UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Nekonečné hry

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Pavel Ludvík, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Marek Šuranský**
Studijní program: B1101 Matematika
Studijní obor Matematika a její aplikace
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2022

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Marek Šuranský

Název práce: Nekonečné hry

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Ludvík, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2022

Abstrakt: Cílem této práce je popsat a vysvětlit základní principy konceptu nekonečné hry. V první kapitole zavedeme základní pojmy a ukážeme jejich využití. Mimo jiné v této kapitole ukážeme alternativní důkaz věty o perfektní množině. V druhé kapitole se podíváme na hry na reálné ose konkrétně na hru Point-open, Banachovu hru a Limitní hru a dokážeme v ní například nespočetnost intervalu $[0, 1]$. Ve třetí kapitole se budeme zabývat topologickými hrami. Nejdříve se budeme věnovat Choquetově hře a s její pomocí dokážeme Baireovu větu, a poté se zmíníme o Banachově-Mazurově hře. V poslední kapitole pak narazíme na geometrické hry, začneme nejjednodušší z nich hrou Lev a křesťan, kterou pak budeme zobecňovat, nejdříve do více dimenzí ve hře Ptáci a moucha, poté pro více lovců ve hře Muž a mnoho lvů. Na závěr si ukážeme hru Point-line.

Klíčová slova: nekonečné hry, Banachova-Mazurova hra, Baireova věta, perfektní množina, Lev a křesťan

Počet stran: 49

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Marek Šuranský

Title: Infinite games

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Pavel Ludvík, Ph.D.

The year of presentation: 2022

Abstract: The aim of this dissertation is to describe and explain the basic principles of the concept of infinite games. In the first chapter we introduce the basic concepts and show their aplication. Among other things, in this chapter we show an alternative proof of the perfect set theorem. In the second chapter we investigate games on real-axis, namely the Point-open game, the Banach game and the Limit game and prove, that the interval [0, 1] is uncountable. In the third chapter we deal with the topological games. Firstly, we discuss the Choquet game and use it to prove the Baire theorem, and then we mention Banach-Mazur's game. In the last chapter, we come across geometric games, starting with the simplest of them, the Lion and the Christian game, which we then generalize, first to more dimensions in the game Birds and Flies, then for more hunters in the game Man and many lions. Finally we will show the Point-line game.

Key words: infinite games, Banach-Mazur game, Baire theorem, perfect set, Man and the lion

Number of pages: 49

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana RNDr. Pavla Ludvíka, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Rád bych poděkoval doktoru Pavlu Ludvíkovi za jeho vstřícný přístup, který započal již při volbě tématu, jeho rady a připomínky.

Úvod

Tématem bakalářské práce jsou nekonečné hry. V první kapitole se podíváme pojmy, které budeme využívat ve zbytku práce, včetně Baireovy věty a věty o perfektní množině. V druhé kapitole se podíváme na hry na reálné ose a s jejich pomocí ukážeme například, že interval $[0, 1]$ je nespočetný. Ve třetí kapitole se pak budeme zabývat topologickými hrami, které použijeme i k důkazu již zmíněné Baireovy věty. V poslední kapitole pak narazíme na hry geometrické, především pak různé formy hry lev a křesťan.

Kapitola 1

Úvod do nekonečných her

V této kapitole jsem čerpal z [7], [12] a [13]. V těchto publikacích je možné najít i případné nevysvětlené pojmy (především v [7]).

1.1. Matematický aparát

Definice 1. *Topologickým prostorem* nazveme dvojici (X, τ), kde X je množina a τ je kolekce podmožin X taková, že $\emptyset \in \tau, X \in \tau$ a sjednocení libovolného počtu (tedy konečné, spočetné i nespočetné) prvků τ náleží τ.

Definice 2. *Borelovská množina* je taková množina, kterou lze získat pomocí operací spočetné sjednocení, spočetný průnik a relativní doplněk z otevřených množin (nebo ekvivalentně uzavřených).

Definice 3. Zobrazení f mezi dvěmi topologickými prostory nazveme *homeomorfismus*, pokud se jedná bijekci, a jak f tak i f^{-1} jsou spojité.

Definice 4. *Metrickým prostorem* nazýváme dvojici (X, d), kde X je množina a zobrazení $d : X \times X \to \mathbb{R}$ je tzv. metrika, tedy splňuje pro každé $x, y, z \in X$

- $d(x, y) \geq 0$ a $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Metrický prostor nazveme *úplným*, pokud je v něm každá cauchyovská posloupnost konvergentní.

Metrický prostor nazveme *separabilní*, pokud obsahuje spočetnou množinu v něm hustou.

Věta 5. *Uzavřená podmnožina úplného metrického systému je úplný metrický systém.*

Důkaz. Za novou metriku si vezmeme restrikci původní metriky na tuto podmožinu. Každá cauchyovská posloupnost tedy konverguje, navíc protože je množina uzavřená tak i limita náleží naší podmnožině. □

Definice 6. Mějme množinu M v topologickém prostoru S a bod $x \in X$. Tento bod nazveme *hromadným bodem* množiny M, pokud se v každém prstencovém okolí x nachází prvek z množiny M. Množinu všech hromadných budů množiny M značíme M'.

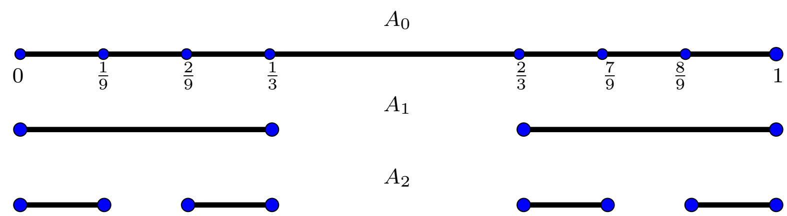
Definice 7. Symbolem ω budeme značit nejmenší spočetný nekonečný ordinál.

Definice 8. Symbolem A^{ω} budeme značit množinu všech nekonečných posloupností prvků z A a symbolem $A^{<\omega}$ pak všechny konečné posloupnosti prvků z A.

Definice 9. Pro každou posloupnost $a \in A^{\omega}$ a pro každé $k \in \omega$, budeme značit konečnou posloupnost prvních k prvků a jako $a|k$. Počet prvků a budeme značit $|a|$.

Definice 10. Nechť $s \in A^{<\omega}$ a $t \in A^{<\omega} \cup s \in A^{\omega}$ řekneme, že t *prodlužuje* s, pokud $t||s| = s$, značíme $t \prec s$.

Příklad 11 (Cantorova množina)**.** *Cantorovu množinu* C je možné zadat vícero způsoby. Ukažme si jeden z nich. Mějme uzavřený interval $[0,1]$, z tohoto intervalu vyjměme prostřední třetinu (bez krajních bodů). Získáme tím dva nové intervaly $[0,\frac{1}{3}], [\frac{2}{3},1]$, na každém tomto intervalu opět vyjmeme prostřední část, a tento proces opakujeme. Pokud označíme: $A_0 = [0,1], A_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1], A_3 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1], \ldots$, pak $C = \bigcap_{n\in\omega} A_n$.



Obrázek 1.1: Tvorba Cantorovy množiny

Poznámka 12. Cantorova množina je uzavřená, protože se jedná o průnik uzavřených množin.

Definice 13. Uzavřenou množinu M nazveme *perfektní*, pokud je rovná množině svých hromadných bodů, tedy $M = M'$.

Příklad 14.

- Klasickými příklady perfektních množin jsou $\mathbb{R}$, protože s každým $x \in \mathbb{R}$ patří do $\mathbb{R}$ i každé jeho okolí, nebo $[0, 1]$, kde pro každé $x \in (0, 1)$ existuje okolí uvnitř $(0, 1)$, a pro krajní body 0 a 1, existuje pravé, respektive levé, okolí které také patří $(0, 1)$.

- Naopak interval $(0, 1)$ není perfektní. Pokud bychom měli posloupnost $(\frac{1}{n+1})_{n\in\omega}$, pak platí $\forall n \in \omega : a_n \in (0, 1)$. A pro každé $\epsilon > 0$ se nachází nějaký člen v této posloupnosti v pravém ϵ-ovém okolí nuly, protože $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \omega : \frac{1}{n} < \epsilon$.

- Množina $M = \{\frac{1}{n} | n \in \omega\}$, není perfektní, díky stejnému argumentu jako v předchozím bodu a tomu, že $0 \notin M$. Dokonce $M' = \{0\}$ a $M \cup M' = \emptyset$, protože se jedná o množinu složenou z izolovaných bodů.

- Cantorova množina C je perfektní.

  Důkaz. Mějme libovolné $x \in C$ a a libovolné $\epsilon > 0$. Pak existuje $n \in \omega$, že $3^{-n} < \epsilon$. Ze způsobu konstrukce Cantorovy množiny je zjevné, že $\forall m \in \omega : x \in A_m$, protože jinak by nemohlo patřit průniku A_m, a leží tedy i v

A_n. Množina A_n se skládá z intervalů délky $\frac{1}{3^n}$, označme si ten interval, který obsahuje x, jako I. Je-li I^* maxímální uzavřený interval takový, že $I^* \subset A_m$, pak jeho krajní body leží v C. Vidíme, že alespoň jeden z krajních bodů I leží v průniku Cantorovy množiny a epsilonového okolí bodu x. Z libovolnosti x pak plyne $C \subseteq C'$. Opačná inkluze plyne z uzavřenosti Cantorovy množiny. □

Definice 15. Mějme topologický prostor X, $A \subseteq X$. Pak řekneme, že

- A je *hustá* v X, pokud platí $\overline{A} = X$.
- A je *řídká*, pokud $\overline{A}$ má prázdný vnitřek.
- A nazveme *první kategorie*, pokud je spočetným sjednocením řídkých množin.
- A je *druhé kategorie*, pokud není první kategorie.

Ukažme si příklady jednotlivých typů množin.

Příklad 16.
- Množina přirozených čísel je řídká v $\mathbb{R}$, protože máme-li libovolné $n \in \omega$, pak prstencové okolí o poloměru $\epsilon = 0,5$ má prázdný průnik s přirozenými čísly.
- Každá spočetná podmnožina $\mathbb{R}$ je první kategorie. Pokud je množina spočetná, pak ji lze zapsat jako $\bigcup_{n\in\omega}\{a_n\}$, což je spočetné sjednocení řídkých množin.
- Všimněme si, že množina první kategorie může být hustá. Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná, tedy první kategorie, ale je hustá v $\mathbb{R}$.
- Příkladem množiny druhé kategorie může být například interval $[0,1]$ v $\mathbb{R}$. Reálná čísla tvoří úplný metrický prostor, a takovýto prostor je podle Baireovi věty (viz 23) Baireův, a ten je druhé kategorie sám v sobě.

Definice 17. $\sigma \subset A^{<\omega}$ nazveme *strom*, jestliže: $\forall s,t \in A^{<\omega}, s \prec t : t \in \sigma \implies s \in \sigma$.

Definice 18. Strom $\sigma \subset A^{<\omega}$ nazveme *prořezaný*, pokud $\forall s \in \sigma \exists a \in A : s^\wedge a \in \sigma$.

Definice 19. *Tělo* stromu σ, značíme $[\sigma]$, definujeme jako:

$$[\sigma] = \{x \in A^\omega | \forall n \in \omega : x|n \in \sigma\}$$

Poznámka 20. Na A předpokládáme diskrétní topologii, tedy každá podmnožina A je otevřená. Diskrétní topologie generuje diskrétní metriku tj. $d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$.

Dále na A^ω předpokládáme produktovou metriku, tj. $d(x, y) = \frac{1}{2^{n+1}}$, pokud $x, y \in A^\omega$, $x \neq y$ a n je nejmenší n, že $x_n \neq y_n$. Bázi této topologie na A^ω tvoří množiny $N_s = \{x \in A^\omega : s \prec x\}$, kde $s \in A^{<\omega}$.

1.2. Baireova věta a Baireovy prostory

Definice 21. Topologický prostor nazveme *Baireův*, pokud spočetný průnik v něm hustých otevřených množin, je v něm hustý.

