

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKA PRÁCA

Spočítatelné a nespočítatelné množiny



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Ferdinand Čapka**
Studijní program: B1101 Matematika
Studijní obor: Matematika a její aplikace
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2015

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Ferdinand Čapka

Název práce: Spočítatelné a nespočítatelné množiny

Typ práce: Bakalárska práca

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2015

Abstrakt: Práce má sumarizačný charakter. V úvode sa zaoberá všeobecnou teóriou množín, aby bolo možné následne definovať pojem spočítateľnej a nespočítateľnej množiny. Rozoberá problematiku spočítateľných a nespočítateľných množín. Ďalej sa venuje topologickým priestorom, kde spočítateľnosť hrá dôležitú úlohu. Mojm prínosom je hlavne riešenie vlastných príkladov v prvej a druhej kapitole a taktiež modifikácia niektorých tvrdení.

Klíčová slova: Množina, spočítateľný, nespočítateľný, mohutnosť, topologický priestor

Počet strán: 59

Počet příloh: 0

Jazyk: slovenský

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Ferdinand Čapka

Title: Countable and uncountable sets

Type of thesis: Bachelor's

Department:

Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.

The year of presentation: 2015

Abstract: Theses has summarisational character. The introduction deals with the general theory in order to subsequently define the concept of countable and uncountable sets. Theses analyzes issues of countable and uncountable sets. In another aspect it deals with typological spaces where countability plays an important role. The main contribution of my theses is solution of my own examples in chapters I and II, as well as modification of some statements.

Key words: Set, countable, uncountable, cardinality, topological space

Number of pages: 59

Number of appendices: 0

Language: Slovak

Prehlásenie

Prehlasujem, že som bakalársku prácu vypracoval samostatne pod vedením pána doc. Mgr. Karla Pastora, Ph.D. s použitím uvedenej literatúry.

V Žiline dňa 9. mája 2015

Podakovanie

Rád by som poďakoval vedúcemu bakalárskej práce za spoluprácu a za čas, ktorý mi venoval počas konzultácií.

Obsah

Úvod	7
1 Úvod do teórie množín	8
1.1 Pojem množiny	8
1.2 Reálne čísla	11
1.3 Množinová algebra	13
1.4 Relácie	14
1.5 Zobrazenia	16
2 Mohutnosti množín	24
2.1 Vzťahy medzi mohutnosťami množín	24
2.2 Definícia konečnosti	30
2.3 Operácie nad mohutnosťami množín	31
2.4 Spočítateľné a nespočítateľné množiny	34
3 Topologické priestory	44
3.1 Euklidovský a metrický priestor	44
3.2 Topologický priestor	46
3.3 Lokálna báza, báza a subbáza topologického priestoru	49
3.4 Topologické priestory I. a II. typu spočítateľnosti	51
3.5 Husté množiny a separabilné priestory	53
3.6 Hausdorffove priestory	53
Záver	57
Literatúra	58

Úvod

Hlavným cieľom bakalárskej práce je naštudovať a spracovať problematiku teórie množín, uviesť potrebné tvrdenia k tomu, aby bolo možné definovať pojem spočítateľnej a nespočítateľnej množiny a taktiež uviesť niektoré základné výsledky v oblasti teórie množín. Bakalárska práca sa venuje výkladu naivnej teórie množín, axiomatickú výstavbu teórie množín je možné nájsť napr. v [2].

V prvej kapitole je náhľad do úvodu danej problematiky, kde sa snažím čitateľovi priblížiť základné vzťahy teórie množín, a to počínajúc samotným pojmom množiny. Výstavba textu uvádza axiomatické zavedenie množiny reálnych čísel, z ktorej je následne odvodená množina prirodzených čísel ako podmnožina množiny reálnych čísel splňajúca určité vlastnosti. Veľmi dôležitým pojmom k tomu, aby bolo možné porozumieť vzťahom medzi množinami, je pojem zobrazenia. Je to jeden zo základných pojmov, na ktorom stavia teória množín.

V druhej kapitole sa venujem pojmu mohutnosť množiny, ktorý je určitým zovšeobecnením pojmu počet prvkov množiny. Poukazujem hlavne na vzťahy medzi mohutnosťami množín, kde uvádzam množstvo názorných príkladov ku lepšiemu pochopeniu zdanlivých paradoxov vyskytujúcich sa v teórii množín. V závere druhej kapitoly rozoberám otázku spočítateľnosti resp. nespočítateľnosti množiny. Jedná sa samozrejme o abstraktné pojmy, ktoré však prinášajú eleganté metódy riešenia matematických problémov, a napriek svojej abstraktnosti majú pomerne jednoduchý spôsob formulácie.

V poslednej kapitole sa okrajovo venujem topológii, ktorá stavia svoje výsledky na teórii množín. Poukazujem na logickú nadväznosť získaných pojmov v predchádzajúcich kapitolách. V závere práce uvádzam príklad na rôzne typy topologických priestorov. Podrobný výklad zaoberajúci sa topológiou je možné nájsť napr. v [3].

1 Úvod do teórie množín

1.1 Pojem množiny

Definovať pojem znamená určiť pomocou známych pojmov čo definovaný pojem je a čo nie je, teda k definícii určitého pojmu sa využívajú iné známe pojmy. Niekde je však nutné začať, t. j. niektorý pojem musí byť prvý a vtedy ho vlastne nemôžeme definovať. Príkladom takého pojmu môže byť napríklad bod. Aj množina je takým pojmom, ktorý stojí ako prvý v rade definícií a teda v matematickom zmysle ho nie je možné definovať. Dá sa však určiť, čo množina je a čo nie je.

Podľa **B. Bolzana** je množina chápaná ako súhrn určitých prvkov, kde je spôsob usporiadania ľahostajný.

G.Cantor definuje množinu ako súhrn vecí, ktoré sú chápané ako jeden celok. Ak x je prvkom množiny A , píšeme x patrí do A .

$$x \in A$$

V opačnom prípade zapisujeme x nepatrí do A

$$x \notin A$$

Povieme, že dve množiny sa rovnajú vtedy a len vtedy, keď majú tie isté prvky. Táto vlastnosť sa tiež nazýva *axióma extenzionality*.

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Prázdna množina je v matematike definovaná ako množina neobsahujúca žiadne prvky.

Pre množinu X definujeme $\emptyset := \{y \in X; y \neq y\}$

Ak A, B sú množiny, tak množina A sa nazýva *podmnožinou* množiny B , ak každý prvok množiny A je zároveň prvkom množiny B . Zapisujeme:

$$A \subseteq B$$

Na základe axiómy extenzionality platí :

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

Ak x, y sú nejaké objekty, tak budeme uvažovať *usporiadanú dvojicu* $[x, y]$.

Základná vlastnosť usporiadanej dvojice je vyjadrená ekvivalenciou:

$$[x, y] = [u, v] \Leftrightarrow (x = u \wedge y = v)$$

V matematike sa pojem usporiadanej dvojice definuje rôzne v závislosti od toho, v akom kontexte sa definícia ďalej používa. Pre svoju jednoduchosť je populárna napríklad **Kuratowského definícia**, podľa ktorej je usporiadaná dvojica špeciálnou dvojprvkovou množinou:

$$[a, b] := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Na tvorbu nových množín z daných množín sa používajú tieto **princípy tvorby množín**.

P1 Ak x, y sú nejaké prvky, tak existuje množina X taká, že pre každé z platí

$$z \in X \Leftrightarrow (z = x \vee z = y).$$

Množinu X označíme $\{x, y\}$. Ak $x = y$ píšeme $\{x, y\} = \{x\}$.

P2 Ak A, B sú množiny, tak existuje množina C taká, že pre každé z platí

$$z \in C \Leftrightarrow (z \in A \vee z \in B).$$

Množinu C nazývame zjednotením množín A a B a zapisujeme $A \cup B$.

P3 Ak A, B sú množiny, tak existuje množina D taká, že pre každé z platí

$$z \in D \Leftrightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in B)(z = [x, y]).$$

Množinu D označíme $A \times B$ a nazývame *karteziánsky súčin* množín A a B .

P4 Ak A je množina, tak existuje množina E taká, že pre každé z platí

$$z \in E \Leftrightarrow z \subseteq A$$

Množinu E označíme $P(A)$ a nazývame *potenčná množina* množiny A .

P5 Ak A je množina a $\mathcal{V}$ je vlastnosť, tak existuje množina F taká, že pre každé z platí

$$z \in F \Leftrightarrow (z \in A \wedge \mathcal{V})$$

Poznámka 1.1. Pre karteziánsky súčin obecné neplatí asociatívny a komutatívny zákon.

Príklad 1.2. Nájdite príklad množín A, B takých, že $A \times B \neq B \times A$.

Riešenie:

Zvoľme $A = \{a\}, B = \{b\}$ také, že $a \neq b$. Potom aj množiny $A \times B = \{[a, b]\}$ a $B \times A = \{[b, a]\}$ sú jednoprvkové. Ak by sa rovnali, znamenalo by to, že $\{[a, b]\} = \{[b, a]\}$, čo je na základe definície usporiadanej dvojice ekvivalentné $a = b$, čo je spor.

Príklad 1.3. Nájdite množiny A, B, C také, že $A \times (B \times C) \neq A \times (B \times C)$.

Riešenie:

Položme $A = B = C = \{\emptyset\}$.

$$A \times (B \times C) = \{\emptyset\} \times \{[\emptyset, \emptyset]\} = \{[\emptyset, [\emptyset, \emptyset]]\}$$

$$(A \times B) \times C = \{[\emptyset, \emptyset]\} \times \{\emptyset\} = \{[[\emptyset, \emptyset], \emptyset]\}$$

Ak by sa tieto množiny rovnali, tak by platilo:

$[\emptyset, [\emptyset, \emptyset]] = [[\emptyset, \emptyset], \emptyset]$ čo je ekvivalentné $\emptyset = [\emptyset, \emptyset]$. Na základe Kuratowského definície usporiadanej dvojice platí: $[\emptyset, \emptyset] = \{\{\emptyset\}\}$. Čo nie je prázdna množina.

V teórii množín často predpokladáme, že všetky nami uvažované množiny sú podmnožinou určitej pevne danej množiny, ktorú budeme nazývať *základný priestor* X . Ak napríklad riešime planimetrickú úlohu, základným priestorom je množina všetkých bodov roviny.

Príklad 1.4 (Operácie na množinách). *Nech $A, B \subseteq X$.*

*Na základe princípu **P5** je možné definovať známe základné operácie:*

(a) *Nech $\mathcal{V}(x)$ označuje výrokovú funkciu $x \in B$.*

Potom $A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$.

(b) *Nech $\mathcal{V}(x)$ označuje výrokovú funkciu $x \notin B$.*

Potom $A \setminus B = \{x \in A \wedge x \notin B\}$.

(c) *Označme $A^C = X \setminus A$.*

Definujme ďalej indukciou pre $A_1, \dots, A_n \subseteq X, n \geq 2$

(a) *karteziánsky súčin $A_1 \times \dots \times A_n = (A_1 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n = A^n$.*

*Prvkom karteziánskeho súčinu $A_1 \times \dots \times A_n$ je usporiadaná n -tíca $[x_1 \dots x_n]$,
kde $x_i \in A_i$.*

(b) *prienik $\bigcap_{i=1}^n A_i = (A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n$*

(c) *zjednotenie $\bigcup_{i=1}^n A_i = (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cup A_n$*

V tejto podkapitole bolo čerpané z [1], [2].

1.2 Reálne čísla

Jedným zo základných pojmov matematiky je reálne číslo. Ucelenú predstavu o reálnych číslach a ich vlastnostiach mali už starovekí grécki matematici.

Pytagoras a jeho žiaci dokonca vedeli, že dĺžka prepony pravouhlého trojuholníka, ktorého odvesny majú dĺžku jedna, nie je racionálne číslo. **Archimedes** formuloval tvrdenie dnes známe ako Archimedova vlastnosť. (Pre ľubovoľné reálne číslo a existuje také prirodzené číslo n , že platí: $n > a$.) Takto vybudovaná teória reálnych čísel vystačila matematikom do začiatku 19. storočia. Nezávisle na sebe **B. Bolzano** a **Auguste Louis Cauchy** sformulovali princíp *Každá bolzano-cauchyovská postupnosť reálnych čísel má limitu*.

Po vybudovaní teórie množín **G. Cantorom** matematici postupne vybudovali

teóriu reálnych čísel, v rámci teórie množín. Dôležitý matematický pojem - reálne číslo - bol zredukovaný na pojem množina.

Množinu všetkých reálnych čísel označme písmenom $\mathbb{R}$.

Číslo a nazveme *horné ohraničenie množiny* $X \subseteq \mathbb{R}$ ak pre každé $x \in X$ platí $x \leq a$. Množina $X \subseteq \mathbb{R}$ je zhora ohraničená, ak existuje jej horné ohraničenie. Horných ohraničení je nekonečne veľa. Číslo s sa nazýva *supremum* množiny X , ak je najmenším horným ohraničením. Píšeme $s = \sup X$.

Množina reálnych čísel má tieto základné vlastnosti-**axiómy reálnych čísel**.

- $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ je pole, kde 0 je neutrálny prvok operácie "+" a 1 je neutrálnym prvkom operácie " $\cdot$ ",
- neexistuje $x \in \mathbb{R}$ také, že $x < x$,
- (tranzitivita) ak $x, y, z \in \mathbb{R}, x < y$ a $y < z$, tak $x < z$
- pre každé dve rôzne čísla $x, y \in \mathbb{R}$ platí buď $x < y$ alebo $y < x$,
- $0 < 1$,
- ak $x, y, z \in \mathbb{R}, x < y$, tak $x + z < y + z$,
- ak $x, y \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0$, tak $x \cdot y > 0$,
- každá neprázdna zhora ohraničená množina reálnych čísel má supremum.

