

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Číselné řady a jejich aplikace



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.**

Vypracovala: **Michaela Riedlová**

Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika

Studijní obor: Matematika- ekonomie se zaměřením na bankovníctví/pojišťovnictví

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2017

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Michaela Riedlová

Název práce: Číselné řady a jejich aplikace

Typ práce: bakalářská

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

Rok obhajoby: 2017

Abstrakt: Tato práce je věnována základním poznatkům o číselných řadách a kritériím konvergence a divergence číselných řad. V práci jsou rovněž nastíněny aplikace číselných řad v ekonomii.

Klíčová slova: číselná řada, kritéria konvergence a divergence, řady s nezápornými členy, alternující řady

Počet stran: 46

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Michaela Riedlová

Title: Series and their applications

Type of thesis: bachelor

Department: Department of Mathematical Analysis and Applications of Mathematics

Supervisor: RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

The year of presentation: 2017

Abstract: This work is devoted to basic information about numerical series, and convergence and divergence criteria for numerical series. Some applications of numerical series in economics are also mentioned in this work.

Key words: numerical series, convergence and divergence criteria, non-negative series, alternating series

Number of pages: 46

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vytvořila samostatně pod vedením RNDr. Martiny Pavlačkové, Ph.D. a že jsem v seznamu literatury uvedla všechny zdroje, ze kterých jsem při psaní bakalářské práce čerpala.

V Olomouci dne 27. 4. 2017

Obsah

Úvod	7
1 Nekonečné číselné řady	8
1.1 Základní pojmy a vlastnosti	9
1.2 Význačné řady	14
1.3 Číselné řady s nezápornými členy	16
1.3.1 Kritéria konvergence a divergence	17
1.4 Řady absolutně a relativně konvergentní	32
1.4.1 Alternující řady	36
1.4.2 Přerovnávání řad	37
2 Aplikace nekonečných číselných řad	40
2.1 Multiplikační efekt vládních výdajů	40
2.2 Současná hodnota	41
2.2.1 Současná hodnota budoucích plateb	42
2.2.2 Současná hodnota věčného důchodu	43
2.3 Tvorba peněz v bankách	43
Závěr	45
Literatura	46

Poděkování

Ráda bych tímto chtěla poděkovat vedoucí své bakalářské práce RNDr. Martině Pavlačkové, Ph.D., za ochotu, odborné připomínky, rady a čas, který mi věnovala. Taktéž bych chtěla poděkovat všem lidem, kteří mě podporovali.

Úvod

Číslo je základním prvkem matematiky, na jejíchž principech je založeno téměř vše, co se děje kolem nás, což je jedním z důvodů, proč se ve své práci zabývám matematickým tématem.

Můj kladný vztah právě k číselným řadám umocňuje skutečnost, že jsem se s nimi setkala již na základní škole při řešení logických úloh na matematických olympiádách a podobných soutěžích, kterých jsem se vždy ráda účastnila. V té době jsem samozřejmě ještě neznala žádná pravidla pro počítání s číselnými řadami, přesto jsem často logickými úvahami dokázala dojít ke správnému výsledku. Nyní se pokusím své poznatky o nekonečných číselných řadách přenést do teoretické roviny a nakonec nastíním též zlomek jejich možných aplikací v praxi, konkrétně v ekonomii.

Moje bakalářská práce je rozdělená na 2 hlavní části. V první z nich se zabývám nekonečnými číselnými řadami jako takovými. Definuji zde základní pojmy, představím některé význačné řady, se kterými budu později pracovat. Dále se zde věnuji číselným řadám s nezápornými členy, kritériím konvergence a divergence, řadám absolutně a relativně konvergentním a alternujícím řadám. Vysvětlím též pojem přerovnávání řad. Ve druhé části pak představím některé důležité aplikace nekonečných číselných řad, konkrétně v ekonomii.

1 Nekonečné číselné řady

Zrod teorie nekonečných číselných řad se udává ve druhé polovině 17. století spolu se vznikem diferenciálního a integrálního počtu. Během staletí vývoje, kdy nekonečno bylo ještě postrachem vědců a pojem konvergence řady zatím nebyl konstituován, docházelo při počítání s řadami často k omylům. Nejenom matematikové, ale i filozofové se snažili tento problém vyřešit.

Jako příklad uveďme Zenona z Eleje (490–430 př. n. l.), řeckého filosofa, jenž byl známý tím, že pomocí dialektiky dokázal rozebrat a rozostřit argumenty protivníků, takže se jevíly pochybné. Jedním z jeho nejznámějších důkazů je Závod Achillea se želvou: „Pokud má želva sebemenší náskok, pak ve chvíli, kdy se Achilles dostane z bodu A do bodu B, je želva již za bodem B, v bodě C. Když je Achilles v bodě C, je želva již v bodě D za bodem C. Vzdálenosti mezi body se neustále snižují, ale Achilles želvu nikdy nedohoní.“ Zenon tak tvrdil, že není možné, aby nekonečný součet kladných čísel byl konečné číslo. Se součty nekonečných geometrických číselných řad již pracoval Archimedes (287-212 př. n. l.) při určování kvadratury paraboly. První nekonečnou řadu, která nebyla geometrická, sečetl na základě fyzikálních úvah až středověký matematik Richard Swineshead.

V celé historii matematiky byla snaha zodpovědět dvě základní otázky pro počítání s nekonečnými číselnými řadami:

Jak sečíst nekonečnou (spočetnou) množinu čísel?

Platí pro nekonečné součty podobné zákony jako pro součty konečné, zejm. asociativní, distributivní a komutativní zákon?

Ve své práci se pokusím na obě otázky srozumitelně odpovědět.

Při tvorbě této kapitoly byly využity hlavně zdroje [1], [4], [9], [10], [11], [12] a [13].

1.1 Základní pojmy a vlastnosti

O nekonečné řadě mluvíme, sčítáme-li nekonečně mnoho reálných čísel, což je přirozeným rozšířením operace sčítání konečného počtu čísel. Zavedme nejprve tento pojem.

Definice 1 Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{nebo} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

nazýváme *nekonečnou řadou reálných čísel* (stručně jen *nekonečnou řadou* nebo jen *řadou*).

Prvky posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme *členy řady*, přičemž a_n představuje *n-tý člen*; n se nazývá *sčítací index*.

Definice 2 Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\dots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\dots$$

nazýváme *posloupnost částečných součtů* této řady. Číslo s_n nazýváme *n-tým částečným*

součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jestliže vynecháme v řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ prvních k členů, dostáváme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n} = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \dots, \text{ kterou nazýváme } k\text{-tým zbytkem řady a značíme } R_k.$$

Existuje-li vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a má součet s .