Nejedná se o jedinou z možných definic Baireova prostoru, uveďme si bez důkazu nasledující větu [12]:

Věta 22. *Topologický prostor X je Baireův, právě když $X \setminus M$ je hustá v X pro každou $M \subset X$ první kategorie.*

Věta 23 (Baireova věta o kategoriiích)**.** *Každý úplný metrický prostor je Baireův.*

Poznámka 24. Tuto větu si dokážeme později, pomocí Choquetovy hry (viz kapitola 3.1).

Ukažme si nějaké přímé využití předcházející věty na příkladu z [9]:

Příklad 25. Mějme nekonečně diferencovatelnou funkci $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ takovou, že pro každé fixní $x \in [0, 1]$ existuje $n = n(x) \in \omega$ splňující $f^{(n)}(x) = 0$. Pak existuje neprázdný otevřený interval $(a, b) \subset [0, 1]$ na němž je f polynomiální funkce.

Označme si $F_n = \{x \in [0, 1] | f^{(n)}(x) = 0\}$. Ze zadání víme, že pro každé $x \in [0, 1]$ existuje n takové, že $x \in F_n$. Tedy $[0, 1] = \bigcup_{n \in \omega} F_n$ a množiny F_n

jsou uzavřené. Uvědomíme-li si, že interval $[0, 1]$ je množina druhé kategorie, což plyne z vět 23 a 22, neboť se jedná o úplný metrický prostor, pak musí existovat $m \in \omega$ takové, že množina F_m není řídká. Tedy existuje interval $(a, b) \subset F_m$ a $\forall x \in (a, b) : f^{(m)}(x) = 0$. Pak $f^{(m-1)}(x)$ je konstantní funkce na (a, b), a následnou opakovanou integrací dostaneme $f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{c_i}{i!} x^i$, kde $c_i \in \mathbb{R}$.

Uveďme si několik netriviálních příkladů Baireových prostorů:

Příklad 26. Cantorova množina je Baireův prostor, protože se jedná o uzavřený podprostor úplného metrického prostoru a tedy úplný metrický prostor. Tato množina je druhé kategorie sama v sobě, přestože se jedná o množinu první kategorie v intervalu $[0, 1]$.

Příklad 27 (Sorgenfreyova přímka)**.** Sorgenfreyova přímka je topologický prostor na ose $\mathbb{R}$ s topologií $\tau = \{[a, b) | a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Tento prostor je Baireův, ale není metrický.

1.3. Úvod do nekonečných her

Následující hru budeme chápat jako definici pojmu nekonečné hry:

Hra 28. Uveďme si příklad nekonečné hry:

Mějme neprázdnou množinu **A** a množinu $X \subset A^\omega$. Hráč A a hráč B střídavě volí prvky $a_i \in A, i \in \omega$.

hráč A	a_0		a_2		a_4		a_6		a_8		...
hráč B		a_1		a_3		a_5		a_7		...	

Hráč A vyhrává právě tehdy když $(a_n)_{n \in \omega} \in X$, jinak vyhrává hráč B. Tuto hru budeme značit G(**A**, X). Hrám v tomto tvaru se někdy říká i Gale-Stewartovy hry.

Definice 29. Hrou s úplnou informovaností nazveme hru, při níž zná hráč při svém rozhodnutí všechna rozhodnutí, provedená každým z hráčů. Pokud toto neplatí, nazveme tuto hru hrou s neúplnou informovaností.

Poznámka 30. U všech her zmíněných v této práci předpokládáme úplnou informovanost.

Definice 31. Strategií hráče A nazveme zobrazení $\varphi : \mathbf{A}^{<\omega} \to \mathbf{A}^{<\omega}$ splňující:

a) $\forall s \in \mathbf{A}^{<\omega} : |\varphi(s)| = |s| + 1$,

b) $\forall t, s \in \mathbf{A}^{<\omega}, t \prec s : \varphi(t) \prec \varphi(s)$.

Poznámka 32. Strategie určuje tahy hráče A ve hře následujícím způsobem: $\varphi(\emptyset) = a_0, \varphi(a_1) = (a_0, a_2), \varphi((a_1, a_3)) = (a_0, a_2, a_4), \ldots$

Strategii můžeme ekvivalentně definovat i takto:

Definice 33. Strategie hráče A je strom $\sigma \subset \mathbf{A}^{<\omega}$ splňující:

a) σ je neprázdný a prořezaný,

b) pokud $(a_0, \ldots, a_{2j}) \in \sigma$, pak pro každé $a_{2j+1} \in \mathbf{A}$ platí $(a_0, \ldots, a_{2j}, a_{2j+1}) \in \sigma$,

c) pokud $(a_0, \ldots, a_{2j-1}) \in \sigma$, pak existuje právě jedno $a_{2j} \in \mathbf{A}$ takové, že platí $(a_0, \ldots, a_{2j}) \in \sigma$.

Definice 34. Strategii hráče A nazveme vítězná, pokud s ní vyhraje hráč A, nehledě na volby hráče B. Tedy $[\sigma] := \{x \in \mathbf{A}^\omega | \forall n \in \omega : x|n \in \sigma\} \subset X$

Hra 35. Hra s pravidly: Mějme $T \subset \mathbf{A}^{<\omega}$ prořezaný strom a $X \subset [T]$.

hráč A	a_0		a_2		a_4		a_6		a_8		...
hráč B		a_1		a_3		a_5		a_7		...	

Pro každé $n \in \omega$ musí platit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in T$. Řekneme, že strom T označuje tzv. *přípustné pozice*. Tuto hru budeme značit G(T, X).

Poznámka 36.

- Strategii a vítěznou strategii pro hráče B definujeme analogicky.

- Vítězná strategie nemusí existovat pro žádného hráče, a pokud existuje, tak jen pro jednoho z nich.

Ukažme si příklad hry, ve které nemá ani jeden z hráčů vítěznou strategii.

Příklad 37. Mějme hru $G(\mathbf{A}, X)$ kde $\mathbf{A} = \{0, 1\}$ a $X \subset 2^\omega$ je tzv. Bernsteinova množina, tedy pro každou perfektní $F \subset 2^\omega$ platí: $F \cap X = \emptyset$ a $F \cap (2^\omega \setminus X) = \emptyset$. Pak nemá ani jeden z hráčů vítěznou strategii.

Důkaz. Sporem: Mějme $\varphi : 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ vítěznou strategii hráče A. Definujme $\varphi^* : 2^\omega \to 2^\omega$ následujícím předpisem:

$$\varphi^*(a_1, a_3, \dots) = (a_0, a_1, a_2 \dots), \tag{1.1}$$

kde $\varphi((a_1, a_3, \dots, a_{2j-1})) = (a_0, a_1, a_2 \dots, a_{2j})$ pro $j \in \omega$.

Zobrazení φ^* je prosté. Pokud by platilo $\varphi^*(a) = \varphi^*(b)$ pak podle (1.1) $(c_0, a_1, c_2, a_3 \dots) = (c_0, b_1, c_2, b_3 \dots)$ a tedy $\forall i \in \omega : a_i = b_i$. Zobrazení φ^* je navíc spojité, neboť pro libovolná $\alpha, \beta \in 2^\omega, k \in \omega$, která splňují $b|k = c|k$, platí $\varphi(b|k) = \varphi(c|k)$. Tedy v součinové metrice $(b, c) < \epsilon \implies \forall i \in \omega : d(\varphi^*(b), \varphi^*(c)) < \epsilon$, protože index prvního rozdílného prvku je stejný.

Množina 2^ω je nespočetná a kompaktní. Pak je ovšem $\varphi^*(2^\omega) \subset X$ kompaktní (spojitý obraz kompaktní množiny), a nespočetná(prostý obraz nespočetné množiny). Tedy množina X obsahuje podle věty o perfektní množině, viz věta 44, neprázdnou perfektní podmnožinu a to je spor s definicí Bernsteinovi množiny. Pro hráče B bychom došli ke sporu stejným postupem. $\square$

Definice 38. Řekneme, že nekonečná hra je *determinovaná*, pokud má jeden z hráčů vítěznou strategii.

Poznámka 39. Neformálně můžeme říct že:

- Hráč A má vítěznou strategii, pokud platí: $\exists a_0 \forall a_1 \exists a_2 \forall a_3 \cdots : (a_0, a_1, a_2, a_3 \dots) \in X$

- Hráč B má vítěznou strategii, pokud platí: $\forall a_0 \exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 \cdots : (a_0, a_1, a_2, a_3 \dots) \notin X$

Definice 40. Řekneme že pozice $x = (x_0, x_1, \dots, x_n), n \in \omega$ je neprohrávající pozice hráče A, jestliže hráč B nemá vítěznou strategii s tímto začátkem.

Ukažme si nyní hru která je determinovaná.

Věta 41 (Gale-Stewart, 1953). *Mějme množinu $A \neq \emptyset$, $T \subset A^{<\omega}$ je neprázdný prořezaný strom a nechť $X \subset [T]$ je uzavřená v $[X]$. Pak hra G(T, X) je determinovaná.*

Důkaz. Předpokládejme, že hráč B nemá vítěznou strategii, a zkonstruujme vítěznou strategii pro hráče A.

Předpokládejme, že $x = (a_0, \dots, a_{2n-1})$ je neprohrávající pozice hráče A. Pak musí existovat takové $a_{2n} \in A$, že platí

- $(a_0, \dots, a_{2n}) \in T$,
- pro každé $a_{2n+1} \in A$, splňující $(a_0, \dots, a_{2n+1}) \in T$, je tato pozice neprohrávající pro hráče A.

Protože neexistuje vítězná strategie pro hráče B, může hráč A volit své tahy tak, aby byl vždy v neprohrávající pozici.

Dokažme, že se jedná o vítěznou strategii hráče A. Kdyby se nejednalo o vítěznou strategii hráče A, pak $(a_0, a_1, \dots) \in [T]$, volená pomocí tohoto postupu, není v X. Množina $[T] \setminus X$ je otevřená v $[T]$ (doplněk uzavřené množiny). Proto $\exists n \in \omega$ takové, že množina všech přípustných prodloužení vektoru $(a_0, \dots, a_{2n-1})$ je podmnožinou $[T] \setminus X$ a nejedná se tedy o neprohrávající pozici hráče A, dokonce může hráč B hrát cokoliv a vyhraje, což je spor. □

Platí dokonce silnější tvrzení.

Věta 42 (Martin, 1985). *Nechť $T \neq \emptyset$ je prořezaný strom na A a $X \subset [T]$ je borelovská. Pak $G(T, X)$ je determinovaná.*

Poznámka 43. Toto hluboké tvrzení nebudeme v této práci dokazovat. Důkaz je možné najít v [11].

1.4. Nekonečné hry a věta o perfektní množině

V poslední části této kapitoly si ukážeme, jak je možné využít nekonečné hry a jejich determinovatnost. A to alternativním důkazem věty o perfektní množině.

Věta 44 (Věta o perfektní množině)**.** *Mějme úplný metrický separabilní prostor X a borelovskou podmnožinu $A \subseteq X$. Pak A je spočetná, nebo obsahuje Cantorovu množinu (diskontinuum), respektive její homeomorfní obraz.*

Hra 45. Mějme neprázdný separabilní úplný metrický prostor X. Nechť ν je spočetná báze X sestavená z neprázdných otevřených množin a $A \subset X$. definujeme hru $G^*(A)$, takto

hráč A	$U_0^{(0)}, U_1^{(0)}$	$U_0^{(0)}, U_1^{(0)}$	$U_0^{(0)}, U_1^{(0)}$	$\dots$
hráč B	i_0	i_1	i_2	$\dots$

kde platí pro každé přirozené n, $i \in \{0, 1\}$:

- $U_i^{(n)} \in V, \operatorname{diam} {U_i}^{(n)} < 2^{-n}$,
- $\overline{U_0^{(n)}} \cap \overline{U_1^{(n)}} = \emptyset$,
- $\overline{U_0^{(n+1)} \cup U_1^{(n+1)}} \subset U_{i_n}^{(n)}$,
- $i_n \in \{0, 1\}$.

Definujme prvek $x \in X$ jako $x := \bigcap_{n\in\omega} U_{i_n}^{(n)}$. Hráč A vyhraje právě tehdy, když $x \in A$.