Množina prirodzených čísel $\mathbb{N}$ je definovaná ako podmnožina množiny $\mathbb{R}$ splňujúca nasledujúce vlastnosti:

$$0 \in \mathbb{N}$$

$$x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{N}$$

$$(\forall X \subseteq \mathbb{R})(0 \in X \wedge (x \in X \Rightarrow x + 1 \in X)) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X$$

Prvky množiny $\mathbb{N}$ nazývame *prirodzené čísla*.

Veta 1.5 (O matematickej indukcii). *Uvažujme výrokovú funkciu $\mathcal{V}(x)$ definovanú pre každé $x \in \mathbb{N}$ a predpokladajme, že*

- platí $\mathcal{V}(0)$;
- ak platí $\mathcal{V}(n)$, tak platí $\mathcal{V}(n+1)$;

Potom $\mathcal{V}(n)$ platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Dôkaz. Nech $X = \{n \in \mathbb{N}; \mathcal{V}(n)\}$. Chceme ukázať, že $X = \mathbb{N}$. Zrejme $X \subseteq \mathbb{N}$. Podľa predpokladu má množina X vlastnosti $0 \in X$ a $(x \in X) \Rightarrow (x+1 \in X)$. Z definície množiny $\mathbb{N}$ vyplýva, že $\mathbb{N} \subseteq X$. Teda $\mathbb{N} = X$. $\square$

Príklad 1.6. Dokážte využitím matematickej indukcie, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1.2 + 2.3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

Riešenie:

a) Pre $n = 0$ tvrdenie triviálne platí.

b) Predpokladajme platnosť tvrdenia pre n , dokážeme, že tvrdenie platí pre $n+1$.

$$[1.2 + 2.3 + \cdots + n(n+1)] + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Tým sme ukázali platnosť tvrdenia pre všetky $n \in \mathbb{N}$. $\square$

V tejto podkapitole bolo čerpané z [1], [2], [4].

1.3 Množinová algebra

V predchádzajúcej kapitole sme uviedli niektoré základné množinové operácie.

Uvedme niekoľko vlastností týchto operácií. Nech $A, B, C \subseteq X$

- | | |
|---|---|
| (a) $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$ |
| (b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| (c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| (d) $A \cup A = A$ | $A \cap A = A$ |
| (e) $A \cup \emptyset = A$ | $A \cap \emptyset = \emptyset$ |
| (f) $A \setminus (\bigcup_{i=0}^n A_i) = \bigcap_{i=0}^n (A \setminus A_i)$ | $A \setminus (\bigcap_{i=0}^n A_i) = \bigcup_{i=0}^n (A \setminus A_i)$ |

Rovnosti v prvom riadku vyjadrujú *komutatívnosť* operácií zjednotenia a prieniku, druhý riadok obsahuje *asociatívne zákony*, tretí *distributívne zákony*. Štvrtý

riadok obsahuje *zákony idempotencie*, piaty vlastnosť prázdnej množiny. Konečne šiesty riadok obsahuje *de Morganove pravidlá*.

Predpokladajme ďalej, že $F \subseteq X$ je nekonečná postupnosť množín a $\mathbb{N}$ je množina prirodzených čísel, potom pre prienik a zjednotenie množín z F použijeme značenie $\bigcap_s F_s$ miesto $\bigcap_{i=0}^{\infty} F_i$ a $\bigcup_s F_s$ miesto $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$.

Potom platí:

- (1) $\bigcap_s F_s \subseteq F_t \subseteq \bigcup_s F_s, \forall t \in \mathbb{N}$
- (2) $(\bigcup_s F_s)^c = \bigcap_s F_s^c, (\bigcap_s F_s)^c = \bigcup_s F_s^c, \forall s \in \mathbb{N}$
- (3) $((\forall s \in \mathbb{N})(F_s \subseteq A)) \Rightarrow (\bigcup_s F_s \subseteq A)$
- (4) $((\forall s \in \mathbb{N})(A \subseteq F_s)) \Rightarrow (A \subseteq \bigcap_s F_s)$

Ako príklad uvedieme dôkaz implikácie v treťom riadku. Nech $x \in \bigcup_s F_s$. Potom existuje s_0 také, že $x \in F_{s_0}$. Na základe predpokladu platí, že $F_{s_0} \subseteq A$. Teda $x \in A$. Z toho vyplýva, že $\bigcup_s F_s \subseteq A$. $\square$

V tejto podkapitole bolo čerpané z [1], [2], [4].

1.4 Relácie

Množina S sa nazýva *n-árna relácia*, ak existuje množina A taká, že $S \subseteq A^n$. Zrejme každá podmnožina S karteziánskeho súčinu $A_1 \times \dots \times A_n$ je *n-árna relácia*. Ak $S \subseteq A^n$, tak hovoríme, že S je *n-árna relácia* na množine A .

Poznámka 1.7. Pre $n = 1$ nazývame **unárna** relácia, pre $n = 2$ nazývame **binárna** relácia, pre $n = 3$ nazývame **ternárna** relácia.

Pripomeňme niektoré vlastnosti binárnych relácií.

Nech R je binárna relácia na množine A , t. j. $R \subseteq A^2$. Budeme hovoriť, že R je *reflexívna* na A , ak pre každé $x \in A$ platí $[x, x] \in R$. Relácia R je *symetrická*, ak pre každé $x, y \in A$ také, že $[x, y] \in R$ platí aj $[y, x] \in R$. Relácia R je *antisymetrická*, ak z podmienok $[x, y] \in R, [y, x] \in R$ plynie $x = y$. Nakoniec, R je *tranzitívna*, ak z podmienok $[x, y] \in R, [y, z] \in R$ vyplýva $[x, z] \in R$.

Príklad 1.8. Na množine $I = \langle -1; 1 \rangle$ môžeme definovať ternárnu reláciu

$$R = \{[x, y, z] \in I^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Grafom takto definovanej relácie je sféra so stredom v $[0, 0, 0]$ a polomerom $r = 1$.

Definujme ďalej inverznú reláciu. Ak R je binárna relácia na A , tak *inverzná relácia* R^{-1} je definovaná rovnosťou

$$R^{-1} = \{[x, y] \in A^2; [y, x] \in R\}$$

Zrejme $(R^{-1})^{-1} = R$.

Ak R, S sú binárne relácie na množine A , tak ich *kompozícia* je definovaná predpisom

$$R \circ S = \{[x, y] \in A^2; (\exists z)([x, z] \in R \wedge [z, y] \in S)\}$$

Veta 1.9. Pre ľubovoľné binárne relácie platí asociatívny zákon t. j.

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

Dôkaz.

Nech a, d sú nejaké objekty. Postupne dostaneme :

$$[a, d] \in (R \circ S) \circ T \Leftrightarrow$$

$$\exists c([a, c] \in R \circ S \wedge [c, d] \in T) \Leftrightarrow$$

$$\exists c\left(\exists b([a, b] \in R \wedge [b, c] \in S) \wedge [c, d] \in T\right) \Leftrightarrow$$

$$\exists b\left([a, b] \in R \wedge \exists c([b, c] \in S \wedge [c, d] \in T)\right) \Leftrightarrow$$

$$\exists b([a, b] \in R \wedge [b, d] \in S \circ T) \Leftrightarrow [a, d] \in R \circ (S \circ T). \quad \square$$

Ďalším dôležitým typom binárnej relácie je *ekvivalencia*. Povieme, že relácia E na množine A je ekvivalencia, ak je reflexívna na množine A , symetrická a tranzitívna.

Relácia ekvivalencie jednoznačne určuje *rozklad* (faktormnožinu) množiny A na **triedy ekvivalencie**. Množina $R \subseteq P(A)$ sa nazýva rozklad množiny A ak platí:

$$\emptyset \in R,$$

$$(X_1, X_2 \in R, X_1 \neq X_2) \Rightarrow (X_1 \cap X_2 = \emptyset),$$

$$\forall x \in A \exists X \in R; x \in X.$$

Triedy ekvivalencie sú podmnožiny množiny A , pričom každá trieda ekvivalencie obsahuje práve všetky také prvky z množiny A , že každé dva sú navzájom ekvivalentné v zmysle danej relácie.

Triedu ekvivalencie, do ktorej patrí práve nejaký prvok $a \in A$ značíme $[a]_E$. Je zrejmé, že tento prvok $a \in [a]_E$ je ekvivalentný s každým iným prvkom náležiacim do $[a]_E$.

Rozklad množiny A podľa ekvivalencie E je nasledujúca množina:

$$A/R = \{[a]_E; a \in A\}.$$

V tejto podkapitole bolo čerpané z [1], [2], [4], [7], [8].

1.5 Zobrazenia

Definícia 1.10. *Nech A, B sú množiny, f je podmnožina $A \times B$. Množina f sa nazýva **zobrazenie**, ak pre každé $x \in A$, $y_1, y_2 \in B$ také, že $[x, y_1] \in f$, $[x, y_2] \in f$ platí $y_1 = y_2$. Množina*

$$D(f) = \{x \in A; (\exists y)[x, y] \in f\}$$

sa nazýva obor definície zobrazenia f a množina

$$H(f) = \{y \in B; (\exists x)[x, y] \in f\}$$

sa nazýva obor hodnôt zobrazenia f .

Ak $x \in D(f)$, potom existuje jediné y také, že $[x, y] \in f$. Toto y označujeme $f(x)$ a nazývame hodnotu zobrazenia f v bode x .

Skutočnosť, že f je zobrazenie, $D(f) = A$, $H(f) = B$ budeme zapisovať

$$f : A \rightarrow B$$

a čítať f je zobrazenie z množiny A do množiny B . Dve zobrazenia $f, g : A \rightarrow B$ sa rovnajú, ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) = g(x)$.

Počet prvkov množiny X budeme označovať $\#X$. Pre prázdnu množinu kladieme $\#\emptyset = 0$. Pre ľubovoľné konečné množiny platia nasledujúce vzťahy

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$$

Z poslednej rovnosti je zrejmé, že

$$\#(X^n) = (\#X)^n$$

Množinu všetkých zobrazení z množiny A do množiny B budeme označovať B^A teda

$$B^A = \{f; f : A \rightarrow B\}$$

Zobrazenie $f : A \rightarrow A$ sa nazýva *transformácia* množiny A alebo tiež *unárna operácia* na množine A

Veta 1.11. *Nech A je množina. Potom zobrazenie označované*

$$id_A = \{[x, x]; x \in A\}$$

nazývame identické zobrazenie množiny A .

Príklad 1.12. *Overte, že pre $f : A \rightarrow B$ platí $id_A \circ f = f \circ id_B = f$.*

Riešenie: nech $[x, y] \in id_A \circ f \Leftrightarrow (\exists z)([x, z] \in id_A \wedge [z, y] \in f)$. Ale podmienka $[x, z] \in id_A$ znamená, že $x = z$, preto $[x, y] \in f$. Teda platí $[x, y] \in id_A \circ f \Leftrightarrow [x, y] \in f$. Teda $id_A = f$. Zvyšná časť tvrdenia sa dokáže obdobne. $\square$

Veta 1.13. *Ak $f : A \rightarrow B$, tak zobrazenie $g : B \rightarrow A$ nazývame inverzné zobrazenie k zobrazeniu f , ak platí:*

$$f \circ g = id_B,$$

$$g \circ f = id_A.$$

Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ sa nazýva **prosté** alebo tiež **injektívne** či **injekcia**, ak rôznym prvkom $x_1, x_2 \in A$ priradzuje rôzne prvky $f(x_1), f(x_2) \in B$, t.j. ak platí

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Čo možno ekvivalentne vyjadriť pomocou obmeny implikácie v tvare

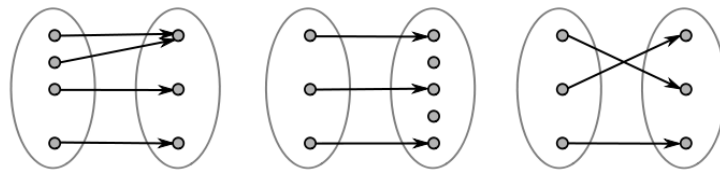
$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ sa nazýva zobrazenie **na množinu** B alebo tiež **surjekcia**, ak každý prvok množiny B sa zobrazí na nejaký prvok množiny A . t.j. ak platí

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x)).$$

Hovoríme, že $f : A \rightarrow B$ je *prosté zobrazenie* A na B alebo tiež **bijektívne** zobrazenie či **bijekcia**, ak f je zároveň *prosté* a *na*, t.j. *injektívne* a *surjektívne*, čo možno vyjadriť podmienkou:

$$(\forall y \in B)(\exists! x \in A)(y = f(x)).$$



Obr. 1: Surjekcia, injekcia a bijekcia.

Veta 1.14. Ak f, g sú zobrazenia, tak kompozícia $f \circ g$ je zobrazenie. Obor definície $f \circ g$ je množina:

$$D(f \circ g) = \{x \in D(f); f(x) \in D(g)\}.$$

Pre $x \in D(f \circ g)$ platí

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)).$$

Dôkaz. Ukážeme, že $f \circ g$ je zobrazenie. Nech $[x, y_1], [x, y_2] \in f \circ g$. Chceme ukázať, že $y_1 = y_2$. Podľa definície kompozície relácií existujú z_1, z_2 také, že $[x, z_1] \in f, [z_1, y_1] \in g$ a $[x, z_2] \in f, [z_2, y_2] \in g$. Keďže f je zobrazenie, tak $z_1 = z_2$. Z toho, že g je zobrazenie platí $y_1 = y_2$. Pre obor definície $f \circ g$ platia ekvivalencie

$$x \in D(f \circ g) \Leftrightarrow (\exists y)([x, y] \in f \circ g) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists z)([x, z] \in f \wedge [z, y] \in g).$$

$$x \in D(f) \Leftrightarrow (\exists z)([x, z] \in f)$$

a keďže pre $x \in D(f)$ je také z jediné a to $f(x)$, tak máme

$$x \in D(f \circ g) \Leftrightarrow (x \in D(f) \wedge f(x) \in D(g)).$$

Podobne: $f(x) \circ g(x) = y \Leftrightarrow [x, y] \in f \circ g \Leftrightarrow (\exists z)(f(x) = z \wedge g(z) = y) \Leftrightarrow y = g(f(x))$. $\square$

Dôsledok 1.15. Ak $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$, tak $f \circ g : A \rightarrow C$.

