

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Teorie her dvou hráčů



Vypracoval:	Petr Smilek
Studijní program:	N1701 Fyzika
Studijní obor:	Fyzika - Matematika
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí diplomové práce:	doc. Mgr. Michal Botur, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	18. prosince 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. Mgr. Michala Botura, Ph.D. a že jsem použil zdroje, které uvádím v seznamu použité literatury.

V Olomouci dne 16. prosince 2015

.....
Petr Smilek

Poděkování

Děkuji vedoucímu diplomové práce doc. Mgr. Michalu Boturovi, Ph.D. za cenné rady v průběhu psaní diplomové práce. Dále děkuji Pavlu Hlaváčkovi, Danielu Hrochovi, Martinu Brouškovi za technické připomínky k matematickému textu a Juliáně Tarabíkové za psychickou podporu.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Petr Smilek
Název práce	Teorie her dvou hráčů
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce	doc. Mgr. Michal Botur, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2016
Abstrakt	Diplomová práce je zaměřena na teorii her, studuje zejména hry dvou hráčů s konstantním součtem a hry dvou hráčů s nekonstantním součtem. Diplomová práce je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole jsou definovány základní pojmy teorie her. Druhá kapitola se zabývá řešením her, ve kterých jsou zájmy hráčů v přímém rozporu, pro řešení je zde často nutné využít metod lineární optimalizace. Třetí kapitola se zaměřuje na řešení her, které již nejsou obecně v rozporu. Tyto hry vykazují prvky soutěživosti i spolupráce.
Klíčová slova	teorie her, hry dvou hráčů s konstantním součtem, hry dvou hráčů s nekonstantním součtem, sedlový bod, rovnovážný bod
Počet stran	35
Počet příloh	0
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Petr Smilek
Title	Two-Person Game Theory
Type of thesis	Master
Department	Department of Algebra and Geometry
Supervisor	doc. Mgr. Michal Botur, Ph.D.
The year of presentation	2016
Abstract	The master thesis is focused on the study of game theory especially on two-person zero-sum games and two-person non-zero-sum games. The master thesis is divided into three chapters. In the first chapter the basic elements of game theory are defined. The second chapter deals with the solution to the games in which there is the direct conflict of player's interests, it is often necessary to use the methods of linear optimization. The third chapter focuses on the games which are not in contradiction. These games show both signs of competitiveness and cooperation.
Keywords	game theory, two-person zero-sum games, two-person non-zero-sum games, saddle point, Nash equilibrium
Number of pages	35
Number of appendices	0
Language	czech

Obsah

Úvod	7
1 Základní pojmy teorie her	8
2 Hry dvou hráčů s konstantním součtem	11
3 Hry dvou hráčů s nekonstantním součtem	21
Závěr	33

Úvod

Tato diplomová práce se zabývá teorií her. Teorie her je oblast aplikované matematiky, která se zaměřuje na konfliktní situace a jejich řešení.

Hlavním cílem diplomové práce je prezentovat pojmy a metody řešení her dvou hráčů s konstantním součtem a her dvou hráčů s nekonstantním součtem. Pro lepší pochopení konkrétní části teorie je text doplněn o příklady.

Celý text je rozdělen do tří kapitol s názvy *Základní pojmy teorie her*, *Hry dvou hráčů s konstantním součtem* a *Hry dvou hráčů s nekonstantním součtem*.

První kapitola se stručně zabývá teorií her v širším pohledu a definuje její základní pojmy, které jsou společné pro různé typy her.

Druhá kapitola se zabývá hrami dvou hráčů, jejichž zájmy jsou přímo protikladné. Jsou zde rozebrány hlavní vlastnosti těchto konfliktů a je tu navrženo jejich řešení. Pro úplné pochopení této části práce je vhodné, aby se čtenář seznámil se základy lineárního programování. K obecnému řešení těchto her je totiž nutné využít metod lineární optimalizace. V tomto textu je využita simplexová metoda, úplnější popis této metody lze najít v literatuře [9].

Třetí kapitola studuje hry dvou hráčů, jejichž zájmy již nejsou v přímém rozporu. Tato kapitola je rozdělena na *nekooperativní teorii* a *kooperativní teorii*. V první části je dohoda hráčů předem zakázána, ve druhé části je dohoda povolena. V obou případech je popsán charakter hry a navrženo její řešení.

V české literatuře se setkáváme s nedostatkem materiálu zabývajícího se teorií her. Tato práce je napsána se snahou stručně, názorně a jednoduše prezentovat hlavní myšlenky té části teorie her, ve které vystupují dva hráči.

Kapitola 1

Základní pojmy teorie her

Teorii her lze chápat jako logickou analýzu konfliktů a chování jejich účastníků. Jedná se o matematický popis konfliktní situace, který se zaměřuje na studium, jak by se měli účastníci konfliktu racionálně chovat. Racionální chování účastníků konfliktu zde chápeme v tom smyslu, že každý účastník má tendenci maximalizovat svůj užitek.

Celá teorie her se opírá o pojmy *hra*, *hráči*, *strategie* a *výplata*. Hru lze chápat jako mechanismus pravidel, do kterého vstupují objekty zvané hráči. Každý hráč má na výběr strategie, které může volit ze své množiny strategií. Strategie zvolené všemi hráči, kteří se konfliktu účastní, určují jednotlivé výplaty těchto hráčů.

Pro každou hru hledáme *optimální řešení* této hry. To znamená, že je třeba určit, kterou strategii nebo kterých strategií mají hráči užívat, a pokud jich má být více než jedna, jak se jich má užívat.

Hrou rozumíme konfliktní situaci, která může být libovolného charakteru. Může jít o spor dvou kamarádů, manželskou hádku, šachovou partii, konkurenční boj firem o zákazníka, apd. Situaci chápeme jako konfliktní v tom smyslu, že každý hráč musí zvolit strategii nebo strategie, se kterými bude situaci řešit.

Definice 1.1 Necht' je dána neprázdná N -prvková množina $H = \{1, 2, \dots, N\}$. Necht' je dále dáno N množin $X_1, \dots, X_N$ a N reálných funkcí $M_1(x_1, \dots, x_N), \dots, M_N(x_1, \dots, x_N)$ na kartézském součinu $X_1 \times \dots \times X_N$.

Pak *hrou* N hráčů v normálním tvaru nazveme uspořádanou $(2N + 1)$ -tici:

$$G = \{H; X_1, \dots, X_N; M_1(x_1, \dots, x_N), \dots, M_N(x_1, \dots, x_N)\} = \{H; \mathbf{X}; \mathbf{M}\} \quad (1.1)$$

Množinu H nazveme *množinou hráčů*, její prvky $1, 2, \dots, N$ nazveme *hráči*. Množinu X_i nazveme *prostorem strategií i -tého hráče*. Prvek $x_i \in X_i$ nazveme *strategií i -tého hráče* a funkci M_i nazveme *výplatní funkcí i -tého hráče*.

Definice 1.2 Hru v normálním tvaru nazveme *konečnou*, jestliže prostory strategií všech hráčů jsou konečné množiny. V opačném případě hru nazveme *nekonečnou*.

V souvislosti s optimálním řešením hry se v teorii her vyskytuje pojem *rovnovážný bod*. Jedná se o soubor takových strategií jednotlivých hráčů, že žádný hráč si změnou svojí strategie obecně nepolepší za předpokladu, že ostatní hráči své strategie zachovají.

Definice 1.3 N -tici strategií $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ nazveme *rovnovážným bodem*, jestliže platí:

$$M_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_N^*) \leq M_i(x_1^*, \dots, x_N^*) \quad (1.2)$$

pro všechna $i \in H$ a všechna $x_i \in X_i$. Prvek x_i se nazývá *rovnovážná strategie i -tého hráče* nebo také *optimální strategie i -tého hráče*.

Rovnovážnému bodu se říká také *Nashova rovnováha*. Z definice plyne, že strategie x_i i -tého hráče je jeho nejlepší strategie v případě, že ostatní hráči nezmění svoje strategie. Žádnému hráči se tedy neoplatí změnit svoji stávající strategii. Definice rovnovážného bodu však nedává odpověď na to, co se stane, pokud se rozhodne změnit svoje strategie dva a více hráčů současně.

Hry lze dělit na různé typy podle mnoha kritérií. V tomto textu se budeme zabývat zejména hrami, ve kterých je součet výplat všech hráčů vždy roven nějaké pevné hodnotě, a také hrami, které tuto vlastnost nemají.