Věta 46. *Nechť X je neprázdný separabilní úplný metrický prostor a $A \subset X$. Uvažme hru $G^*(A)$. Pak*

i) Hráč A má vítěznou strategii právě tehdy, když A obsahuje Cantorovu množinu.

ii) Hráč B má vítěznou strategii právě tehdy, když A je spočetná.

Důkaz. *i*) Ukažme si vítěznou strategii pro hráče A. Mějme následující posloupnost $(U_s)_{s\in 2^{<\omega}\setminus\emptyset}$, splňující:

- U_s je otevřená a neprázdná,
- $\overline{U_{s^\wedge 0} \cup U_{s^\wedge 1}} \subset U_s$, $\overline{U_{s^\wedge 0}} \cap \overline{U_{s^\wedge 1}} = \emptyset$
- $\operatorname{diam} U_s < 2^{-|s|+1}$,
- $\forall y \in 2^\omega : \bigcap_{n\in\omega} U_{n^\wedge y}$ je jednoprvková množina v A.

Pak $\bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{|s|=n} U_s$ je homeomorfní obraz Cantorovy množina.

Nechť naopak obsahuje A homeomorfní obraz Cantorovy množinu C. Pak stačí hráči A volit v každám kole obě množiny $U_i^{(n)}, i \in \{0,1\}$, aby jejich průnik s množinou C byl neprázdný, tedy $U_1^{(n)} \cap C \neq \emptyset \neq U_0^{(n)} \cap C$. Stačí tady volit dvě otevřené množiny, které obsahují některou z množin z konstrukce Cantorovy množiny.

ii) Pokud je A spočetná, pak ji lze seřadit do posloupnosti $(a_n)_n \in \omega$. Hráč B bude volit pro každé přirozené n hodnotu i_n tak, aby $x_n \notin U_{i_n}^{(n)}$. Tedy $\bigcap_{n\in\omega} U_{i_n}^{(n)} = \emptyset$.

Naopak předpokládejmě, že má hráč B vítěznou strategii σ. Mějme $x \in A$. Řekneme že pozice $p = ((U_0^{(0)}, U_1^{(0)}), i_0, \dots (U_0^{(n-1)}, U_1^{(n-1)}), i_{n-1})$ je dobrá pro x, pokud byla hrána podle σ a $x \in U_{i_{n-1}}^{(n-1)}$, přičemž prázdná posloupnost je dobrá pro všechna $a \in A$. Pokud by pro každou dobrou pozici pro x, existovalo prodloužení, které je také dobré pro x, pak by existovala sekvence daná strategií σ, jejímž výsledkem je $x \in A$. To ovšem znamená, že vyhrál hráč A a σ tedy není vítězná strategie hráče B.

A tedy pro každý $x \in A$ existuje maximální posloupnost p příslušná danému x. Označme $A_p = \{y \in U_{i_{n-1}}^{(n-1)} |$ pro každé přípustné prodloužení $(U_0^{(n)}, U_1^{(n)})$: v tahu i podle strategie σ platí: $y \in U_{\mathbf{i}}^n\}$. Pak $A \subset \bigcup_p A_p$, navíc A_p je vždy nejvýše jednoprvková množina. Pokud bychom měli $y_0, y_1 \in A_p, y_0 = y_1$, pak existují množiny U_0, že $y_0 \in U_0$ a U_1, že $y_1 \in U_1$ a navíc $U_0, U_1 \subset U_{i_{n-1}}^{(n-1)}$. Pokud by hráč A zahrál tuto kombinaci, pak by hráč B musel jeden z bodů „vyřadit“. Pak je $\bigcup_p A_p$ spočetná množina, spočetné sjednocení nejvýše jednoprvkových množin. Tedy i množina A je spočetná.

□

Nyní již k důkazu věty 44.

Důkaz (věty o porfektní množině). Pokud bychom věděli, že hra $G^*(A)$, $A \subset X$, je determinovaná, pak podle předchozí věty je buď A spočetná, nebo obsahuje obraz Cantorovy množiny.

Vzhledem k Martinově větě stačí ukázat, že množina $V \subset [T]$ přípustných výsledků hry, v nichž vyhraje hráč A, je borelovská v $[T]$.

Uvažme zobrazení $\varphi : [T] \to X$, které přiřadí běhu hry $G^*(A)$, tj. posloupnosti $((U_0^{(0)}, U_1^{(0)}), i_0, \ldots)$, bod $x \in \bigcap_{n\in\omega} U_{i_n}^{(n)}$.

Ukážeme, že zobrazení φ je spojité. Nechť $(B_n)_{n\in\omega}$ konverguje k B v $[T]$. Pak pro každé $m \in \omega$ musí existovat $n_0 \in \omega$, že $B_n|m = B|m$ pro $n \geq n_0$. Proto $\varphi(B_n)$ konverguje k $\varphi(B)$.

Jelikož hráč A vyhraje, právě když běh B hry splňuje $\varphi(B) \in A$, platí pro množinu V, že $V = \varphi^{-1}(A)$. Podle předpokladu je A borelovská množina. Navíc spojitý vzor borelovské množiny je opět borelovská množina, tedy V je borelovská, což jsme chtěli dokázat.

□

Poznámka 47. Všimněme si, že pokud bychom místo Martinovy věty o determinovanosti borelovské hry použili v předchozím důkazu determinovanost uzavřené hry (tedy věty 41), dokázali bychom speciální případ věty o perfektní množině pro uzavřené množiny.

Kapitola 2

Hry na reálné ose

V této kapitole se budeme zabívat nekonečnými hrami, které se hrají, jak název kapitoli napovídá, na reálné ose, nebo na nějakém jejím podintervalu.

2.1. Point-open

V této kapitole jsem čerpal z [1].

Hra 48. Hru Point-open hrajeme na reálné ose. Nechť je dána množina $X \subset \mathbb{R}$. Pak v n-tém tahu, $n \in \omega$, nejdříve hráč A volí číslo $x_n \in X$ a poté hráč B volí otevřenou množinu $U_n \subseteq \mathbb{R}$ takovou, aby platilo $x_n \in U_n$. Označme $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$, pak hráč A vyhraje právě tehdy, když platí:$X \subseteq U$.

Ukažme si několik voleb množiny X, při kterých je tato hra determinovaná.

Věta 49. *Pokud je množina X spočetná, pak má hráč A vítěznou strategii ve hře Point-open.*

Důkaz. Díky tomu že množina X je spočetná, jsme schopni ji seřadit do posloupnosti, označme si ji $(z_i)_{i\in\omega}$. Pokud bude hráč A pro každé přirozené n volit $x_n = z_n$, tak vyhraje, protože se pak každý prvek z_n bude vyskytovat alespoň v množině U_n. □

Věta 50. *Pokud $X = \mathbb{R}$, pak má hráč B vítěznou strategii ve hře Point-open.*

Důkaz. Pokud bude hráč B volit $\forall n \in \omega$ volit U_n tak aby její Lebesqueova míra byla $\frac{1}{2^n}$, pak bude platit $\lambda(U) \leq \lambda(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(U_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \neq \lambda(\mathbb{R}) = \infty$. Velikost U je tedy menší než $\mathbb{R}$ a tudíž nemůže platit $\mathbb{R} \subseteq U$. Jedná se tedy o vítěznou strategii pro hráče B. □

Tuto větu můžeme ještě zobecnit.

Věta 51. *Nechť $X \subseteq \mathbb{R}$ má nenulovou (Lebesgueovu) míru, pak hráč B má vítěznou strategii ve hře Point-open.*

Důkaz. Nechť $\lambda(X) = a, a > 0$. Pokud bude hráč B volit pro každé přirozené n U_n jako interval délky $\frac{a}{2^n}$, pak $\lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(U_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{2^n} = \frac{a}{2} < a$. Tedy stejným argumentem jako v důkazu předchozí věty platí, že se jedná o vítěznou strategii hráče B. □

2.2. Banachova hra

V této kapitole jsem čerpal z [15].

Hra 52. Banachovu hru hrajeme na nekonečně dlouhé polopřímce p, kde $p = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leqq x \leqq \infty\}$. Mějme předem danou množinu $Z \subset p$. Pak hráči A a B volí kladná čísla $a_i, b_i \in p$ tak, aby $a_i > b_i > a_{i+1}, i \in \omega$, a hráč A začíná. Takto hráči vytvoří posloupnost

$$a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > a_3 > b_3 > \dots \tag{2.1}$$

Položme $g := \sum_{i=1}^{+\infty}(a_i + b_i)$. Pak hráč A vyhrává, pokud $g \in Z$, jinak vyhrává hráč B.

Věta 53. *Nechť Z je spočetná množina. Pak má hráč B vítěznou strategii.*

Důkaz. Začněme tím, že využijeme spočetnosti Z a seřadíme ji do posloupnosti $(z_i)_{i\in\omega}$, je-li Z konečná, budou se některé prvky opakovat. Označme si $s_k = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_{k-1} + b_{k-1} + a_k$. Nyní pro každé $k \in \omega$ hledejme b_k jako funkci z_k a s_k.

Zvolme tedy libovolné k a pokusme se dokázat, že hráč B je schopen dosáhnout vhodnou volbou svých tahů toho, že nerovnost $z_k \neq g$ platí. To zajistíme vhodnou volbou kladných reálných čísel $\beta_k^k, \beta_{k+1}^k \dots,$ které na volby hráče B přidají podmínku

$$\forall i \in \omega, i \geq k : b_i < \beta_i^k \tag{2.2}$$

Pro $z_k \leq s_k$ můžeme volit čísla β_i^k v podstatě libovolně, neboť platnost požadované nerovnosti $z_k \neq g$, plyne z kladnosti b_k. Položme například $1 = \beta_k^k = \beta_{k+1}^k = \dots$.

Pro $z_k > s_k$ již musíme být s volbou β_i^k opatrnější. Budeme je volit tak, aby platilo

$$\sum_{i=k}^{+\infty} \beta_i^k < \frac{|z_k - s_k|}{2}. \tag{2.3}$$

Toho lze docílit například volbou $\beta_i^k = \frac{|z_k - s_k|}{2^{i+1}}$, protože platí $\sum_{i=k}^{+\infty} \beta_i^k \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^k = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|z_k - s_k|}{2^{i+1}} = \frac{|z_k - s_k|}{2} \sum_1^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{|z_k - s_k|}{2}$. Díky takovéto volbě platí $g = s_k + (b_k + a_{k+1}) + (b_{k+1} + a_{k+2}) + \dots < s_k + 2\sum_{i=k}^{+\infty} \beta_i^k < s_k + 2\frac{z_k - s_k}{2} = z_k$. Kde první nerovnost plyne z (2.1) a (2.2), zatímco druhá plyne z (2.3). Tedy i v tomto případě jsem schopni docílit $z_k \neq g$.

Nyní již k samotným volbám hráče B. Nechť zvolí v k. kole číslo b_k tak, že platí následující nerovnosti

$$b_k < a_k, b_k < \beta_1^k, b_k < \beta_2^k, \dots, b_k < \beta_k^k,$$

kde první nerovnost je požadována (2.1) a ostatní (2.2). Pak v k-tém kole zajistí hráč B, volbou daných β_i^k, platnost nerovnosti $z_k \neq g$. $\square$

Poznámka 54. Hodnotu β_i^j můžeme tedy interpretovat jako horní omezení b_j vytvořené v kole i.

2.3. Limitní hra

V této kapitole jsem čerpal z [2].

Hra 55. Tuto hru hrají dva hráči na intervalu $[0, 1]$. Nejdříve zvolíme množinu $S \subseteq [0, 1]$. Pak budou hráči A a B volit čísla z intervalu $[0, 1]$ podle následujících pravidel.

Hráč A zvolí reálné číslo a_1 tak, aby platilo $0 < a_1 < 1$. Poté hráč B volí b_1 s následující podmínkou $a_1 < b_1 < 1$, každý další tah pak volí prvek mezi posledními dvěmi zvolenými. Tedy pokud označíme $a_0 = 0$ a $b_0 = 1$, pak pro každé $n \in \omega$ volíme a_n tak, aby platilo $a_{n-1} < a_n < b_{n-1}$ a b_n tak aby $a_n < b_n < b_{n-1}$.

