Posudek na bakalářskou práci práci **Ondřeje Balódyho**

Metody Runge-Kutta

Bakalářská práce se zabývá metodami Runge-Kutta sloužícími pro řešení počátečních úloh pro obyčejné diferenciální rovnice. Práce je rozdělena do 5 kapitol a má 69 stran.

V úvodu autor uvádí cíl práce a seznamuje čtenáře s obsahem práce. V přípravné kapitole jsou zavedeny základní pojmy z oblasti diferenciálních rovnic. Ve druhé kapitole se autor speciálně zabývá obyčejnými rovnicemi prvního řádu. Ve třetí kapitole je popsána analytická metoda řešení diferenciálních rovnic rozvojem do Taylorovy řady pomocí postupného derivování. Ve čtvrté kapitole autor zavádí obecnou jednokrokovou metodu a zabývá se konvergencí a velikostí lokální chyby Eulerovy explicitní metody. V páté kapitole na to navazuje studiem odhadů velikosti zejména lokální chyby metod Runge-Kutta řádů 2 až 4. V závěru student hodnotí naplnění cílů práce.

K práci mám tyto dotazy a připomínky (připomínky zpravidla začínají číslem stránky, horní resp. dolní index u čísla stránky pak značí, kolikátého řádku shora resp. zdola se připomínka či dotaz týká):

- 8 - Z hlediska návaznosti textu by bylo vhodnější umístit definici 1.5 až za odstavec, který po ní následuje resp. až za definici 1.6.
- 8_8 - Zdůvodnění, že rovnice n-tého řádu je převáděna na systém rovnic prvního řádu proto, že další text bude věnován řešení jedné rovnice prvního řádu postrádá logiku, pokud není řečeno, jak to spolu souvisí.
- 10 - Definice 1.7 je sice správně, ale vhodnější by bylo nejdříve zadefinovat obecnou síť a poté zadefinovat ekvidistantní síť vztahem z první části poznámky 1.1.
- 12 - Proč znovu speciálně definujete Cauchyovu úlohu (definice 2.1) a pojem řešení (definice 2.2) pro úlohu prvního řádu, když tyto tyto pojmy už byly definovány dříve obecněji (viz. definice 1.5 a 1.4)? Pochopil bych to v případě opačného pořadí definic pojmů (napřed speciální, pak obecné), takto to je jen plýtvání místem.
- $13-14$ - Příklady různých typů diferenciálních rovnic jsou zbytečné, při numerickém řešení to není nutné zohledňovat.
- 15^6 - Mimo to, že celý příklad 2.2 považuji vzhledem k tématu práce za nadbytečný, tak mi v něm chybí konkrétní hodnota Lipschtitzovy konstanty K, pro kterou je Lipschitzova podmínka splněna.
- 17 - Obrázek je jen mrhání místem, není na něm vidět nic zajímavého.
- 22^2 - Co je to hodnota neurčitého integrálu?

- 22^2 - Ve světle metody Taylorových rozvojů právě představené v předchozí kapitole, není zcela přesné argumentovat složitými integrály při hledání přesného řešení, vždyť v této metodě se žádné integrály nepoužívají.
- 22^5 - Numerická matematika se zdaleka neomezuje jen na řešení diferenciálních rovnic.
- 22 - Definice 4.1 spolu míchá podmínky existence jednoznačnosti řešení (1) a (2) a definici přírůstkové funkce F, což je zbytečné. Už jen vzhledem k praktickému použití jednokrokových metod je také nevhodné se omezovat pouze na ekvidistantní síť.
- 23_7 - Princip jednokrokové metody jsme se nedozvědděli, neboť to, že chceme numericky řešit nějakou úlohu, není princip.
- 24 - Byť vzorce definující lokální a globální chybu v definici 4.4 jsou správně, slovní vysvětlení obou těchto pojmů jsou dosti nepřesná a zavádějící.
- 27^3 - Zaokrouhlovací chyby vznikají i při jiných operacích než jen při násobení a dělení.
- 27^8 - Kde se zabýváte konvergencí Eulerovy metody? Kromě toho, že bez nějakého zdůvodnění či odkazu na literaturu uvádíte, že metoda je konvergentní, jsem zde nic takového nenašel.
- 30_7 - Tak kreslíte řešení diferenciální rovnice nebo funkci? Eulerova metoda pomáhá něco kreslit?
- 30_2 - Proč zadáváte bod x0 i v parametru `PP`, přestože už byl zadán v parametru `int`.
- 31^2 - V popisu metody se mluví o vykreslení přesného řešení, v programu nic takového není, je v něm pouze vypočátáno další numerické řešení funkcí `ode45`.
- 31 - Domnívám se, že by výpočetní funkce neměla přímo kreslit řešení, to by mělo být ponecháno na uživateli této funkce.
- 31_2 - Není upřesněno, jakou chybu je u Runge-Kutta metod složité určovat ve srovnání s Eulerovou metodou a proč to ztěžuje jejich praktické nasazení.
- 32 - Formulace prvního a druhého odstavce je velmi neobratná, čtenář se musí velmi snažit, aby pochopil, co chce autor říci.
- 32^{10} - Opravdu se u všech Runge-Kutta metod jedná o aproximaci parabolou? Můžete to blíže vysvětlit? Co je y v zápisu bodu L?
- 32_2 - Kde je vysvětlen význam `m`? V celé práci jsem to nenašel.
- 32 - Nikde neuvádíte, jakými metodami Runge-Kutta se zabýváte? Zda explicitními nebo implicitními.