Definice 1.4 Hra v normálním tvaru, která splňuje pro všechna $x_i \in X_i, i = 1, \dots, N$ podmínku

$$\sum_{i=1}^N M_i(x_1, \dots, x_N) = K, \quad (1.3)$$

kde K je konstanta nezávislá na volbě strategií $x_1, \dots, x_N$, se nazývá *hra s konstantním součtem*. V případě, že $K = 0$, mluvíme o *hře s nulovým součtem*.

Jestliže je součet výplatních funkcí závislý na zvolených strategiích, mluvíme o *hře s nekonstantním součtem*.

Velmi důležitými pojmy teorie her jsou *ryzí strategie* a *smíšené strategie*. Existují hry, ve kterých je pro hráče výhodné zvolit jedinou strategii jako prvek ze své množiny strategií (ryzí strategii), avšak často je pro hráče vhodné svoje strategie namíchat do určitého poměru (smíšená strategie). Strategiím tedy přiřazujeme pravděpodobnosti, s jakými se mají hrát. V teorii her se zavádí pojem *smíšené rozšíření hry* v normálním tvaru.

Definice 1.5 Necht' existuje hra v normálním tvaru $G = \{H, \mathbf{X}, \mathbf{M}\}$. *Smíšeným rozšířením hry G* rozumíme hru $\Gamma = \{H, \mathbf{\Xi}, \mathbf{M}\}$, kde $\mathbf{\Xi} = (\Xi_1, \dots, \Xi_N)$ je vektor prostorů Ξ_i , jehož prvky jsou pravděpodobnostní míry ξ_i na $\mathbf{X}$, a kde dále platí:

$$M_i(\xi) = \int_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} M_i(\mathbf{x}) d\xi(\mathbf{x}) \quad (1.4)$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$$

Speciálně pro konečné prostory strategií X_i pro každé $i \in H$ platí:

$$M_i(\xi) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} M_i(\mathbf{x}) \prod_{j=1}^N \xi_j(x_j) \quad (1.5)$$

Prvky prostoru X_i se nazývají *ryzí strategie i -tého hráče*, prvky prostoru Ξ_i se nazývají *smíšené strategie i -tého hráče*.

Kapitola 2

Hry dvou hráčů s konstantním součtem

Jde o matematický model konfliktu, kde vystupují pouze dva hráči a kde výplaty obou hráčů dávají vždy stejný součet, nezávisle na výběru strategií každého hráče. Jedná se o hry, ve kterých zájmy hráče 1 jsou v přímém rozporu se zájmy hráče 2.

V případě, že zavedeme pro $x \in X$ označení strategie hráče 1, kde X je prostor strategií hráče 1 a pro $y \in Y$ označení strategie hráče 2, kde Y je prostor strategií hráče 2, pak pro tyto hry zřejmě platí $M_1(x, y) = -M_2(x, y) + K$.

Pro hru s nulovým součtem platí $M_1(x, y) = -M_2(x, y)$, pro tyto hry budeme proto uvažovat jen výplaty hráče 1, tedy $M_1(x, y) = M(x, y)$.

Definice 2.1 Necht'

$$H = \{\{1, 2\}; X, Y; M_1(x, y), M_2(x, y)\} \quad (2.1)$$

je hra dvou hráčů s konstantním součtem. Strategii $x^* \in X$, ke které existuje strategie $y^* \in Y$ s tou vlastností, že

$$M_1(x, y^*) \leq M_1(x^*, y^*) \quad (2.2)$$

$$M_2(x^*, y) \leq M_2(x^*, y^*) \quad (2.3)$$

pro všechna $x \in X$ a pro všechna $y \in Y$, nazýváme *optimální strategií hráče 1*. Strategii $y^* \in Y$ nazýváme *optimální strategií hráče 2*.

V případě, že

$$H = \{\{1, 2\}; X, Y; M(x, y)\} \quad (2.4)$$

je hra s nulovým součtem, lze psát:

$$M(x, y^*) \leq M(x^*, y^*) \leq M(x^*, y) \quad (2.5)$$

Uspořádaná dvojice strategií (x^*, y^*) se považuje za *řešení hry* v normálním tvaru. Pokud půjde navíc o hru s nulovým součtem, hodnota $M(x^*, y^*)$ se nazývá *cena hry*.

Věta 2.1 Necht' je dána hra dvou hráčů s konstantním součtem (2.1). Potom x^*, y^* jsou optimální strategie ve hře (2.1) právě tehdy, jsou-li x^*, y^* optimální strategie ve hře s nulovým součtem (2.4), kde $M(x, y) = M_1(x, y) - M_2(x, y)$.

Důkaz:

" $\Rightarrow$ "

Uvažujme strategie x^*, y^* jako optimální strategie ve hře (2.1). Nerovnost (2.2) lze upravit:

$$M_1(x, y^*) - M_2(x, y^*) \leq M_1(x^*, y^*) - M_2(x, y^*) \quad (2.6)$$

Protože platí

$$K - M_1(x, y^*) = M_2(x, y^*) \geq M_2(x^*, y^*) = K - M_1(x^*, y^*),$$

dostaneme z nerovnosti (2.6) nerovnost:

$$M_1(x, y^*) - M_2(x, y^*) \leq M_1(x^*, y^*) - M_2(x^*, y^*) \quad (2.7)$$

Vztah (2.7) odpovídá levé části nerovnosti (2.5) pro $M(x, y) = M_1(x, y) - M_2(x, y)$. Pravá nerovnost by se dokázala analogicky.

" $\Leftarrow$ "

Nyní předpokládejme, že pro x^*, y^* platí (2.7) a tento vztah lze upravit

$$M_1(x, y^*) - [K - M_1(x, y^*)] \leq M_1(x^*, y^*) - [K - M_1(x^*, y^*)],$$

což je vztah ekvivalentní s nerovností (2.2).

Pravou nerovnost dostaneme opět analogicky. $\square$

Ze strategického hlediska je podle předchozí věty jedno, zda hledáme řešení hry s konstantním součtem nebo řešení jí odpovídající hře s nulovým součtem. V dalším textu se proto omezíme jen na hry se součtem výplat hráčů rovným nule.

Je názorné hry dvou hráčů s nulovým součtem popisovat pomocí matic. Počet řádků této matice udává počet strategií hráče 1, počet sloupců značí počet strategií hráče 2. Jednotlivé prvky matice značí výplaty hráče 1; z těchto výplat lze samozřejmě okamžitě zjistit výplaty hráče 2. Zavedeme definici, kde oba hráči mají konečné prostory strategií.

Definice 2.2 *Konečnou hrou s nulovým součtem dvou hráčů* rozumíme uspořádanou trojici $\{H = \{1, 2\}; X = \{1, 2, \dots, m\}, Y = \{1, 2, \dots, n\}; M(i, j) = a_{ij}\}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

se nazývá matice hry.

Matice hry popisuje danou hru úplně a jednoznačně. Máme-li nějakou maticovou hru, vzniká otázka, jak z matice hry určit optimální strategie obou hráčů.

Optimální strategie hry dvou hráčů s nulovým součtem jsou určeny vztahem (2.5), pro jejich nalezení lze užít *principu sedlového bodu* a *principu dominance*. Oba pojmy vysvětlíme na příkladu.

Příklad 2.1 Uvažujme hru dvou hráčů danou maticí hry:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\
 \hline
 x_1 & 4 & 1 & 2 & 3 \\
 x_2 & -3 & 0 & 1 & 4 \\
 x_3 & 4 & -2 & 1 & 0 \\
 x_4 & 3 & -1 & 0 & -2
 \end{array} \tag{2.9}$$

Hodnoty matice určují výhry hráče 1 (prohry hráče 2) při zvolených strategiích obou hráčů. Nejprve si všimněme, že všechna čísla prvního řádku mají větší nebo rovnou hodnotu v porovnání s korespondujícími čísly třetího řádku. V tomto případě říkáme, že strategie x_1 *dominuje* strategii x_3 . Podobně všechna čísla druhého sloupce jsou menší v porovnání s korespondujícími čísly ve sloupci třetím a říkáme, že strategie y_2 *dominuje* strategii y_3 .

Princip dominance říká, že má-li hráč rozhodnout mezi dvěma strategiemi, přičemž jedna dominuje druhé, má volit vždy dominující strategii.