Neexistuje-li vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nekonverguje* nebo také, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje*.

Pokud řada diverguje, jsou tři možnosti:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \Rightarrow$ řekneme, že řada diverguje k $+\infty$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty \Rightarrow$ řekneme, že řada diverguje k $-\infty$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ neexistuje $\Rightarrow$ řekneme, že řada diverguje (osciluje).

V případě, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a má součet s , značíme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Pokud řada

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $+\infty$, píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$; jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje k $-\infty$, tak ekvivalentně $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

Poznámka 1 Vždy nastane právě jedna ze situací: řada konverguje, řada diverguje k $+\infty$, řada diverguje k $-\infty$ nebo řada osciluje. Každá posloupnost má totiž nejvýše jednu limitu.

Příklad 1 Nalezněte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!}$.

Řešení:

Řadu rozdělíme na součet dvou řad a upravíme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2 = 3e - 2,$$

protože $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ je Taylorův rozvoj funkce e^x v bodě $x=1$ (viz např. [13]).

Součet řady jsme schopni určit spíše výjimečně. Mnohem častěji se musíme spokojit se zjištěním, zda daná řada konverguje či diverguje, tj. zkoumáme, zda jsou u dané řady splněny nutné a postačující podmínky konvergence. V případě, že konverguje, můžeme se pokusit nalézt její součet, což však je (jak jsem již zmínila) často nemožné.

Následující věta udává *nutnou podmínku konvergence* řady.

Věta 1 Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [13].

Poznámka 2 Obrácená věta neplatí. Ne každá řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jejíž členy jdou limitně k nule, konverguje. Potvrzuje to např. harmonická nebo geometrická řada, se kterými se seznámíme později.

Naopak, jestliže není splněna nutná podmínka konvergence, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0,$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 2 Ověřte, zda je splněna nutná podmínka konvergence u řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2 - 4}{7n^2 + 1}.$$

Řešení:

Vypočteme limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 - 4}{7n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(9 - \frac{4}{n^2} \right)}{n^2 \left(7 + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{9}{7} \neq 0.$$

Vidíme, že nutná podmínka konvergence splněna není, z čehož plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2 - 4}{7n^2 + 1}$ diverguje.

Poznámka 3 Konvergenci, resp. divergenci řady neovlivňuje chování konečného počtu jejích členů. Budeme proto užívat úmluvu, že jestliže nějaký předpoklad nemusí platit pro konečný počet členů, řekneme, že platí pro *skoro všechna* n , tzn. až od jistého indexu počínaje.

Následující věta udává nutnou a postačující podmínku konvergence řady; její nevýhodou je ovšem nevhodnost užití k praktickým výpočtům.

Lemma 1 (Cauchyovo – Bolzanovo kritérium konvergence) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní

právě tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů je cauchyovská, tj. pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ a libovolné $m \in \mathbb{N}$ platí

$$|s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

Důkaz lze najít např. v [13].

S řadami můžeme provádět operace sčítání (resp. odčítání) a násobení reálnou konstantou. Dostaneme opět řady, jak říká následující definice:

Definice 3 Součtem, resp. rozdílem, řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, resp.

řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$.

Násobkem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a čísla $c \in \mathbb{R}$ rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$.

Věta 2 Necht' jsou dány dvě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Necht' existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \geq n_0$. Pak obě řady buď konvergují, nebo obě divergují.

Důkaz plyne z Poznámky 3.

Věta 3 Necht' jsou dány dvě konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = a \pm b$.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [13].

Poznámka 4 Obrácené tvrzení neplatí. Jestliže je konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, tak to ještě neznamená, že jsou konvergentní také dílčí řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Příkladem jsou např. řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Následující věta může být považována za analogii distributivního zákona pro konečné součty.

Věta 4 Necht' řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Pak pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ konverguje též řada $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c \cdot a.$$

Naopak, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$, kde $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [13].

Poznámka 5 Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak pro $c \neq 0$ diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$.

Následující věta bývá označována za asociativní zákon pro konvergentní řady.

Věta 5 Necht' je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a necht' $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ je libovolná rostoucí posloupnost přirozených čísel. Položme $n_0 = 0$ a pro $m \in \mathbb{N}$ označme

$$b_m = a_{n_{m-1}+1} + a_{n_{m-1}+2} + \dots + a_{n_m}.$$

Pak řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje a platí

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Důkaz této věty můžeme najít např. v [13].

Poznámka 6 Větu 5 lze vyslovit: Konverguje-li řada $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, pak konverguje i řada $(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}) + \dots + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \dots + a_{n_k}) + \dots$ a má stejný součet.

Poznámka 7 Obrácené tvrzení neplatí. Příkladem je Grandiho řada, o které bude pojednáno dále.

1.2 Význačné řady

Definice 4 Nejznámějším příkladem nekonečné řady je *geometrická řada*

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \dots,$$

kde číslo $a \neq 0$ je první člen řady a číslo q nazýváme *kvocient* řady. Ze střední školy víme, že pro součet s_n prvních n členů geometrické řady platí pro $q \neq 1$ vztah

$$s_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

a pro $q = 1$ pak

$$s_n = an.$$

Odtud podle definice součtu nekonečné řady platí:

a) je-li $q \geq 1$, pak $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm \infty$

b) je-li $-1 < q < 1$, pak $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - q}$

c) je-li $q \leq -1$, pak $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ neexistuje.

Poznámka 8 Jinak řečeno, geometrická řada konverguje (má konečný součet) pro $|q| < 1$.

V ostatních případech geometrická řada nekongverguje, přesněji pro $q \geq 1$ diverguje (má nekonečný součet) a pro $q \leq -1$ osciluje.

Definice 5 Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 + (n-1) \cdot d),$$

kde $a_1, d \in \mathbb{R}$, se nazývá *aritmetická řada* s prvním členem a_1 a diferencí d .

Poznámka 9 n -tý částečný součet aritmetické řady je $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. Dále platí, že

jestliže je alespoň jedno z čísel a_1 a d různé od nuly, tak řada diverguje, tedy konverguje jen v případě, že $a_1 = d = 0$.

Definice 6 Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

se nazývá *harmonická řada*. Každý její člen je harmonickým průměrem dvou sousedních

členů, čili platí $\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}{2}$.

Poznámka 10 Harmonická řada je speciálním případem řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ pro $p=1$. Tato řada konverguje pro $p > 1$ a diverguje pro $0 < p \leq 1$, jak si dále ukážeme. Harmonická řada tedy diverguje k $+\infty$.

