

Posudek na doktorskou disertační práci

Mgr. Lenky Rýparové

Geodesics and their mappings

Geodetické křivky a jejich zobrazení

V disertační práci Mgr. Lenky Rýparové je využita již rozpracovaná teorie geodetických zobrazení a její zobecnění na tzv. skoro geodetická zobrazení. Pracovní metodou pro řešení příslušných geometrických úvah je vyjádření nutných a postačujících podmínek zaručujících existenci geometrických objektů a jejich morfismů, zde difeomorfismů jisté třídy diferencovatelnosti, ve formě vhodného systému obyčejných diferenciálních rovnic Cauchyho typu. Na základě vět z teorie diferenciálních rovnic nebo jejich upravených variant se pak rozhoduje o řešitelnosti systému a případné jednoznačnosti při daných počátečních podmínkách. Vyšetřování geometrických pojmů se tedy děje převedením původně geometrického problému na sestavení vhodného systému obyčejných diferenciálních rovnic, který představuje nutné a postačující podmínky k řešení problému, a posléze jeho řešení jakožto Cauchyho úlohy za jistých požadavků kladených na stupeň diferencovatelnosti vstupních údajů. Pro autorku to znamenalo seznámit se postupně s teorií geodetických křivek na plochách, v Riemannových nebo pseudo-Riemannových prostorech, v prostorech s afinní konexí, dále s vyšetřováním existence takových difeomorfismů mezi dvěma prostory, které zobrazují geodetiky prvního prostoru na geodetiky, případně na geodetiky speciálního typu, nebo obecněji na skoro geodetiky druhého prostoru. V neposlední řadě pak byla potřeba určitá zkušenost s existencí řešení diferenciálních rovnic.

Autorka pracovala převážně samostatně, společně se školitelem kontrolovali dosažené výsledky a školitel určoval další postup. L. Rýparové spolu se školitelem se mj. podařilo revidovat již publikované úvahy a výsledky jiných autorů. Na sestrojených příkladech prokázali, že některé z nich jsou neplatné.

Předložená disertační práce je napsána v angličtině, má přiměřený rozsah, a to 89 stran včetně 10 stran referencí, je členěna do tří částí.

Kapitola I je koncipována jako přípravná. Je zde vysvětleno pojetí geodetik na varietě s afinní konexí, které se dobře osvědčuje při studiu geodetických zobrazení. Geodetika je pojata jako regulární křivka, podél níž existuje paralelní tečné vektorové pole; pole jejích tečných vektorů je obecně rekurentní. Jsou zde zmíněny geodetiky s kanonickým parametrem a připomenuty systémy diferenciálních rovnic, které je charakterizují. Jestliže složky afinní konexe jsou spojitě diferencovatelné, nebo splňují Lipschitzovu podmínku, řešení příslušného Cauchyho problému je jednoznačné, a tedy geometricky, bodem a směrem je určena jediná

geodetika na varietě. Jestliže složky afinní konexe jsou (pouze) spojitě funkce, rovnice mají zaručenu existenci řešení (věty Picardovy), v některých případech je jednoznačné, je zde také uveden příklad, ale jindy jednoznačné být *nemusí*. V kapitole je sestrojena rotační plocha, pro niž pevným bodem ve vybraném směru procházejí dvě různé geodetiky, dokonce nekonečně mnoho geodetik. Situace je nazývána geodetickou bifurkací. Dále jsou zde nalezeny bifurkace s uzavřenými geodetikami a geodetické bifurkace na produktech.

Podstatným přínosem práce je hlubší vhled do teorie tzv. rotačních zobrazení, kterou inicioval S.G. Leiko v 90. letech minulého století. V **kapitole II** je revidována část Leikových výsledků a prokázána jejich neplatnost. Veden fyzikální motivací, Leiko zavedl určité nové pojmy pro plochy v euklidovském prostoru a pro dvojrozměrné Riemannovy variety. *Isoperimetrickou extrémálou rotace* nazval křivku na ploše, s pevnými konci, která je extrémálou integrálu první křivosti, tj. flexe křivky, mezi všemi křivkami stejné délky na ploše, které pevné body spojují. Ukázal, že pro neploché a aspoň 4-násobně spojitě diferencovatelné Riemannovy plochy je křivka isoperimetrickou extrémálou rotace právě tehdy, když má křivost úměrnou (Gaussově) křivosti plochy (ve všech bodech křivky). Dále vyšetřoval difeomorfismy mezi dvojdimenzionálními Riemannovými prostory, při nichž se geodetiky jednoho prostoru zobrazí právě na infinitesimální extrémály rotace prostoru druhého, a nazval je rotačními zobrazeními. Uveřejnil výsledek, že pokud mezi dvojdimenzionálními Riemannovými prostory existuje rotační zobrazení, pak jsou tyto prostory izometrické rotačním plochám. Druhá kapitola předložené práce je věnována mj. vyvrácení této domněnky. Je zde sestrojen příklad dvojrozměrné Riemannovy variety, která není izometrická žádné rotační ploše a přitom připouští rotační difeomorfismy na dvojrozměrné Riemannovy variety. Zmiňme postup. K popisu metriky Riemannovy variety jsou užity semi-geodetické souřadnice, v nichž vystupuje funkce obou proměnných. Existence rotačního zobrazení je ekvivalentně vyjádřena existencí torso-formního vektorového pole na druhé varietě splňujícího jisté podmínky. Z nich je odvozena soustava diferenciálních rovnic, která se má řešit. Z ní je odvozena podmínka pro funkci vystupující v metrice, a to ve tvaru Riccatiho rovnice. Z ní se pak odvodí existenční podmínky pro tvar metriky a prokáže se, kdy izometrie na rotační plochu existovat nebude.

Kapitola III se vztahuje k různým druhům geodetických nebo skoro geodetických zobrazení mezi speciálními druhy prostorů. Autorka například ukazuje geodetické deformace rotačních kvadrik v rotační plochy, které již rotačními kvadrikami nejsou. I tato část obsahuje zcela samostatně získané nové výsledky autorky.

Soupis literatury vystihuje obsah práce a zahrnuje 114 položek, a to klasických i současných vědeckých prací zabývajících se tematikou doktorské práce. Monografie [71] obsahuje i vlastní výsledky autorky.

V angličtině by se daly nalézt některé drobné gramatické a stylistické chyby, které však nesnižují čitelnost a srozumitelnost práce.

Pokud jde o **původní výsledky autorky** uvedené v práci, domnívám se, že jsou hodnotné a přínosné. Cením si zvláště partie o geodetických bifurkacích a konstrukce příkladu dvojrozměrné Riemannovy variety, která není izometrická žádné rotační ploše a přitom připouští rotační difeomorfismy na dvojrozměrné Riemannovy variety.

Jak uvedeno v Abstraktu, L. Rýparová je spoluautorkou 14 odborných publikací. Stěžejní výsledky, které autorka zařadila do disertace, byly již otištěny v mezinárodních matematických časopisech a sbornících a byly zařazeny také v monografii [71] uváděné v Abstraktu jako [R1]. Tím je dána i mezinárodní úroveň disertační práce.

Závěr: Předložená práce a autorčiny výsledky, dle mého názoru, splňují požadavky kladené na disertační práci doktorského studijního oboru: *Algebra a geometrie* v rámci studijního programu *Matematika P1102*, proto na tomto základě **doporučuji** disertační práci Mgr. Lenky Rýparové k obhajobě.

V Brně 11. června 2020

Doc. RNDr. Alena Vanžurová, CSc.

Vysoké učení technické v Brně

Fakulta stavební

Ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Veveří 331/95

602 00 Brno