Príklad 1.16. Nech

$$f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 2y = x(xy + 1)\}$$

$$g = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; e^y = x\}$$

Potom $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}, D(g) = (0, \infty)$ Pre $x \in D(f \circ g)$ platí

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = \ln\left(\frac{x}{2 - x^2}\right)$$

$$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}; \frac{x}{2 - x^2} > 0\} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2}).$$

Veta 1.17. Nech f je zobrazenie množiny A do množiny B . Potom sú nasledujúce podmienky ekvivalentné:

- a) existuje zobrazenie $g : B \rightarrow A$ inverzné k zobrazeniu f ;
- b) f je prosté zobrazenie na množinu B ;

c) relácia f^{-1} je zobrazenie s oborom definície B

Dôkaz. Najprv dokážeme $a) \Rightarrow b)$. Nech platí a), t.j. existuje zobrazenie $g : B \rightarrow A$ inverzné k zobrazeniu f . Nech $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$. Označme $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. Podľa vety 1.13 je $g(y_1) = x_1, g(y_2) = x_2$. Keďže g je zobrazenie, tak $y_1 \neq y_2$. Odtiaľ vyplýva, že f je prosté. Nech teraz $y \in B$. Potom opäť podľa vety 1.13 platí $f(g(y)) = y$, t.j. existuje $x = g(y) \in A$ také, že $f(x) = y$. Takže f je zobrazenie na množinu B .

Dokážeme implikáciu $b) \Rightarrow c)$. Nech platí b). Ak $[x, y_1] \in f, [x, y_2] \in f$, tak $[y_1, x] \in f^{-1}, [y_2, x] \in f^{-1}$. Keďže f je prosté, tak $y_1 = y_2$. To ale znamená, že f^{-1} je zobrazenie. Zrejme $D(f^{-1}) = H(f) = B$.

Ostáva nám ukázať tretiu implikáciu. Nech platí c). Potom $f^{-1} : B \rightarrow A$ a stačí ukázať, že $f \circ f^{-1} = id_A$ a $f^{-1} \circ f = id_B$. Ak $x \in A$ a $y = f(x)$, tak $[x, y] \in f$ a $[y, x] \in f^{-1}$. Teda $f^{-1}(y) = x$ a $(f \circ f^{-1})(x) = x$. Podobne pre $y \in B$ je $f^{-1} \circ f(y) = y$. $\square$

Veta 1.18. Nech $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$. Ak existujú inverzné zobrazenia k zobrazeniam f, g tak existuje aj inverzné zobrazenie k zobrazeniu $f \circ g$ a platí:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Dôkaz. Označme $L = (f \circ g)^{-1}$ a $P = g^{-1} \circ f^{-1}$. Nech $c \in C, a \in A$. Dvojica $[c, a]$ patrí do L práve vtedy, keď dvojica $[a, c]$ patrí do $f \circ g$. To je ekvivalentné s tým, že $\exists b \in B$ také, že $[a, b] \in f \wedge [b, c] \in g$ s vlastnosťami $[c, b] \in g^{-1}, [b, a] \in f^{-1}$. To je ale ekvivalentné s podmienkami $[c, a] \in g^{-1} \circ f^{-1} = P$. Tým je dokázaná rovnosť $L = P$. $\square$

Definícia 1.19. Ak $f : A \rightarrow B$ je zobrazenie a $C \subseteq A$, tak zobrazenie $f|_C : C \rightarrow B$ definované predpisom $f|_C = f(x)$ pre všetky $x \in C$, nazývame zúženie (reštrikcia) zobrazenia f na množinu C . Množinovo môžeme definíciu zúženia zobrazenia zapísať ako

$$f|_C = f \cap (C \times B).$$

Príklad 1.20. *Nech f je zobrazenie definované predpisom: $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; f(n) = \frac{1}{n^2}$, potom $f = \{[1, 1], [2, \frac{1}{4}], [3, \frac{1}{9}], [4, \frac{1}{16}] \cdots\}$.*

Reštrikcia f na množinu $C = \{1, 2, 3\}$ je trojprvková množina $f|_C = f \cap (C \times B) = f \cap (\{1, 2, 3\} \times \{\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}) = \{[1, 1], [2, \frac{1}{4}], [3, \frac{1}{9}]\}$.

Definícia 1.21. *Nech $f : X \rightarrow Y$ je zobrazenie a $A \subseteq X, B \subseteq Y$. Potom množinu $f(A) = \{f(a); a \in A\}$ nazveme obraz množiny A v zobrazení f a množinu $f^{-1}(B) = \{a; f(a) \in B\}$ nazývame vzor množiny B v zobrazení f .*

Uved'me niektoré základné vlastnosti vzoru a obrazu množín. Nech $\mathcal{F}$ je množina množín, t.j. pre každé $A \in \mathcal{F}$ platí, že A je množina. Definujme *zjednotenie množiny množín* $\bigcup \mathcal{F}$ takto:

$$x \in \bigcup \mathcal{F} \Leftrightarrow (\exists A)(x \in A \wedge A \in \mathcal{F}).$$

Platia nasledujúce rovnosti:

$$\bigcup \{A, B\} = A \cup B,$$

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} id_{\mathcal{F}}(A).$$

Veta 1.22. *Nech $T \neq \emptyset$ je množina, $f : A \rightarrow B$ a F, G sú systémy množín s indexmi v množine T také, že $F_t \subseteq A$ a $G_t \subseteq B$ pre každé $t \in T$. Nech $X, Y \subseteq A$. Potom platí:*

$$a) f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y),$$

$$b) f(\bigcup_{t \in T} F_t) = \bigcup_{t \in T} f(F_t),$$

$$c) f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y), \text{ ak je } f \text{ navyše injektívne, tak } f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$$

$$d) f(\bigcap_{t \in T} F_t) \subseteq \bigcap_{t \in T} f(F_t), \text{ ak je } f \text{ navyše injektívne, tak } f(\bigcap_{t \in T} F_t) = \bigcap_{t \in T} f(F_t),$$

$$e) f^{-1}(\bigcup_{t \in T} G_t) = \bigcup_{t \in T} f^{-1}(G_t),$$

$$f) f^{-1}(\bigcap_{t \in T} G_t) = \bigcap_{t \in T} f^{-1}(G_t).$$

Dôkaz. Ako príklad uvidíme dôkaz tvrdenia c) a f). Ak $x \in f(X \cap Y)$, znamená to, že $x = f(c), c \in X \cap Y$. Potom ale $c \in X \wedge c \in Y$. Z toho plynie, že $x = f(c)$ súčasne patrí do $f(X)$ a $f(Y)$, teda patrí aj do prieniku $f(X) \cap f(Y)$. Ukázali sme, že ak $x \in f(X \cap Y) \Rightarrow x \in f(X) \cap f(Y)$ teda $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

Predpokladajme navyše, že f je injektívne zobrazenie. Ak $x \in f(X) \cap f(Y)$, tak $x = f(a)$ pre nejaké $a \in X \wedge x = f(b)$ pre nejaké $b \in Y$. Z rovnosti $x = f(a) = f(b)$ dostávame na základe injektívnosti $a = b$. Teda prvok a patrí do $X \cap Y$ a $x = f(a)$ je prvkom množiny $f(X \cap Y)$. Tým sme dokázali opačnú inklúziu, čo dohromady dáva rovnosť.

Nech ďalej $x \in f^{-1}(\bigcap_{t \in T} G_t) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{t \in T} G_t$. To je ekvivalentné s podmienkou $(\forall t \in T)(f(x) \in G_t)$. Túto podmienku môžeme ďalej ekvivalentne prepísať ako $(\forall t \in T)(x \in f^{-1}(G_t))$ a tiež $x \in \bigcap_{t \in T} f^{-1}(G_t)$. Teda podmienky $x \in f^{-1}(\bigcap_{t \in T} G_t)$ a $x \in \bigcap_{t \in T} f^{-1}(G_t)$ sú ekvivalentné. $\square$

Veta 1.23. *Nech A, B sú množiny, potom zobrazenia $p_1 : A \times B \rightarrow A, p_2 : A \times B \rightarrow B$, dané predpisom*

$$p_1([a, b]) = a$$

$$p_2([a, b]) = b$$

pre $[a, b] \in A \times B$, budeme nazývať projekcie z karteziánskeho súčinu $A \times B$ na množiny A a B .

Definícia 1.24. *Nech $T \subseteq \mathbb{R}$ a pre každé $s \in T$ je A_s množina. Potom karteziánsky súčin systému množín $A_s, s \in T$ definujeme ako množinu všetkých zobrazení z T do $\bigcup_{s \in T} A_s$ takých, že obraz prvku s patrí do A_s .*

Označujeme ho $\prod_{s \in T} A_s$.

$$\prod_{s \in T} A_s = \{f; f : T \rightarrow \bigcup_{s \in T} A_s; f(s) \in A_s\}.$$

Pre každé $s \in T$ definujeme zobrazenie $p_s : \prod_{s \in T} A_s \rightarrow A_s$, ktoré nazývame s -tá projekcia karteziánskeho súčinu $\prod_{s \in T} A_s$ na množinu A_s .

Príklad 1.25. *Nech $T = \{0, 1, 2\}$. V akom vzťahu je karteziánsky súčin $\prod_{s \in T} A_s$ a karteziánsky súčin množín A_0, A_1, A_2 ? Je zrejmé, že sa nerovnajú, ale sa len málo líšia. Prvky súčinu $\prod_{s \in T} A_s$ sú zobrazenia f také, že $f(0) \in A_0, f(1) \in A_1, f(2) \in A_2$. Takéto zobrazenie nám dáva tú istú informáciu ako usporiadaná trojica $[f(0), f(1), f(2)]$, ktorá je prvkom $A_0 \times A_1 \times A_2$.*

Naopak každej usporiadanej trojici $[x, y, z] \in A_0 \times A_1 \times A_2$ odpovedá jediný prvok $f \in \prod_{s \in T} A_s$, kde je zobrazenie f definované predpisom $f(0) = x, f(1) = y, f(2) = z$.

V tejto podkapitole bolo čerpané z [1], [2], [4], [5].

2 Mohutnosti množín

2.1 Vzťahy medzi mohutnosťami množín

Pri niektorých množinách je možné určiť ich *počet prvkov*. V predchádzajúcej kapitole sme počet prvkov nejakej množiny A označovali $\#A$, kde sme predpokladali, že A je konečná, t.j. má konečný počet prvkov. K takýmto množinám patrí napr. počet obyvateľov Žiliny, počet obyvateľov Zeme, počet všetkých atómov v galaxii. Každá z týchto množín obsahuje konečný, aj keď možno pre nás neznámy alebo nepredstaviteľný počet prvkov. Naproti tomu existujú nekonečné množiny, ako napr. množina prirodzených čísel, množina reálnych čísel, alebo taktiež interval. Ak potrebujeme porovnať dve konečné množiny, môžeme porovnávať ich počet prvkov a na základe toho posúdiť, v akom vzťahu sú dané množiny. Ako je to však s nekonečnými množinami? Má zmysel pýtať sa, či je viac prirodzených, celých alebo reálnych čísel? B. Bolzano a G. Cantor pri štúdiu nekonečna začali hneď porovnávaním rôznych nekonečien. Museli abstrahovať od určitého zaťaženia mysle, ktoré je spôsobené znalosťou toho, čo ľudstvo už vie. Museli sa zbaviť idey, že počet prvkov množiny je číslo, začať s porovnávaním počtu prvkov dvoch množín a na základe toho sa pokúsiť určiť v akom vzťahu sú.

Uvažujme nasledujúci príklad. Učiteľ telesnej výchovy sa snaží rozdeliť žiakov do dvoch skupín tak, že nechá žiakov rozpočítat sa na prvého a druhého. Jednu skupinu tvoria prví, druhú skupinu druhí. Ak ich bol párny počet, tak obidve skupiny majú rovnaký počet žiakov, i keď nevieme, aký je počet žiakov v každej skupine. V matematickom zmysle by sme mohli povedať, že dve množiny majú rovnaký počet prvkov (aj keď pre nás môže byť neznámy), ak existuje bijekcia medzi danými množinami.

Čo to vlastne znamená, keď povieme, že počet obyvateľov Žiliny je 83 684 ? Je to to isté ako to, že ich je rovnako veľa ako čísel $1, 2, \dots, 83684$ alebo ako čísel (prirodzených) menších ako 83 684. Takže keď vieme, že nejaká množina má n prvkov, $n \in \mathbb{N}$, tak vieme len to, že má rovnaký počet prvkov ako množina $\{1, 2, \dots, n\}$ alebo množina $\{k \in \mathbb{N} : k < n\}$. V súlade s už uvedeným definujeme

nový pojem.

Definícia 2.1. *Povieme, že množiny A, B majú rovnaký počet prvkov alebo rovnakú mohutnosť či rovnakú kardinalitu, ak existuje prosté zobrazenie množiny A na množinu B . Zapisujeme $|A| = |B|$. Negáciu výroku $|A| = |B|$ budeme zapisovať $|A| \neq |B|$.*

Pre kvantifikovanie veľkosti nekonečných množín slúžia **kardinálne čísla**. Pojem mohutnosť sa potom používa ako synonymum k pojmu kardinalita, oba pojmy značia kardinálne číslo vyjadrujúce veľkosť príslušnej množiny.

Príklad 2.2.

a) *Nech je daná množina X pre $n \in \mathbb{N}$, n konečné*

$$X = \{[1, n+1]; [1, n+2]; \dots; [1, 2n]; [2, n+1]; [2, n+2]; \dots; [2, 2n]; \dots; [n, 2n]\}.$$

Nájdite množiny X_1, X_2 , ktoré majú rovnakú mohutnosť také, že $X_1 \times X_2 = X$.