Definice 7 Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

se nazývá *Grandiho řada*.

Poznámka 11 Grandiho řada osciluje.

1.3 Číselné řady s nezápornými členy

Definice 8 Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *řada s nezápornými* (resp. *kladnými*) *členy*, jestliže

$$a_n \geq 0 \text{ pro každé } n \in N \quad (\text{resp. } a_n > 0 \text{ pro každé } n \in N).$$

Věta 6 Každá řada s nezápornými členy buď konverguje, nebo diverguje k $+\infty$.

Důkaz: Tvrzení věty plyne ze skutečnosti, že posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ u řad s nezápornými členy je vždy neklesající, protože $s_{n+1} = a_{n+1} + s_n \geq s_n$. Tyto řady tedy nemohou nikdy oscilovat.

Věta 7 Řada s nezápornými členy konverguje právě tehdy, když je posloupnost jejích částečných součtů (shora) omezená.

Důkaz: Pro částečné součty s_n řady s nezápornými členy platí, že $s_n \leq s_{n+1}$ pro každé $n \in N$. Posloupnost částečných součtů je tedy neklesající, a má tudíž konečnou limitu pouze v případě, že je shora omezená.

Dále se budeme podrobně zabývat kritérii konvergence a divergence, která udávají postačující podmínky pro konvergenci, resp. divergenci řady.

1.3.1 Kritéria konvergence a divergence

Věta 8 První srovnávací kritérium

Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a necht'

$$a_n \leq b_n \text{ pro každé } n \in N.$$

Potom platí:

- Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, potom diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [4].

Definice 9 Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a necht' $a_n \leq b_n$ pro každé

$n \in N$. Potom řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nazýváme *majorantní* řadou k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

minorantní řadou k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Poznámka 12 Větu 8 lze tedy vyslovit také tak, že jestliže konverguje majorantní řada, pak také konverguje řada minorantní a naopak, tj. že z divergence minorantní řady plyne divergence řady majorantní.

Poznámka 13 Ke srovnávání volíme řady nám známé: aritmetická, geometrická, harmonická,...

Věta 9 Druhé srovnávací kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s kladnými členy a necht'

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ pro každé } n \in N.$$

Potom platí:

- Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, potom diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [4].

Poznámka 14 Konvergence nebo divergence řady nezávisí na hodnotách počátečních členů řady. Předchozí dvě věty proto zůstanou i nadále v platnosti, nahradíme-li výraz “pro všechna $n \in N$ ” výrazem “pro skoro všechna $n \in N$ ”.

Věta 10 Limitní srovnávací kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a necht' existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Je-li $L < \infty$ a konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Je-li $L > 0$ a diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [1].

Věta 11 Podílové kritérium – D'Alembertovo

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Jestliže pro skoro všechna $n \in N$ platí nerovnost:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [1].

Věta 12 D'Alembertovo limitní podílové kritérium

Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Existuje-li

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad \text{kde } q \in R^* = R \cup \{\pm \infty\},$$

potom v případě, že:

- $q < 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
- $q > 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje;
- $q = 1$, nelze o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pomocí tohoto kritéria rozhodnout – řada může konvergovat i divergovat.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [4].

Poznámka 15 Lze dokázat, že jestliže $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ a $q < 1$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

konverguje; pokud však $q > 1$, nelze o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozhodnout.

Věta 13 Odmocninové kritérium – Cauchyovo

Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Platí-li nerovnost

- $0 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ pro skoro všechna $n \in N$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;

- $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [1].

Věta 14 Cauchyovo limitní odmocninové kritérium

Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Existuje-li

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \text{ resp. } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \quad \text{kde } q \in \mathbb{R}^*,$$

potom v případě, že:

- $q < 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
- $q > 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje;
- $q = 1$, nelze o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pomocí tohoto kritéria rozhodnout – řada může konvergovat i divergovat.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [4].

Příklad 3 Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}$.

Řešení:

Pro všechna přirozená čísla n je zlomek $\frac{1}{n}$ kladný a je roven maximálně jedné, takže je

kladná i hodnota $\sin \frac{1}{n}$ a tím pádem i celý výraz $\frac{\sin \frac{1}{n}}{n}$. Jedná se tedy o řadu s kladnými členy.

Zkusme nejprve použít pro vyšetření konvergence/ divergence zadané řady Cauchyovo limitní odmocninové kritérium:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{\sin \frac{1}{n}}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(\sin \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\frac{\ln \sin \frac{1}{n}}{n}}}{\sqrt[n]{n}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \left(\sin \frac{1}{n} \right)}{n} \right) &= \left| y = \frac{1}{n} \right. \\ &\quad \left. n \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+ \right| = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(\sin y)}{\frac{1}{y}} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{-y^2 \cos y}{\sin y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} (-\cos y) \cdot \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{y^2}{\sin y} \right) = \\ &= -1 \cdot \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{2y}{\cos y} \right) = 0 \end{aligned}$$

Z výše uvedených úprav plyne, že $q=1$.

O konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}$ tedy nelze pomocí tohoto kritéria rozhodnout.

D'Alembertovo limitní podílové kritérium nám dá také nerozhodný výsledek $q = 1$:

$$\begin{aligned} q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\sin \frac{1}{n+1}}{n+1}}{\frac{\sin \frac{1}{n}}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n+1}}{\sin \frac{1}{n}} \right) = \\ &= 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n+1}}{\sin \frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos \frac{1}{n+1}}{\cos \frac{1}{n}} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Z dosud uvedených kritérií nám ještě zbývají srovnávací kritéria. Pro všechna přirozená n

leží $\frac{1}{n}$ mezi 0 a 1, takže $\sin \frac{1}{n}$ je kladný, a proto platí

$$0 < \frac{\sin \frac{1}{n}}{n} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je harmonická, o které víme, že diverguje, a proto ani podle tohoto kritéria nemůžeme o konvergenci dané řady rozhodnout.

Ještě nám zbývá limitní srovnávací kritérium. Pokud se n blíží k nekonečnu, hodnota výrazu $\frac{1}{n}$ se přibližuje k nule, takže $\sin \frac{1}{n}$ je v podstatě roven $\frac{1}{n}$:

$$\frac{\sin \frac{1}{n}}{n} \sim \frac{\frac{1}{n}}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

Tento odhad je samozřejmě nutné ověřit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\sin \frac{1}{n}}{n}}{\frac{1}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) = \left| y = \frac{1}{n} \right. \left. n \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+ \right| = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin y}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} (\cos y) = 1 < \infty.$$

Náš odhad byl tudíž správný a můžeme aplikovat limitní srovnávací kritérium: Protože

řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (viz Příklad 5 níže), konverguje také námi studovaná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}.$$

Věta 15 Limitní Raabeho kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a necht' existuje limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = q, \quad \text{kde } q \in \mathbb{R}^*.$$

Potom platí:

- je-li $q > 1$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;
- je-li $q < 1$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
- je-li $q = 1$, nelze o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pomocí tohoto kritéria rozhodnout – řada může konvergovat i divergovat.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [15].