Ze způsobu volby $(a_n)_{n\in\omega}$ vidíme, že se jedná o monotonní a omezenou posloupnost a tedy má limitu. Označme $\alpha = \lim_{n\to+\infty} a_n$, kde $\alpha \in [0, 1]$. Hráč A vyhraje, pokud $\alpha \in S$, jinak ($\alpha \notin S$) vyhraje hráč B.

Věta 56. *Pokud je S spočetná, pak má hráč B vítěznou strategii.*

Důkaz. Tato věta je zjevná pro $S = \emptyset$. Pokud by S byla neprázdná spočetná množina, pak by šla seřadit do posloupnosti $(s_n)_{n\in\omega}$, pokud by byla S konečná, budou se některé prvky opakovat. Zformulujme následující strategii pro hráče B. Pro každé $n \geq 1$ volí hráč B v n-tém kole $b_n = s_n$ pokud je to možné, tedy platí-li $a_n < s_n < b_{n-1}$, jinak volí $\frac{b_{n-1}+a_n}{2}$. Pak pro každé $n \in \omega$ platí buď $s_n < a_n$, nebo $s_n > b_n$. Navíc platí $\forall n \in \omega : a_n < \alpha < b_n$, neboť posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ a $(b_n)_{n=0}^{+\infty}$ jsou monotonní a platí $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha = \lim_{n\to+\infty} b_n$. Tedy $\alpha \notin S$. Což znamená že se jedná o vítěznou strategii hráče B. $\square$

Pomocí této hry můžeme alternativně dokázat, že interval $[0, 1]$ je nespočetná množina.

Věta 57. *Interval $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ je nespočetný.*

Důkaz. Zvolme v limitní hře $S = [0, 1]$. Uvědomíme si, že platí $\alpha \in [0, 1]$. Neexistuje tedy vítězná strategii pro hráče B, naopak každá strategie je vítězná pro hráče A, a proto dle minulé věty je tento interval nespočetný. $\square$

Před tím, než si ukážeme pro jaké množiny S má vítěznou strategii hráč A, uveďme si několik pomocných lemmat a definic.

Definice 58. Označme $S^+ = \{x \in \mathbb{R} | \forall \epsilon > 0 : (x, x+\epsilon) \cap S \neq \emptyset\}$ a $S^- = \{x \in \mathbb{R} | \forall \epsilon > 0 : (x-\epsilon, x) \cap S \neq \emptyset\}$

Lemma 59. *Pokud je neprázdná množina $S \subset [0,1]$ perfektní, pak platí $\inf(S) \in S^+$.*

Důkaz. Označme si toto infimum jako m. Z definice infima plyne, že neexistují prvky S které by byli menší než S, tedy $S \notin S^-$. Protože je navíc m hromadným bodem S, pak existuje posloupnost prvků z této množiny, která konverguje k m a tedy $m \in S^+$. □

Lemma 60. *Mějme $S \subset [0,1]$ neprázdnou perfektní množinu a $x \in S^+$, pak $\forall \epsilon > 0$ obsahuje interval $(x, x+\epsilon)$ bod, který také náleží S^+.*

Důkaz. Protože $a \in S^+$, můžeme najít $a, b, c \in S$ splňující $x < a < b < c < x+\epsilon$. Označme $d := \inf((a,c) \cap S)$. Protože $b \in (a,c) \cap S$, platí $a \leq d \leq b$. Pokud by platilo $d = a$, pak protože a je infimem $(a,c) \cap S$, tak existuje i posloupnost prvků této množiny, která konverguje k a zprava a tedy $a \in S^+$. Pokud by platilo $d > a$, pak $d \in S$, protože S je uzavřená. Tedy d je hromadný bod S, protože S je perfektní. Navíc existuje levé okolí d, jehož průnik s S je prázdná množina, tedy $d \notin S^-$. Jelikož se ale jedná o hromadný bod, tak musí platit $d \in S^+$. □

Věta 61. *Pokud je S perfektní množina, pak má hráč A vítěznou strategii.*

Důkaz. Omezení hráče A v kole $n, n \geq 1$, má podobu $a_{n-1} < a_n < b_{n-1}$. Zvolme $a_0 := \inf(S)$, pak z lemmatu 59, platí $a_0 \in S^+$. Podle lemmatu 60 existuje pro každé $n \geq 1$ $a_n \in (a_{n-1}, b_{n-1})$ takové, že $a_n \in S^+$. Hráč A tedy může v každém kole volit a_n tak, aby platilo $a_n \in S^+$. Pak $\alpha = \lim_{n \to +\infty} a_n$, a navíc platí, že $S^+ \subset S$ a S je uzavřená množina, protože S je perfektní, a tedy $\alpha \in S$. □

Věta 62. *Každá perfektní množina $S \subset [0,1]$ je nespočetná.*

Důkaz. Toto tvrzení plyne z vět 56, 61 a toho že vítězná strategie existuje pro nejvýše jednoho z hráčů. □

Poznámka 63. Připomeňme si, že podle věty o perfektní množině (věta 44) obsahuje každá nekonečná borelovská množina homeomorfní kopii Cantorovy množiny, což je perfektní množina.

Věta 64. *Pokud je $S \subset [0,1]$ nespočetná borelovská množina, pak má hráč A vítěznou strategii.*

Důkaz. Podle poznámky 63, můžeme v S najít perfektní podmnožinu, označme si ji P. Pak můžeme zopakovat postup z důkazu věty 61 jen s tím rozdílem, že budeme vybírat a_n z P^+. Pak platí $\alpha \in P$ a $P \subset S$, a jedná se tedy opět o vítěznou strategii hráče A. $\square$

Kapitola 3

Topologické hry

3.1. Choquetova hra

V této kapitole jsem čerpal z [7], [5] a [13].

Hra 65. Mějme neprázdný topologický prostor X. Choquetovu hru definujeme takto:

hráč A	U_0		U_1		U_2		U_3		U_4		...
hráč B		V_0		V_1		V_2		V_3		...	

kde platí

- U_i, V_i jsou neprázdné otevřené množiny, $i \in \omega$.
- $U_i \supset V_i \supset U_{i+1}$, $i \in \omega$

Hráč B vyhrává právě tehdy, když $\bigcap_{n\in\omega} V_i = \bigcap_{n\in\omega} U_i \neq \emptyset$.

Věta 66. *Neprázdný topologický prostor je Baireův právě tehdy, když hráč A nemá vítěznou strategii v Choquetově hře.*

Důkaz. $\Longleftarrow$ (Sporem) Předpokládejme, že X není Baireův. Pak existuje neprázdná otevřená množina U a spočetně mnoho otevřených hustých množin $G_n, n \in \omega$, takových, že $U \cap \bigcap_{n\in\omega} G_n = \emptyset$. Volí-li hráč A $U_0 = U$ a $U_n = V_{n-1} \cap G_n, n \in \omega$, U_n je neprázdná otevřená množina, protože G_n je hustá a jedná se o průnik dvou otevřených množin. Pak průnik $\bigcap_{n\in\omega} U_i = \emptyset$ a popsali jsme tedy vítěznou strategii hráče A, což je spor.

$\Longrightarrow$ (opět sporem) Předpokládejme, že má hráč A vítěznou strategii σ. Nechť U_0 je první tah podle σ. Ukážeme, že U_0 není Baireův. Zkonstruujeme proto strom $S \subset \sigma$ takový, že pro $p = (U_0, V_0, \ldots, U_n) \in S$ je množina

$$\mathbb{U}_p = \{U | (U_0, V_0, \ldots, U_n, U) \in S\} \tag{3.1}$$

tvořena disjuktními otevřenými množinami a $\bigcup \mathbb{U}_p$ je hustá v U_n. Označme

$$W_n = \bigcup \{U_n | (U_0, V_0, \ldots, U_n) \in S\}. \tag{3.2}$$

Pak množiny W_n jsou husté a otevřené v U_0 pro každé n. Nechť je průnik $\bigcap_{n\in\omega} W_n$ neprázdný (a $x := \bigcap_{n\in\omega} W_n$), pak musí existovat větev stromu $S(U_0, V_0, \ldots)$ taková, že platí $x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n$. To je ovšem ve sporu s tím, že σ je vítězná strategie hráče A. A tedy $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \emptyset$ a U_0 není Baireův prostor.

Existuje ovšem takovýto strom? Zkonstruujme jej matematickou indukcí podle délky větve.

- $\emptyset \in S$
- Pokud máme $(U_0, V_0, \ldots, V_{n-1}) \in S$, pak je $(U_0, V_0, \ldots, V_{n-1}, U_n) \in S$ jednoznačně dána strategií σ. Mějme tedy $p = (U_0, V_0, \ldots, V_{n-1}, U_n) \in S$. Nechť ν_p je maximální systém neprázdných otevřených podmožin V_n takový, že $\{V_n^* | V_n \in \nu_p\}$ je disjunktní, kde V_n^* je tah požadovaný jako prodloužení $p^\wedge V_n$. Přidejme do S všechny posloupnosti $(U_0, V_0, \ldots, V_{n-1}, U_n, V_n, V_n^*), V_n \in \nu_p$. Pak množina $\{V_n^* | V_n \in \nu_p\}$ je hustá v U_n. Pokud by nebyla hustá, pak by existovala otevřená neprázdná množina $G \subset U_n$, disjunktní s $\{V_n^* | V_n \in \nu_p\}$. Pak $\nu_p \cup G$, je sporem s maximalitou ν_p.

$\square$

Definice 67. Topologický prostor X nazveme Choquetův, pokud v něm má hráč B vítěznou strategii v Choquetově hře.

Poznámka 68. Předchozí věta nám tedy říká že každý Choquetův prostor je Baireův.

Věta 69. *Pokud prostor X, obsahuje neprázdnou otevřenou množinu M, která je první kategorie, pak má hráč A vítěznou strategii.*

Důkaz. Pokud je M první kategorie pak $M = \bigcup_{n\in\omega} M_n$, kde M_n jsou řídké. Navíc platí, že rozdíl otevřené a uzavřené množiny je otevřená množina, protože $A \setminus B = A \cap B^c$ a to je průnik dvou otevřených množin. Pokud hráč A volí $U_0 := M$ a $\forall n \in \omega : U_n = V_{n-1} \setminus \overline{M_n} \neq \emptyset$ (protože M_n je řídká), tak po spočetném počtu kroků vyřadí všechny prvky a tedy vyhraje. □

Uveďme si jedno pomocné lemma.

Lemma 70. *V úplněm metrickém prostoru X je průnik vnořených neprázdných uzavřených množin $(F_n)_{n\in\omega}$, splňující $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, neprázdný.*

Důkaz. Nechť pro každé $n \in \omega$ a_n je libovolný prvek množiny F_n, pak posloupnost $(a_n)_{n\in\omega}$ je konvergentní. To plyne z toho, že X je úplný prostor a $(a_n)_{n\in\omega}$ je cauchyovská, což získáme z podmínky $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$. $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \omega : \operatorname{diam}(F_n) < \epsilon$, pak $\forall m > n : \|a_n - a_m\| < \epsilon$, protože oba prvky patří F_n, díky vnořenosti. Označme limitu jako a, díky uzavřenosti našich množin navíc platí $\forall n \in \omega : a \in F_n$ a tedy $a \in \bigcap_{n\in\omega} F_n$, tedy tento průnik je neprázdný. □

Věta 71. *Pokud je X úplný metrický prostor, pak je Choquetův.*

Důkaz. Chceme ukázat, že v úplném prostoru (tedy takovém, kde cauchyovskost je ekvivalentní s konvergencí) má hráč B vítěznou strategii v Choquetově hře. Nechť hraje hráč B v každém tahu V_n tak, aby platilo, že $\overline{V_n} \subset U_n$.

Z lemmatu 70 máme $x \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{V_n} \subset \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Tento průnik je tedy neprázdný a jedná se o vítěznou strategii hráče B. □

Poznámka 72. Protože jsme si na začátku kapitoly dokázali, že každý Choquetův prostor je Baireův, tak nám věta 71 dává alternativní důkaz Baireovy věty.

3.2. Banachova-Mazurova hra

V této kapitole jsem čerpal z [12], [13] a [7].

Hra 73. Je dán uzavřený interval I_0. Dva hráči, již tradičně značení jako hráč A a hráč B, hrají nekonečnou hru tak, že střídavě volí uzavřené intervaly s nenulovou délkou I_n, $n \in \omega$ tak, aby splňovaly $I_{n-1} \supset I_n \supset I_{n+1}$.

