, \dots, a_1, a_{n-2})$, pro kterou platí $B_0(a_1, \dots, a_1, a_{n-2}) = a_{n-1}$, a tudíž $g_{B_0}(a_1, \dots, a_1, a_{n-2}) = 0$.

Dle definice 2.4 je agregační funkce B_0 antikonjunktivní. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_1$ a je tedy slabě disjunktivní, tj. $B_0 \in \mathcal{D}_w$. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že B_0 je slabě průměrová, tj. $B_0 \in \mathcal{A}_w$. Z definice 2.8 plyne, že ve slabé klasifikaci patří do třídy $\mathcal{A}_w$. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{D}_w \setminus \mathcal{C}_w$.

3.2 Klasifikace agregačních funkcí na svazech

V této sekci si ukážeme příklady m-árních agregačních funkcí na svazech. Nechť tedy S_n je libovolný n-prvkový svaz takový, že v něm existují minimálně dva prvky $a, b \in S_n$ takové, že $a \parallel b$ (tj. a a b jsou nesrovnatelné).

Příklad 3.9. Nechť $F_m : S_n^m \to S_n$ je funkce definována následovně:

$$F_m(x_1, \dots, x_m) = \inf\{x_1, \dots, x_m\}.$$

Dokážeme, že daná funkce je agregační funkce na svazu S_n, která patří do třídy $\mathcal{C}_m$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce F_m je agregační funkce. To znamená dokázat, že funkce splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Po dosazení $(0, \dots, 0)$ dostáváme $F_m(0, \dots, 0) = 0$. Po dosazení $(1, \dots, 1)$ dostaneme $F_m(1, \dots, 1) = 1$. Jelikož inf je svazová operace, která je monotónní (viz. [3]), je i naše funkce F_m monotónní. Dohromady dostáváme, že funkce F_m je agregační funkce.

Nyní dokážeme, že agregační funkce F_m patří do třídy $\mathcal{C}_m$. Daná funkce patří do $\mathcal{C}_m$, jestliže pro každou m-tici $(x_1, \dots, x_m)$, kde $x_1, \dots, x_m \in S_n$, platí $g_{F_m}(x_1, \dots, x_m) = m$. Tato podmínka je splněna pro všechny m-tice, neboť $\inf\{x_1, \dots, x_m\}$ je menší nebo rovno než všechny prvky dané m-tice.

Dle definice 2.4 je agregační funkce F_m silně konjunktivní, tj. $F_m \in \mathcal{C}_s$. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_0$ a je tedy antidisjunktivní. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že F_m není ani slabě ani silně průměrová. Z definice 2.10 zjišťujeme, že agregační funkce F_m není svazově průměrová. Z definice 2.12 plyne, že ve slabé klasifikaci patří do třídy $\mathcal{C}_s$. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{C}_s$. Ve svazové klasifikaci patří do třídy $\mathcal{C}_s$.

Příklad 3.10. Nechť $F_{m-1} : S_n^m \to S_n$ je funkce definována následovně:

$$F_{m-1}(x_1, \ldots, x_m) = \inf\{x_1, \ldots, x_{m-1}\}.$$

Dokážeme, že daná funkce je agregační funkce na svazu S_n, která patří do třídy $\mathcal{C}_{m-1}$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce F_{m-1} je agregační funkce. To znamená dokázat, že funkce splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Po dosazení $(0, \ldots, 0)$ dostáváme $F_{m-1}(0, \ldots, 0) = 0$. Po dosazení $(1, \ldots, 1)$ dostaneme $F_{m-1}(1, \ldots, 1) = 1$. Jelikož inf je svazová operace, která je monotónní (viz. [3]), je i naše funkce F_{m-1} monotónní. Dohromady dostáváme, že funkce F_{m-1} je agregační funkce.