Riešenie: definujeme projekcie

$$p_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$$

$$p_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$$

p_1 a p_2 sú zobrazenia, kde $D(p_1) = D(p_2) = X$, a teda $H(p_1) = X_1$ a $H(p_2) = X_2$. Potom množiny $H(p_1)$ a $H(p_2)$ majú rovnakú mohutnosť, pretože existuje prosté zobrazenie $f : H(p_1) \rightarrow H(p_2)$, $f = \{[1, n+1]; [2, n+2] \dots; [n, 2n]\}$. $X_1 = \{1, 2, \dots, n\}$, $X_2 = \{n+1, n+2, \dots, n\}$.

b) *Nech $a < b < c < d$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ukážme, že intervaly $< a, b >$, $< c, d >$ majú rovnakú mohutnosť, t.j. je nutné nájsť prosté zobrazenie $f : < a, b > \rightarrow < c, d >$. Najjednoduchšie je položiť $f(x) = \eta_1 x + \eta_2$ a dopočítať η_1, η_2 , ($\eta_1 = \frac{c-d}{a-b}$; $\eta_2 = c - \frac{a(c-d)}{a-b}$). Je zrejmé, že takto definované zobrazenie je prosté.*

c) *Zobrazenie $h(n) = 2n$; $n \in \mathbb{N}$ je prosté a zobrazuje množinu $\mathbb{N}$ na množinu $2\mathbb{N}$.*

d) Uvažujme množinu $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ a tzv. Riemannovu sféru. Jedná sa o sféru, ktorá sa južným pólom dotýka počiatku súradnicového systému $[0, 0, 0]$. Kto-
 rémukol'vek bodu z roviny $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ možno priradiť bod na Riemannovej
 sfére preložením priamky medzi bodom $[x, y, 0] \in \mathbb{R}^3$ a severným pólom tejto
 sféry. Bod, v ktorom sa táto priamka pretne so sférou, je bod Riemannovej
 sféry, odpovedajúci bodu roviny $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Severný pól Riemannovej sféry
 odpovedá nekonečnu, čo je v súlade s prirodzenou geometrickou predstavou.
 Jedná sa o bijektívne zobrazenie, ktoré sa nazýva **stereografická projek-
 cia**. Teda množina $\mathbb{R}^2$ a Riemannova sféra majú rovnaké mohutnosti.

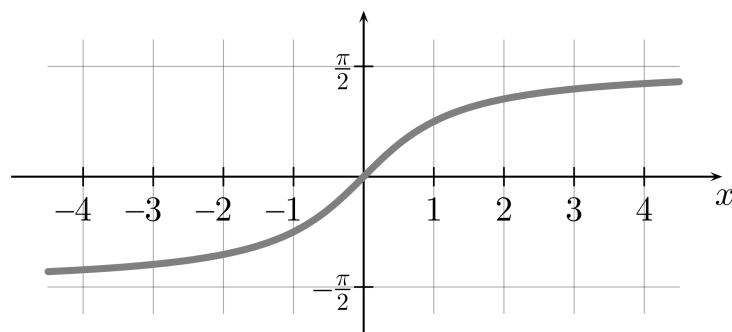
Veta 2.3.

- a) Pre každú množinu A platí $|A| = |A|$.
- b) Ak $|A| = |B|$, tak $|B| = |A|$.
- c) Ak $|A| = |B|$ a $|B| = |C|$, tak $|A| = |C|$.

Dôkaz.

- a) Zobrazenie id_A je bijektívne.
- b) Ak $|A| = |B|$, tak existuje prosté zobrazenie f množiny A na množinu B .
 Podľa vety 1.17 je f^{-1} prostým zobrazením množiny B na množinu A . Teda
 $|B| = |A|$.
- c) Tvrdenie plynie z faktu, že kompozícia dvoch bijektívnych zobrazení je opäť
 bijektívne zobrazenie. $\square$

Príklad 2.4. Uvažujme reštrikciu funkcie tangens na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Takto
 definovaná reštrikcia je prosté zobrazenie intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na množinu reálnych
 čísel, teda $|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})| = |\mathbb{R}|$. Inverzným zobrazením ku funkcii tangens je funk-
 cia arkustangens, ktorá je zrejme prostým zobrazením množiny reálnych čísel na
 interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, teda $|\mathbb{R}| = |(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})|$. Situáciu ilustruje obr. 2.



Obr. 2: Funkcia $y = \arctg(x)$.

Definícia 2.5. Povieme, že množina A má mohutnosť menšiu alebo rovnú ako množina B , označujeme $|A| \leq |B|$, ak existuje prosté zobrazenie množiny A do množiny B , t.j. ak existuje injekcia z A do B . Ak navyše platí $|A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$, tak povieme, že množina A má mohutnosť menšiu ako množina B .

Veta 2.6.

- a) $|A| \leq |A|$.
- b) Ak $|A| \leq |B|$ a $|B| \leq |C|$, tak $|A| \leq |C|$.
- c) $|A| = |B| \Rightarrow |A| \leq |B|$.

Dôkaz.

- a) Zobrazenie id_A je injektívne.
- b) Kompozícia dvoch injekcií je opäť injekcia.
- c) Ak je zobrazenie bijektívne, tak je injektívne. $\square$

Príklad 2.7.

- a) Interval $(0,1)$ má mohutnosť menšiu alebo rovnakú ako interval $<0,1>$, pretože $id_{(0,1)}$ je prosté zobrazenie intervalu $(0,1)$ do $<0,1>$.

b) Nech $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$, $B = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Množina A má mohutnosť menšiu alebo rovnakú ako množina B , pretože $id_{\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}}$ je prosté zobrazenie množiny A do množiny B .

c) Množina $\{0\}$ má mohutnosť menšiu alebo rovnakú ako množina $< 0, 1 >$.

Zrejme existuje prosté zobrazenie $\{0\}$ do $< 0, 1 >$.

d) Nech $A = [0, 0]$, $B = \{[x, y] \in \mathbb{R}; x^2 + y^2 \leq 1\}$, zrejme $|A| < |B|$.

Dokážeme veľmi dôležitú vetu, jeden zo základných výsledkov v oblasti teórie množín, ktorá ukazuje platnosť antisymetrie pre porovnávanie množín.

Veta 2.8 (Cantorova-Bernsteinova-Schröderova veta). Ak $|A| \leq |B|$ a $|B| \leq |A|$, tak $|A| = |B|$. Čo sa dá ekvivalentne formulovať:

Ak existuje injekcia $f : A \rightarrow B$ a injekcia $g : B \rightarrow A$, tak existuje bijekcia $f : A \rightarrow B$.

Táto veta sa často využíva v dôkazoch rôznych tvrdení, pretože mnohokrát je technicky menej náročné zostrojiť injekcie oboma smermi, ako priamo hľadať bijekciu medzi danými množinami. Existuje viacero dôkazov daného tvrdenia, kde je myšlienka obdobná. Ukážeme jeden z nich.

Dôkaz. Nech $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$. Definujme zobrazenie $F : P(A) \rightarrow P(A)$ predpisom:

$$F(X) = A \setminus g(B \setminus f(X))$$

Ďalej indukciou definujme množiny $X_n, n \in \mathbb{N}$ nasledovne:

$$X_0 = \emptyset, X_{n+1} = F(X_n)$$

a položme $Y := \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

Potom platí:

$F(Y) = F(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = A \setminus g(B \setminus f(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n)) = A \setminus g(\bigcap_{n=1}^{\infty} B \setminus f(X_n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \setminus g(B \setminus f(X_n))) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F(X_n) = Y$. Teda sme ukázali, že $F(Y) = Y$ (Y je pevným bodom zobrazenia F).

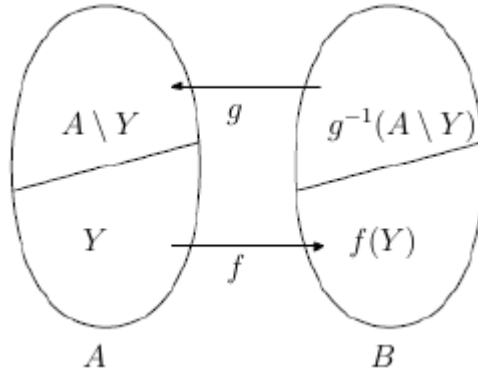
Kde sme využili vetu 1.22, fakt, že f, g sú injekcie a tiež opakované de Morganove

pravidlá.

Ďalej je zrejmé, že platia ekvivalencie:

$F(Y) = Y \Leftrightarrow Y = A \setminus g(B \setminus f(Y)) \Leftrightarrow A \setminus Y = g(B \setminus f(Y))$. Definujme teraz zobrazenie $h : A \rightarrow B$ nasledovne:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in Y \\ b, & b \in B, g(b) = x, x \notin Y \end{cases}$$



Obr. 3: Ilustrácia k dôkazu Cantor-Bernsteinovej-Schröderovej vety.

Tento predpis skutočne definuje zobrazenie, každý prvok z množiny A buď patrí do Y alebo do $A \setminus Y$, čiže sa použije práve jedna z uvedených vetiev. Ak $x \in A \setminus Y$, tak existuje $y \in B$ s vlastnosťou $g(b) = x$, pretože $A \setminus Y = g(B \setminus f(Y))$. Súčasne z injektívnosti g existuje jediné také b .

Ukážme ďalej, že toto zobrazenie je bijektívne. Overme najprv injektívnosť. Nech platí $h(x_1) = h(x_2)$. Rozanalyzujeme všetky možnosti, ktoré môžu nastať:

- Oba prvky sú z množiny Y , t.j. $x_1, x_2 \in Y$. Potom ak $h(x_1) = h(x_2)$, tak $f(x_1) = f(x_2)$ a z injektívnosti f dostaneme $x_1 = x_2$.
- Jeden z týchto prvkov je z Y a druhý je z $A \setminus Y$. Ak $h(x_1) = h(x_2)$, tak máme $g(f(x_1)) = x_2$. Potom $x_2 \in g(f(Y))$ a súčasne $x_2 \in A \setminus Y = g(B \setminus f(Y))$, z toho dostávame $x_2 \in g(f(Y)) \cap g(B \setminus f(Y)) = g(f(Y) \cap (B \setminus f(Y))) = g(\emptyset) = \emptyset$, čo je spor.
- Oba prvky sú v $A \setminus Y$, t.j. $x_1, x_2 \in A \setminus Y$. Potom z $h(x_1) = h(x_2) = b$ vyplýva

$$g(b) = x_1 = x_2.$$

Ešte ostáva overiť surjektívnosť:

Ak $b \in B$, tak môžu nastať dva prípady. Buď $b \in f(Y)$, a potom $b = f(c)$ pre nejaké $c \in Y$, čo znamená, že $b = h(c)$. Ak $b \in B \setminus f(Y)$, tak $g(b) \in A \setminus Y = g(B \setminus f(Y))$, čo podľa definície zobrazenia h znamená, že $b = h(g(b))$. $\square$

Dôsledok 2.9.

$$a) \ a \leq a$$

$$b) \ a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$$

$$c) \ a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c.$$

Kde a, b, c sú kardinálne čísla.

V tejto podkapitole bolo čerpané z [1], [2], [4], [11].

2.2 Definícia konečnosti

V tejto kapitole definujeme pojem konečnej množiny a preskúmame niektoré jej základné vlastnosti. Ukážeme rôzne formulácie pojmu konečná množina. Množinu prirodzených čísel sme definovali ako najmenšiu podmnožinu množiny reálnych čísel, ktorá spĺňa určité vlastnosti. Množinu prirodzených čísel pokladáme za najmenšiu "nekonečnú" množinu. Využijeme to k definícii konečnej množiny a uvidíme, že táto predstava je správna.

Veta 2.10. *Množina A sa nazýva konečná, ak $|A| < |\mathbb{N}|$. Množina sa nazýva nekonečná, ak nie je konečná.*

Príklad 2.11. *Množiny $\emptyset, \{\emptyset\}, \{1, 2\}$ sú konečné množiny. Množiny $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, sú nekonečné.*

Veta 2.12. *Množina A sa nazýva konečná, ak existuje prirodzené číslo n také, že $|A| = n$.*

Veta 2.13 (Dedekindova definícia konečnosti). *Ak X je konečná množina, $A \subseteq X$, $A \neq X$, tak $|A| < |X|$.*

Dôkaz. Dôkaz povedieme sporom. Nech existuje množina $A \subseteq X$, $A \neq X$ taká, že $|A| \geq |X|$. Keďže $|A| \leq |X|$, tak musí platiť $|A| = |X|$. Podľa vety 2.11 existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $|X| = n$. Množina $X \setminus A$ je neprázdna. Nech $x \in X \setminus A$, potom $A \cup \{x\} \subseteq X$. Z toho, že $|A| = |X| = n$ však plynie, že $|A \cup \{x\}| = n + 1$, čo je spor. $\square$

Čiastočne usporiadaná množina je definovaná ako dvojica $(A, \leq)$, kde A je množina a " $\leq$ " je na nej definovaná binárna relácia, ktorá je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Táto relácia sa nazýva usporiadanie.

Veta 2.14 (Tarského definícia konečnosti). *Nech A je čiastočne usporiadaná množina, budeme hovoriť, že množina A je konečná podľa Tarského, ak každá neprázdna podmnožina množiny $P(A)$ obsahuje svoj maximálny prvok.*

Veta 2.15. *Nech A je množina. Potom sú nasledujúce podmienky ekvivalentné.*

- a) $|A| < |\mathbb{N}|$.
- b) *V každej neprázdnej čiastočne usporiadanej množine $(X, \leq)$, $|X| \leq |P(A)|$ existuje maximálny prvok.*
- c) *Množina A je konečná podľa Tarského.*

V tejto podkapitole bolo čerpané z [1], [12].

2.3 Operácie nad mohutnosťami množín

Základné operácie s kardinálnymi číslami ktoré zavedieme sú súčet, súčin a umocňovanie kardinálnych čísel.