Jsou dány množiny $A \subset I_0, B = I_0 \setminus A$. Hráč A vyhrává právě tehdy, když $\bigcap_{n\in\omega} I_n \cap A \neq \emptyset$.

Věta 74. *Hráč B má vítěznou strategii právě tehdy, když je A první kategorie.*

Důkaz. Začneme tím, že si ukážeme, jak obecně vypadá strategie hráče B. Mějme funkce $f_n : (I_0, I_1 \dots I_{2n-1}) \to I_{2n-1}$. Tedy

$$f_n(I_0, I_1 \dots I_{2n-1}) \subset I_{2n-1}. \tag{3.3}$$

Pak f_n musí být definovaná na každé vnořené posloupnosti uzavřených intervalů

$$I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_{2n-1}, \tag{3.4}$$

která vznikla

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\} : I_{2i} = f_i(I_0, I_1 \dots I_{2i-1}) \tag{3.5}$$

Posloupnost $(f_i)_{i\in\omega}$ pak tvoří strategii pro hráče B. Pokud navíc platí $\bigcup_{i\in\omega} I_i \subset B$, pro každou posloupnost splňující (3.4) a (3.5), pak se jedná o vítěznou strategii pro hráče B.

$\Longleftarrow$ Pokud je A první kategorie, pak $A = \bigcup_{n\in\omega} A_i$, kde A_i jsou řídké. Pokud bude hráč B volit $I_{2n} \subset I_{2n-1} \setminus \overline{A_n} \neq \emptyset$ (protože A_n jsou řídké), pak postupně „vyřadí“ všechny prvky A a tedy vyhraje.

$\Longrightarrow$ Mějme vítěznou strategii hráče B f_1,f_2 .... Pro f_1 vytvoříme systém uzavřených intervalů $J_i \subset I_0^\circ$, $i = 1, 2 \dots$ splňující:

i) $K_i = f_1(I_0, J_i)$ jsou disjunktní.

ii) $\bigcup_i K_i^\circ$ je husté v I_0.

a to následujícím postupem. Mějme posloupnost $(S_i)_{i\in\omega}$ intervalů s racionálními koncovými body. Pak $J_1 = S_1$, a další J_i je první člen $S_j \in (S_i)_{i\in\omega}$ takový, že $S_j \subset I_0 \setminus K_1 \setminus \dots$. Takto získané množiny očividně splňují *i)*. Pokud by neplatila ii), pak by existoval interval mezi některými dvěma intervaly K_i, K_j nenulové míry, označme jej P. Pak jistě existuje $S_P \subset P$ prvek posloupnosti $(S_i)_{i\in\omega}$, pak z (3.3) víme, že $f_1(I_0, S_P) \subset P$, a můžeme jej přidat do $(S_i)_{i\in\omega}$, čímž vzniknou 2 nové podintervaly P, s mírou menší než míra P, které nepatří do $\bigcup_i K_i^\circ$. Tento proces můžeme opakovat, dokud nebudou konce jednotlivých intervalů „dostatečně blízko“.

Stejně vybudujeme i posloupnost uzavřených intervalů $(J_{i,j})_{i\in\omega}$ v K_i° takových, že intervaly $K_{i,j} = f_2(I_0, J_i, K_i, J_{i,j})$, jsou disjunktní a jejich vnitřky jsou husté v K_i. Pak je i $\bigcup_{i,j=0}^{+\infty} K_{i,j}$ husté v I_0. Tento postup budeme opakovat.

Takto vybudujeme dva systémy uzavřených intervalů $J_{i_1,\dots,i_n}$ a $K_{i_1,\dots,i_n}$, kde $n, i_n \in \omega$, které splňují:

$$K_{i_1,\dots,i_n} = f_n(I_o, J_{i_1}, K_{i_1}, J_{i_1,i_2}, \dots, J_{i_1,\dots,i_n}) \tag{3.6}$$

$$J_{i_1,\dots i_{n+1}} \subset K^0_{i_1,\dots i_n} \tag{3.7}$$

Pro každé přirozené n jsou intervaly$K_{i_1,\dots i_n}$disjunktní, a sjednocení jejich vnitřků je husté v I_0. (3.8)

Mějme libovolnou sposloupnosti indexů $(i_n)_{n\in\omega}$ a pro ni definujeme

$$\forall n \in \omega : I_{2n-1} = J_{i_1,\dots,i_n}, I_{2n} = K_{i_1,\dots,i_n} \tag{3.9}$$

Jedná se o platnou pozici hráče B, (3.3) a (3.4) jsou splněny díky (3.7) a (3.5) je až na značení totožná, a po přeznačení podle (3.9) identická, s (3.6). Protože jsme se do této pozice dostali prostřednictvím vítězné strategie, tak navíc platí $\bigcap_{n\in\omega} I_n \subset B$.

Definujme pro každé přirozené n, $G_n := \bigcup_{i_1,\dots i_n} K^\circ_{i_1,\dots,i_n}$ a označme $E := \bigcap_{n\in\omega} G_n$. Pak pro každé $x \in E$, existuje unikátní posloupnost indexů i_n, pro niž platí $\forall n \in \omega, x \in K_{i_1\dots i_n}$. Každá tato sekvence nám zadá jednu hru prostřednictvím (3.9), a tedy $x \in \bigcap_{n\in\omega} I_n \subset B$, což dokazuje $E \subset B$, pak $A = I_0 \setminus B \subset I_0 \setminus E = \bigcup_n (I_0 \setminus G_n)$. Navíc z (3.8) plyne, že $\forall n \in \omega : I_0 \setminus G_n$ je řídká, jedná se o doplněk husté množiny, tvořené otevřenými intervaly s nenulovou délkou. Dohromady je tedy A první kategorie. $\square$

Věta 75. *Hráč A má vítěznou strategii právě tehdy, když existuje uzavřený interval $I_1 \subset I_0$ splňující, že $I_1 \cap B$ je první kategorie.*

Důkaz. $\Longleftarrow$ Pokud takovýto interval existuje, pak volí hráč A v prvním kole právě tuto množinu. Pak $B \cap I_1 = \bigcup_{n\in\omega} B_n$, kde B_n jsou řídké. Pokud bude volit v každém svém tahu $n \in \omega$: $I_{2n+1} \subset I_{2n} \setminus B_n \neq \emptyset$ (z řídkosti), pak $\bigcap_{n\in\omega} I_n \cap B = \emptyset$ a tedy $\bigcap_{n\in\omega} I_n \in A$.

$\Longrightarrow$ Abychom mohli požít větu 74, musíme nejdříve vyřešit to, že podmínky vítězství hráčů A a B nejsou symetrické, pokud vítězná množina není jednoprvková. Pokud má hráč A vítěznou strategii, je schopen ji vždy upravit tak, aby výsledný průnik $\bigcap_{n\in\omega} I_n$ byl jednoprvková množina, například může od jistého kroku volit $\lambda(I_{2n+1}) = \frac{\lambda(I_{2n})}{2}$. Toto je díky našemu předpokladu vítězná strategie prvního hráče ve hře s počátečními množinami A a B, ovšem udávám vítěznou strategii v každém kole, pokud byla sekvence hraná do tohoto kola podle ní. Tedy jedná se i o vítěznou strategii pro druhého hráče ve hře, kdy hráč A dostane množiny $B \cap I_1$ a hráč B dostane množinu $A \cap I_1$, kde I_1 je množina daná touto vítěznou strategií. Ovšem z předchozí věty plyne, že vítězná strategie existuje právě tehdy, když $A \cap I_1$ je první kategorie. $\square$

Definice 76. Řekneme že množina A, podmnožina topologického prostoru X, má *Baireovu vlastnost*, pokud existuje uzavřená množina G a množina první kategorie P taková, že $A = G \triangle P$. Kde $\triangle$ je symetrická diference: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Věta 77. *Pokud má množina A Baireovu vlastnost, pak:*

- *pokud je A první kategorie, pak má hráč B vítěznou strategii.*
- *pokud je A druhé kategorie, pak má hráč A vítěznou strategii.*

Důkaz. Nechť $A = G \triangle P$, kde G je otevřená a P je první kategorie. Pokud $G = \emptyset$, pak A je první kategorie a podle věty 74 má hráč B vítěznou strategii. Pokud $G \neq \emptyset$, pak může hráč A zvolit $I_1 \subset G$, protože pak platí $I_1 \cap B$ je první kategorie a z věty 75 existuje vítězná strategie pro hráče A. $\square$

Kapitola 4

Geometrické hry

Na závěr se podíváme na hry vycházející ze hry Lev a křesťan. Jedná se o problém, který je známý již od počátku minulého století. Konkrétně jej formuloval v roce 1925 německý matematik Richard Rado. Ukážeme si původní problém i jeho řešení, jež bylo publikováno o více než 30 let později. Pak dvě jednoduchá zobecnění dané hry a kapitolu zakončíme hrou Bod-přímka, kterou vytvořili čeští matematici M. Zelený a J. Malý, kteří ji využili k poskytnutí elegantního důkazu problému gradientu od Andrého Weila. Ten byl formulován v šedesátých letech minulého století a zůstal otevřený až do roku 2005, kdy jej vyřešil Zoltan Bulczolich.

4.1. Lev a křesťan

V této kapitole jsem čerpal z [3].

Hra 78. Lev a křesťan jsou v kruhové římské aréně. Lev se snaží ulovit a sežrat křesťana. Otázkou je, zda se mu to může podařit v konečném čase za předpokladu, že maximální rychlost křesťana i lva je stejná.

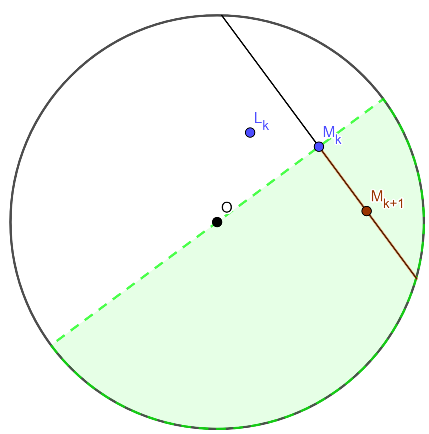
Poznámka 79. Odpověd na tuto otázku poskytl A.S. Besicovitch, když dokázal, že křesťan je schopen vždy utéct lvu, pokud poběží po vhodně zvolené polygonální trase. Tento důkaz si zde nyní ukážeme.

Věta 80. *Existuje vítězná strategie pro křesťana ve hře Lev a křesťan.*

Důkaz. Nechť poloměr arény je roven 1, střed arény označme O, M_k pozici křesťana v časový okamžik t_k, L_k pozici lva v tento okamžik a $(1-\epsilon)$ vzdálenost křesťana od středu arény v čase 0. Navíc předpokládejme, že se křesťan vždy pohybuje svou nejvyšší možnou rychlostí, a že se M_0 nerovná L_0, jinak bychom začínali v okamžiku, kdy lev hoduje na křesťanovi a celá hra by postrádala smysl.

Začněme tím, že zkonstruujeme posloupnost bodů $(M_k)_{k\in\omega}$ podle následujících pravidel:

- Bod M_{k+1} leží na přímce kolmé k přímce M_kO, obsahující bod M_k.
- Bod L_k nepatří vnitřku otevřené poloroviny určené přímkou M_kO, která obsahuje bod M_{k+1}



Obrázek 4.1: Konstrukce bodu M_{k+1}.

Při této konstrukci vidíme, že $\forall k \in \omega$, $L_k \neq M_k$. To plyne z našeho předpokladu $M_0 \neq L_0$ a toho že M_{k+1} hledáme v polorovině, která neobsahuje L_k. Tedy v těchto bodech křesťan uloven nebude. Navíc díky tomu, jak jsme volili body M_k, nedostihne lev křesťana ani mezi těmito body. Toto můžeme nahlednout tak, že si vybereme libovolný bod úsečky M_kM_{k+1} a označíme si tento bod B. Z předpokladů plyne, že aby zde mohl být lev ve stejný moment jako křesťan, musel by startovat na bodu kružnice se středem v bodě B s poloměrem rovným vzdálenosti B od M_k. Tato kružnice ale leží, s výjimkou bodu M_k, uvnitř poloroviny, která neobsahovala L_k, takže by muselo platit $L_k = M_k$, což není možné.