Nyní dokážeme, že agregační funkce F_{m-1} patří do třídy $\mathcal{C}_{m-1}$. Funkce patří do $\mathcal{C}_{m-1}$, jestliže pro každou m-tici $(x_1, \ldots, x_m)$, kde $x_1, \ldots, x_m \in S_n$, platí $g_{F_{m-1}}(x_1, \ldots, x_m) \geq m - 1$ a existují $y_1, \ldots, y_m \in S_n$ takové, že $g_{F_{m-1}}(y_1, \ldots, y_m) = m - 1$. Jelikož dle předpisu funkce hledáme nejmenší prvek z $m - 1$ prvků, tak nerovnost bude vždy splněna. Příklad m-tice, pro kterou bude platit rovnost, je například $(a, \ldots, a, 0)$, kde $a \in S_n$, $a \neq 0$. Platí $F_{m-1}(a, \ldots, a, 0) = a$, a tedy $g_{F_{m-1}}(a, \ldots, a, 0) = m - 1$.

Dle definice 2.4 je agregační funkce F_{m-1} slabě konjunktivní, tj. $F_{m-1} \in \mathcal{C}_w$. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_0$ a je tedy antidisjunktivní. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že F_{m-1} je slabě průměrová, tj. $F_{m-1} \in \mathcal{A}_w$. Z definice 2.10 zjišťujeme, že agregační funkce F_{m-1} je svazově průměrová. Z definice 2.12 plyne, že ve slabé klasifikaci patří do třídy $\mathcal{A}_w$. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{C}_w \setminus \mathcal{A}_s$. Ve svazové klasifikaci patří do třídy $\mathcal{A}_l$.

Příklad 3.11. Nechť $F_k : S_n^m \to S_n$ je funkce definována následovně:

$$F_k(x_1, \ldots, x_m) = \inf\{x_1, \ldots, x_k, \sup\{x_{k+1}, \ldots, x_m\}\}.$$

Dokážeme, že daná funkce je agregační funkce na svazu S_n, která patří do třídy $\mathcal{C}_k$, kde $k = 2, \ldots, m - 2$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce F_k je agregační funkce. To znamená dokázat, že splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Po dosazení $(0,\dots,0)$ dostáváme $F_k(0,\dots,0)=0$. Podobně je to u $(1,\dots,1)$, kde $F_k(1,\dots,1)=1$. Jelikož inf a sup jsou svazové operace, které jsou monotónní (viz. [3]), je i naše funkce F_k monotónní. A tedy je to agregační funkce.

Nyní dokážeme, že agregační funkce F_k patří do třídy $\mathcal{C}_k$. Daná funkce patří do třídy $\mathcal{C}_k$, jestliže pro každou m-tici $(x_1,\dots,x_m)$, kde $x_1,\dots,x_m \in S_n$, platí $g_{F_k}(x_1,\dots,x_m) \geq k$ a existují $y_1,\dots,y_m \in S_n$ takové, že platí $g_{F_k}(y_1,\dots,y_m)=k$. Z předpisu funkce je zřejmé, že výsledná hodnota bude nejmenší prvek z $k+1$ prvkové množiny, takže vždy bude minimálně k prvků větší nebo rovno než agregovaná hodnota. Zbývá tedy najít aspoň jednu m-tici, pro kterou $g_{F_k}(x_1,\dots,x_m)=k$. Příklad takové m-tice je například $(a\vee b,\dots,a\vee b,a,\dots,a,b)$, kde $a,b\in S_n$ jsou takové, že $a \parallel b$ a prvek $a\vee b$ se zde vyskytuje právě k-krát. Pak bude $F_k(a\vee b,\dots,a\vee b,a,\dots,a,b)=a\vee b$, a tedy rovnost bude splněna.

Dle definice 2.4 je agregační funkce F_k slabě konjunktivní, tj. $F_k\in\mathcal{C}_w$. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_0$ a je tedy antidisjunktivní. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že F_k je slabě průměrová, tj. $F_k\in\mathcal{A}_w$. Z definice 2.10 zjišťujeme, že agregační funkce F_k je svazově průměrová. Z definice 2.12 plyne, že ve slabé klasifikaci patří do třídy $\mathcal{A}_w$. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{C}_w\setminus\mathcal{A}_s$. Ve svazové klasifikaci patří do třídy $\mathcal{A}_l$.