Definícia 2.16. *Nech a, b sú kardinálne čísla a nech A, B sú množiny také, že $|A| = a, |B| = b$. Potom platí:*

a) Ak A, B sú disjunktné, potom súčet kardinálnych čísel a a b je kardinálne číslo množiny $A \cup B$, t.j.

$$a + b = |A \cup B|$$

b) Súčin kardinálnych čísel a a b je kardinálne číslo množiny $|A \times B|$, t.j.

$$a \cdot b = |A \times B|.$$

c) Kardinálne číslo a umocnené na kardinálne číslo b je kardinalita množiny všetkých zobrazení z B do A . T.j.

$$a^b = |A^B|, \text{ kde } A^B = \{f; f \text{ je zobrazenie z } B \text{ do } A\}.$$

V prvej časti definície požadujeme, aby boli množiny A, B disjunktné. Ak sme už našli množiny A, B splňajúce $|A| = a; |B| = b$, ktoré nie sú disjunktné, tak namiesto nich môžeme použiť napr. $A \times \{\emptyset\}; B \times \{\{\emptyset\}\}$. Tieto množiny majú rovnakú kardinalitu a určite sú disjunktné.

Spôsob, akým sme zaviedli operácie na kardinálnych číslach je pomerne prirodzený-pre konečné množiny funguje tak, ako obvyklé sčítanie, násobenie a umocňovanie. Ľahko si uvedomíme, že ak máme m -prvkovú a n -prvkovú množinu, ktoré sú disjunktné, tak ich zjednotenie má $m + n$ prvkov. Takisto karteziánsky súčin m -prvkovej a n -prvkovej množiny má $m \cdot n$ prvkov a zobrazení z n -prvkovej množiny do m -prvkovej množiny je m^n . (Pre každý prvok z n prvkov máme práve m možností jeho obrazu.)

Kardinálne číslo množiny prirodzených čísel budeme označovať $\aleph_0$, a čítame "álef nula." Znak $\aleph_0$ je prvé písmeno hebrejskej abecedy.

Veta 2.17. *Nech X je ľubovoľná množina. Potom platí:*

$$|P(X)| = 2^{|X|}.$$

Dôkaz. Na dôkaz treba nájsť bijekciu medzi množinami $\{0, 1\}^X$ a $P(X)$. Definujme zobrazenie $f : P(X) \rightarrow \{0, 1\}^X$, $g : \{0, 1\}^X \rightarrow P(X)$ nasledovne:

$$f(A) = \chi_A, \quad \text{pre } A \subseteq X$$

$$g(h) = \{x \in X; h(x) = 1\}, \text{ pre } h : X \rightarrow \{0, 1\}.$$

Kde $\chi_A(x) = 1$ pre $x \in A$; $\chi_A(x) = 0$ pre $x \notin A$. Platí $g(f(A)) = \{x \in X; \chi_A = 1\} = A$; $f(g(h)) = \chi_{\{x \in X; h(x)=1\}} = h$. Keďže ku f existuje inverzné zobrazenie, je to bijekcia. $\square$

Nech $|A| = a, |B| = b, |C| = c$. Pre násobenie a sčítanie kardinálnych čísel platia zákony aritmetiky, sčítanie je komutatívne

$$a + b = b + a,$$

asociatívne

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

násobenie je komutatívne

$$a.b = b.a$$

asociatívne

$$(a.b).c = a.(b.c)$$

a platí distributívny zákon

$$a.(b + c) = (a.b) + (a.c).$$

Pre umocňovanie kardinálnych čísel platia tiež zákony podobné aritmetickým:

$$a^{b+c} = a^b.a^c$$

$$(a.b)^c = a^c.b^c$$

$$(a^b)^c = a^{b.c}.$$

V tejto podkapitole bolo čerpané z [1], [2].

2.4 Spočítateľné a nespočítateľné množiny

V tomto článku preskúmame základnú klasifikáciu nekonečných množín. Preskúmame vlastnosti množín, ktoré sa dajú prosto zobrazíť do množiny prirodzených čísel. Oboznámime sa s pojmami ako sú **spočítateľná a nespočítateľná** množina. Pojem spočítateľnej množiny možno zjednodušene priblížiť tak, že jej prvky dokážeme spočítať. Spočítaním tu rozumieme, že dokážeme jej prvky postupne očíslovať prirodzenými číslami, pritom je jedno, či použijeme konečný alebo nekonečný počet prirodzených čísel. Naproti spočítateľným množinám stoja množiny nespočítateľné. Opäť by sme zjednodušene mohli tvrdiť, že určitá množina je nespočítateľná, ak nie sme schopní jej prvky postupne očíslovať prirodzenými číslami.

Definícia 2.18. *Množina A sa nazýva spočítateľná, ak $|A| \leq |\mathbb{N}|$, t.j. ak existuje prosté zobrazenie množiny A do množiny prirodzených čísel. Množina, ktorá nie je spočítateľná, sa nazýva nespočítateľná.*

Z definície vyplýva, že každá konečná množina je spočítateľná. Množina prirodzených čísel je spočítateľná, ale nie je konečná. Keďže je mohutnosť každej podmnožiny množiny prirodzených čísel menšia alebo rovná mohutnosti prirodzených čísel platí, že každá podmnožina prirodzených čísel je spočítateľná.

Mohutnosť prirodzených čísel budeme označovať písmenom $\aleph_0$, čítame "alef nula". Znak $\aleph_0$ je prvé písmeno hebrejskej abecedy.

Budeme hovoriť, že množina A sa dá *zoradiť do postupnosti*, ak existuje surjekcia $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ t.j. aby sa množina A dala písať ako:

$$f(0), f(1), \dots, f(n), \dots$$

Veta 2.19. *Neprázdna množina je spočítateľná vtedy a len vtedy, ak sa dá zoradiť do postupnosti.*

Dôkaz. Predpokladajme, že A je spočítateľná. Teda existuje prosté zobrazenie množiny A do množiny prirodzených čísel. Nech $B = H(f) \subseteq \mathbb{N}$. Potom f je

bijekcia A na B . Teda existuje inverzné zobrazenie $f^{-1} : B \rightarrow A$. Na základe predpokladu existuje prvok $a \in A$. Zostrojme zobrazenie $g : \mathbb{N} \rightarrow A$ takto:

$$g(n) = f^{-1}(n); n \in B$$

$$g(n) = a; n \in \mathbb{N} \setminus B.$$

Takto definované zobrazenie je surjekcia.

Nech teraz naopak, množina A sa dá zoradiť do postupnosti, t.j. existuje zobrazenie $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, ktoré je surjektívne. Teda pre každý prvok $x \in A$ existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $f(n) = x$; môže ich existovať aj viac. Potrebujeme však práve jedno. Potrebujeme ho nejak vybrať. Využijeme k tomu usporiadanie množiny prirodzených čísel a vyberieme vždy najmenšie možné n . Nech

$$C = \{n \in \mathbb{N}; (\forall k < n) f(k) \neq f(n)\}.$$

Uvažujme zobrazenie $h = f|_C : C \rightarrow A$, h je injekcia; ak totiž $n_1, n_2 \in C, n_1 \neq n_2$ tak je napr. $n_1 < n_2$. Z toho, že $n_2 \in C$ vyplýva $h(n_1) = f(n_1) \neq f(n_2) = h(n_2)$. Ak $x \in A$, tak existuje n také, že $f(n) = x$. Nech n je najmenšie také číslo. Teda pre $k < n$ je $f(k) \neq x$. Z toho vyplýva, že $n \in C$ a teda $x = h(n)$. Takže takto definované zobrazenie h je bijektívne, teda existuje inverzné zobrazenie $h^{-1} : A \rightarrow C \subseteq \mathbb{N}$ do množiny prirodzených čísel, takže množina A je spočítateľná.

Príklad 2.20.

- a) Ukážte, že množina $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ je spočítateľná. Množina je spočítateľná, ak sa dá zoradiť do postupnosti. Prvky množiny $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ sú tvorené zlomkami, kde je čitateľ menší ako menovateľ. Ľahko tieto prvky zoradíme do postupnosti:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots$$

- b) Množina $\mathbb{Z}$ je taktiež spočítateľná, pretože ju jednoducho vieme zoradiť do postupnosti:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots, n, -n, \dots$$

c) Ukážte, že platí $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Na dôkaz stačí zostrojiť bijekciu medzi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$. Takýchto bijekcií existuje veľa a nazývajú sa **párujúce funkcie**, ukážeme jednu veľmi známu pochádzajúcu už od G. Cantora. Je nutné usporiadané dvojice prirodzených čísel zoradiť do postupnosti:

$$\begin{array}{ccccccc}
 [0, 0] & [1, 0] & [2, 0] & [3, 0] & \cdots & [n, 0] & \cdots \\
 [0, 1] & [1, 1] & [2, 1] & [3, 1] & \cdots & [n, 1] & \cdots \\
 [0, 2] & [1, 2] & [2, 2] & [3, 2] & \cdots & [n, 2] & \cdots \\
 [0, 3] & [1, 3] & [2, 3] & [3, 3] & \cdots & [n, 3] & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
 [0, n] & [1, n] & [2, n] & [3, n] & \cdots & [n, n] & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots
 \end{array}$$

Zobrazenie $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definujeme tak, že každej usporiadanej dvojici priradíme pozíciu, na ktorej sa nachádza v tejto postupnosti, t.j. $[0, 0] \rightarrow 0; [0, 1] \rightarrow 1; [1, 0] \rightarrow 2; [0, 2] \rightarrow 3; [1, 1] \rightarrow 4; [2, 0] \rightarrow 5$ atď.

Všimnime si, že dvojice na tej istej diagonále (t.j. také dvojice $[m, n]$, ktoré majú rovnaký súčet $m + n$), zoradíme podľa prvej súradnice a všetky prvky z diagonál, ktoré sú naľavo od nich. Teda ak $m + n = s$, tak $1 + 2 + \cdots + s = \frac{s(s+1)}{2}$ prirodzených čísel sme použili na predchádzajúce diagonály. Poradie na diagonále určíme podľa m , takže dostaneme:

$$f(m, n) = \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) + m.$$

Ukážeme, že takto definované zobrazenie je prosté. Označme $\Delta_a = \sum_{k=1}^a k = \frac{a(a+1)}{2}$ (čiže Δ_a je a -te trojuholníkové číslo.) Potom funkciu f môžeme písať ako $f(m, n) = \Delta_{m+n} + m$. Označme ďalej $I_a = \{\Delta_a, \Delta_{a+1}, \dots, \Delta_{a+1} - 1\}$ pre každé

$a \in \mathbb{N}$. Systém $I_a; a \in \mathbb{N}$ tvorí rozklad množiny $\mathbb{N}$ (Tento fakt plynie z toho, že platí: $\Delta_0 = 0$ a $\Delta_a < \Delta_{a+1}$). $I_0 = \{0\}, I_1 = \{1, 2\}, I_2 = \{3, 4, 5\} \dots$. Je zrejmé, že $f(m, n) \in I_{m+n}$. Vďaka tomu z rovnosti $f(m+n) = f(k+l)$ a z toho, že systém I_a je disjunktný plynie $m+n = k+l$. Z $\Delta_{m+n} + m = \Delta_{m+n} + k$ dostaneme $m = k$, a teda aj $n = l$. Tým sme dokázali injektívnosť zobrazenia. $\square$

Veta 2.21. *Zjednotenie a karteziánsky súčin dvoch spočítateľných množín je spočítateľná množina.*

Dôkaz. Nech A, B sú spočítateľné množiny. Ak $\#A = 0 \vee \#B = 0$ tvrdenie triviálne platí. Predpokladajme teda, že množiny A, B sú neprázdne. Podľa vety 2.19 sa dajú zoradiť do postupnosti t.j. existujú surjekcie $f : \mathbb{N} \rightarrow A; g : \mathbb{N} \rightarrow B$. Množinu $A \cup B$ zoradíme do postupnosti takto:

$$f(0) , g(0) , f(1) , g(1) \dots f(n) , g(n) \dots$$

t.j. položíme :

$$h(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) \text{ pre } n \text{ párne}$$

$$h(n) = g\left(\frac{n-1}{2}\right) \text{ pre } n \text{ nepárne.}$$

Takto definované zobrazenie $h : \mathbb{N} \rightarrow A \cup B$ je surjekcia. Pre karteziánsky súčin budeme postupovať inak. Z toho, že A, B sú spočítateľné množiny vyplýva, že existujú injekcie $f : A \rightarrow \mathbb{N}, g : B \rightarrow \mathbb{N}$. Nech $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je nejaká párujúca funkcia. Zobrazenie F definované predpisom:

$$F([a, b]) = \pi(f(a), g(b))$$

je injekcia z $A \times B$ do $\mathbb{N}$. $\square$

Veta 2.22. *Nech I je spočítateľná množina a A_i je taktiež spočítateľná pre každé $i \in I$. (T.j. systém $\{A_i; i \in I\}$ je spočítateľný systém spočítateľných množín.) Potom aj množina $\bigcup_{i \in I} A_i$ je spočítateľná množina.*

Dôkaz tohoto tvrdenia využíva *axiómu výberu*, ktorej sa v tomto texte nebudeme venovať, preto daný dôkaz vynechávame.

Dôkaz. Dôkaz v [2], veta 4.4.2, str. 77.

Príklad 2.23. *Nech je daná množina prirodzených čísel. Ukážte, že množina všetkých konečných postupností prvkov z $\mathbb{N}$ dĺžky k je spočítateľná množina pre každé $k \in \mathbb{N}$; k konečné.*

Riešenie: Ak by sme položili $k = 1$, postupnosti by boli jednoprvkové. Všetkých týchto postupností je práve toľko, koľko je prirodzených čísel.