Podle předchozího návodu zkonstruujeme posloupnost (M_k) s dodatečnými vlastnostmi:

- M_k jsou všechny uvnitř arény.
- Trasa, kterou křesťan proběhne, je nekonečně dlouhá.

Podívejme se, jak těchto dvou vlastností dosáhneme. Označme l_k vzdálenost bodů M_{k-1} a M_k. Délka celkové trasy tedy bude rovna $\sum_{k=1}^{+\infty} l_k$. Chceme, aby tato suma divergovala a zároveň body M_k zůstaly uvnitř arény. Pomocí Pythagorovi věty vidíme, že vzdálenost bodu M_n od středu arény je roven $(1-\epsilon)^2 + \sum_{k=1}^{n} l_k^2 \leq (1-\epsilon) + \sum_{k=1}^{n} l_k^2$, a tento výraz musí být menší než 1. To je ovšem ekvivalentní s nerovností $\sum_{k=1}^{n} l_k^2 < \epsilon$.

Zvolme l_k například ve tvaru $\frac{c}{k^{\frac{3}{4}}}$, a za c dosaďme $\frac{\epsilon}{2}$, pak suma $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{c}{k^{\frac{3}{4}}})^2$ jistě diverguje, což ověříme například porovnáním se harmonickou řadou. Navíc platí

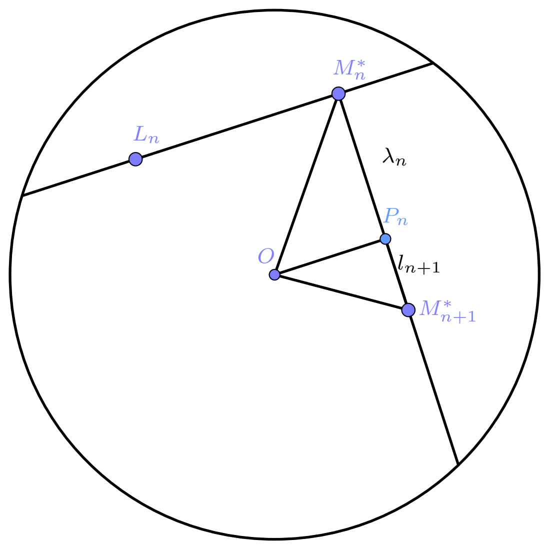
$$\sum_{k=1}^{n} (l_k)^2 = c^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} < c^2 \left(1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = 3c^2 = \frac{3}{4}\epsilon^2 < \epsilon.$$

Našli jsme tedy nekonečnou trasu, která se celá nachází uvnitř arény a tím jsme dokázali že křesťan může lvu utéct.

□

Poznámka 81. Jak by se dalo čekat, nejedná se o jediný možný postup tvorby této trasy. Uveďme si ještě jeden postup, který později využijeme při zobecňování této hry do vyšších dimenzí. Tento lze najít v [8].

Alternativní důkaz. Mějme body $M_0, M_1, \ldots$ které jsme získali v minulém důkazu, volme body $M_0^*, M_1^*, \ldots$ tak, že $M_0^* = M_0$, a pak v každém bodě budeme volit bod M_{n+1}^* tak, aby splňoval následující požadavky. Označme si λ_n kolmici k přímce



Obrázek 4.2: Tvorba bodu M_{n+1}^*

$L_n M_n^*$ obsahující bod M_n a P_n patu kolmice na λ_n obsahující počátek O. Pak námi hledaný bod bude ležet na λ_n za P_n tak, aby délka úsečky $M_{n+1}^* P_n$ byla rovna $l_{n+1} = |M_n M_{n+1}|$.

Pokud budeme trasu volit takto a křesťan poběží vždy plnou rychlostí, pak lev opět nechytí křesťana v žádném bodě, protože platí $|L_n M_{n+1}^*|^2 = |L_n M_n|^2 + |M_n M_{n+1}|^2 < |M_n M_{n+1}|^2$. A stejným argumentem bychom ukázali, že lev neuloví křesťana ani mezi těmito body. Že je trasa nekonečná, plyne z rovnice $|M_n^* M_{n+1}^*| = |M_n^* P_n| + |M_n M_{n+1}|$ a toho, že už suma vzdáleností původních bodů diverguje. Zbývá nám tedy dokázat, že se i při této konstrukci udržíme uvnitř arény.

Začněme tím, že si vyjádříme vzdálenosti bodů M_n^*, M_{n+1}^* od středu arény.

$$|OM_n^*|^2 = |OP_n|^2 + |P_n M_n^*|^2 \tag{4.1}$$

$$|OM_{n+1}^*|^2 = |OP_n|^2 + |P_n M_{n+1}^*|^2 = |OP_n|^2 + l_{n+1}^2 \tag{4.2}$$

Odečtením (4.1) od (4.2) získáme

$$|OM_{n+1}^*|^2 - |OM_n^*|^2 = l_{n+1}^2 - |OP_n|^2 \le l_{n+1}^2 \tag{4.3}$$

Nyní pomocí matematické indukce dokažme nerovnost $|OM_n^*| \le |OM_n|$:

a) $n = 0$:

   Očividně platí, protože $M_0 = M_0^*$

b) Ukažme nyní, že platnost formule pro n implikuje její platnost pro $n + 1$:

$$|OM_{n+1}|^2 = l_{n+1}^2 + |OM_n|^2 \ge (|OM_{n+1}^*|^2 - |OM_n^*|^2) + |OM_n|^2 =$$
$$|OM_{n+1}^*|^2 + (|OM_n|^2 - |OM_n^*|^2) \ge |OM_{n+1}^*|^2.$$

   V první nerovnosti jsme použili (4.3), a v druhé nerovnosti jsme aplikovali indukční předpoklad na závorku, která je díky němu kladná. Po odmocnění máme požadovanou nerovnost, neboť délky úseček jsou jistě kladné.

Nové body jsou tedy nejhůře stejně daleko od počátku jako ty původní, a jsou tedy v aréně, a tudíž jsme zde popsali druhou vítěznou strategii pro křesťana.

□

4.2. Ptáci a moucha

V této kapitole jsem čerpal z [4].

Hra 82. Jedním ze zobecnění minulé hry je její posunutí do více dimenzí, roli lva zde zaujímá pták, zatímco křesťana moucha, místo arény pak máme n-dimenzionální sféru. Otázka zní: Kolik n-D ptáků je třeba na ulovení mouchy pokud mají všichni zůčastnění stejné rychlosti a ptáci mají nulovou reakční dobu, což jim umožňuje kopírovat pohyb mouchy? Odpověď nám podá následující věta.

Věta 83. *Nechť moucha i všichni ptáci mají stejnou maximální rychlost a ptáci mají nulovou reakční dobu, což jim umožňuje kopírovat pohyb mouchy. Pak nutný a postačující počet ptáků potřebných k ulovení mouchy v jednotkové n-D sféře, je právě n.*

Důkaz. Označme střed sféry jako O, polohu mouchy v čase t_k jako $M(t)$ a polohu i-tého ptáka v tento čas jako $P_i(t)$.

Začněme důkazem toho, že $n-1$ ptáků nestačí. K tomu si zkonstruujeme nadrovinu $N(t)$, která obsahuje $M(t), P_1(t), P_2(t), \ldots, P_{n-1}(t)$. Pokud takovýchto nadrovin existuje více, tak si jednu vybereme. K ní zkonstruujeme kolmici λ_t obsahující $M(t)$. Označme Q_t patu kolmice na λ_t obsahující O. Nyní využijeme výsledků získaných v kapitole (4.1) a bod $M(t+1)$ budeme hledat na λ_t tak, aby $|Q_t M(t+1)| = l_t$, kde hodnotu l_t jsme získali v důkazu věty 80, a podle důkazu 81 se jedná o vítěznou strategii pro mouchu, neboť výpočet v tomto důkazu prezentovaný je nezávislý na dimenzi prostoru.

Víme, že $n-1$ ptáků nebude na mouchu stačit. Podívejme se tedy, zda jich bude opravdu stačit n. Půjdeme na to pomocí matematické indukce podle dimenze prostoru.

a) $n = 1$:

V 1-D je situace zjevná, bude moucha ulovena nejvýše za čas, který pták potřebuje na uražení vzdálenosti $|PK|$, kde K je krajní bod „arény“ takový, že platí $M \in PK$.

b) Z n plyne $n+1$:

Začněme tím, že zavedeme kartézský souřadnicový systém se souřadnicemi $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ a s počátkem ve středu arény. Na začátku lovu se ptáci seřatí do nadroviny, danou rovnicí $x_{n+1} = 0$. Označme M^* projekci M do této nadroviny. Dle indukčního předpokladu „uloví“ ptáci $P_2, \ldots, P_{n+1}$ projekci M^*. Nechť ji uloví pták P_{n+1}. Ten se pak bude pohybovat tak, že rozloží svůj vektor na dvě kolmé složky, jedna složka bude v nadrovině kolmé na spojici P_{n+1} s M, tato složka bude stejná jako rychlost projekce mouchy v této nadrovině, neboli bude mít pořád stejné souřadnice v této nadrovině jako M^*, druhá složka bude mířit směrem k mouše a její velikost bude taková, aby celková rychlost tohoto ptáka byla maximální možná.

Označme nyní $X(t)$ nadrovinu obsahující $M(t)$, rovnoběžnou s nadrovinou

$x_{n+1} = 0$. Pak se ptáci $P_1, \ldots, P_n$ začnou co nejrychleji pohybovat tak, aby se dostali do nadroviny $X(t)$. Nadrovina $X(t)$ se bude „pohybovat“ ve směru x_{n+1}, rychlost tohoto posunu bude záležet na $(M'(t))_{n+1}$(což je $(n+1)$-ní složka rychlosti mouchy). Rozdělme si nyní problém na dva případy podle velikosti této derivace.

a) Pokud je $|(M'(t))_{n+1}| \geq \frac{1}{2}$ po dobu alespoň dvou časových jednotek.

   Pak je souřadnice x_{n+1} ptáka P_{n+1} rovna 1, protože pták urazil vzdálenost alespoň 1 ve směru této souřadnice, zároveň tato souřadnice mouchy musí být v absolutní hodnotě ostře větší. Jinak by ji, vzhledem k tomu, že všechny ostatní souřadnice M a P_{n+1} jsou stejné, pták již ulovil. To ale není možné, protože jinak by se již moucha nacházela mimo arénu, pták P_{n+1} tedy mouchu ulovil na hranici sféry.

b) Nechť je $|(M'(t))_{n+1}| < \frac{1}{2}$ až na dobu maximálně dvou časových jednotek.

   Pak se ptáci $P_1, \ldots, P_n$ mohou rychlostí alespoň $\frac{1}{2}$ ve směru x_{n+1} blížit k nadrovině $X(t)$. V momentě, kdy se tito ptáci dostanou do nadroviny X (což znamená, že bude platit $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, P_i \in X$) se všichni ptáci budou chovat tak, aby zůstali v této nadrovině, tedy budou kopírovat pohyb mouchy ve směru x_{n+1}, a všechnu svou zbylou rychlost budou používat na pohyb uvnitř této nadroviny tak, aby chytili mouchu. Tedy n ptáků se bude v n-dimenzionálním prostoru snaži chytit mouchu uvnitř sféry, zatímco mají stejnou maximální rychlost. Přeškálováním rychlostí a velikosti sféry bychom dostali naprosto identickou úlohu jako v indukčním předpokladu a z něj tedy plyne, že ptáci mouchu uloví.

$\square$

4.3. Muž a mnoho lvů

Podívejme se nyní na další podobnou úlohu, v této kapitole jsem čerpal z [6].

Hra 84. Mějme muže a libovolné spočetné množství lvů v nekonečné poušti, tedy neexistuje hranice, uvnitř které by se lov musel odehrávat. Existují nyní nějaké podmínky, za kterých by muž utekl, nebo byl naopak sežrán?

Než začneme tyto otázky zkoumat označme si do konce kapitoly polohu muže v čase t jako $M(t)$, polohu jednotlicých lvů v tento čas jako $L_1(t), L_2(t), \ldots, L_n(t)$, konvexní obal bodů $L_1(0), \ldots, L_n(0)$ jako C a maximální rychlost označíme jako w.