Příklad 3.12. Nechť $F_1 : S_n^m \to S_n$ je funkce definována následovně:

$$F_1(x_1,\dots,x_m)=x_m.$$

Dokážeme, že daná funkce je agregační funkce na svazu S_n, která patří do třídy $\mathcal{C}_1$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce F_1 je agregační funkce. To znamená dokázat, že splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Po dosazení $(0,\dots,0)$ a $(1,\dots,1)$ dostaneme $F_1(0,\dots,0)=0$ a $F_1(1,\dots,1)=1$. Jestliže platí $(x_1,\dots,x_m)\leq(y_1,\dots,y_m)$ (tzn. $x_1\leq y_1,\dots,x_m\leq y_m$), pak bude určitě platit také $F_1(x_1,\dots,x_m)=x_m\leq F_1(y_1,\dots,y_m)=y_m$. Tedy naše funkce je monotónní a dostáváme, že funkce F_1 je agregační funkce.

Nyní dokážeme, že agregační funkce F_1 patří do třídy $\mathcal{C}_1$. Daná funkce patří do $\mathcal{C}_1$, jestliže pro každou m-tici $(x_1, \dots, x_m)$, kde $x_1, \dots, x_m \in S_n$, platí $g_{F_1}(x_1, \dots, x_m) \geq 1$ a existují $y_1, \dots, y_m \in S_n$, že $g_{F_1}(y_1, \dots, y_m) = 1$. Což platí, protože díky $F_1(x_1, \dots, x_m) = x_m$ bude vždy minimálně prvek x_m větší nebo rovno než $F_1(x_1, \dots, x_m)$. Příklad m-tice, pro kterou platí $g_{F_1}(x_1, \dots, x_m) = 1$ je například $(0, \dots, 0, a)$ kde $a \neq 0$.

Dle definice 2.4 je agregační funkce F_1 slabě konjunktivní, tj. $F_1 \in \mathcal{C}_w$. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_1$ a je tedy slabě disjunktivní, tj. $F_1 \in \mathcal{D}_w$. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že F_1 je silně průměrová, tj. $F_1 \in \mathcal{A}_s$. Z tvrzení 2.9 (na straně 14) plyne, že funkce F_1 je svazově průměrová, tj. $F_1 \in \mathcal{A}_l$. Z definice 2.12 plyne, že ve slabé klasifikaci nepatří do žádné třídy. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{A}_s$. Ve svazové klasifikaci patří do třídy $\mathcal{A}_l$.

Příklad 3.13. Nechť $F_0 : S_n^m \to S_n$ je funkce definována následovně:

$$F_0(x_1, \dots, x_m) = \sup\{x_1, \dots, x_m\}.$$

Dokážeme, že daná funkce je agregační funkce na svazu S_n, která patří do třídy $\mathcal{C}_0$.

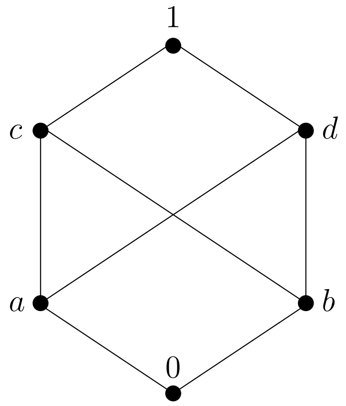
Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce F_0 je agregační funkce. To znamená dokázat, že funkce splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Po dosazení $(0, \dots, 0)$ a $(1, \dots, 1)$ dostaneme $F_1(0, \dots, 0) = 0$ a $F_1(1, \dots, 1) = 1$. Jelikož sup je svazová operace, která je monotónní (viz. [3]), je i naše funkce F_0 monotónní. Dostáváme tedy, že funkce F_0 je agregační funkce.