Řešení matice (2.9) bude tedy ekvivalentní s řešením matice:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & y_1 & y_2 & y_4 \\
 \hline
 x_1 & 4 & 1 & 3 \\
 x_2 & -3 & 0 & 4 \\
 x_4 & 3 & -1 & -2
 \end{array} \tag{2.10}$$

Nyní v matici (2.10) budeme hledat takový prvek, který je nejmenší v řádku a zároveň největší ve sloupci. Takový prvek se označuje jako *sedlový bod* matice. Tyto vlastnosti splňuje dvojice strategií (x_1, y_2) .

Princip sedlového bodu říká, že má-li matice sedlový bod, mají hráči volit ty strategie, které tento bod obsahují.

Řešením této hry je tedy dvojice strategií (x_1, y_2) , optimální strategie hráče 1 je strategie x_1 , optimální strategie hráče 2 je strategie y_2 a cena hry je rovna 1.

Poznámka Řešení hry šlo určit přímo z matice (2.9) nalezením sedlového bodu této matice. Principu dominance se využívá pouze pro zjednodušení, kdy ihned vyřadíme strategie, které jsou evidentně horší než jiné.

Existují zřejmě maticové hry, které sedlový bod nemají. Nyní se budeme zabývat tím, co je řešením těchto her a jakým způsobem se toto řešení nachází. Podle (1.5) jsme zavedli pojem smíšené rozšíření hry v normálním tvaru. Jelikož v této kapitole uvažujeme pouze dva hráče, budeme dále pracovat s následující definicí smíšeného rozšíření hry s nulovým součtem pro dva hráče.

Definice 2.3 Necht' existuje konečná hra s nulovým součtem dvou hráčů dána maticí hry (2.8). *Smišeným rozšířením hry* (2.8) nazveme takovou hru $\Gamma = \{H = \{1, 2\}; X', Y'; M(i, j) = a_{ij}\}$, kde

$$X' = \{x^T = (x_1, \dots, x_m); \sum_{i=1}^m x_i = 1, x \geq 0\}, \quad (2.11)$$

$$Y' = \{y^T = (y_1, \dots, y_n); \sum_{j=1}^n y_j = 1, y \geq 0\} \quad (2.12)$$

jsou po řadě prostory strategií hráče 1 a hráče 2 a pro výplatní funkci $M(x, y)$ platí

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j = x^T A y. \quad (2.13)$$

Platí následující důležitá věta klasické teorie her, která zaručuje existenci optimální smíšené strategie každé konečné hry. Tato věta se v různé literatuře nazývá buď *Nashova věta*, nebo také *Základní věta teorie maticových her*.

Věta 2.2 *Smíšené rozšíření každé maticové hry má řešení.*

Důkaz: Dvě hry nazveme *strategicky ekvivalentní*, jestliže všechny optimální strategie jsou v těchto hrách stejné.

Nechť A je nějaká matice a nechť E je matice tvořená z jedniček se stejnými rozměry jako A . Pak hra s maticí A je strategicky ekvivalentní s hrou s maticí $A + cE$, kde c je libovolné reálné číslo. Navíc je-li v cena hry s maticí A , pak cena hry s maticí $A + cE$ je rovna $v + c$. To znamená, že pokud víme, jak se optimálně rozhodovat ve hře s maticí A , pak také víme, jak se rozhodovat ve hře s maticí $A + cE$.

Nyní můžeme předpokládat, že všechny prvky matice A jsou kladné. Pak existuje jistě kladné číslo ν tak, že pro libovolné pevné $x^* \in X'$ a pro všechna $y \in Y'$ platí:

$$v \leq x^{*T} \mathbf{A} y \quad (2.14)$$

Množina Y' je kompaktní množina a funkce $f(y) = x^{*T} A y$ je všude v Y' kladná a spojitá. Protože funkce $f(y)$ nabývá na množině Y' svého minima, musí být toto minimum ($= \nu$) kladné.

K tomu, aby platila nerovnost (2.14) pro všechna $y \in Y'$, stačí, aby platila pro všechna $y \in Y$ ve tvaru $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$, tj. pro ryzí strategie. K tomuto ověření stačí provést lineární kombinaci nerovností, které vzniknou dosazením ryzích strategií s koeficienty $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ do vztahu (2.14), tedy:

[illegible]

$$x^T \mathbf{A} y^* \leq v. \quad (2.16)$$

Vztah (2.16) bude platit, jestliže současně

a k tomu, aby y^* byla strategie, musí platit i $y_1^* + y_2^* + \dots + y_n^* = 1$, $y_j \geq 0$ pro $j = 1, 2, \dots, n$.
Zaved'me nyní substituce

System nerovnic (2.15), (2.17) lze přepsat na

a

Součet složek vektoru x^* a vektoru y^* musí být roven 1, zavedením substituce (2.18) se tyto podmínky změní na

$$\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n = \frac{1}{\nu}. \quad (2.22)$$

Uvažujme o úloze lineárního programování:

Chceme minimalizovat $\{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m\}$ při omezeních (2.19) a $\xi_i \geq 0$; duální úloha je maximalizovat $\{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n\}$ při omezeních (2.20) a $\eta_i \geq 0$. Díky předpokladu,

že matice A obsahuje pouze kladné prvky, snadno nahlédneme, že obě úlohy lineárního programování mají přípustné řešení. Dále je známo, že mají-li obě úlohy lineárního programování, které jsou duálně sdružené, přípustná řešení, mají i řešení optimální. Tímto je věta 2.2 dokázána. $\square$

V rámci smíšeného rozšíření má tedy každá hra řešení. Důkaz věty 2.2 dává nahlédnout, jak se dají optimální smíšené strategie určit, je ovšem třeba dále využít metod lineárního programování. V tomto textu využijeme algoritmus jednofázové simplexové metody, s touto výpočetní metodou je možné se setkat v literatuře [9].

Příklad 2.2 Uvažujme hru s maticí:

$$\begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & -1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & -1 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & -1 \end{array} \quad (2.23)$$

Je snadno vidět, že v této hře neexistuje sedlový bod. Abychom mohli využít postupu, který popisuje důkaz věty 2.2, je třeba, aby všechny prvky matice (2.23) byly alespoň nezáporné.

$$\begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 0 & 2 & 1 \\ x_2 & 2 & 0 & 2 \\ x_3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \quad (2.24)$$

Stačí určit optimální strategie ve hře dané maticí (2.24), neboť víme, že matice (2.24) je strategicky ekvivalentní s maticí (2.23). Zjistit tyto smíšené optimální strategie pro oba hráče znamená vyřešit úlohy lineárního programování; to znamená minimalizovat funkci $\{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3\}$ při omezeních

$$\begin{aligned} 2\xi_2 + \xi_3 &\geq 1, \\ 2\xi_1 + 2\xi_3 &\geq 1, \\ \xi_1 + 2\xi_2 &\geq 1, \\ \xi_i &\geq 0, i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

a maximalizovat funkci $\{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3\}$ při omezeních

$$\begin{aligned} 2\eta_2 + \eta_3 &\leq 1, \\ 2\eta_1 + 2\eta_3 &\leq 1, \\ \eta_1 + 2\eta_2 &\leq 1, \\ \eta_j &\geq 0, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Simplexová metoda je efektivní díky tomu, že při nalezení optimálního řešení jedné úlohy lineárního programování, jsme schopni okamžitě přecházet i optimální řešení její sdružené úlohy.

Snažme se nyní maximalizovat funkci $\{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3\}$ při omezeních (2.25). Úlohu nejprve upravíme na kanonický tvar pomocí umělých proměnných a zapíšeme do základní simplexové tabulky.

$$\begin{aligned} 2\eta_2 + \eta_3 + \eta_4 &= 1, \\ 2\eta_1 + 2\eta_3 + \eta_5 &= 1, \\ \eta_1 + 2\eta_2 + \eta_6 &= 1, \\ \eta_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned}$$

	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	
η_4	0	2	1	1	0	0	1
η_5^*	2	0	2	0	1	0	1
η_6	1	2	0	0	0	1	1
	-1^*	-1	-1	0	0	0	0

Poslední řádek tabulky určuje koeficienty účelové funkce v anulovaném tvaru. Realizace výpočtu probíhá ve čtyřech krocích.

1. *Test optima* - v jednotlivých krocích výpočtu je třeba v případě maximalizace účelové funkce dosáhnout zvýšení této funkce oproti kroku předcházejícímu. Jsme-li schopni nalézt nové báze řešení, které by mělo lepší hodnotu účelové funkce, není naše počáteční báze řešení optimální.