Věta 85. *Pokud $M(0)$ není vnitřním bodem konvexní množiny C, pak existuje vítězná strategie pro muže.*

Důkaz. Protože $M(0)$ není vnitřním bodem C, existuje přímka p obsahující $M(0)$, dělící rovinu na dvě poloroviny, z nichž jedna neobsahuje žádné body C. Pokud se člověk rozběhne po polopřímce kolmé na p obsahující $M(0)$, směřující do poloroviny neobsahující C, pak unikne lvům. Totiž:

$$|L_i(0)L_i(t)| \leq |M(0)M(t)| < |L_i(0)M(t)|.$$

□

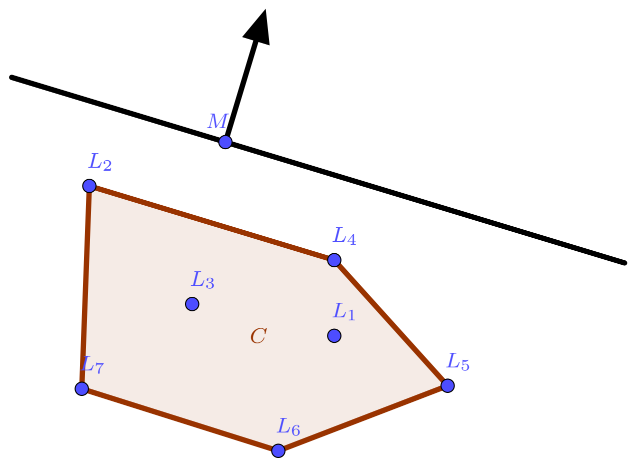
Věta 86. *Pokud $M(0)$ je vnitřním bodem konvexní množiny C, pak existuje vítězná strategie pro lvy.*

Důkaz. Označme rychlost člověka $\vec{u}$, rychlost i-tého lva $\vec{v}_i$, dále projekce těchto rychlostí na úsečku ML_i jako $\vec{v}_i'$, respektive $\vec{u}_i'$, a konečně zavedeme $\vec{u}_i'' := \vec{u} - \vec{u}_i'$ a $\vec{v}_i'' = \vec{v} - \vec{v}_i'$, grafické znázornění situace lze najít v obrázku 4.4. Pokud se lvi zařídí podle následujících tří pravidel, pak uloví člověka:

i) $v_i = w$ (Lvi běží maximální rychlostí.)

ii) $\vec{u}_i'' = \vec{v}_i''$ (Díky tomu si lvi udrží člověka mezi sebou.)

iii) $\vec{v}_i'$ má stejnou orientaci jako $\overrightarrow{ML_i}$ (Každý lev se snaží přibližovat se k člověku.)



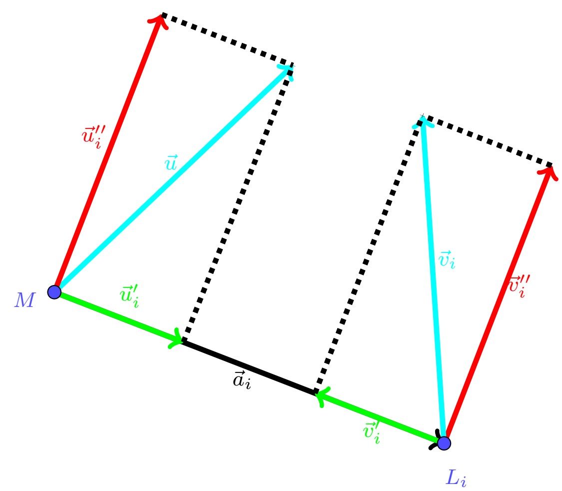
Obrázek 4.3: Situace pokud $M \notin C^0$

Dokažme, že tyto požadavky jsou skutečně postačující. Nejprve označme $\vec{a}_i = \overrightarrow{M(0)L_i(0)}$. Z podmínky $i)$ víme, že $v_i \geq u$ a z $ii)$ že $\vec{u}_i'' = \vec{v}_i''$, z těchto dvou nerovnic a Pythagorovy věty získáme $v_i' \geq u_i'$, což nám říká, že vzdálenost mezi člověkem a libovolným lvem nikdy neroste. Z $ii)$ navíc plyne že orientace $\vec{a}_i$ se v čase nemění. K dokončení důkazu využijeme následující lemma.

Lemma 87. *Existuje ostrý úhel α takový, že existuje $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pro které platí $|\angle(\vec{u}, \vec{a}_i)| \leq \alpha$.*

Důkaz. Vyjděme z toho že $M(0) \in C$. Pak musí platit, že pro každé 2 lvy umístěné ve vrcholech C je vnitřní úhel $|\angle(\overrightarrow{M(0)L_i(0)}, \overrightarrow{M(0)L_j(0)})| < \pi$. Pokud by tomu tak nebylo, byl by muž mimo vnitřek C. Vezměme největší takovýto úhel, a polovinu jeho velikosti označme α. Pak tato α je ta hledaná. Pokud by totiž byly všechny úhly ostře větší než α, pak by úhel rozdělený vektorem $\vec{u}$ musel být ostře větší než 2α, což by bylo ve sporu s tím, že jsme vybrali ten největší. $\square$

Nyní si vezmeme úhel α z lematu 87, a najdeme lva $L(i)$ tak, aby platilo



Obrázek 4.4: Příklad možného rozkladu rychlostí člověka a lva

$|\angle(\vec{u}\vec{a}_i)| < \alpha$. Nyní

$$|\vec{v}_i''| = |\vec{u}_i''| \leq |\vec{u}| \sin\alpha \leq w \sin\alpha, \tag{4.4}$$

$$|\vec{v}'| = \sqrt{\vec{v}_i^2 - \vec{u}_i''^2} \geq \sqrt{w^2 - w^2 \sin^2\alpha} = w\cos\alpha. \tag{4.5}$$

Kde v (4.5) jsme použili nejdříve i) a (4.4), a v rovnosti nezápornost jak w, tak funkce kosinus na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Díky tomu, že úhel α je ostrý, míří i vektor $\vec{u}_i'$ směrem k L_i. Pokud navíc přihlédneme k tomu, že orientace jednotlivých $\vec{a}_i$ se v čase nemění, tak vzdálenost mezi M a L_i klesá alespoň rychlostí $w\cos\alpha$. Pak tedy víme, že vzdálenost mezi člověkem a každým lvem neroste a jedna z těchto vzdáleností klesá. Vidíme, že součet $|ML_1| + |ML_2| + \ldots + |ML_n|$ klesá alespoň rychlostí $w\cos\alpha$. Tedy lvi uloví člověka v konečném čase. □

4.4. Hra bod-přímka

V této kapitole jsem čerpal z [3].

Hra 88. Dva hráči, hráč B a hráč P, hrají nekonečnou hru na jednotkovém kruhu K. Hra začíná tím, že hráč B zvolí bod $x_0 \in K$, načež hráč P zvolí přímku $p_0 : x_0 \in p_0$. Hráči poté střídavě hrají podle následujících podmínek. V n-tém kole, $n \in \omega, n \geq 1$, volí hráč B bod $x_n : x_n \in K, x_n \in p_{n-1}$, a poté volí hráč P přímku $p_n : x_n \in p_n$.

Takto hráči vytvoří posloupnosti $(x_i)_{i\in\omega}$ a $(p_i)_{i\in\omega}$. Hráč P vyhraje právě tehdy, když je posloupnost $(x_i)_{i\in\omega}$ konvergentní, jinak vyhrává hráč B.

Věta 89. *Hráč P má vítěznou strategii ve hře bod-přímka.*

Důkaz. Označme O střed kruhu K. Předpokládejme, že existuje systém vnořených množin $\{K_\delta : \delta \in \tau\}$, kde pro každé δ je K_δ konvexní podmožina K, a $\tau \subset [0, \pi]$ je indexová množina splňující:

(i) τ je hustá v $[0, \pi]$ a K_δ má obsah δ,

(ii) pokud $0 \leq \delta_1 < \delta_2 \leq \pi$, pak $K_{\delta_1} \subset K_{\delta_2}$,

(iii) Pro každé $c : 0 < c \leq \pi$ a $d > 0$ existují $\gamma, \delta : \gamma < c \leq \delta$ takové, že $\operatorname{diam} K_\delta \setminus K_\gamma < d$

(iv) $\forall c \in \tau$ platí $\bigcap_{\delta > c, \delta \in \tau} K_\delta = K_c$,

(v) $K_0 = \{O\}$.

Způsob konstrukce tohoto systému ukážeme na konci důkazu. Předpokládejme, že hráč B nebude hrát v každém kole O, jinak by šlo o konstantní posloupnost a tedy o posloupnost konvergentní. Začneme tedy s prvním tahem v němž volí hráč B jiný bod než je O, tedy $x_1 \neq O$.

Nechť hráč P zkonstruuje dvojici posloupností indexů z τ a to $0 = \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \cdots \leq \pi$ a $0 \leq \delta_1, \delta_2, \cdots \leq \pi$, splňující pro každé $n \in \omega$:

(a) $0 \leq \delta_n - \gamma_n \leq \frac{1}{n}$,

(b) označíme-li $D_n := K_{\delta_n} \setminus K_{\gamma_n}$, pak $\operatorname{diam}(D_n) \leq \frac{1}{n}$,

(c) $x_n \in D_n$.

Ukažme konstrukci těchto posloupností matematickou indukcí. Pokud bychom měli již určeny $\gamma_0, \dots \gamma_{n-1}$, $\delta_1, \dots \delta_{n-1}$ pro $x_1, \dots, x_{n-1}$ a nechť $x_n \notin K_{\gamma_{n-1}}$.

Označme $c_n = \inf\{\gamma : x_n \in K_\gamma\}$. Podle podmínky (iv) platí: $\forall \gamma \geq c_n : x_n \in K_\gamma$, protože K_{c_n} je průnik všech těchto množin. Z (iii) můžeme najít γ_n a δ_n, volbou $c = c_n$ a $d = \frac{1}{n}$, navíc protože $\operatorname{diam}(D_n) \leq \frac{1}{n}$ a tedy obsah D_n je menší než právě jeho průměr. Jedná se nejvýše o kruh s průměrem $\frac{1}{n}$, a tedy protože $\delta_n - \gamma_n = S(D_n) \leq \frac{\pi}{4}\frac{1}{n}^2 < \frac{1}{n}^2 \leq \frac{1}{n} = \operatorname{diam}(D_n)$ je splněna i podmínka (a). Protože jsme předpokládali, že $x_n \notin K_{\gamma_{n-1}}$, platí i $\gamma_{n-1} \leq \gamma_n$. Pokud by toto neplatilo byl by to spor s (iv).

Přímku p_n pak volíme tak, aby procházela x_n a měla prázdný průnik s K_{γ_n}, což je konvexní a uzavřená množina. To můžeme například udělat tak, že najdeme $y_n \in K_{\gamma_n} : y_n = \min_{y_n \in K_{\gamma_n}} \|x_n - y_n\|$ a p_n volíme kolmou na $x_n y_n$. Pro $n = 1$, máme jen $K_{\gamma_0} = \{O\}$, a z našeho předpokladu navíc $x_1 \neq O$. Čímž jsme ukázali platnost indukčního předpokladu.