Věta 16 Raabeho kritérium

Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

- Jestliže existuje $A > 1$ a celé číslo N takové, že pro všechna $n > N$ máme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \frac{A}{n},$$

pak daná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

- Jestliže existuje reálné číslo M a celé číslo N takové, že pro všechna $n > N$ máme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{M}{n^2},$$

pak daná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [8].

Existuje hodně modifikací tohoto testu. Následuje jedna z vůbec nejobecnějších.

Věta 17 Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Předpokládejme, že existuje reálné číslo A

a čísla v_n taková, že pro všechna přirozená n máme

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{A}{n} + v_n$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ je absolutně konvergentní.

Pak daná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje tehdy a jen tehdy, když $A > 1$.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [3].

Příklad 4 Určete, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)^2$.

Řešení:

Tato řada má všechny členy kladné, proto můžeme aplikovat výše uvedená kritéria.

Zkusme nejprve použít D'Alembertovo limitní podílové kritérium:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot (2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n}} \right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Výsledek $q = 1$ pro nás není příznivý, jedná se o neurčitou hodnotu, takže o konvergenci řady nemůžeme rozhodnout.

Další alternativu představují testy zdokonalující podílové kritérium. Vyzkoušíme to nejjednodušší z nich, limitní Raabeho kritérium:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(1 - \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^2 \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^2}{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right) \cdot \frac{2n^2}{(2n+2)^2} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 \cdot \left(\frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n}} \right) \cdot \frac{1}{\left(2 + \frac{2}{n} \right)^2} \right) = 1.$$

Opět jsme dostali neurčitou hodnotu, a stále tedy nedokážeme o konvergenci dané řady rozhodnout.

Zkusme proto obecnější verzi Raabeho kritéria uvedenou ve Větě 17:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^2 - 1 = \frac{-4n-3}{(2n+2)^2} = \frac{-4n-3}{4n^2+8n+4}.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 + \frac{1}{n} = \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^2 - 1 + \frac{1}{n} = \frac{5n+4}{(4n^2+8n+4)n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{5n+4}{(4n^2+8n+4)n} \Rightarrow v_n = \frac{5n+4}{(4n^2+8n+4)n}$$

Užitím limitního srovnávacího kritéria nyní dokážeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+4}{(4n^2+8n+4)n}. \text{ Nejprve odhadneme přibližně } \frac{5n+4}{(4n^2+8n+4)n} \sim \frac{5n}{4n^3} \sim \frac{1}{n^2}, \text{ a poté}$$

tento odhad ověříme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{5n+4}{(4n^2+8n+4)n}}{\frac{1}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3+4n^2}{4n^3+8n^2+4n} \right) = \frac{5}{4} < \infty$$

Náš odhad byl tudíž správný a můžeme aplikovat limitní srovnávací kritérium: Protože

řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (viz Příklad 5 níže), konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+4}{(4n^2+8n+4)n}$.

Aplikováním Věty 17 na původní řadu zjistíme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)^2$ diverguje, protože $A=1$.

Věta 18 Integrální kritérium

Nechť f je reálná funkce jedné proměnné definovaná na intervalu $\langle 1, \infty \rangle$, která je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Nechť $f(n) = a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [4].

Příklad 5 Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ v závislosti na reálném parametru k .

Řešení:

Zkusme si nejprve vypsát prvních pár členů řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots$$

Je zřejmé, že se jedná o řadu kladných čísel. Pro $k \leq 0$ není splněna nutná podmínka konvergence, a řada tedy diverguje. Pro $k > 0$ uijeme integrální kritérium, neboť ostatní dosud uvedená kritéria selhávají. Položme $f(n) = \frac{1}{n^k} = n^{-k}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro $n > 0$ a

$k > 0$ je to klesající a kladná funkce. Pro $k \neq 1$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-k} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-t^{1-k}}{k-1} = \begin{cases} \frac{1}{k-1} < \infty & \text{pro } k > 1, \\ \infty & \text{pro } k < 1. \end{cases}$$

Pro $k > 1$ řada tedy konverguje, pro $k < 1$ diverguje. Případ $k = 1$ musíme z integračních důvodů posoudit zvlášť. Nejprve však poznamenejme, že pro $k = 1$ je řada tvaru

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$, což je řada harmonická. Pomocí integrálního kritéria snadno určíme

divergenci této řady. Platí totiž $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln x]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln t = \infty$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ tedy konverguje pro $k > 1$ a diverguje pro $k \leq 1$. Přitom pro všechna $k > 0$ je splněna nutná podmínka konvergence.

Následující test lze považovat za možná nejsilnější test konvergence.

Věta 19 Kummerovo kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

- Řada konverguje tehdy a jen tehdy, když existuje $A > 0$, kladná čísla p_n a celé číslo N takové, že pro všechna $n > N$ máme

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \geq A.$$

- Řada diverguje tehdy a jen tehdy, když existují kladná čísla p_n taková, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty, \text{ a celé číslo } N \text{ takové, že pro všechna } n > N \text{ máme}$$

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \leq 0.$$

Důkaz této věty můžeme najít např. v [15].

Příklad 6 Vyšetřete pomocí Kummerova kritéria konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{\alpha + k \cdot \ln k}{\beta + (k+1) \cdot \ln(k+1)}, \text{ kde } \alpha, \beta > 0.$$

Řešení:

Zvolíme-li $p_n = \alpha + (n+1) \cdot \ln(n+1)$, pak

$$\begin{aligned} p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} &= [\alpha + (n+1) \cdot \ln(n+1)] \cdot \frac{\prod_{k=1}^n \frac{\alpha + k \cdot \ln k}{\beta + (k+1) \cdot \ln(k+1)}}{\prod_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha + k \cdot \ln k}{\beta + (k+1) \cdot \ln(k+1)}} - [\alpha + (n+2) \cdot \ln(n+2)] = \\ &= [\alpha + (n+1) \cdot \ln(n+1)] \cdot \frac{1}{\frac{\alpha + (n+1) \cdot \ln(n+1)}{\beta + (n+2) \cdot \ln(n+2)}} - [\alpha + (n+2) \cdot \ln(n+2)] = \beta - \alpha. \end{aligned}$$