2. *Volba vstupující proměnné* - rozhodneme, která z proměnných η_j bude do báze vstupovat. Ke zvýšení hodnoty účelové funkce dojde tehdy, když do báze vstoupí ta proměnná, která má v posledním řádku tabulky zápornou hodnotu. Obecně máme zájem o to, aby byla změna účelové funkce co nejvyšší, snažíme se proto vybrat to záporné číslo s největší absolutní hodnotou. V našem příkladu je poslední řádek u nebázových proměnných η_j tvořen čísly -1 , v tomto případě je jedno, kterou z proměnných do báze zvolíme.

3. *Volba vystupující proměnné* - vystupující proměnnou z báze určíme podle minimálního podílu hodnot pravých stran a kladných koeficientů u vstupující proměnné. Je-li minima dosaženo pro více hodnot, bereme zpravidla to nejmenší z nich.

4. *Přepočet simplexové tabulky* - simplexovou tabulku přepočítáme do takového tvaru, aby se vstupující proměnná stala báze proměnnou a vystupující proměnná stala proměnnou nebázovou. K řešení využijeme Gaussovy-Jordanovy eliminační metody.

	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	
η_4	0	2	1	1	0	0	1
η_1	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
η_6^*	0	2	-1	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
	0	-1*	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
η_4^*	0	0	2	1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
η_1	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
η_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
	0	0	$-\frac{1}{2}$ *	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
η_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
η_1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
η_2	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{8}$

Z poslední části tabulky lze přepočítat cenu hry a optimální smíšené strategie obou hráčů pro hru s maticí (2.24). Cena hry v je v tomto případě rovna $\frac{8}{7}$ a pro optimální smíšené strategie platí:

$$\begin{aligned}
y_1 &= v \cdot \eta_1 = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{7} & x_1 &= v \cdot \xi_1 = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{7} \\
y_2 &= v \cdot \eta_2 = \frac{8}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{7} & x_2 &= v \cdot \xi_2 = \frac{8}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{7} \\
y_3 &= v \cdot \eta_3 = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{7} & x_3 &= v \cdot \xi_3 = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

Pro hru určenou maticí (2.23) je cena hry rovna $\frac{1}{7}$, optimální smíšené strategie pro hráče 1 a hráče 2 jsou $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7})$ a $(y_1, y_2, y_3) = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7})$.

Někdy je vhodné řešit hru jiným způsobem než simplexovou metodou lineárního programování. Zejména hry typu 2×2 a $2 \times m$ se dají řešit velmi jednoduše, jak je znázorněno v příkladu 2.3 a v příkladu 2.4.

Příklad 2.3 Mějme hru danou maticí:

$$\begin{array}{c|cc}
& y_1 & y_2 \\
\hline
x_1 & -2 & 5 \\
x_2 & 8 & 2
\end{array} \quad (2.26)$$

Nejprve nahlédneme, že tato hra nemá sedlový bod, řešení bude mít tedy ve smíšených strategiích. Uvažujme nyní, že hráč 2 bude na jednotlivé ryzí strategie hráče 1 volit strategii y_1 s pravděpodobností p_2 a strategii y_2 s pravděpodobností $1 - p_2$. Lze očekávat, že výplata hráče 1 bude pro jeho jednotlivé ryzí strategie rovna postupně těmto vztahům:

$$\begin{aligned}
-2p_2 + 5(1 - p_2) &= 5 - 7p_2 \\
8p_2 + 2(1 - p_2) &= 6p_2 + 2
\end{aligned}$$

K tomu, aby si hráč 2 zajistil, že hráč 1 nezíská výhodu z jeho volby smíšených strategií, je třeba, aby $5 - 7p_2 = 6p_2 + 2$. Odtud $p_2 = \frac{3}{13}$.

Cenu hry dostaneme jednoduše takto:

$$\begin{aligned} -2 \cdot \frac{3}{13} + 5 \cdot \frac{10}{13} &= \frac{44}{13} \\ 8 \cdot \frac{3}{13} + 2 \cdot \frac{10}{13} &= \frac{44}{13} \end{aligned}$$

Podobně bude-li hráč 1 volit strategii x_1 a strategii x_2 po řadě s pravděpodobnostmi p_1 a $1 - p_1$, bude očekávaná výplata hráče 2 při volbě jeho ryzích strategií rovna těmto rovnicím:

$$\begin{aligned} -2p_1 + 8(1 - p_1) &= 8 - 10p_1 \\ 5p_1 + 2(1 - p_1) &= 3p_1 + 2 \end{aligned}$$

Jeho optimální strategie budou v poměru, který je možné určit z rovnice $8 - 10p_1 = 3p_1 + 2$. Tedy $p_1 = \frac{6}{13}$.

Pro úplnost určíme cenu hry z hlediska hráče 1:

$$\begin{aligned} -2 \cdot \frac{6}{13} + 8 \cdot \frac{7}{13} &= \frac{44}{13} \\ 5 \cdot \frac{6}{13} + 2 \cdot \frac{7}{13} &= \frac{44}{13} \end{aligned}$$

Optimální strategie hráče 1 je smíšená strategie $(x_1, x_2) = (\frac{6}{13}, \frac{7}{13})$ a optimální strategie hráče 2 je smíšená strategie $(y_1, y_2) = (\frac{3}{13}, \frac{10}{13})$. Cena hry je rovna $\frac{44}{13}$.

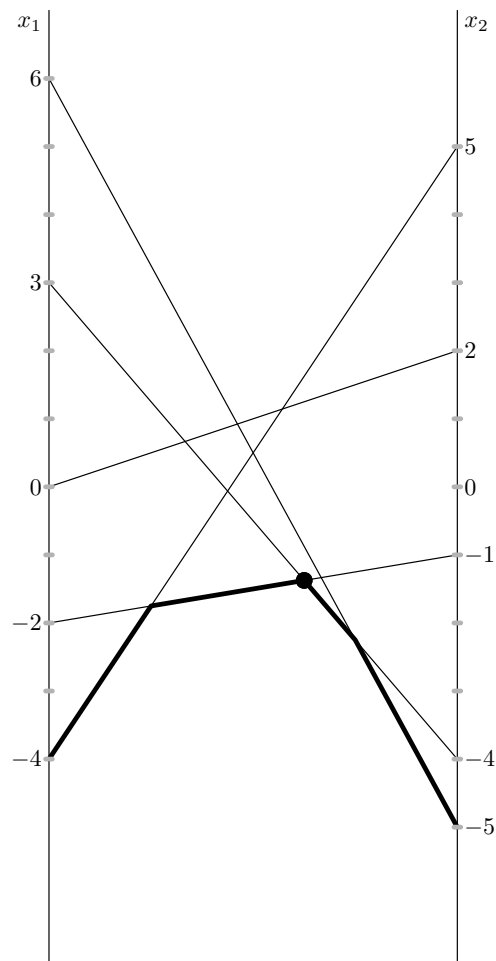
Poznámka Příklady her typu 2×2 lze řešit ještě i jiným způsobem. Postup je znázorněn v literatuře [10].

Příklad 2.4 Uvažujme maticovou hru typu 2×5 :

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
x_1	-4	-2	6	3	0	
x_2	5	-1	-5	-4	2	(2.27)

Vidíme opět, že hra nemá sedlový bod, k řešení využijeme grafickou metodu. Nakreslíme si dvě osy, které budou značit strategie x_1 a x_2 hráče 1, a na ně vyznačíme hodnoty v matici (2.27), které spojíme úsečkou - strategie y_i pro $i = 1, \dots, 5$ hráče 2 (viz obrázek níže).

Protože se hráč 2 snaží prohrát co nejméně, je v obrázku tučně znázorněná *spodní hranice* úseček. Aby si hráč 2 zajistil, že proti němu hráč 1 nezíská výhodu, bude se snažit, aby jeho výplata byla na *nejvyšším bodě* této spodní hranice úseček. Toho lze jednoduše docílit tím, že hráč 2 bude hledat řešení ve smíšených strategiích y_2 a y_4 (proti smíšeným strategiím x_1 a x_2 hráče 1).



Grafické znázornění hry (2.27)

Vyřešením této hry bychom zjistili, že optimální smíšené strategie hráče 1 a hráče 2 jsou $(x_1, x_2) = (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ a $(y_1, y_2) = (\frac{7}{8}, \frac{1}{8})$. Cena hry je rovna $-\frac{11}{8}$.