Nyní dokážeme, že agregační funkce F_0 patří do třídy $\mathcal{C}_0$. Funkce patří do třídy $\mathcal{C}_0$, jestliže existuje m-tice $(x_1, \dots, x_m)$, kde $x_1, \dots, x_m \in S_n$, pro kterou platí $g_{F_0}(x_1, \dots, x_m) = 0$. Jako příklad takové m-tice je například $(a, \dots, a, b)$, kde $a, b \in S_n$, pro které platí, že $a \parallel b$ (tzn. že jsou nesrovnatelné). Výsledná hodnota $F_0(a, \dots, a, b)$ pak bude rovna prvku většímu než jsou prvky a a b a tudíž bude platit, že $g_{F_0}(a, \dots, a, b) = 0$.

Dle definice 2.4 je agregační funkce F_0 antikonjunktivní. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_m$ a je tedy silně disjunktivní, tj. $F_0 \in \mathcal{D}_s$. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že F_0 není ani silně a ani slabě průměrová. Z definice 2.10 zjišťujeme, že agregační funkce F_m není svazově průměrová. Z definice 2.12 plyne, že ve slabé klasifikaci patří do třídy $\mathcal{D}_s$. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{D}_s$. Ve svazové klasifikaci patří do třídy $\mathcal{D}_s$.

3.3 Příklad agregačních funkcí na uspořádané množině

Nyní si ukážeme příklady agregačních funkcí na uspořádané množině, která není svazem, patřících do různých tříd. Hlavní rozdíl bude v tom, že v předpisech funkcí nebudeme moci použít svazové operace inf a sup.



Obrázek 5: Uspořádaná množina, která není svazem

Nechť tedy máme uspořádanou množinu U, která je zobrazena na obrázku výše. Na této uspořádané množině definujeme ternární agregační funkce, které patří do různých tříd.

Příklad 3.14. Nechť $H_3 : U^3 \to U$ je funkce definována následovně:

$$H_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } (x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1) \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Dokážeme, že funkce H_3 je agregační funkce patřící do třídy $\mathcal{C}_3$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce H_3 je agregační funkce. To znamená dokázat, že funkce splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Už z předpisu funkce je zřejmé, že splňuje obě podmínky, tudíž je to agregační funkce.

Nyní dokážeme, že agregační funkce H_3 patří do třídy $\mathcal{C}_3$. Daná funkce patří do $\mathcal{C}_3$, jestliže pro každou trojici prvků (x_1, x_2, x_3), kde $x_1, x_2, x_3 \in U$, platí $g_{H_3}(x_1, x_2, x_3) = 3$. Z předpisu naší funkce je zřejmé, že tato podmínka je splněna pro každou trojici (x_1, x_2, x_3).

Dle definice 2.4 je agregační funkce H_3 silně konjunktivní, tj. $H_3 \in \mathcal{C}_s$. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_0$ a je tedy antidisjunktivní. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že H_3 není ani slabě a ani silně průměrová. Z definice 2.8 plyne, že ve slabé klasifikaci patří do třídy $\mathcal{C}_s$. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{C}_s$.

Příklad 3.15. Nechť $H_2 : U^3 \to U$ je funkce definována následovně:

$$H_2(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} p & \text{jestliže } (x_1, x_2, x_3) = (p, p, p), \text{ kde } p \in U, \\ q & \text{jestliže se v trojici dvakrát objeví } q, \text{ kde } q \in U, \\ r & \text{jestliže se v trojici objeví právě prvky } 0, r \text{ a } w, \\ & \text{kde } r \in \{a, b\} \text{ a } w \in \{c, d, 1\}, \\ s & \text{jestliže se v trojici vyskytují právě prvky } x, s, 1, \\ & \text{kde } x \in \{0, a, b\}, s \in \{c, d\}, \\ 0 & \text{jestliže se v trojici vyskytují právě prvky } a, b, 0, \\ b & \text{jestliže se v trojici vyskytují právě prvky } a, b, y, \\ & \text{kde } y \in \{c, d, 1\}, \\ b & \text{jestliže se v trojici vyskytují právě prvky } z, c, d, \\ & \text{kde } z \in \{0, a, b\}, \\ c & \text{jestliže se v trojici vyskytují právě prvky } c, d, 1. \end{cases}$$