Pre $k = 2$ je situácia obdobná. Všetkých postupností dĺžky 2 je práve toľko, koľko je usporiadaných dvojíc $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Takto postupujeme v úvahách ďalej, je zrejmé, že sa jedná o množinu $\mathbb{N}^k$. Spočetnosť $\mathbb{N}^k$ sa overí využitím matematickej indukcie. Pre $k = 2$ je $\mathbb{N}^k = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, čo je podľa vety 2.21 spočítateľná množina. Predpokladajme ďalej, že $\mathbb{N}^k$ je spočítateľná množina. Potom $\mathbb{N}^{k+1} = \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}$, čo je opäť spočítateľná množina.

Doposiaľ sme sa v texte zaoberali iba spočítateľnými množinami, teraz si ukážeme, že množina reálnych čísel je nespočítateľná. Otázkou, či je možné množinu reálnych čísel zoradiť do postupnosti sa zaoberal aj G.Cantor, ktorý v roku 1890 uverejnil dôkaz nespočítateľnosti množiny reálnych čísel.

Tento dôkaz je založený na *metóde Cantorovej diagonály*. Jej modifikáciou boli získané dôležité výsledky v rôznych oblastiach matematiky.

Veta 2.24. *Množina všetkých reálnych čísel je nespočítateľná.*

Dôkaz. Dôkaz urobíme sporom. Sledujeme pôvodný Cantorov dôkaz. Predpokladajme teda, že množina $\mathbb{R}$ je spočítateľná, potom aj interval $< 0, 1 >$ je spočítateľný a možno ho zoradiť do postupnosti:

$$< 0, 1 > = \{a_n; n \in \mathbb{N}, n > 0\}.$$

Každé číslo a_n má dekadický zápis:

$$a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{nk} \cdot 10^{-k}.$$

Ak číslo a_n má dva rôzne dekadické zápisy, tak vyberieme nekonečný zápis. Čísla $a_n, n \in \mathbb{N}, n > 0$ a ich dekadické zápisy môžeme zoradiť nasledovne:

$$a_1 = 0, \quad a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n} \ \dots$$

$$a_2 = 0, \quad a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ \dots \ a_{2n} \ \dots$$

$$\vdots$$

$$a_n = 0, \quad a_{n1} \ a_{n2} \ a_{n3} \ \dots \ a_{nn} \ \dots$$

Teraz použijeme metódu diagonály. Zostrojme číslo $b = 0, \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_n \dots$ takto. Ak $a_{kk} = 1$ položíme $b_k = 9$. Ak $a_{kk} \neq 1$, položíme $b_k = 1$. Potom číslo b patrí do intervalu $< 0, 1 >$, teda existuje n také, že $a_n = b$. Špeciálne musí byť $a_{nn} = b_n$. Ale číslo b bolo zostrojené tak, aby pre každé k bolo $b_k \neq a_{kk}$, teda aj $a_{nn} \neq b_n$. To je hľadaný spor. $\square$

Príklad 2.25 (Ďalšie príklady nespočítateľných množín).

a) Označme symbolom ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ množinu všetkých postupností prirodzených čísel. Obmenou Cantorovej diagonály ukážeme, že takto definovaná množina je nespočítateľná. Ak $A \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ je spočítateľná, tak existuje postupnosť $h \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ taká, že $h \notin A$. Nech A je spočítateľná množina postupností prirodzených čísel. Potom teda A možno zoradiť do postupnosti:

$$A = \{f_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Položíme

$$h(k) = f_k(k) + 1.$$

Zrejme $h \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$. Ukážme, že $h \notin A$. Keby totiž $h \in A$, tak existuje n také, že $h = f_n$. Na základe toho, ako bolo definované h však dostávame $h(n) \neq f_n(n)$.

b) Ďalším príkladom nespočítateľnej množiny je tzv. **Cantorovo diskontinuum**. Je to matematický pojem označujúci istú množinu bodov na priamke. Cantorovo diskontinuum býva považované za fraktál.

Konštrukcia Cantorovho diskontinua:

Uvažujme interval $< 0, 1 >$. Ak z neho odoberieme prostrednú tretinu, získame tým dva nové uzavreté intervaly tretinovej dĺžky. Ak z týchto intervalov opäť odoberieme ich prostredné tretiny, získame celkom štyri nové intervaly deväťnovej dĺžky. Ak budeme takto postupovať ďalej a urobíme nekonečne veľa týchto krokov je zrejmé, že dĺžka intervalov bude konvergovať k nule. Touto úvahou získame množinu limitných bodov, označovanú ako Cantorovo diskontinuum.

(Táto množina má Lebesgueovu mieru rovnú nule a je tzv. perfektná množina, pretože je rovná množine svojich limitných bodov.) Konštrukcia Cantorovho diskontinua je ilustrovaná na obr. 4.



Obr. 4: Siedma iterácia Cantorovho diskontinua.

Ukážme ešte jeden dôkaz toho, že množina reálnych čísel je nespočítateľná. Ku dôkazu nám pomôžu nasledujúce pomocné tvrdenia.

Lemma 2.26. *Nech $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť neprázdnych uzavretých intervalov taká, že*

- a) *pre každé n platí $I_{n+1} \subseteq I_n$;*
- b) *Dĺžka intervalov I_n konverguje k nule.*

Potom prienik $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ obsahuje práve jedno reálne číslo.

Lemma 2.27. *Nech $\langle a, b \rangle$ je uzavretý interval, $a < b$. Pre každé reálne číslo $x \in \langle a, b \rangle$ existuje interval $\langle c, d \rangle$, $c < d$ taký, že*

$$a) \ x \in \langle c, d \rangle;$$

$$b) \ \langle c, d \rangle \subseteq \langle a, b \rangle;$$

$$c) \ d - c < \frac{1}{2}(b - a).$$

Teraz dokážeme takéto tvrdenie: Ak $X \subseteq \mathbb{R}$ je spočítateľná množina, tak $X \neq \mathbb{R}$. Je zrejmé, že tvrdenie je ekvivalentné vete 2.24.

Dôkaz.

Nech $X = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ je spočítateľná množina reálnych čísel. Označme I_0 taký interval dĺžky 1, ktorý neobsahuje číslo x_0 . Ak máme zostrojený interval I_n , tak podľa lemy 2.27 existuje interval $I_{n+1} \subseteq I_n$ neobsahujúci číslo x_{n+1} a taký, že jeho dĺžka je kladná a menšia ako polovica dĺžky I_n .

Postupnosť intervalov $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ spĺňa predpoklady lemy 2.26, a teda existuje číslo $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$. Keby $x \in X$, tak $x = x_n$ pre nejaké n a to je spor s tým, že $x \in I_n$ a $x \notin I_n$. Teda $x \notin X$ a z toho už vyplýva, že $X \neq \mathbb{R}$. $\square$

Pytagoras a jeho žiaci v 6. storočí pred n. l. vedeli, že uhlopriečka jednotkového štvorca, t.j. $\sqrt{2}$ nie je číslo racionálne. Za viac ako 2000 rokov matematici nenašli iný typ iracionálnych čísel, ako odmocniny a ich kombinácie. V prvej polovici 18. storočia Euler ukázal, že číslo e a potom Johan Heinrich Lambert (1728-1777), že číslo π je iracionálne. Vznikla prirodzená otázka, či existujú iracionality iného typu ako "kombinácie odmocnín". Andrien-Marie Legendere (1752-1833) vyslovil hypotézu, že číslo π nie je koreňom polynómu s racionálnymi koeficientmi. To viedlo bezprostredne k zavedeniu nového pojmu.

Reálne číslo a sa nazýva *algebraické*, ak existujú racionálne čísla $a_0, \dots, a_n$ také, že a je koreňom polynómu $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $|a_0| + \dots + |a_n| \neq 0$. Číslo, ktoré nie je algebraické, sa nazýva *transcendentálne*.

Ďalším dôležitým krokom bol dôkaz Legendreovej hypotézy o transcendentálnosti čísla π , ktorý v roku 1873 vyslovil Charles Hermite (1822-1901). V roku 1874

význačný úspech v tomto smere dosiahol G.Cantor. G.Cantor ukázal, že množina algebraických čísel je spočítateľná, teda množina transcendentálnych čísel je nespočítateľná.

Veta 2.28. *Množina reálnych algebraických čísel je spočítateľná.*

Dôkaz.

Množinu algebraických čísel označme Alg . Ak $f \in \mathbb{Z}^n$ je usporiadaná n -tica celých čísel $f = [a_0, \dots, a_{n-1}]$, tak označme:

$$P_f = \{a \in \mathbb{R}; a_0 + a_1 a + \dots + a_{n-1} a^{n-1} = 0\}.$$

Podľa definície algebraického čísla, a je algebraické vtedy a len vtedy, keď existuje $n \in \mathbb{N}$ a n -tica celých čísel $f \neq [0, \dots, 0]$, že platí $a \in P_f$.

Teda:

$$Alg = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{f \in \mathbb{Z}^n \setminus \{[0, \dots, 0]\}} P_f.$$

Množiny $\mathbb{Z}^n, n \in \mathbb{N}$ sú spočítateľné. Z algebry je zrejmé, že každá množina P_f je konečná, na základe príkladu 2.23 a vety 2.22 je množina Alg spočítateľná. $\square$

Množinu všetkých reálnych čísel nazývame **reálne kontinuum**. Jej mohutnosť $|\mathbb{R}|$ sa preto nazýva mohutnosť kontinua a označuje sa **c**.

Veta 2.24 tvrdí, že

$$\mathbf{c} > \aleph_0.$$

Veľkým problémom matematiky 20. storočia bola tzv. *Hypotéza kontinua*. Je založená na nasledujúcej úvahe, nech $\mathbb{N}$ je množina prirodzených čísel a $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Vieme, že $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. Otázka znie, či existuje nejaká množina X , pre ktorú by platil nasledujúci vzťah :

$$|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|.$$

Teda, či existuje nejaká nespočítateľná množina, ktorá má menšiu mohutnosť ako

kontinuum. Hypotéza kontinua tvrdí, že množina X neexistuje, t.j. že množina reálnych čísel je najmenšia nespočítateľná množina.

V tejto podkapitole bolo čerpané z [1], [2], [4], [9], [10].

3 Topologické priestory

3.1 Euklidovský a metrický priestor

Definícia 3.1. *N-rozmerný euklidovský priestor* E_n je množina všetkých usporiadaných n -tíc $X = [x_0, \dots, x_{n-1}]$ reálnych čísel, pričom je definovaná vzdialenosť dvoch n -tíc $X = [x_0, \dots, x_{n-1}]$, $Y = [y_0, \dots, y_{n-1}]$ vzťahom :

$$\rho(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - y_i)^2}.$$

N -tícu $X = [x_0, \dots, x_{n-1}]$ reálnych čísel nazývame *bodom priestoru* E_n a čísla $x_0, \dots, x_{n-1}$ *súradnice* tohoto bodu.

Okolie bodu A presnejšie ϵ -ové okolie $O(A, \epsilon)$ je množina všetkých bodov $X \in E_n$, ktorých vzdialenosť od bodu A je menšia ako ϵ . Teda:

$$O(A, \epsilon) = \{X \in E_n; \rho(A, X) < \epsilon\}.$$

Nech M je množina bodov v euklidovskom priestore E_n .

Bod $A \in M$ nazývame *vnútorným bodom množiny* M , ak existuje také okolie bodu A , ktoré celé patrí do M . Bod A nazývame *hraničným bodom* množiny M , ak v každom okolí bodu A existuje aspoň jeden bod patriaci do množiny M a aspoň jeden bod nepatriaci do množiny M . Bod A nazývame *izolovaným bodom* množiny M , ak existuje okolie bodu A , ktoré obsahuje iba jediný bod množiny M , a to A . Je zrejmé, že izolovaný bod množiny M je zároveň jej hraničným bodom. Bod A nazývame *hromadným bodom* množiny M , ak v každom okolí existuje aspoň jeden bod množiny M rôznyi od A .

Množinu všetkých vnútorných bodov nazývame *vnútrom* množiny M .

Množina M sa nazýva *otvorená*, ak každý jej bod je jej vnútorným bodom.

Množina všetkých hraničných bodov množiny M sa nazýva *hranica* množiny M .

Množina M sa nazýva *uzavretá*, ak $E_n \setminus M$ je množina otvorená. Množina M sa nazýva *súvislá*, ak jej ľubovoľné dva rôzne body môžeme spojiť jednoduchou

krivkou, ktorej všetky body patria do M . Množina M , ktorá je otvorená a súvislá, sa nazýva *oblasť*.

Definícia 3.2. *Nech X je nejaká neprázdna množina. Definujme zobrazenie $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, na usporiadaných dvojiciach prvkov množiny X , ktoré spĺňa nasledujúce podmienky:*

- a) $d(x, y) \geq 0; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- b) $d(x, y) = d(y, x)$ (symetria),
- c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (trojuholníková nerovnosť).

Usporiadanú dvojicu (X, d) nazývame **metrickým priestorom**, zobrazenie d **metrikou** a množinu X merateľným priestorom. Metrika je zovšeobecnením pojmu vzdialenosť.

Definícia 3.3. *Nech (X, d) je metrický priestor. $A \subseteq X$. Bod $x \in X$ nazveme bodom uzáveru množiny A , ak existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, x_n \in A, n = 0, 1, \dots$, ktorá konverguje k bodu x . Množinu všetkých bodov uzáveru množiny A nazývame uzáverom množiny A a označujeme $\bar{A}$.*

Veta 3.4. *Nech (X, d) je metrický priestor, potom platí:*

- a) *Pre prázdnu množinu $\emptyset \subseteq X$ platí $\bar{\emptyset} = \emptyset$.*
- b) *Pre ľubovoľnú množinu $A \subseteq X$ platí $A \subseteq \bar{A}$.*
- c) *Pre ľubovoľnú množinu $A \subseteq X$ platí $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$.*
- d) *Pre ľubovoľné dve množiny $A, B \subseteq X$ platí $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.*

Definícia 3.5. *Množina A sa nazýva uzavretá, ak $A = \bar{A}$. Množinu $A \subseteq X$ nazveme otvorenou, ak $X \setminus A$ je uzavretá množina.*

Ku problematike uzavretých a otvorených množín sa možno dostať aj cez otvorené množiny.