Z Kummerova kritéria tedy vyplývá, že je daná řada konvergentní, pokud $\beta > \alpha$.

$$\text{Je-li } \beta = \alpha, \text{ získáme řadu } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha + (n+1) \cdot \ln(n+1)} = \alpha \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\alpha + n \cdot \ln n}.$$

Zvolme $M \in \mathbb{N}$ takové, aby $\alpha < n \cdot \ln n$ pro všechna $n \geq M$.

$$\text{Pak } \alpha \cdot \sum_{n=M}^{\infty} \frac{1}{\alpha + n \cdot \ln n} > \alpha \cdot \sum_{n=M}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n + n \cdot \ln n} = \frac{\alpha}{2} \cdot \sum_{n=M}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}.$$

Řada $\sum_{n=M}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ diverguje - zjistíme to např. užitím integrálního kritéria:

Položme $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ pro všechna $x \geq M$. Jde o nezápornou a nerostoucí funkci a platí:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_M^t \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_M^t \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln |\ln x|]_M^t = \infty$$

Z toho plyne, že také řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha + (n+1) \cdot \ln(n+1)}$ diverguje.

Je-li $\beta < \alpha$ a $p_n = \alpha + (n+1) \cdot \ln(n+1)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha + (n+1) \cdot \ln(n+1)} = \infty$

(viz případ $\alpha = \beta$) a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{\alpha + k \cdot \ln k}{\beta + (k+1) \cdot \ln(k+1)}$ je tudíž dle Kummerova kritéria divergentní.

Souhrnně, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{\alpha + k \cdot \ln k}{\beta + (k+1) \cdot \ln(k+1)}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < \beta$.

Ačkoliv je Kummerovo kritérium velmi mocné, tak právě jeho obecnost způsobuje, že v praxi je často téměř nepoužitelné. Jeho limitní verze je sice méně silná, ale mnohem jednodušší.

Věta 20 Kummerovo kritérium - limitní verze

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Předpokládejme, že pro kladná čísla p_n limita

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \right)$$

konverguje.

- Jestliže $\rho > 0$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Jestliže $\rho < 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [15].

Věta 21 Gaussovo kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Předpokládejme, že existuje reálné číslo A , číslo $r > 1$ a omezená posloupnost $\{B_n\}$ taková, že pro všechna $n \in N$ máme

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{A}{n} + \frac{B_n}{n^r}.$$

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje tehdy a jen tehdy, když $A > 1$.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [8].

Příklad 7 Dokažte divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)^2$ z Příkladu 4 pomocí Gaussova kritéria.

Řešení:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^2 - 1 \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 + 3n}{4n^2 + 4n + 1} \right) = 1$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} = -\frac{n+1}{4n^3 + 4n^2 + n} = \frac{1}{n^2} \left(-\frac{n^3 + n^2}{4n^3 + 4n^2 + n} \right)$$

$$B_n = -\frac{n^3 + n^2}{4n^3 + 4n^2 + n}$$

Z toho vyplývá, že $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{A}{n} + \frac{B_n}{n^r}$, kde $A=1$, $\{B_n\}$ je omezená posloupnost

definovaná předpisem $B_n = -\frac{n^3 + n^2}{4n^3 + 4n^2 + n}$ pro každé $n \in N$ a číslo $r = 2 > 1$. Gaussovo

kritérium lze tedy aplikovat a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)^2$ diverguje.

Pro úplnost nyní uvedeme ještě tři další kritéria pro řady s nezápornými členy, která již v práci nebudou ilustrována na příkladech.

Věta 22 DeMorgan-Bertrandovo kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Nechť čísla ρ_n splňují pro všechna n

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\rho_n}{n \ln n}.$$

- Jestliže $\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_n > 1$, pak daná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Jestliže $\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n < 1$, pak daná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [7].

Věta 23 Cauchyho kondenzační kritérium

Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takovou, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel.

Tato řada konverguje tehdy a jen tehdy, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [15].

Následující test se také dívá blíže na to, jak rychle jdou členy řady k nule.

Věta 24 Ermakovo kritérium

Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Nechť f je nerostoucí kladná funkce taková, že $a_n = f(n)$.

Předpokládejme, že limita

$$r = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \right)$$

konverguje.

- Jestliže $r < 1$, pak daná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Jestliže $r > 1$, pak daná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [2].

Poznámka 16 Při volbě kritéria vždy přihlížíme ke tvaru a_n . V případě, že nemůžeme podle námi zvoleného kritéria o konvergenci řady rozhodnout, použijeme jiné kritérium.

Poznámka 17 Existuje mnoho dalších kritérií konvergence pro řady s nezápornými členy. Žádné ale není univerzální v tom smyslu, že bychom podle něj mohli rozhodnout o konvergenci/divergenci libovolné řady s nezápornými členy.

1.4 Řady absolutně a relativně konvergentní

Nyní se budeme zabývat číselnými řadami $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$. Nejprve zavedeme důležitý pojem pro tyto řady s libovolnými členy, kterým je *absolutní*, resp. *relativní (neabsolutní) konvergence*. Všimneme si speciálního případu - řad se střídavými znaménky, tzv. alternujících řad. Dále se zaměříme na to, zda lze přerovnávat členy číselné řady, aniž by se změnil její součet.

Věta 25 Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [1].

Poznámka 18 Obráceně neplatí. Je proto vhodné zavedení silnější vlastnosti než je konvergence.

Definice 10 Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

konverguje neabsolutně neboli *relativně*.

Poznámka 19 Pro řady s nezápornými členy je pojem absolutní konvergence shodný s pojmem konvergence.

Věta 26 Necht' řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Potom platí

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Důkaz této věty můžeme najít např. v [1].

Jelikož řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jsou řady s nezápornými členy, lze pro určování absolutní konvergence řad užít kritéria konvergence a divergence pro řady s nezápornými členy.

Věta 27 Srovnávací kritérium

Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní řada s nezápornými členy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s libovolnými členy.

Potom platí:

- jestliže $|a_n| \leq b_n$ pro každé $n \in N$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně;
- jestliže $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ pro každé $n \in N$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Důkaz: Plyne přímo z Věty 8 a Věty 9.

Věta 28 Odmocninové kritérium

- Jestliže $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ pro každé $n \in N$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně;

- jestliže $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ pro nekonečně mnoho indexů $n \in N$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje;
- jestliže existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \in R^*$, pak pro $q < 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně a pro $q > 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz: Plyne přímo z Věty 13.

Příklad 8 Rozhodněte o absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln^n(n+2)}$.