Dokážeme, že funkce H_2 je agregační funkce patřící do třídy $\mathcal{C}_2$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce H_2 je agregační funkce. To znamená dokázat, že funkce splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Po dosazení $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ do předpisu funkce dostáváme $H_2(0, 0, 0) = 0$ a $H_2(1, 1, 1) = 1$. Po porovnání všech trojic mezi sebou jsme došli k závěru, že funkce H_2 je monotónní a dohromady tedy dostáváme, že je agregační funkce.

Nyní dokážeme, že agregační funkce H_2 patří do třídy $\mathcal{C}_2$. Daná funkce patří do třídy $\mathcal{C}_2$, jestliže pro každou trojici (x_1, x_2, x_3), kde $x_1, x_2, x_3 \in U$, platí $g_{H_2}(x_1, x_2, x_3) \geq 2$ a existují prvky $y_1, y_2, y_3 \in U$, pro které platí

$g_{H_2}(y_1, y_2, y_3) = 2$. Z podmínek v předpisu funkce je zřejmé, že podmínka $g_{H_2}(x_1, x_2, x_3) \geq 2$ je splněna pro všechny trojice, Příklad trojice, pro kterou platí $g_{H_2}(x_1, x_2, x_3) = 2$, je například (a, b, c), pro kterou platí $H_2(a, b, c) = a$.

Dle definice 2.4 je agregační funkce H_2 slabě konjunktivní, tj. $H_2 \in \mathcal{C}_w$. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_0$ a je tedy antidisjunktivní. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že H_2 je slabě průměrová, tj. $H_2 \in \mathcal{A}_w$. Z definice 2.8 plyne, že ve slabé klasifikaci patří do třídy $\mathcal{A}_w$. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{C}_w \setminus \mathcal{D}_w$.

Příklad 3.16. Nechť $H_1 : U^3 \to U$ je funkce definována následovně:

$$H_1(x_1, x_2, x_3) = x_2.$$

Dokážeme, že funkce H_1 je agregační funkce patřící do třídy $\mathcal{C}_1$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce H_1 je agregační funkce. To znamená dokázat, že funkce splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Po dosazení $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ do předpisu funkce dostáváme $H_1(0, 0, 0) = 0$ a $H_1(1, 1, 1) = 1$. Monotónnost je také splněna, neboť výsledná funkční hodnota závisí na prostředním prvku trojice. Dohromady dostáváme, že funkce H_1 je agregační funkce.

Nyní dokážeme, že agregační funkce H_1 patří do třídy $\mathcal{C}_1$. Daná funkce patří do třídy $\mathcal{C}_1$, jestliže pro každou trojici (x_1, x_2, x_3), kde $x_1, x_2, x_3 \in U$, platí $g_{H_1}(x_1, x_2, x_3) \geq 1$ a existují prvky $y_1, y_2, y_3 \in U$, pro které platí $g_{H_1}(y_1, y_2, y_3) = 1$. Z předpisu funkce je zřejmé, že podmínka $g_{H_1}(x_1, x_2) \geq 1$ je splněna pro všechny trojice, neboť vždy aspoň jeden prvek bude větší nebo rovno než výsledná funkční hodnota. Příklad trojice, pro kterou platí $g_{H_1}(x_1, x_2, x_3) = 1$, je například (a, c, a).

Dle definice 2.4 je agregační funkce H_1 slabě konjunktivní, tj. $H_1 \in \mathcal{C}_w$. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_1$ a je tedy slabě disjunktivní, tj. $H_1 \in \mathcal{D}_w$. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že H_1 je silně průměrová, tj. $H_1 \in \mathcal{A}_s$. Z definice 2.8 plyne, že ve slabé klasifikaci nepatří do žádné třídy. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{A}_s$.