Definícia 3.6. *Nech (X, d) je metrický priestor. $A \subseteq X$. Bod $P \in A$ nazveme vnútorným bodom množiny A , ak existuje $\epsilon > 0$ také, že $O(P, \epsilon) \subseteq A$, kde $O(P, \epsilon)$ je otvorená guľa so stredom v bode P a polomerom ϵ . Vnútro množiny A označíme $\text{int}A$.*

Veta 3.7. *Množina A sa nazýva otvorená, ak $A = \text{int}A$.*

V tejto podkapitole bolo čerpané z [14], [15].

3.2 Topologický priestor

Topológia (z gréckeho topos-miesto a logos-štúdia) je matematická disciplína, ktorej úlohou je objasňovanie a výskum idey spojitosti. Topológia spolu s algebrou sa dnes považuje za všeobecný základ súčasnej matematiky.

Topológia študuje také vlastnosti útvarov, ktoré sa nemenia pri obojstranných spojitých zobrazeniach. V topológii nezáleží na geometrických vlastnostiach závislých na vzdialenosti, krivosti a podobne. Z hľadiska topológie je možné v rovine považovať štvorec a kruh za rovnocenné.

Podľa metód, ktorými topológia študuje topologické útvary, sa rozlišuje na topológiu algebraickú a topológiu množinovú. Moderná topológia svoje výsledky stavia na teórii množín vybudovanej G.Cantorom.

V tejto kapitole zavedieme základné pojmy množinovej topológie. Budeme študovať množiny, na ktorých je daná topologická štruktúra (=topológia), t.j. systém ich podmnožín, sňajúci určité podmienky (axiomy topológie).

Topologickou štruktúrou na množine X rozumieme systém τ podmnožín množiny X splňajúci nasledujúce podmienky:

- a) Prázdna množina $\emptyset$ a množina X patria systému τ ,
- b) Zjednotenie ľubovoľného systému množín z τ patrí systému τ ,
- c) Prienik dvoch ľubovoľných množín z τ patrí systému τ .

Topologickú štruktúru na množine X tiež nazývame **topológia** na X . Uvedené podmienky sa nazývajú **axiomy topológie**.

Množinu X , na ktorej je daná topológia τ nazývame **topologický priestor** a označujeme (X, τ) ; ak je zrejmé o akú topológiu sa jedná, miesto symbolu (X, τ) používame symbol X . Prvky topológie τ nazývame **otvorené množiny**. Každý komplement otvorenej množiny sa nazýva **uzavretá množina**.

Príklad 3.8 (Príklady topologických priestorov).

- a) Medzi najznámejšie topologické priestory patrí (X, τ) , kde $X = \mathbb{R}$ a $G \in \tau$ práve vtedy, ak s každým bodom $g \in G$ je v G obsiahnutý aj nejaký interval $(g - \epsilon; g + \epsilon)$ pre vhodné ϵ . Túto topológiu nazývame obvyklá topológia reálnej osi.
- b) Zvoľme $X = \mathbb{R}^n$, kde n je prirodzené číslo rôzne od nuly, $G \in \tau$, ak s každým bodom $g \in G$ je v G obsiahnutá otvorená guľa s polomerom ϵ pri vhodnej voľbe ϵ .
- c) Množina $X = \{a, b, c, d\}$ a na nej definovaná topológia $\tau = \{\{\emptyset\}, \{a, b, c, d\}\}$, ktorá obsahuje jediné dve podmnožiny množiny X požadované definíciou, sa nazýva triviálna alebo tiež antidiskrétna topológia.
- d) Množiny $X = \{a, b, c, d\}$ a $\tau = \{\{\emptyset\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$ tvoria topologický priestor.
- e) Nech (X, d) je metrický priestor. Za topológiu τ_d vezmeme systém všetkých otvorených množín v X vzhľadom ku d . Takto definovaná topológia sa nazýva topológia indukovaná metrikou d .
- f) Topológiou na ľubovoľnej množine je aj potenčná množina $P(X)$. Topologický priestor $(X, P(X))$ sa nazýva diskretný. Všimnime si, že diskretná topológia $P(X)$ je najväčšou topológiou na X . Táto topológia je indukovaná tzv. diskretnou metrikou d definovanou na X predpisom:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

g) *Nech X je ľubovoľná množina. Za topológiu τ môžeme vziať množinu všetkých tých podmnožín, ktorých doplnok je vzhľadom ku X spočítateľný.*

h) *Nech $(X, \leq)$ je usporiadaná množina. Za topológiu $\tau_{\leq}$ vezmeme všetky podmnožiny množiny X , ktoré s každým svojím bodom obsahujú niektorú množinu tvaru $\{z \in X; x \leq z \leq y\}$. Takáto topológia na X sa nazýva intervalová topológia.*

Definícia 3.9. *Topologický priestor (X, τ) sa nazýva metrizovateľný, ak topológia τ je indukovaná niektorou metrikou.*

Definícia 3.10 (Slabšia topológia, silnejšia topológia). *Nech τ_1, τ_2 sú dve topológie na množine X . Hovoríme, že topológia τ_1 je slabšia (hrubšia, menšia) ako topológia τ_2 , ak platí: $U \in \tau_1 \Rightarrow U \in \tau_2$. Hovoríme tiež, že topológia τ_2 je silnejšia (jemnejšia, väčšia). Zapisujeme: $\tau_1 \prec \tau_2$.*

Poznámka 3.11. *Je zrejmé, že v predchádzajúcom príklade je topológia definovaná za d) jemnejšia ako topológia definovaná za c).*

Veta 3.12.

1) *Nech X je topologický priestor. Systém σ všetkých uzavretých podmnožín X spĺňa tieto podmienky:*

a) $\emptyset, X \in \sigma$,

b) *Prienik ľubovoľného systému množín zo systému σ patrí systému σ ,*

c) *Zjednotenie ľubovoľných dvoch množín zo systému σ patrí systému σ .*

2) *Nech X je množina, σ je systém podmnožín X splňajúcí podmienky a), b), c).*

Potom systém $\tau = \{U \subseteq X; U = X \setminus A; A \in \sigma\}$ je topológia na X . Systém všetkých uzavretých množín v topológii τ splýva so systémom σ .

Dôkaz. Dokážeme tvrdenie 1). Podmienka a) vyplýva priamo z definície. Nech I je indexová množina, $(A_i)_{i \in I}$ je systém uzavretých podmnožín množiny X . Potom $X \setminus (\bigcap A_i) = \bigcup (X \setminus A_i)$, čo je množina otvorená, teda $\bigcap A_i$ musí byť množina uzavretá. To dokazuje podmienku b). Nakoniec pre ľubovoľné uzavreté množiny

$A, B \in \sigma$, množina $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ je množina otvorená, teda množina $A \cup B$ je množina uzavretá, čo dokazuje podmienku c).

Dokážeme tvrdenie 2). Z axiómov topológie priamo plynie, že systém τ je topológiou na X . Ďalej platí, že každá množina patriaca do σ je uzavretá v τ . Naopak, nech A je uzavretá množina, potom existuje otvorená množina U tak, že $A = X \setminus U$. Podľa predpokladu $U = X \setminus B$, kde $B \in \sigma$. Odtiaľ $B = X \setminus U = A$, t.j. $A \in \sigma$. $\square$

V tejto podkapitole bolo čerpané z [3], [13], [6].

3.3 Lokálna báza, báza a subbáza topologického priestoru

Zo štúdia algebry vieme, že v mnohých prípadoch stačí určitú vlastnosť overovať na prvkoch nejakej bázy, aby bola zaručená platnosť danej vlastnosti všade. Obdobná situácia je aj v topológii, namiesto chovania všetkých otvorených množín stačí poznať chovanie iba vybraných, aby bolo možné prenášať zovšeobecnené úsudky. V tejto súvislosti zavedieme nasledujúce pojmy.

Veta 3.13. *Nech (X, τ) je topologický priestor, okolím bodu $x \in X$ rozumíme množinu O_x , pre ktorú platí:*

- a) $x \in O_x$,
- b) $\exists U \in \tau$ taká, že $x \in U \subseteq O_x$.

Definícia 3.14. *Množinu B_x okolí bodu x v topologickom priestore (X, τ) nazveme **lokálnou bázou**, ak pre každé okolie O_x bodu x existuje okolie $U_x \in B_x$ tak, že $x \in U_x \subseteq O_x$.*

Príklad 3.15.

- a) *Množina všetkých gulí so stredom v bode x metrického priestoru (X, d) je lokálnou bázou bodu x vzhľadom ku topológii τ_d indukovanou metrikou d .*

- b) Ak sa obmedzíme iba na gule s kladnými racionálnymi polomeri, resp. s polomeri tvaru $\frac{1}{n}$; kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dostaneme spočítateľnú lokálnu bázu bodu x .

Definícia 3.16. Systém množín $\mathcal{B} \subseteq \tau$ topologického priestoru (X, τ) nazývame **bázou topológie**, ak pre každý bod $x \in X$ a pre každé okolie O_x bodu x existuje $B \in \mathcal{B}$ také, že $x \in B \subseteq O_x$.

Bázu topológie možno ekvivalentne definovať nasledovne: Bázu topológie τ rozumieme podsystem $\mathcal{B}$ systému τ taký, že každá neprázdna množina z τ je zjednotením nejakých množín systému $\mathcal{B}$.

Príklad 3.17.

- a) Množina všetkých otvorených gulí metrického priestoru je bázou topológie indukovanej danou metrikou. Ak sa obmedzíme iba na gule s kladnými racionálnymi polomeri, taktiež obdržíme bázu topológie indukovanej danou metrikou.
- b) Množina všetkých jednoprvkových podmnožín množiny $P(X)$ je bázou diskkrétnej topológie na X .

Veta 3.18. Systém množín $\mathcal{B}$ je bázou topológie na množine $X = \bigcup \{B; B \in \mathcal{B}\}$ práve vtedy, ak pre každé $A, B \in \mathcal{B}$ a pre každé $x \in A \cap B$ existuje $C \in \mathcal{B}$ také, že platí $x \in C \subseteq A \cap B$. Topológia je svojou bázou jednoznačne určená.

Definícia 3.19. Systém množín $\mathcal{S}$ nazveme **subbázou** topológie τ , ak množina všetkých možných konečných prienikov množín z $\mathcal{S}$ tvorí bázu τ .

Príklad 3.20.

- a) Množina všetkých možných intervalov typu $(-\infty; a), (a, \infty), a \in \mathbb{R}$ tvorí subbázu obvyklej topológie na $\mathbb{R}$.
- b) Každá báza nejakej topológie je zároveň jej subbázou.

Veta 3.21. Každý systém množín $\mathcal{S}$ je subbázou jedinej topológie na množine $X = \bigcup \{S; S \in \mathcal{S}\}$.

Dôkaz.

Stačí overiť, že množina $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ tvorená všetkými konečnými prienikmi množín z $\mathcal{S}$ splňuje podmienku vety 3.18. Nech $A, B \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. Potom môžeme písať $A = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n, B = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n$, kde $S_i, P_j \in \mathcal{S}$. Ďalej platí $A \cap B = (S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n) \cap (P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n)$, čo je opäť konečný prienik množín z $\mathcal{S}$, takže podmienka vety 3.17 je splnená a $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ je báza jedinej topológie na X . $\square$

Poznámka 3.22. Topológia z predchádzajúcej vety sa niekedy nazýva topológia generovaná systémom $\mathcal{S}$.

Spôsob definície uzavretej množiny ako doplnku ku otvorenej množine umožňuje na základe deMorganových pravidiel definovať bázu a subbázu uzavretých množín.

Definícia 3.23. Povieme, že systém $\mathcal{D}$ uzavretých množín topologického priestoru (X, τ) tvorí bázu uzavretých množín, ak každú uzavretú množinu v X môžeme vyjadriť ako prienik množín z $\mathcal{D}$. Povieme, že systém uzavretých množín $\mathcal{P}$ tvorí subbázu uzavretých množín, ak množina všetkých konečných zjednotení prvkov z $\mathcal{P}$ tvorí bázu uzavretých množín v (X, τ) .

Poznámka 3.24. Je zrejmé, že systém $\mathcal{B}$ podmnožín množiny X tvorí bázu resp. subbázu nejakej topológie τ na X , práve vtedy, keď množina všetkých doplnkov prvkov z $\mathcal{B}$ vzhľadom ku X tvorí bázu resp. subbázu uzavretých množín vzhľadom ku τ .

V tejto podkapitole bolo čerpané z [3], [13], [6].

3.4 Topologické priestory I. a II. typu spočítateľnosti

Definícia 3.25. Povieme, že topologický priestor (X, τ) splňuje prvý axióm spočítateľnosti (je prvého typu spočítateľnosti), ak každý bod $x \in X$ má spočítateľnú lokálnu bázu.

Definícia 3.26. *Povieme, že topologický priestor spĺňa druhý axióm spočítateľnosti (je druhého typu spočítateľnosti), ak existuje spočítateľná báza topológie τ .*

Veta 3.27. *Nech X je topologický priestor prvého typu spočítateľnosti. Potom pre ľubovoľný bod $x \in X$ existuje lokálna báza topológie v bode x tvaru $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, kde $U_{i+1} \subseteq U_i$ pre každé $i \in \mathbb{N}$.*

Dôkaz. Pre ľubovoľnú spočítateľnú bázu $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ topológie τ v bode x položíme $U_1 = V_1$, $U_2 = U_1 \cap V_2$, ..., $U_i = U_{i-1} \cap V_i$, Potom systém množín $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ má požadované vlastnosti. $\square$

Poznámka 3.28. *Systém množín, ktorého zjednotenie je nadmnožinou X sa nazýva pokrytím X .*

Veta 3.29 (Lindelöfov teorém). *Každé otvorené pokrytie topologického priestoru druhého typu spočítateľnosti obsahuje spočítateľné podpokrytie.*

Dôkaz.