Řešení:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln^n(n+2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+2)} = 0$$

Daná řada je tedy absolutně konvergentní.

Věta 29 Podílové kritérium

- Jestliže $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$ pro každé $n \in N$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně;
- jestliže $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ pro každé $n \in N$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje;
- jestliže existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q \in R^*$, pak pro $q < 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně a pro $q > 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz: Plyne přímo z Věty 11.

Věta 30 Abelovo a Dirichletovo kritérium

Nechť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotonní posloupnost a platí jedna z následujících podmínek:

1. (Abel) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená;
2. (Dirichlet) Posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ohraničená a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [8].

Příklad 9 Vyšetřete relativní a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n-1}$.

Řešení:

Vypišme si nejprve prvních pár členů řady, abychom zjistili, jak se řada chová:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n-1} = -\pi + 0 + \frac{\pi}{3} + 0 - \frac{\pi}{5} + 0 + \frac{\pi}{7} + \dots$$

Jedná se tedy o řadu s libovolnými členy. Vyšetřeme nejprve absolutní konvergenci řady.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi \left| \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right|}{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi |\cos(k\pi)|}{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2k-1}$$

Pro vyšetření konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2k-1}$ použijme např. integrální kritérium. Položme

$f(n) = \frac{\pi}{2n-1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Na intervalu $\langle 1, \infty \rangle$ je to klesající a kladná funkce. Platí:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\pi}{2x-1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi \int_1^t \frac{1}{2x-1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi \left[\frac{\ln|2x-1|}{2} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi \ln(2t-1)}{2} = \infty$$

Jelikož nevlastní integrál $\int_1^{\infty} \frac{\pi}{2x-1} dx$ diverguje, diverguje i řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2k-1}$.

Vyšetřeme nyní relativní konvergenci zadané řady, přičemž použijme Dirichletovo kritérium.

Posloupnost $\left\{\frac{\pi}{n-1}\right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \dots\right\}$ je klesající, tj. monotonní, a posloupnost

částečných součtů řady $\sum_{n=2}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ je ohraničená číslem 1:

$$\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=2}^{\infty} = \cos\pi + \cos\frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi + \dots = -1 + 0 + 1 + 0 - 1 + \dots$$

Dále platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n-1} = \pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} = 0$.

Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n-1}$ tedy konverguje podle Dirichletova kritéria.

Protože řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n-1}$ konverguje a řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi \left|\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|}{n-1}$ diverguje, řada

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n-1}$ konverguje relativně.

Speciálním případem jsou řady se střídavými znaménky, tzv. alternující řady.

1.4.1 Alternující řady

Definice 11 Nekonečná číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *alternující (se střídavými znaménky)*,

právě když platí $\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pro alternující řady platí následující kritérium konvergence:

Věta 31 Leibnizovo kritérium

Alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel,

konverguje právě tehdy, když

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Pro součet s této řady navíc platí $a_1 - a_2 < s < a_1$.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [1].

Příklad 10 Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}$.

Řešení:

Nejprve ověříme, zda je posloupnost $\left\{ \frac{1}{n - \ln n} \right\}$ klesající. Uvažujme funkci $y = \frac{1}{x - \ln x}$.

Platí $y' = \left(\frac{1}{x - \ln x} \right)' = -\frac{1}{(x - \ln x)^2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) < 0$ pro $x > 1$, tj. tato funkce je klesající na

intervalu $(1, \infty)$, tedy také posloupnost $\left\{ \frac{1}{n - \ln n} \right\}$ je klesající. Dále

$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \ln n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{e^n}{n} = \infty$, a proto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \ln n} = 0$. Řada tedy konverguje.

Příklad 11 Rozhodněte, zda konverguje tzv. Leibnizova řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Řešení:

Posloupnost $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ je klesající posloupnost kladných čísel a má nulovou limitu. Dle

Leibnizova kritéria tedy řada konverguje.

1.4.2 Přerovnávání řad

Pro přerovnávání řad je rozhodující, zda je daná řada absolutně konvergentní.

Definice 12 Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselná řada a posloupnost $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je permutací množiny N (tj.

posloupnost, v níž se každé přirozené číslo vyskytuje právě jednou.) Potom říkáme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \text{ vznikla přerovnáním řady } \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Věta 32 Necht' řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Potom absolutně konverguje také řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \text{ vzniklá přerovnáním řady } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ a obě mají stejný součet, tj. platí } \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Důkaz této věty můžeme najít např. v [1].

Věta 33 Riemannova

Necht' řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně a necht' $s \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo. Potom

- existuje přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ konverguje a má součet s ;
- existuje přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ určitě diverguje;
- existuje přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{q_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{q_n}$ osciluje.

Důkaz této věty můžeme najít např. v [1].

Příklad 12 Přerovnejte vhodně členy Leibnizovy řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tak, aby součet této řady

byl 2.

Řešení:

Leibnizova řada konverguje neabsolutně, splňuje tedy podmínky Riemannovy věty, a existuje tedy její přerovnání konvergující k libovolnému reálnému číslu.

Sčítejme nejprve pouze kladné členy řady, dokud posloupnost částečných součtů nepřekročí předepsaný součet 2:

$$s_8 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{15} = 2,0218.$$

Poté přičtíme první člen záporný, který je roven $-\frac{1}{2}$, čímž dostaneme:

$$s_9 = s_8 - \frac{1}{2} = 2,0218 - \frac{1}{2} = 1,5218$$

Nyní opět přičítáme kladné členy, dokud příslušný částečný součet nepřekročí 2:

$$s_{22} = s_9 + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots + \frac{1}{41} = 2,0041.$$

Po přičtení dalšího záporného členu dostaneme:

$$s_{23} = s_{22} - \frac{1}{4} = 1,7541.$$

Pokud bychom takto pokračovali, dostali bychom přerovnanou Leibnizovu řadu se součtem $s = 2$.

2 Aplikace nekonečných číselných řad

V této kapitole si ukážeme některé možné aplikace nekonečných řad v ekonomii, konkrétně nekonečné geometrické řady. Zjistíme, jakou mírou přispějí vládní výdaje k přírůstku domácího produktu, dozvíme se např., kolik peněz musíme složit na náš účet, abychom z něj později při dané úrokové míře mohli vybrat určitou předem danou částku, a také se seznámíme s procesem tvorby nových peněz v bankách.

Existují i další aplikace nekonečných řad - pomocí znalosti součtu nekonečné geometrické řady můžeme např. vyjádřit periodické číslo zlomkem, vypočítat obsahy různých útvarů, např. vypočítat konečný obsah tzv. Kochovy vločky (útvary s nekonečným obvodem). Ve své práci se ovšem omezím pouze na výše zmíněné ekonomické aplikace.