Příklad 3.17. Nechť $H_0 : U^3 \to U$ je funkce definována následovně:

$$H_0(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0) \\ 1 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Dokážeme, že funkce H_0 je agregační funkce patřící do třídy $\mathcal{C}_0$.

Řešení: Nejprve dokážeme, že funkce H_0 je agregační funkce. To znamená dokázat, že funkce splňuje hraniční podmínky a monotónnost. Už z předpisu funkce je zřejmé, že splňuje obě podmínky, tudíž je to agregační funkce.

Nyní dokážeme, že agregační funkce H_0 patří do třídy $\mathcal{C}_0$. Daná funkce patří do $\mathcal{C}_0$, jestliže pro každou trojici prvků (x_1, x_2, x_3), kde $x_1, , x_2, x_3 \in U$, platí $g_{H_0}(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ a existují prvky $y_1, y_2, y_3 \in U$, pro které platí $g_{H_0}(y_1, y_2, y_3) = 0$. Z předpisu naší funkce je zřejmé, že příklad takové trojice splňující danou podmínku je například (a, b, c).

Dle definice 2.4 je agregační funkce H_0 antikonjunktivní. Dále se dá zjistit, že patří též do třídy $\mathcal{D}_3$ a je tedy silně disjunktivní, tj. $H_0 \in \mathcal{D}_s$. Z těchto dvou zjištění a z definice 2.7 dohromady dostáváme, že H_0 není ani silně a ani slabě průměrová. Z definice 2.8 plyne, že ve slabé klasifikaci patří do třídy $\mathcal{D}_s$. V silné klasifikaci patří do třídy $\mathcal{D}_s$.

3.3.1 Obecný postup hledání agregačních funkcí

Hledání agregační funkce na nějaké uspořádané množině, která není svazem, je v některých případech celkem složité, viz příklad 3.3. Při hledání nějaké n-ární agregační funkce na uspořádané množině patřící do třídy $\mathcal{C}_k$, kde $k = 0, \ldots, n$, může být náročné najít předpis funkce. Proto se pokusíme najít nějaký způsob, jak by se dala uspořádaná množina zjednodušit tak, aby nalezení agregační funkce na uspořádané množině bylo podstatně jednodušší.

Nechť $(P, \leq, 0, 1)$ je konečná uspořádaná množina. Vybereme množinu $R \subset P$ takovou, že $(R, \leq, 0, 1)$ je řetězec. Dále nechť $\varphi : P \to R$ je zobrazení dáno předpisem $\varphi(x) = a \; \forall x \in P$, kde a je největší prvek množiny $L(\{x\}) \cap R$, tj. a je největší prvek řetězce R, který je obsažen v dolním kuželu $L(\{x\})$ prvku x.

Lemma 3.18. *Zobrazení φ má následující vlastnosti:*

1. *φ zachovává uspořádání, tj. $\forall x, y \in P, x \leq y$ implikuje $\varphi(x) \leq \varphi(y)$*
2. *$\varphi(x) \leq x \; \forall x \in P$ a $\varphi(x) = x$, pokud $x \in R$.*

Důkaz. 1. Nechť $x, y \in P$ a označme $L(\{x\})$, $L(\{y\})$ dolní kužely daných prvků. Jestliže $x \leq y$, pak $L(\{x\}) \subseteq L(\{y\})$, z čehož plyne, že největší prvek průniku $L(\{x\}) \cap R$ bude menší nebo rovno než největší prvek průniku $L(\{y\}) \cap R$. Tedy bude platit $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

2. Nechť $x \in P$. Dle definice zobrazení φ je $\varphi(x)$ největší prvek z průniku $L(\{x\}) \cap R$, kde $L(\{x\})$ je dolní kužel prvku x. Pokud $x \in R$, pak největší prvek daného průniku je právě prvek x, a tedy $\varphi(x) = x$. Pokud $x \notin R$, pak největší prvek daného průniku bude určitě menší než x, a tedy $\varphi(x) < x$.