Poznámka Půjde-li o hry typu $m \times 2$, řešení lze hledat podobným způsobem s tím rozdílem, že dvojice vhodných smíšených strategií hráče 1 bude obsahovat *nejnižší bod* na *horní hranici* úseček.

Kapitola 3

Hry dvou hráčů s nekonstantním součtem

Matematickým modelem těchto konfliktů je hra, ve které vystupují dva hráči a ve které součet výplat obou hráčů není konstantní; tj. součet výplat se mění v závislosti na tom, které strategie zvolí oba hráči. Tato vlastnost vede k tomu, že zájmy hráče 1 nejsou obecně v rozporu se zájmy hráče 2. Tyto hry se vykazují soutěživými aspekty i možnostmi spolupráce.

Budeme dodržovat značení jako v předešlé kapitole, prvky $x \in X$ značí strategie hráče 1, kde X je prostor strategií hráče 1, a prvky $y \in Y$ značí pak strategie hráče 2, kde Y je prostor strategií hráče 2. Pro úplný popis hry je nutné uvádět výplatní funkce obou hráčů, tedy $M_1(x, y)$ a $M_2(x, y)$.

Abychom mohli tyto hry začít vůbec řešit je nutné vědět, zda je ve hře povolena možnost uzavírat dohody či nikoliv. V této kapitole budeme uvažovat tyto případy:

1. Dohoda je zakázána; mluvíme o *nekooperativní teorii*
2. Dohoda je povolena; mluvíme o *kooperativní teorii*

Je zřejmé, že jednotlivé případy se budou odlišovat charakterem hry a že budou mít odlišná řešení.

Nekooperativní teorie

Hráči volí své strategie bez znalosti vybrané strategie soupeře a bez možnosti spolupráce. Každý z hráčů se zajímá především o to, jak maximalizovat svoji výplatu, přičemž žádný hráč nemá přímý zájem na tom, aby jeho soupeř skončil na špatné výplatě. Máme tedy jistou motivaci řešit tyto hry podobně jako v předchozí kapitole. Jako řešení těchto her budeme hledat ty strategie, které mají tu vlastnost, že jejich jednostranné porušení vede k poškození hráče, který toto porušení vyvolal.

Definice 3.1 Necht'

$$H = \{\{1, 2\}; X, Y; M_1(x, y), M_2(x, y)\} \quad (3.1)$$

je hra dvou hráčů s nekonstantním součtem. Uspořádanou dvojici strategií (x^*, y^*) nazveme *rovnovážným bodem*, platí-li

$$M_1(x, y^*) \leq M_1(x^*, y^*) \quad (3.2)$$

a současně

$$M_2(x, y^*) \leq M_2(x^*, y^*) \quad (3.3)$$

pro všechna $x \in X$ a všechna $y \in Y$. Strategii x^* nazýváme *rovnovážnou strategií hráče 1* a strategii y^* nazýváme *rovnovážnou strategií hráče 2*.

Odtud vidíme, že zde existuje jistá analogie s definicí vztahů (2.2) a (2.3) ve hře dvou hráčů s konstantním součtem. Je tu ovšem podstatný rozdíl v tom, že u her dvou hráčů s konstantním součtem se hráč, který nezvolí svoji optimální strategii, poškodí o částku, která připadne jeho soupeři.

U nekooperativních her dvou hráčů s nekonstantním součtem hráč, který nezvolí svoji rovnovážnou strategii, poškodí nejen sebe, ale může se stát, že bude poškozen i druhý hráč, a to klidně o vyšší částku než hráč první.

Z tohoto důvodu mluvíme o rovnovážných strategiích a rovnovážném bodu místo o optimálních strategiích a optimálnímu řešení.

Každou konečnou hru dvou hráčů s nekonstantním součtem lze popsat pomocí dvou matic

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Pro větší přehlednost budeme tyto matice slučovat do *dvojmatice*

$$\begin{pmatrix} a_{11}, b_{11} & a_{12}, b_{12} & \dots & a_{1n}, b_{1n} \\ a_{21}, b_{21} & a_{22}, b_{22} & \dots & a_{2n}, b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, b_{m1} & a_{m2}, b_{m2} & \dots & a_{mn}, b_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

kde čísla řádků reprezentují čísla strategií hráče 1 a čísla sloupců odpovídají číslům strategií hráče 2. Bude-li hráč 1 volit strategii i a hráč 2 strategii j , pak výhra hráče 1 bude a_{ij} a výhra hráče 2 bude b_{ij} .

Definice 3.2 Dvojmaticovou hrou rozumíme každou konečnou hru $\{H = \{1, 2\}; X = \{1, 2, \dots, m\}, Y = \{1, 2, \dots, n\}; M_1(i, j) = a_{ij}, M_2(i, j) = b_{ij}\}$, kde a_{ij} a b_{ij} jsou prvky matic (3.4) a (3.5).

Má-li hra pouze jeden rovnovážný bod, nalezneme řešení snadno. Stačí rovnovážný bod najít a hráči mají volit ty strategie, které tento bod obsahují.

Příklad 3.1 Mějme hru dvou hráčů danu dvojmaticí:

$$\begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & -1, 1 & 2, 0 \\ x_2 & 3, 2 & 4, -1 \end{array} \quad (3.7)$$

Snadno nahlédneme, že hra (3.7) má jediný rovnovážný bod (x_2, y_1) . Tento rovnovážný bod považujeme za řešení této hry, hráč 1 má volit svoji rovnovážnou strategii x_2 a hráč 2 má volit svoji rovnovážnou strategii y_1 . V této hře hráč 1 dostane výplatu 3, hráč 2 skončí na výplatě 2.

Pro hledání rovnovážných bodů stačí prověřit všech $m \cdot n$ dvojic strategií. Rovnovážný bod splňující nerovnosti (3.2) a současně (3.3) však nemusí vůbec existovat. Budeme tedy stejně jako v předchozí kapitole definovat smíšené rozšíření hry, kde by rovnovážný bod již existoval.

Motivace k zavedení smíšeného rozšíření tu je však slabší než u her dvou hráčů s konstantním součtem. Zde obecně nejsou zájmy hráčů v přímém rozporu, hráči tedy nemají přímý zájem své volby tajit pomocí náhodného pokusu.

Definice 3.3 Necht' existuje konečná hra s nekonstantním součtem dvou hráčů dána dvojmaticí hry (3.6). Smíšeným rozšířením hry (3.6) nazveme takovou hru $\Gamma = \{H = \{1, 2\}; X', Y'; M_1(i, j) = a_{ij}, M_2(i, j) = b_{ij}\}$, kde

$$X' = \{x^T = (x_1, \dots, x_m); \sum_{i=1}^m x_i = 1, x \geq 0\}, \quad (3.8)$$

$$Y' = \{y^T = (y_1, \dots, y_n); \sum_{j=1}^n y_j = 1, y \geq 0\} \quad (3.9)$$

jsou po řadě prostory strategií hráče 1 a hráče 2 a pro výplatní funkce $M_1(x, y)$ a $M_2(x, y)$ platí:

$$M_1(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j = x^T A y \quad (3.10)$$

$$M_2(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i b_{ij} y_j = x^T B y \quad (3.11)$$

Následující věta určuje podmínky, které postačují k tomu, aby hra dvou hráčů s nekonstantním součtem měla rovnovážný bod.

Věta 3.1 *Nechť (3.1) je hra dvou hráčů s nekonstantním součtem a zároveň necht' platí:*

- i) X a Y jsou kompaktní konvexní podmnožiny euklidovských prostorů ε_m a ε_n .
- ii) $M_1(x, y)$ je konkávní v x a $M_2(x, y)$ je konkávní v y .
- iii) Funkce $M_1(x, y) + M_2(x, y)$ je spojitá na množině $X \times Y$.
- iv) Pro každé $x \in X$ je $M_1(x, y)$ spojitá funkce y v Y a pro každé $y \in Y$ je $M_2(x, y)$ spojitá funkce x v X .

Pak hra (3.1) má alespoň jeden rovnovážný bod.

Důkaz: Důkaz této věty využívá Brouwerovu větu o pevném bodě. Důkaz věty 3.1 není konstruktivní a lze ho najít v literatuře [2].