- 33^5 - První souvětí za vzorcem (5.3) nedává smysl, skládá se ze dvou významově nesouvisejících částí.
- 33^{12} - Jak se může l rovnat m, když l je index probíhající čísla 1 až M? Jak souvisí řád metody s rovností $l = m$? Tytéž problémy se vícekrát opakují ve zbytku práce, dál už na ně neupozrňuji jmenovitě.
- 33_4 - Co je to y_k''? y_k je hodnota přibližného řešení v bodě x_k, tj. číslo, jak lze číslo derivovat?
- 33_1 - U členu $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ chybí f^2.
- 34 - Jak plyne rekurentní vztah (5.4) z předchozích vyjádření?
- 34^9 - Nemá být ve vzorci pro Q uvedeno f_k místo f? Vyvětlete proč.
- 34^{10} - Proč a k čemu jsou první čtyři členy dostatečné?
- 36_{5-10} - Odkud se tyto vzorce vzaly?
- 36^{12} - Jak z výše uvedených vzorců plyne rekurence, když to nikde nemáte dokázáno?
- 38^8 - Kde se vzal obecný předpis pro α_i a následně Q_i (totéž na straně 44)?
- $52 - 56$ - Je zbytečné vzorce do práce přepisovat, když nejsou řádně propočítány. Takto slouží jen jako výplň.
- 60 - Jak z obrázku 6 poznáte, že metoda čtvrtého řádu je významně lepší než metody nižších řádů, když žádné srovnání výsledků neprovádíte?
- $63 - 64$ - Jak se od určování γ_m přeskočilo k odhadu $Q^2 f$? S jakou metodou se zde pracuje? Odkud se vzal vzorec (5.22)? Jak je odhdanuto Qf?
- 68^8 - Poznámka o tom, že se každá rovnice sytému rovnic řeší zvlášť je trochu zavádějící, je třeba to popsat přesněji.

Celkově práci považuji za nevydařenou. První čtyři kapitoly obsahují kromě většího množství chyb, nepřesností a špatných formulací také některé nadbytečné pasáže, které se přímo nevztahují k hlavnímu tématu práce a pouze zbytečně zvětšují její rozsah. Stěžejní pátá kapitola je pak zcela nepodařená. Student si jako hlavní zdroj vybral nevhodnou a zastaralou (víc než 45 let starou) knihu [10], přestože v seznamu použité literatury má uvedeny i novější knihy (např. [11]), ve kterých je uvedená problematika zpracována mnohem lépe a úplněji. Ve zvolené knize jsou metody Runge-Kutta zpracovány nedostatečně a zavádějícím způsobem, spíše jen jako pomocná metoda pro nastartování vícekrokových metod. Student odtud zcela zbytečně převzal složité vzorce pro vyjádření lokální chyby metod Runge-Kutta včetně jejich stručného odvození. Přitom význam těchto vzorců je spíše teoretický, pro praktické použití metod nejsou až tak důležité, neboť získané odhady jsou příliš pesimistické a proto je nelze v praxi použít, pokud má být výpočet proveden efektivně. Navíc přepis odvození není zcela bez chyb, student vynechal podstatné komentáře a přidané komentáře jsou naopak spíš zavádějící, což nesvědčí o dobrém pochopení a zvládnutí problematiky.

Domnívám se, že kromě zbytečného natahování úvodních kapitol mohl student ušetřit prostor i v poslední kapitole a to tím, že by se omezil pouze na podrobnější a lépe propočítané odvození velikosti chyby pro metody řádu 2, pro které je to ještě poměrně schůdné. Pro ostatní metody mohl pouze uvést základní tvrzení o řádu metod a porovnat metody z hlediska velikosti lokální chyby. Místo toho se mohl věnovat jiným důležitým tématům používání metod Runge-Kutta, například praktickým odhadům velikosti lokální a globální chyby, zkoumání stability jednokrokových metod a automatické volbě velikosti kroku apod. Vzhledem k zaměření práce bych také očekával, že se v ní čtenář něco dozví aspoň o existenci implicitních metod Runge-Kutta, což se také nestalo.

Vzhledem k výše uvedeným závažným nedostatkům práci nedoporučuji k obhajobě a navrhuji hodnocení klasifikačním stupněm **neprospěl**.

V Olomouci dne 20. 5. 2011.

RNDr. Pavel Ženčák, Ph.D.
oponent