Při tvorbě této kapitoly byly využity hlavně zdroje [5] a [6].

2.1 Multiplikační efekt vládních výdajů

Popišme si nejprve tento jev a následně jej ilustrujme na příkladu.

Vládní výdaje vedou k nárůstu důchodů lidí, kteří tím pádem mohou zvýšit svou spotřebu, což způsobí opětovné zvýšení důchodů. Jejich příjemci mohou též zvýšit svou spotřebu, což má opět za následek zvýšení důchodů. Lze předpokládat, že se popsáný proces stále opakuje, takže přírůstek vládních výdajů přispěje několikanásobně k přírůstku domácího produktu.

Nyní si ukážeme, jak to vypadá v praxi. Budeme uvažovat, že vláda uvolnila dodatečných 80 milionů Kč např. na obnovu železnic. Firmy inkasující tuto částku utratí část peněz za materiál potřebný na opravu a zbytek rozdělí svým akcionářům a zaměstnancům, kteří z tohoto příjmu část uspoří, z části zaplatí daně, a část tohoto důchodu použijí na spotřebu. Uvažujme, že za spotřební zboží a služby příjemci peněz utratí 50 % z celkové částky, tj. 40 milionů Kč. Firmy, které spotřební zboží vyrobily a prodaly, rozdělí inkasovanou částku opět svým akcionářům a zaměstnancům, čímž vznikne další přírůstek důchodů ve výši 40 milionů Kč. Jednotlivci, kteří se stanou příjemci těchto peněz, z nich opět 50 % věnují na spotřebu, takže se vytvoří další důchody ve výši 20 milionů Kč atd. Zajímá nás, jaký je celkový přírůstek důchodů, odehrává-li se tento proces do nekonečna.

Chceme-li odpovědět na položenou otázku, bude třeba nalézt součet všech členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednotlivých přírůstků.

Jde o geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 0,5$, který se v ekonomii nazývá *sklon ke spotřebě* a značí se c . Zkusíme vzniklý problém vyřešit tak, že nejdříve sestojíme posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, která bude vyjadřovat kumulovaný účinek uvažovaného jevu:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = 80 \text{ milionů Kč} \\ s_2 &= a_1 + a_2 = 80 + 40 = 120 \text{ milionů Kč} \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 80 + 40 + 20 = 140 \text{ milionů Kč} \\ &\dots \end{aligned}$$

Pro n -tý člen této posloupnosti platí

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_1 \cdot c + a_1 \cdot c^2 + \dots + a_1 \cdot c^{n-1} = a_1 \cdot \frac{1 - c^n}{1 - c},$$

kde jsme využili vztah pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti. Zdá se přirozené, že odpovědí na položenou otázku, tj. jaký je celkový kumulovaný účinek popisovaného jevu, by za předpokladu, že posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, měla být hodnota s limity $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Protože $c = 0,5 < 1$, můžeme psát

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{1 - c^n}{1 - c} = \frac{a_1}{1 - c}.$$

Pro naše hodnoty konkrétně dostaneme

$$s = \frac{80}{1 - 0,5} = 160,$$

zjistili jsme tedy, že počáteční vládní výdaj ve výši 80 milionů Kč umožnil vytvořit celkem 160 milionů Kč, které navýší domácí produkt. Koeficient $\frac{1}{1 - c}$ se v ekonomii nazývá *jednoduchý multiplikátor vládních výdajů*.

2.2 Současná hodnota

Současná hodnota je ukazatel, který nám říká, kolik peněz nám za zvolenou dobu životnosti projektu daný projekt přinese. Nezajímá se tedy o účetní položky, jako jsou výnosy a náklady, ale zaměřuje se pouze na peněžní toky, které nám daná investice (nebo

obecně vzato jakýkoliv projekt) přinese. V této kapitole se zaměříme mj. na současnou hodnotu věčného důchodu, kterou lze zařadit mezi ekonomické aplikace nekonečné geometrické řady.

2.2.1 Současná hodnota budoucích plateb

Nechť K_0 je počáteční kapitál neboli vklad, $i \in (0,1)$ je roční úroková míra a nechť $n \in \mathbb{N}$ je doba splatnosti v letech. Potom částka K_n splatná na konci n -tého roku je dána vztahem

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n.$$

Tato rovnice se nazývá *základní rovnice složeného úročení*. Neboli, částka K_n vyplacená na konci n -tého roku má dnes hodnotu

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$$

a vyjadřuje *budoucí hodnotu* počátečního kapitálu na konci n -tého roku. Tomuto procesu říkáme *odúročování* neboli *diskontování*. Částky K_j , $j = 1, \dots, n$ tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $1+i$, který se nazývá *úrokovací faktor* neboli *úročitel* a můžeme ho definovat jako splatnou částku při zúročení jedné koruny za jeden rok neboli budoucí hodnotu jedné koruny na konci prvního roku úročení. Úročitel tedy použijeme tehdy, chceme-li vyjádřit hodnoty částek v budoucnosti. Jeho převrácená hodnota $\frac{1}{1+i}$ se nazývá *diskontní faktor* (*diskontní míra*) neboli *odúročitel* a často se značí symbolem v . Můžeme jej interpretovat jako kapitál, který musíme uložit na počátku roku, abychom na jeho konci obdrželi právě jednu korunu. Neboli, diskontní faktor vyjadřuje *současnou hodnotu* jedné koruny.

Příklad 13 Jakou částku dnes musíme složit na účet, abychom z něj za 5 let mohli vybrat částku 60 000 Kč při roční úrokové míře 5 %?

Řešení:

Částka, kterou budeme dnes ukládat, představuje současnou hodnotu částky 60 000 Kč.

Platí

$$K_0 = 60000 \cdot \frac{1}{(1 + 0,05)^5} = 47011,60.$$

Na účet musíme dnes složit 47 011,60 Kč.

2.2.2 Současná hodnota věčného důchodu

Důchodem rozumíme systém pravidelně placených finančních toků. Jedná se o systém plateb (splátek či výplat), mezi nimiž jsou stejně dlouhé časové intervaly, tzv. *výplatní období*. V případě *věčného důchodu* (*perpetuity*) k pravidelným výplatám dochází stále, doba vyplácení tedy není omezena a počet plateb je nekonečný (opakem je *dočasný důchod* neboli *anuita*.) Příkladem věčného důchodu jsou např. nadace s každoročně opakovanou výplatou nadační ceny. Současnou hodnotou důchodu rozumíme součet všech současných hodnot jednotlivých plateb v rámci tohoto důchodu.