Smíšené rozšíření každé dvojmaticové hry splňuje předpoklady věty 3.1, je tedy možné uvést bez důkazu tuto větu.

Věta 3.2 *Smíšené rozšíření každé dvojmaticové hry má alespoň jeden rovnovážný bod.*

Důkaz věty 3.1 není konstruktivní, nevíme tedy, podle jakého algoritmu rovnovážné body smíšeného rozšíření hry hledat. Následující věta nastiňuje metodu, jak tyto rovnovážné body nalézt.

Věta 3.3 *Nechť ξ je m -rozměrný vektor a η je n -rozměrný vektor. Necht' A a B jsou matice s kladnými prvky typu $m \times n$. Necht' e je vektor složený z m jedniček a f necht' je vektor složený z n jedniček. Pak vektory $\bar{\xi}$ a $\bar{\eta}$ jsou netriviálním řešením úlohy nelineárního programování maximalizovat*

$$M(\xi, \eta) = \xi^T (A + B) \eta - e^T \xi - f^T \eta$$

při omezeních

$$A\eta \leq e, \quad B^T \xi \leq f,$$

$$\eta \geq 0, \quad \xi \geq 0,$$

tehdy a jen tehdy, je-li $x^ = b\bar{\xi}$, $y^* = a\bar{\eta}$ rovnovážným bodem smíšeného rozšíření dvojmaticové hry, přičemž*

$$\frac{1}{b} = f^T \bar{\xi}, \quad \frac{1}{a} = e^T \bar{\eta}.$$

Pro $\bar{\xi}$ a $\bar{\eta}$ platí $\bar{\xi}^T A \bar{\eta}^T = e^T \bar{\xi}$ a $\bar{\xi}^T B \bar{\eta}^T = f^T \bar{\eta}$, takže vždy $M(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = 0$.

Důkaz: S důkazem věty 3.3 se lze seznámit v literatuře [2].

Ukazuje se, že při existenci dvou či více rovnovážných bodů her dvou hráčů s nekonstantním součtem mohou vznikat obtíže s volbou rovnovážných strategií a tedy i s určením řešení hry. Věnujme pozornost dalšímu příkladu.

Příklad 3.2 Mějme hru danu dvojmaticí:

$$\begin{array}{c|cc}
 & y_1 & y_2 \\
 \hline
 x_1 & 0, 1 & -1, 2 \\
 x_2 & 4, 0 & -2, -1
 \end{array} \quad (3.12)$$

Hra (3.12) má dva rovnovážné body (x_1, y_2) a (x_2, y_1) . Pro hráče 1 bude výhodné, bude-li výsledek zvolených strategií (x_2, y_1) , kdežto hráč 2 bude dávat přednost výsledným strategiím (x_1, y_2) . Avšak použije-li každý z hráčů tu "svoji" rovnovážnou strategii, skončí oba na nejhorším možném výsledku. Vidíme zde případ hry, pro kterou nejsme schopni doporučit uspokojivé řešení.

To tedy znamená, že v nekooperativní teorii her dvou hráčů s nekonstantním součtem existují hry, které nemají řešení. Problémy s řešením u těchto typů her jsou závislé nejen na existenci více rovnovážných bodů, ale také na poměru výplat v těchto rovnovážných bodech.

Příklad 3.3 Uvažujme dvojmaticovou hru:

$$\begin{array}{c|cc}
 & y_1 & y_2 \\
 \hline
 x_1 & -2, -2 & 0, -1 \\
 x_2 & 2, 3 & -1, 1
 \end{array} \quad (3.13)$$

Tato hra má podobně jako předchozí hra (3.12) dva rovnovážné body, konkrétně (x_1, y_2) a (x_2, y_1) . V tomto případě je však pro oba hráče výhodnější výsledek (x_2, y_1) než výsledek (x_1, y_2) . Lze předpokládat, že se hráči sejdou na výsledku dvojice strategií (x_2, y_1) .

Vlastnosti her z příkladů 3.2 a 3.3 nás motivují k zavedení následující definice.

Definice 3.4 Necht' (3.1) je hra dvou hráčů s nekonstantním součtem a necht' $(\hat{x}, \hat{y})$ je rovnovážný bod hry (3.1) s vlastností

$$M_1(x^*, y^*) \leq M_1(\hat{x}, \hat{y}), \quad (3.14)$$

$$M_2(x^*, y^*) \leq M_2(\hat{x}, \hat{y}), \quad (3.15)$$

kde (x^*, y^*) je libovolný rovnovážný bod hry (3.1). Rovnovážný bod $(\hat{x}, \hat{y})$ pak nazveme *dominujícím rovnovážným bodem* hry (3.1).

Je-li dominující rovnovážný bod ve hře jediný, má hra řešení ve volbě tohoto dominujícího rovnovážného bodu a hráči by se měli rozhodnout pro dominující rovnovážné strategie.

Existuje-li ve hře více dominujících rovnovážných bodů, mohou nastat opět potíže a obecně tyto typy her nemají řešení. Jsou řešitelné pouze v případě, kdy všechny dominující rovnovážné body jsou záměnné.

Definice 3.5 Necht' (3.1) je hra dvou hráčů s nekonstantním součtem a necht' $x_{(j)}, y_{(j)}$, $j \in J$ jsou rovnovážné body hry (3.1). Tyto body nazveme *záměnnými* body, nezmění-li se hodnoty funkcí $M_1(x, y)$ a $M_2(x, y)$ při libovolném dosazení $x_{(j)}$, $j \in J$ za x a libovolném dosazení $y_{(k)}$, $k \in J$ za y .

Definice 3.6 Necht' (3.1) je hra dvou hráčů s nekonstantním součtem a necht' $x_{(i)}, y_{(i)}$, $i \in I$, jsou všechny rovnovážné body hry (3.1) a $x_{(j)}, y_{(j)}$, $j \in J$ jsou všechny záměnné body této hry a necht' $K = I \cap J$. Potom rovnovážné body $x_{(k)}, y_{(k)}$, $k \in K$ nazveme *optimálními rovnovážnými body*, strategie $x_{(k)}$ a strategie $y_{(j)}$ nazveme po řadě *optimálními strategiemi hráče 1* a *optimálními strategiemi hráče 2* ve hře (3.1).

Předchozí dvě definice nám pomáhají určit, k jakým strategiím se mají hráči zavázat v konfliktu, kde existuje více dominantních rovnovážných bodů, které jsou všechny záměnné. Příklad takové hry můžeme vidět níže.

Příklad 3.4 Mějme hru danu dvojmaticí:

	y_1	y_2	y_3
x_1	4, 5	1, 1	4, 5
x_2	0, -1	2, 2	-1, 0
x_3	4, 5	1, 0	4, 5

(3.16)

Tato hra má 5 rovnovážných bodů, z toho 4 jsou dominující - konkrétně $(x_{(1)}, y_{(1)})$, $(x_{(1)}, y_{(3)})$, $(x_{(3)}, y_{(1)})$, $(x_{(3)}, y_{(3)})$. Vidíme, že všechny 4 dominující rovnovážné body jsou zároveň záměnné. Tyto body jsou tedy optimálními rovnovážnými body hry. Strategie $x_{(1)}$ a $x_{(3)}$ hráče 1 jsou jeho optimální strategie, podobně strategie $y_{(1)}$ a $y_{(3)}$ hráče 2 jsou optimální strategie hráče 2.

Známým a velmi zajímavým příkladem hry s nekonstantním součtem je hra s názvem *Věžňovo dilema*. Jde o typ hry, který se ve své podstatě velmi často vyskytuje při konfliktech v sociálním prostředí.

Příklad 3.5 Věžňovo dilema:

	Z	P
Z	-2, -2	-5, 0
P	0, -5	-3, -3

(3.17)

Tento konflikt se ve své původní verzi prezentuje takto: hráči jsou dva vězni podezřeni ze spáchání zločinu a jsou vyslýcháni v oddělených místnostech. Mají jen dvě volby; buď "zapírat" (strategie Z), nebo "přiznat se" (strategie P). Jednotlivé záporné výplaty mohou představovat počet let, které vězni stráví ve vězení.

Snadno určíme, že strategie P je pro každého vězně jeho rovnovážná strategie a že dvojice $(-3, -3)$ je rovnovážným bodem. Je však očividné, že tento rovnovážný bod $(-3, -3)$ není pro žádného vězně ideální, oba dva by raději viděli výsledek $(-2, -2)$. Jak by měli vězni řešit svoji situaci?