$\square$

Nechť $B : R^n \to R$ je agregační funkce na řetězci R. Dále definujme funkci $A : P^n \to P$, která je dána následujícím předpisem

$$A(x_1, \dots, x_n) = B(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$$

pro všechna $x_1, \dots, x_n \in P$.

Tvrzení 3.19. *Nechť $n \geq 1$ a $k \leq n$ jsou nezáporná čísla. Jestliže $B \in \mathcal{C}_k$ na řetězci R, pak funkce $A : P^n \to P$ definována*

$$A(x_1, \dots, x_n) = B(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$$

pro všechna $x_1, \dots, x_n \in P$, je agregační funkce na P patřící do třídy $\mathcal{C}_k$.

Důkaz. Nechť agregační funkce B na řetězci R patří do třídy $\mathcal{C}_k$, tj. pro všechny n-tice $(y_1, \dots, y_n) \in R^n$ platí $g_B(y_1, \dots, y_n) \geq k$ a existuje aspoň jedna n-tice, pro kterou bude platit rovnost. Jelikož zobrazení φ zobrazí prvky $x \in P$ na prvky $y \in R$ s vlastnostmi uvedenými v Lemmatu 3.17, pak také funkce $A(x_1, \dots, x_n) = B(y_1, \dots, y_n)$, kde $y_1 = \varphi(x_1), \dots, y_n = \varphi(x_n)$ a $y_1 \leq x_1, \dots, y_n \leq x_n$, bude splňovat $g_A(x_1, \dots, x_n) \geq k$. Musíme ještě dokázat, že existují prvky $x_1, \dots, x_n \in P$ tak, že $g_A(x_1, \dots, x_n) = k$. Víme ale, že pro agregační funkci B existují $y_1, \dots, y_n \in R$ takové, že $g_B(y_1, \dots, y_n) = k$. Jenže $y_1, \dots, y_n \in P$ (neboť $R \subset P$), tudíž nám stačí zvolit $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$ a podmínka $g_A(x_1, \dots, x_n) = k$ bude splněna. Tedy i agregační funkce A bude patřit do třídy $\mathcal{C}_k$.

$\square$

Poznámka. Kdybychom chtěli hledat agregační funkce na nějaké uspořádané množině, která není svazem, patřící do třídy $\mathcal{D}_k$, kde $k = 0, \dots, n$, tak zobrazení $\varphi : P^n \to R$ bude dáno předpisem $\varphi(x) = a \ \forall x \in P$, kde a je nejmenší prvek množiny $U(\{x\}) \cap R$, tj. a je nejmenší prvek řetězce R, který je obsažen v horním kuželu $U(\{x\})$ prvku x. Toto zobrazení bude stále zachovávat uspořádání a rozdíl bude jen v tom, že $\varphi(x) \geq x \ \forall x \in P$.

Závěr

Na začátku práce jsme si připomněli základní pojmy z teorie uspořádaných množin. Dále jsme definovali agregační funkce na uspořádaných množinách a uvedli jsme jejich klasifikace. V praktické části jsme uvedli některé příklady agregačních funkcí na řetězcích a ohraničených svazech patřících do různých tříd. Jako poslední jsme uvedli příklady agregačních funkcí na uspořádané ohraničené množině, aby jsme ukázali, jak složité je jejich hledání. Proto jsme uvedli obecný postup, který převedl problém nalezení agregační funkce na uspořádané množině patřící do nějaké třídy na nalezení agregační funkce na řetězci, který jsme vybrali z dané uspořádané množiny, patřící do stejné třídy.

Reference

[1] M. Grabishh, J.-L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap: *Aggregation Functions,* Cambridge University Press, New York, 2009

[2] M. Komorníková, R. Mesiar: *Aggregation functions on bounded partially ordered sets and their classification,* Fuzzy Sets and Systems 175(1), 2011, pp. 48-56

[3] I. Chajda, *Algebra III.*, VUP Olomouc, 1998