Nechť a je hodnota konstantní platby v každé časové periodě, $i \in (0,1)$ je roční úroková míra. Současná hodnota věčného důchodu je

$$PV = a \frac{1}{1+i} + a \frac{1}{(1+i)^2} + \dots = \frac{a}{i},$$

neboť jde o geometrickou řadu s prvním členem $a \frac{1}{1+i}$ a kvocientem $\frac{1}{1+i}$.

Budoucí hodnoty u věčných důchodů nemá smysl určovat, jelikož doba vyplácení není ukončena, jak již bylo zmíněno.

2.3 Tvorba peněz v bankách

Nyní si ukážeme, jak zjistit, kolik peněz může vzniknout tím, že banka půjčuje peníze svým klientům.

Banky přijímají vklady od domácností a firem, přičemž musí dodržovat míru povinných rezerv, kterou jim ukládá centrální banka. Česká národní banka aktuálně požaduje 2 %. Tuto rezervu všech vkladů musí mít banky k dispozici ve formě hotovosti, obvykle ji mají uloženou u centrální banky. Zbývající část peněz z vkladů od klientů mohou volně půjčovat dalším klientům a dosahovat tak zisku ve formě úroků. Proces probíhá zjednodušeně takto: Půjčí-li banka svému klientovi peníze, klient je utratí a

subjekt, který od nich peníze dostal jako tržbu, si je uloží opět u banky. Tyto nové peníze nová banka opět půjčí dál, resp. pouze část z nich, např. 98 %, pokud uvažujeme, že centrální banka požaduje 2 % povinných minimálních rezerv.

Situaci ilustrujme na příkladu: Dejme tomu, že banka přijme od klienta vklad $a_1 = 250000$ Kč, ze kterého si 5000 Kč uloží u centrální banky jako povinnou minimální rezervu a zbytek z vkladu, tedy 245000 Kč, půjčí dalšímu klientovi, aby jí tyto peníze vynesly úrok. Klient, který si půjčí těchto 245000 Kč, je utratí, a subjekt, který tuto částku obdrží, ji vloží do další banky. Další banka tedy přijme vklad $a_2 = 245000$ Kč, povinně uloží 4900 Kč a půjčí 240100 Kč. Další banka přijme od nějakého klienta $a_3 = 240100$ Kč, povinně uloží 4802 Kč a půjčí 235298 Kč. Proces takto pokračuje a vznikají další a další peníze na účtech bank. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická s prvním členem $a_1 = 250000$ a kvocientem $q = 0,98$. Pokud chceme zjistit, kolik peněz tímto procesem může vzniknout, hledáme vlastně součet geometrické řady, který činí

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{250000}{1-0,98} = 12500000.$$

Touto formou tedy může vzniknout 12 500 000 Kč. Koeficient $\frac{1}{1-q}$ nazývají ekonomové jednoduchým *peněžním multiplikátorem* a popsánému procesu se říká *multiplikovaná expanze depozit*.

Pro úplnost poznamenejme, že přesné množství nových peněz, které popsáním způsobem z určitého vkladu vzniknou, ovlivňují kromě míry povinných rezerv i další faktory, např. závisí také na schopnosti banky všechny volné peníze poskytnout jako úvěr, nebo na objemu peněz, který se do bank vrátí ve formě vkladů a který se stane oběživem.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo zpracování teorie nekonečných číselných řad a jejich aplikací. Kromě teorie, ve které jsme si zavedli potřebné základní pojmy postačující k pochopení dané problematiky, práce obsahuje i příklady, které ji vhodně doplňují a umožňují tak její snazší pochopení.

Práce je rozdělena do dvou kapitol, které jsou následně členěny na podkapitoly. První kapitola pojednává o nekonečných číselných řadách. Největší důraz je přitom kladen na kritéria konvergence a divergence číselných řad s nezápornými členy. Na určení konvergence, resp. divergence číselných řad s nezápornými členy jsou zaměřeny i příklady. Mimo to jsme si ukázali, jak zjistit konvergenci tzv. alternujících řad nebo také jak určit absolutní či relativní konvergence. Druhá kapitola je věnována aplikacím číselných řad v ekonomii. Zde jsem se zaměřila na geometrickou řadu, se kterou jsem se seznámila již na střední škole.

Práce je použitelná pro studenty jako doplňkový studijní materiál.

Literatura

- [1] Došlá, Z., Novák, V.: Nekonečné řady, Brno: Masarykova univerzita, 2002
- [2] Ermakov, V. P.: A new criterion for convergence and divergence of infinite series of constant sign, Kyjev, 1872
- [3] Knopp, K.: Infinite Sequences and Series, New York: University of Tübingen, 1956
- [4] Laitoch, M.: Posloupnosti a řady, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965
- [5] Pražák, P.: Ekonomické aplikace nekonečné geometrické řady, Rozhledy matematicko-fyzikální: časopis pro zájemce o matematiku, fyziku a informatiku 83, 1, 2008
- [6] Radová, J., Dvořák, P.: Finanční matematika pro každého, Praha: GRADA Publishing, a.s., 2003
- [7] Small, Ch. G.: Expansions and Asymptotics for Statistics, Waterloo: University of Waterloo, 2010
- [8] Číselné řady [online], dostupné z:
http://kmlinux.fjfi.cvut.cz/~postasev/ciselne_rady.pdf, [citované 10.11. 2016]
- [9] Číselné řady – řešené příklady [online], dostupné z:
http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=742, [citované 28.2. 2016]
- [10] Číselné řady – studijní text [online], dostupné z:
http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=741, [citované 20.2. 2016]
- [11] Další kritéria pro řady s nezápornými členy [online], dostupné z:
<http://math.feld.cvut.cz/mt/txt/2/txc3ea2d.htm#>, [citované 15.7. 2016]
- [12] Konvergence obecných řad [online], dostupné z:
<http://math.feld.cvut.cz/mt/txt/2/txc3ea2e.htm#2>, [citované 5.10. 2016]
- [13] Nekonečné řady s programem Maple [online], dostupné z:
<https://www.math.muni.cz/~plch/nkpm/hlavni.pdf>, [citované 6.4. 2016]
- [14] Taylorův rozvoj [online], dostupné z:
http://www.aldebaran.cz/studium/f1/applets/math/a_taylor.html, [citované 26.11. 2016]
- [15] Thomson, B. S., Bruckner, J. B., Bruckner, A. M.: Elementary, Real Analysis [online], dostupné z: <http://classicalrealanalysis.info/documents/TBB-AllChapters-Landscape.pdf>, [citované 17.11. 2016]