Tento zajímavý problém budeme řešit v závislosti na počtu kol hry. Ukazuje se, že charakter hry (3.17) se nezmění, nahradíme-li číslo -5 číslem -6 , nebo přičteme-li ke každému číslu v matici číslo 80 . Nejprve vymežíme obecné podmínky Vězňova dilematu.

$$\begin{array}{c|cc}
 & Z & P \\
 \hline
 Z & a, a & b, c \\
 P & c, b & d, d
 \end{array} \tag{3.18}$$

Hra (3.18) bude Vězňovým dilematem, budou-li čísla a, b, c, d splňovat podmínky $c > a > d > b$ a $a > \frac{b+c}{2}$.

Hraje-li se tato hra pouze jednou, mají hráči volit své rovnovážné strategie P . Vězňovo dilemma má totiž jen jeden rovnovážný bod (d, d) a pro žádného hráče není výhodné se od něho odchylovat. Připomeňme hlavní předpoklad teorie her, že se každý hráč snaží maximalizovat svůj užitek. Strategie P dominuje strategii Z . Volit strategii Z nebo jiné smíšené strategie nelze doporučit.

Předpokládejme, že má tato hra konečný počet n kol, přičemž oba hráči vědí, že nastane právě n opakování hry. Zvažme nyní, jaká nastane situace v posledním n -tém kole. Oba hráči budou mít na konci tendenci volit svoji rovnovážnou strategii P , výsledek v posledním kole bude dvojice (d, d) . Tohle vědomí, že druhý hráč v posledním kole zradí, má silný vliv na hru v kole $(n-1)$. Vidíme, že v předposledním kole se ocitáme ve stejné situaci jako v kole posledním, pomocí stejných argumentů popsanych výše, lze očekávat v kole $(n-1)$ výsledek (d, d) . Pomocí těchto úvah se musíme logicky dobrat k tomu, že výsledek prvního kola bude dvojice (d, d) .

Je-li počet kol této hry nekonečný nebo konečný, ale hráči předem neznají počet opakování hry, nabízí se možnost spolupráce, tj. volba strategie Z . Hráči budou spíše spolupracovat než riskovat dlouhou řadu nepříznivých výsledků vznikajících při neshodě. Nyní předpokládejme, že se hraje první kolo a že se další kola budou hrát s pravděpodobností p , kde $p \in \langle 0, 1 \rangle$. Dále předpokládejme, že hráč 2 bude volit vždy strategii Z , dokud hráč 1 nezvolí strategii P . Zajímá nás otázka, kdy je výhodné spolupracovat a kdy soupeře zradit.

Nezvolí-li hráč 1 nikdy strategii P , bude platit:

$$a + pa + p^2a + p^3a + \dots = \frac{a}{1-p} \quad (3.19)$$

Zvolí-li hráč 1 strategii P v m -tém kole, bude platit:

$$a + pa + p^2a + \dots + p^{m-1}a + p^m c + p^{m+1}d + p^{m+2}d + \dots = \frac{a(1-p^m)}{1-p} + p^m c + \frac{p^{m+1}d}{1-p} \quad (3.20)$$

Vztahy (3.19) a (3.20) ukazují očekávanou výplatu hráče 1 pro jednotlivé případy. Pro hráče 1 bude zřejmě výhodné spolupracovat, když hodnota výrazu (3.19) bude větší nebo aspoň rovna hodnotě výrazu (3.20).

$$\frac{a}{1-p} \geq \frac{a(1-p^m)}{1-p} + p^m c + \frac{p^{m+1}d}{1-p} \quad (3.21)$$

$$a \geq a - ap^m + cp^m - cp^{m+1} + dp^{m+1}$$

$$0 \geq -p^m(a - c + cp - dp)$$

$$0 \leq p^m(a - c + cp - dp) \quad (3.22)$$

Číslo $p^m \geq 0$. Aby platila nerovnice (3.22), musí být $a - c + cp - dp \geq 0$. Odtud jednoduše získáme vztah:

$$p \geq \frac{c-a}{c-d} \quad (3.23)$$

Platí-li podmínka (3.23), oplatí se hráčům spolupracovat, tedy volit strategii Z . Ve hře (3.17) musí být splněno, že pro pravděpodobnost p hry dalšího kola platí, že $p \geq \frac{2}{3}$. Bohužel předpoklad, že soupeř bude vždy spolupracovat, jsme učinili u našeho soupeře. Z tohoto důvodu nemusí být toto řešení zcela přesvědčivé.

Poznámka V sociálních konfliktech se Vězňovo dilema vyskytuje zejména opakovaně a hráči obvykle ani netuší, kolik kol hra bude mít. Jsou známy dva zajímavé experimenty opakovaného Vězňova dilematu, ve kterém teoretikové her vytvořili počítačové programy za účelem maximalizovat svoji výplatu v tomto konfliktu. Tyto experimenty se nazývají Axelrodovy turnaje. V obou dvou turnajích zvítězil program "TIT FOR TAT", který byl naprogramován takto: *V prvním kole budu vždy spolupracovat. V dalším kole zvolím právě tu strategii, kterou proti mně v minulém kole použil můj soupeř.* Vítězný program se tedy chová podle následujícího vzorce: Vždy se snažit nejprve spolupracovat, nikdy nebýt ten první, kdo zradí. Na zradu svého soupeře reagovat také zradou, projeví-li ale soupeř zájem o další spolupráci, odpustit a být ochoten tuto spolupráci obnovit. Takový přístup se tedy jeví jako velmi úspěšný v sociálním prostředí.

Kooperativní teorie

V této kapitole jsme dosud uvažovali pouze ty situace, ve kterých mezi sebou hráči nemohli komunikovat a nemohli proto ani uzavírat dohody. Nyní předpokládejme, že je mezi hráči povoleno uzavírat dohody a že je celková výsledná výplata mezi hráče přerozdělena.

Nejprve se zabývejme otázkou, kdy má pro hráče vůbec smysl uzavírat dohodu. Pro hráče je patrně výhodné uzavřít dohodu s druhým hráčem, může-li ze spolupráce získat větší výplatu než při samostatném rozhodování. Bude vhodné, když zavedeme pojem *zajištěná výhra* hráče, což je nejmenší výhra, kterou si hráč dokáže sám uhrát:

$$v_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} M_1(x, y) \quad (3.24)$$

$$v_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} M_2(x, y) \quad (3.25)$$

Pod označením v_1 budeme rozumět *zajištěnou výhru hráče 1*, podobně v_2 bude značit *zajištěnou výhru hráče 2*.

Pod označením $v_{1,2}$ budeme rozumět částku, kterou jsou hráči schopni uhrát dohromady při spolupráci. Platí pro ni:

$$v_{1,2} = \max_{(x,y) \in X \times Y} [M_1(x, y) + M_2(x, y)] \quad (3.26)$$

Extrémy (3.24) a (3.25) ovšem nemusí vůbec existovat, jejich hledání je ekvivalentní s hledáním sedlového bodu v příslušné hře s nulovým součtem. Také extrém (3.26) zřejmě nemusí existovat. Nebude-li jeden z extrémů (3.24), (3.25) nebo (3.26) existovat, nastíníme v závěru této kapitoly postup, jak se zachovat i v tomto případě.

Definice 3.7 Necht' (3.1) je hra dvou hráčů s nekonstantním součtem a necht' v této hře existují čísla v_1 , v_2 a $v_{1,2}$. Tuto hru nazveme *podstatnou*, platí-li $v_{1,2} > v_1 + v_2$, a *nepodstatnou*, platí-li $v_{1,2} = v_1 + v_2$.

V podstatných hrách jsou tedy hráči motivováni uzavřít se soupeřem dohodu. Je snadno vidět, že případ $v_{1,2} < v_1 + v_2$ nemůže nikdy nastat. V další části se budeme zabývat pouze podstatnými hrami.

Důležité pro oba hráče je to, jak se bude společná výhra přerozdělovat. Každý hráč by zde mohl mít samozřejmě snahu získat pro sebe co nejvíc bez ohledu na soupeře, ale nás bude spíše zajímat, je-li možné vybrat takové rozdělení výhry, které je spravedlivé. Nejprve zavedeme následující definice.

Definice 3.8 Necht' (3.1) je podstatná hra dvou hráčů s nekonstantním součtem. Necht' ω_1 (resp. ω_2) značí částku, kterou ze společné výplaty dostane hráč 1 (resp. hráč 2). Pak dvojici $[\omega_1, \omega_2]$ nazveme *rozdělením*. Množinu všech rozdělení označíme Ω .