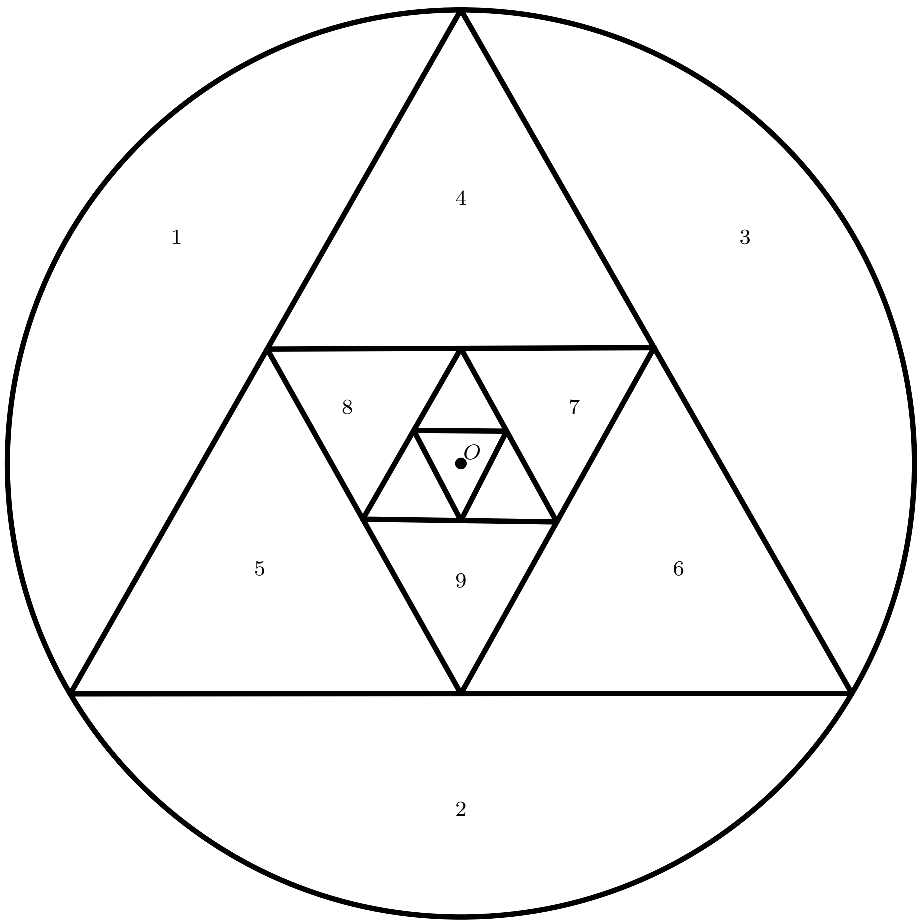
Dokažme, že pokud bude hrát hráč P podle tohoto postupu, tak donutí hráče B hrát konvergentní posloupnost. K tomu nám stačí ukázat cauchyovskost posloupnosti $(x_i)_{i\in\omega}$. K tomu stačí ukázat, že pro každé $m \in \omega$ existuje množina $M_m : \operatorname{diam}(M_m) < \frac{1}{m}$, která obsahuje všechna x_n s dostatečně velkým n. K tomu si označme $c := \sup \gamma_n$.

Předpokládejme, že existuje $N \geq m : \delta_N > c$. Protože $(\gamma_n)_{n\in\omega}$ konverguje k c zleva, protože je monotonní a omezená, pak musí konvergovat i posloupnost $(\delta_n)_{n\in\omega}$, protože $\forall n \in \omega : \gamma_n - \delta_n = \frac{1}{n}$. Tak musí od určitého n platit $\delta_n < \delta_N$, a $x_n \in K_{\delta_n} \setminus K_{\gamma_n} \subset K_{\delta_N} \setminus K_{\gamma_N} = D_N$, což je naše hledaná množina protože $\operatorname{diam}(D_N) = \frac{1}{N} < \frac{1}{m}$.

Pokud by platilo naopak $\forall n \geq m : \delta_n \leq c$, pak najdeme použitím (iii) $\gamma < c \leq \delta$ takové, že $\operatorname{diam}(K_\delta \setminus K_\gamma) < \frac{1}{m}$. Protože $(\gamma_n)_{n\in\omega}$ konverguje k c zleva, existuje $N \in \omega$ takové, že pro každé $n \geq N$ platí $c \geq \gamma_n > \gamma$ a navíc platí $\forall n \geq m : \delta_n \leq c \leq \delta$. Tedy $x_n \in K_{\delta_n} \setminus K_{\gamma_n} \subset K_\delta \setminus K_\gamma$.

Tedy v obou případech je posloupnost $(x_n)_{n\in\omega}$ cauchyovská a tudíž konvergentní. Zbývá nám jen ukázat, jak zkonstruujeme náš systém množin. Indexy se nebudeme zabývat, neboť se bude jednat o obsahy jednotlivých množin.

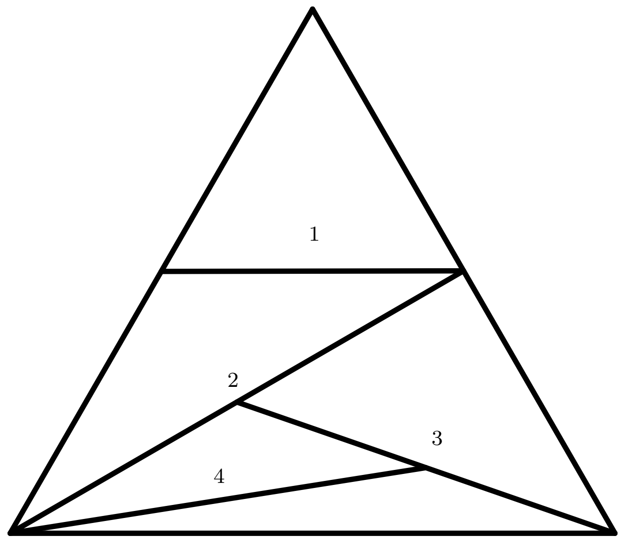
Začněme s $K_\pi := K$, ten si rozdělíme podle schématu 4.5, budeme z něj



Obrázek 4.5: První fáze řezání

odřezávat nejdříve půlměsíce $1, 2$ a 3, a pak trojúhelníky $4, 5, \ldots$, přičemž nám vždy zůstane alespoň pravidelný trojúhelník obsahující střed kruhu, čímž získáváme (v). Pro takto získané K_γ by platilo $\operatorname{diam}(K_\gamma \setminus K_{\gamma'}) \le \sqrt{3}$, což je délka hrany největšího trojúhelníku.

Dalšího zjemnění dosáhneme rozřezáním jednotlivých částí vezmeme trojúhelník (půlměsíc) a spojíme středy jeho stran, kterými se tento útvar nedotýká zbytku naší konvexní množiny, to je první řez. Spojíme jeden z konců tohoto řezu s opačným koncem poslední hrany trojúhelníku, kterou jsme nerozpůlili, to je druhý řez. Poté budeme vždy spojovat střed nově vytvořené strany s protějším



Obrázek 4.6: Řezání trojúhelníku

krajním bodem původní strany trojúhelníku, ukážeme si řezání pro trojúhelník 4 v obrázku 4.6. Díky tomuto procesu vidíme (ii) a (iii).

Tento proces budeme opakovat na takto získané trojúhelníky. Tímto můžeme rozřezat K na libovolně malé kousíčky, navíc s každým řezáním klesá i poloměr rozdílů jednotlivých množin z čehož plyne (i) a (iii). Pokud se navíc budeme držet toho, že budeme vždy řezat nejdříve velké kusy, podle již dříve uvedeného pořadí, až po té co odebereme všechny velké kousky, které jsme potřebovali, začneme odebírat menší kousky, tak výsledná množina je vždy konvexní.

$\square$

Poznámka 90. Uveďme si pro zajímavost Weilův problém gradientu, pro jehož řešení je možné tuto hru použít.

Předpokládejme že máme, $n \in \omega, n \geq 2$ a $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Na ní zkonstruujeme diferencovatelnou funkci $f : G \to \mathbb{R}$ takovou, že ∇f zobrazuje G do $\mathbb{R}^n$. Je pravda, že pro každou otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je množina $(\nabla f)^{-1}(\Omega)$ buď prázdná nebo nulové Lebesgueovy míry?

Pro $n = 1$ je toto tvrzení pravdivé a nazývá se Denjoy-Clarksonova vlastnost. Ve vyšších dimenzích už toto tvrzení neplatí, což dokázal Z. Buczolich a alternativní důkaz pomocí hry bod-přímka podali J. Malý s M. Zeleným v článku [10].

Závěr

Cílem práce bylo pomocí řady příkladů demonstrovat koncept nekonečné hry. Hry jako šachy nebo dáma začaly být z pohledu matematiky systematicky zkoumány na začátku 20. století, kdy docházelo také k prudkému rozvoji teorie množin. Není náhodou, že v obou těchto matematických oblastech zanechal významnou stopu Ernst Zermelo (průlomovým pro teorii her byl článek [14]). Později se začaly formulovat konečné hry více matematické povahy, jako je hra vězňovo dilema, která byla poprvé formulována v roce 1950. Pak již nestálo nic v cestě zobecnění konečných na hry s nekonečným počtem tahů. V práci jsme se pokusili doložit, že nejde jen o neplodné formální zobecnění – ukázalo se, že nekonečné hry jsou silným důkazovým nástrojem v mnoha částech matematiky. Možnosti nekonečných her jsou v práci naznačeny například ve větě 57 (alternativní důkaz nespočetnosti intervalu $[0,1]$), větě 71 (alternativní důkaz Baireovy věty) a větě 44 (alternativní důkaz Věty o perfektní množině). Celá kapitola 4.4 je věnována hře „Bod-přímka“, pomocí níž J. Malý a M. Zelený alternativním způsobem vyřešili Weilův problém gradientu. Důkazy pomocí nekonečných her jsou cenné, protože poskytují jiný vhled do problému než „konvenční“ důkazy. Trochu stranou stojí trojice geometrických her „Lev a křesťan“, „Ptáci a moucha“ a „Muž a mnoho lvů“, které mohou posloužit jako motivace pro zmíněnou hru „Bod a přímka“, ale jsou zajímavé i samy o sobě, protože dávají návod, jak pomocí sledu jednoduchých geometrických úvah zodpovědět i na první pohled neřešitelné otázky.

Literatura

[1] AURICHI, Leandro F. a Rodrigo R. DIAS. A minicourse on topological games. Topology and its Applications. 2019, 258(4), 305-335.

[2] BAKER, Matthew H. Uncountable Sets and an Infinite Real Number Game. Mathematics Magazine. 2018, 80(5), 377-380. ISSN 0025-570X. Dostupné z: doi:10.1080/0025570X.2007.11953513

[3] BOLLOBÁS, Béla. The Art of Mathematics: Coffee Time in Memphis. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. ISBN 13 978-0-521-87228-7.

[4] CROFT, H. C. "Lion and Man": A Postscript. Journal of the London Mathematical Society. 1964, 39(1), 385-390.

[5] HIRSCH, Francis a Gilles LACOMBE. Elements of Functional Analysis. New York: Springer Science & Business Media, 1999. ISBN 1461214440.

[6] JANKOVIĆ, Vladimir. About a man and lions. Matematicki Vesnik. 1978, 30(1), 359-362. ISSN 00255165.

[7] KECHRIS, A. S. Classical descriptive set theory. New York: Springer, 1995. ISBN 03-879-4374-9.

[8] LITTLEWOOD, J. E. A mathematician's miscellany. Cambridge: Cambridge University Press, 1953. ISBN 0-521-33058-0.

[9] MALEVA, Olga. The Baire Category Theorem and the Banach-Mazur game. Londýn, 2016. Dostupné také z: https://www.lms.ac.uk/events/lms-summer-schools/2016

[10] MALÝ, Jan a Miroslav ZELENÝ. A note on Buczolich's solution of the Weil gradient problem: A construction based on an infinite game. Acta Math. Hungar. 2016,113(1-3), 145-158.

[11] MATRIN, D. A., A purely inductive proof of Borel determinacy, Recursion theory (Ithaca, N.Y., 1982), Proc. Sympos. Pure Math. 42, 303–308, Amer. Math. Soc. 1985.

[12] OXTOBY, John C. Measure and category: a survey of the analogies between topological and measure spaces. 2nd ed. New York: Springer, 1980. Graduate texts in mathematics. ISBN 03-879-0508-1.

[13] ZELENÝ, Miroslav. Deskriptivní teorie množin. Praha, 2019. Dostupné také z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/ zeleny/mff/Deskriptivni_teorie_mnozin.pdf

[14] ZERMELO, Ernst. Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. In: HOBSON, Ernest William a Augustus Edward Hough LOVE. Proceedings of the Fifth Congress of Mathematicians (Cambridge 1912). Cambridge University Press, 1913, s. 501-504.

[15] ZUBRZYCKI, S. On the game of Banach and Mazur. Colloquium Mathematicae. 1957, 4(2), 227-229.