Nech X je topologický priestor druhého typu spočítateľnosti, $(U_l)_{l \in I}$ je otvorené pokrytie X . $\mathcal{B}$ je spočítateľná báza topológie X . Každá z množín U_l je zjednotením elementov bázy $\mathcal{B}$. Nech $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$ je podsystém spĺňujúci nasledujúce vlastnosti:

- a) Každý element $V \in \mathcal{K}$ je podmnožinou niektorej z množín U_l ,
- b) $\mathcal{K}$ je pokrytie X .

Ku každému elementu $V \in \mathcal{K}$ zvolíme index $l(V)$ tak, že $V \subseteq U_{l(V)}$. Systém $(U_{l(V)})_{V \in \mathcal{K}}$ je spočítateľný podsystém systému $(U_l)_{l \in I}$. Tento podsystém je pokrytím X . $\square$

Veta 3.30. *Topologický priestor sa nazýva **Lindelöfov**, ak každé jeho otvorené pokrytie obsahuje spočítateľné podpokrytie.*

V tejto podkapitole bolo čerpané z [3], [13], [6].

3.5 Husté množiny a separabilné priestory

Definícia 3.31. Povieme, že podmnožina A topologického priestoru X je hustá v X , ak $\overline{A} = X$.

Veta 3.32. Nech X je topologický priestor, A je hustá v X . Potom pre ľubovoľnú otvorenú množinu $U \subseteq X$ platí $\overline{U} = (\overline{U \cap A})$.

Dôkaz.

Nech $x \in \overline{U}$. Pre ľubovoľné okolie O_x bodu x platí $O_x \cap U \neq \emptyset$. Z toho, že A je hustá v X vyplýva, že množina $O_x \cap U$ obsahuje body A , t.j. $O_x \cap U \cap A \neq \emptyset$. Z ľubovoľnosti O_x plynie, že $x \in (\overline{U \cap A})$. Teda $\overline{U} \subseteq (\overline{U \cap A})$.

Naopak $U \cap A \subseteq U$, t.j. $(\overline{U \cap A}) \subseteq \overline{U}$. (veta 3.4) Celkovo teda dostávame $\overline{U} = (\overline{U \cap A})$. $\square$

Definícia 3.33. Topologický priestor sa nazýva separabilný, ak v ňom existuje najviac spočítateľná hustá množina.

Veta 3.34. Topologický priestor druhého typu spočítateľnosti je separabilný.

Dôkaz.

Nech $\mathcal{B}$ je spočítateľná báza topologického priestoru X . Ku každému elementu $U \subseteq \mathcal{B}$ vyberme $x \in U$. Dostávame tak spočítateľnú množinu $A \subseteq X$. Množina $X \setminus \overline{A}$ je otvorená, neobsahuje však žiadny element bázy $\mathcal{B}$, takže musí platiť $X \setminus \overline{A} = \emptyset$ a $\overline{A} = X$. $\square$

V tejto podkapitole bolo čerpané z [3], [13], [6].

3.6 Hausdorffove priestory

Topologický priestor sa nazýva **Hausdorffov** alebo tiež **oddeliteľný**, ak pre každé dva rôzne body $x, y \in X$ existuje okolie U bodu x a okolie V bodu y tak, že $U \cap V = \emptyset$.

Väčšina topologických priestorov vyskytujúcich sa v geometrii a analýze sú hausdorffove.

Príklad 3.35.

- a) Uvažujme triviálnu topológiu $\tau = \{\emptyset, X\}$ topologického priestoru X . Za subbázu (systém generátorov) τ môžeme zvoliť jednoprvkovú množinu $\{X\}$ alebo dvojprvkovú množinu $\{\emptyset, X\}$; tieto systémy generátorov sú zároveň bázou topológie τ .

Triviálny topologický priestor je druhého typu spočítateľnosti, je teda aj prvého typu spočítateľnosti, je separabilný. Triviálny topologický priestor z jednoprvkovej množiny je Hausdorffov.

- b) Uvažujme diskrétnu topológiu $\tau = P(X)$ topologického priestoru X . Za subbázu (systém generátorov) môžeme vziať systém všetkých jednoprvkových podmnožín množiny X . Tento systém je zároveň bázou topológie τ .

Diskrétny topologický priestor je prvého typu spočítateľnosti, je druhého typu spočítateľnosti práve vtedy, keď množina X je spočítateľná. Diskrétny topologický priestor je Hausdorffov.

- c) Uvažujme obvyklú topológiu reálnej osi. Ukážme, že $(\mathbb{R}, \tau)$ je druhého typu spočítateľnosti. Uvažujme množinu všetkých intervalov $(x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n})$, kde $x \in \mathbb{Q}; n \in \mathbb{N}$. Nech $y \in \mathbb{R}, I$ je otvorený interval obsahujúci y . Existuje $\epsilon > 0$ tak, že $(y - \epsilon; y + \epsilon) \subseteq I$. Zvoľme $m \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo $\frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{2}$ a $x \in \mathbb{Q}$ tak, aby $x \in (y - \frac{1}{m}; y + \frac{1}{m})$. Potom $y \in (x - \frac{1}{m}; x + \frac{1}{m}) \subseteq (y - \epsilon; y + \epsilon) \subseteq I$. Potom je uvažovaný systém intervalov bázou obvyklej topológie na $\mathbb{R}$.

Pretože množiny $\mathbb{Q}, \mathbb{N}$ sú spočítateľné, je táto báza spočítateľná. Z vety 3.34 plynie, že $\mathbb{R}$ je separabilný topologický priestor.

Lokálnu bázu obvyklej topológie v bode $x \in \mathbb{R}$ možno vybrať v tvare intervalov $(x - \epsilon; x + \epsilon)$, kde $\epsilon > 0$. Spočítateľnou lokálnou bázou v bode $x \in \mathbb{R}$ je možné vybrať napr. v tvare $(x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n})$; $n \in \mathbb{N}$.

Topologický priestor $\mathbb{R}$ je Hausdorffov. Nech $x, y \in \mathbb{R}$ sú dva rôzne body. Nech $x < y$. Existujú čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, že $a < x < b < y < c$. Interval (a, b) resp. interval (b, c) je okolím bodu x resp. okolím bodu y , pričom tieto intervaly nemajú spoločný bod. Topologický priestor $\mathbb{R}$ je teda Hausdorffov.

d) Nech τ_K je systém podmnožín množiny $\mathbb{R}$ reálnych čísel, tvorený doplnkami všetkých konečných množín a množinami $\emptyset$ a $\mathbb{R}$. τ_K je topológia na $\mathbb{R}$; nazýva sa topológia konečných doplnkov.

Ukážme, že $(\mathbb{R}, \tau_K)$ nie je prvého typu spočítateľnosti. Predpokladajme, že existuje spočítateľný systém konečných množín $A_i; i \in \mathbb{N}$ taký, že $(\mathbb{R} \setminus A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ je lokálna báza topológie τ_K v bode x . Potom pre konečnú množinu B neobsahujúcu bod x existuje index n tak, že $\mathbb{R} \setminus A_n \subseteq \mathbb{R} \setminus B$, t.j. $B \subseteq A_n$. Množina $\bigcup A_i$ je spočítateľná a neobsahuje bod x . Množina $(\mathbb{R} \setminus \bigcup A_i) \setminus \{x\}$ je neprázdna. Zvoľme $y \in (\mathbb{R} \setminus \bigcup A_i) \setminus \{x\}$. $\mathbb{R} \setminus \{y\}$ je okolím bodu x a $y \notin A_i$ pre žiadne $i \in \mathbb{N}$, neexistuje teda index $m \in \mathbb{N}$ tak, že $\mathbb{R} \setminus A_m \subseteq \mathbb{R} \setminus \{y\}$; τ_K teda nie je prvého typu spočítateľnosti.

Topologický priestor $(\mathbb{R}, \tau_K)$ nie je Hausdorffov. Nech $x, y \in \mathbb{R}$ sú dva rôzne body. U je okolím bodu x , V je okolím bodu y . Podľa definície je $U = \mathbb{R} \setminus A$, $V = \mathbb{R} \setminus B$, kde A, B sú konečné množiny. Platí $U \cap V = \mathbb{R} \setminus (A \cup B)$; $A \cup B$ je konečná množina takže $U \cap V \neq \emptyset$. Takže topologický priestor $(\mathbb{R}, \tau_K)$ nie je Hausdorffov.

e) Zľava uzavreté a sprava otvorené intervaly v množine $\mathbb{R}$ reálnych čísel tvoria bázu topológie na $\mathbb{R}$, ktorú nazývame Sorgenfreyova a označujeme τ_S .

Ukážme, že $(\mathbb{R}, \tau_S)$ je prvého typu spočítateľnosti. Stačí ukázať, že pre ľubovoľný bod $x \in \mathbb{R}$ systém intervalov $< x; x + \frac{1}{n}$; $n \in \mathbb{N}$ tvorí spočítateľnú bázu topológie τ_S v bode x . Nech U je ľubovoľné okolie bodu x . U obsahuje element bázy $< x; x + \epsilon)$ pre vhodné $\epsilon > 0$. Pre $n > \frac{1}{\epsilon}$ dostávame $< x; x + \frac{1}{n}) \subseteq < x; x + \epsilon)$, takže uvažovaný systém intervalov je lokálnou bázou τ_S v bode x . Tento systém je spočítateľný.

Topologický priestor $(\mathbb{R}, \tau_S)$ nie je druhého typu spočítateľnosti, t.j. nemá spočítateľnú bázu topológie. Ľubovoľné okolie ľubovoľného bodu $x \in \mathbb{R}$ v topológii τ_S totiž obsahuje interval $< x; x + \epsilon)$ pre isté $\epsilon > 0$.

Každá báza topológie τ_S musí obsahovať množiny tvaru $< x; a_x)$, kde $a_x > x$. Množina $\mathbb{R}$ je nespočítateľná, takže každá báza topológie τ_S musí byť taktiež nespočítateľná.

Topologický priestor $(\mathbb{R}, \tau_S)$ je separabilný, pretože obsahuje množinu $\mathbb{Q}$, ktorá je spočítateľná a hustá v $(\mathbb{R}, \tau_S)$.

V tejto podkapitole bolo čerpané z [3]

Záver

Cieľom práce bolo preštudovať a spracovať problematiku teórie množín. Dôraz je kladený hlavne na spočítateľné resp. nespočítateľné množiny. Práca taktiež uvádza základný náhľad do topológie.

V prvých dvoch kapitolách bolo možné nahliadnuť do základov teórie množín. V druhej kapitole bola uvedená formulácia a dôkaz Cantor-Bernsteinovej-Schröderovej vety, ktorá je pokladaná za dôležitý prínos v teórii množín. V závere druhej kapitoly bola uvedená formulácia hypotézy kontinua, jedného zo základných problémov matematiky 20. storočia.

Mojím osobným prínosom v tejto práci je riešenie vlastných príkladov, ktoré sa zaoberajú hlavne vzťahmi medzi množinami a taktiež problematikou zaoberajúcou sa otázkou mohutnosti množín. Taktiež som sa snažil modifikovať niektoré tvrdenia, aby jednotlivé časti textu medzi sebou korešpondovali. Text bol vysadený systémom $\text{\LaTeX}$. Obrázky uvedené v texte boli spracované pomocou programu GeoGebra.

Literatúra

- [1] Bukovský, L. *Množiny a všeličo okolo nich*, Univerzita P. J. Šafárika v Košiciach, 2. vydanie, 2005.
- [2] Sleziak, M. *Teória množín* Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave [online]. Dostupné z [cit. 2015-04-16]: <http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/vyuka/2011/temno/temno.pdf>
- [3] Demeter, K. Olga, K. *Topology and Geometry, Lectures and Solved Problems, I. General Topology (in Czech)* SPN Praha, 1990 , 404 pp [online]. Dostupné z [cit. 2015-05-09]: <http://www.lepageri.eu/files/topologie.pdf>
- [4] Kuratowski, K. *Introduction to Set Theory and Topology. Completely Revised Second English Edition* Hardcover – June, 1972.
- [5] Zlatoš, P. *Lineárna algebra a geometria. Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných oborov*. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 275. publikácia, 1. vydanie, 2011.
- [6] Štěrbová, M. *Úvod do obecné topologie*. Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci, 1989.
- [7] *Skladanie relácií*. Dostupné z [cit.2015-05-09]: http://dai.fmph.uniba.sk/courses/dm2/11121s/prednasky/doc/ch_rb_rc.pdf
- [8] *Rozklad a třídy ekvivalence*. Dostupné z [cit.2015-05-09]: http://cs.wikipedia.org/wiki/Ekvivalence_%28matematika%29
- [9] *Mohutnosti množín*. Dostupné z [cit.2015-05-09] https://fmfi-uk.hq.sk/Informatika/Diskretna%20Matematika/1/prednasky/dmpred4_00_2.pdf
- [10] *Cantorovo diskontinuum*. Dostupné z [cit.2015-05-09] http://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorovo_diskontinuum

- [11] *Riemannova guľa*. Dostupné z [cit.2015-05-09] http://sk.wikipedia.org/wiki/Riemannova_gu\setbox0\hbox{M}\setbox\tw@\hbox{i}\relaxl\kern-.13em\raise.24ex\hbox{'}\kern-.11em{a}
- [12] *Seriál nekonečno. Nekonečné množiny*. Dostupné z [cit.2015-05-09] <http://mks.mff.cuni.cz/archive/21/10.pdf>
- [13] *Topologie*. Dostupné z [cit.2015-05-09] <http://cs.wikipedia.org/wiki/Topologie>
- [14] *Euklidovský priestor*. Dostupné z [cit.2015-05-09] http://fstroj.uniza.sk/kam/wisztova/pdf/funkcia_n.pdf
- [15] *Metrický priestor*. Dostupné z [cit.2015-05-09] <http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/maiii/iii1.pdf>