Definice 3.9 V podstatné hře dvou hráčů s nekonstantním součtem nazveme dvojici $[\psi_1, \psi_2] \in \Omega$ *paretovským rozdělením*, jestliže neexistuje takové rozdělení $[\omega_1, \omega_2] \in \Omega$ s vlastností $\omega_1 \geq \psi_1$ a současně $\omega_2 > \psi_2$, nebo $\omega_1 > \psi_1$ a současně $\omega_2 \geq \psi_2$. Množinu všech paretovských rozdělení označíme Ψ .

Hry, které nebyly kooperativní, jsme v tomto textu řešili tak, že se hráči zajímali především o svůj užitek. Šlo-li o hry s konstantním součtem, byly zájmy hráčů přímo protikladné. Ve hrách nekooperativních sice nebyly tyto zájmy hráčů v přímém rozporu, ale hráči se opět zajímali hlavně sami o sebe, jejich soupeř byl vždy až na druhém místě. Tento přístup můžeme nazvat *individuální racionalitou*.

V kooperativních hrách se samozřejmě hráči snaží také maximalizovat svoji výplatu, ovšem výhoda spolupráce jim dává možnost jednat spíše jako skupina, která se dohodne na nejvýhodnějším výsledku. Zde hovoříme o *skupinové racionalitě*.

Za řešení kooperativních her budeme hledat takové rozdělení $[\omega_1, \omega_2] \in \Omega$, které je paretoovsky optimální a které každému hráči zabezpečuje výplatu minimálně rovnou jeho zajištěné výhře.

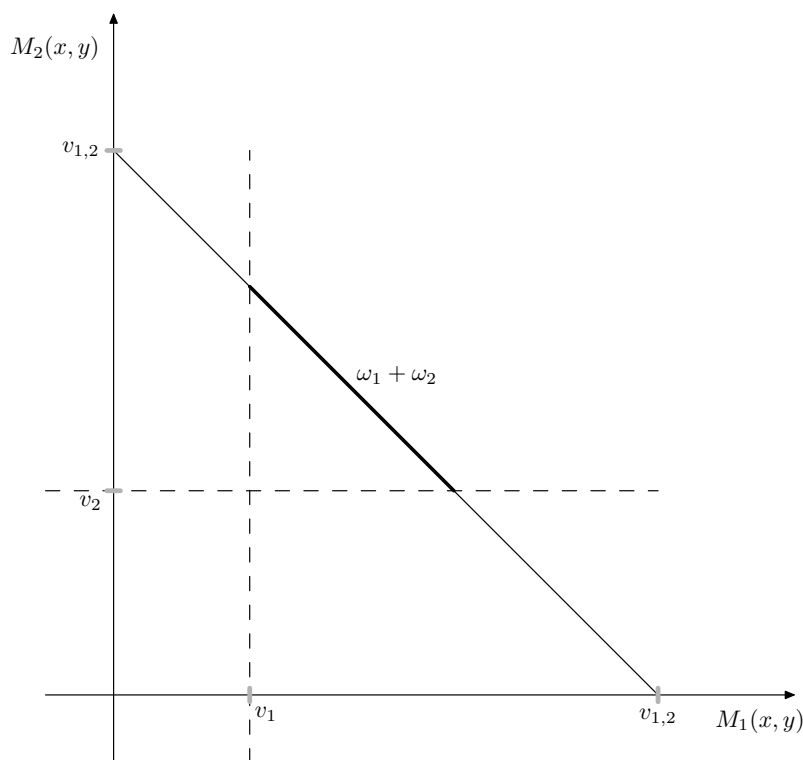
Další definice nám určuje přijatelné hodnoty ω_1 a ω_2 pro oba hráče při přerozdělení společné výplaty.

Definice 3.10 Množinu všech rozdělení splňující vztahy

$$\omega_1 + \omega_2 = v_{1,2}, \quad (3.27)$$

$$\omega_1 \geq v_1, \quad \omega_2 \geq v_2, \quad (3.28)$$

nazveme *jádrem* uvažované hry.



Množina rozdělení Ω s jádrem hry

Protože je jádro hry úsečka, vznikají problémy, který bod na této úsečce zvolit, aby bylo řešení co možná nejspravedlivější. Například symetrické rozdělení $\omega_1 = \frac{v_{1,2}}{2}$ a $\omega_2 = \frac{v_{1,2}}{2}$ obecně nebude vyhovovat, neboť hráči nemusí mít ve hře strategicky stejně silné postavení, navíc rozdělení $[\frac{v_{1,2}}{2}, \frac{v_{1,2}}{2}]$ nemusí do jádra hry ani patřit.

Spravedlivý přístup k výběru konkrétního bodu je zřejmě věc docela individuální. Náš výběr jednoho bodu z jádra hry bude poměrně dobře intuitivně podložený. Uvažujme čísla $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2 \in \Omega$, pro která platí:

$$\bar{\omega}_1 = \frac{[v_{1,2} + v_1 - v_2]}{2} \quad (3.29)$$

$$\bar{\omega}_2 = \frac{[v_{1,2} + v_2 - v_1]}{2} \quad (3.30)$$

Snadno se přesvědčíme, že dvojice $[\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2]$ patří do jádra hry. Vztahy (3.29) a (3.30) můžeme přepsat do tvaru:

$$\bar{\omega}_1 = v_1 + \frac{[v_{1,2} - v_1 - v_2]}{2} \quad (3.31)$$

$$\bar{\omega}_2 = v_2 + \frac{[v_{1,2} - v_1 - v_2]}{2} \quad (3.32)$$

Náše rozdělení $[\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2]$ má takovou interpretaci, že každý hráč si ponechá částku, kterou je schopen si sám uhrát, a o zbytek se hráči rozdělí rovným dílem.

Definice 3.11 Uvažujme podstatnou hru dvou hráčů s nekonstantním součtem (3.1). Strategie x^*, y^* považujeme za *optimální strategie*, platí-li

$$v_{1,2} = M_1(x^*, y^*) + M_2(x^*, y^*). \quad (3.33)$$

Optimálním rozdělením rozumíme dvojici $[\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2] \in \Omega$, která splňuje podmínky (3.29) a (3.30), a *řešením* podstatné hry pak rozumíme čtveřici $x^*, y^*, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$.

Pro určení řešení nám tedy stačí určit čísla $v_1, v_2, v_{1,2}$ a odtud snadno spočítáme hodnoty $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ a vybereme strategie x^*, y^* . Řešení kooperativních her v tomto případě nečiní žádné potíže.

Příklad 3.6 Mějme hru danu dvojmaticí:

	y_1	y_2	y_3
x_1	8, 1	8, 7	5, -5
x_2	0, 2	40, -2	-13, -3
x_3	-5, 5	4, -10	9, 0

(3.34)

V této hře je $v_1 = 5, v_2 = 1$ a $v_{1,2} = 38$. Optimální rozdělení společné výhry pak vychází $\bar{\omega}_1 = 21, \bar{\omega}_2 = 17$. Optimálními strategiemi jsou $x^* = x_2, y^* = y_2$.

Jak bylo uvedeno v předchozí části, extrémy (3.24), (3.25) a (3.26) ve hře obecně nemusí existovat. V takovém případě podle našeho postupu nedokážeme kooperativní hry vůbec řešit. Přesto zde navrhneme jiný přístup, který ukazuje, jak je možné se s touto situací vypořádat.

Lze definovat bod *status quo*, který reprezentuje situaci vzniklou při neshodě hráčů. Při existenci extrémů (3.24), (3.25) je bod status quo dán přímo čísly v_1 a v_2 , v opačném případě je třeba hledat zajištěnou výhru ve smíšeném rozšíření příslušných her s nulovým součtem.

Je dokázána věta, podle které existuje v každé kooperativní hře (3.1) pouze jeden *vyjednávací bod*, který splňuje následující čtyři axiomy.

Axiom racionality říká, že řešení hry by mělo být bodem jádra hry.

Jsou-li výplaty hráčů transformovány pomocí pozitivní lineární funkce, pak podle *axiomy lineární invariance* by mělo být i řešení hry touto funkcí transformováno.

Každou hru lze znázornit graficky pomocí jistého konvexního mnohoúhelníku. *Axiom symetrie* předpokládá, že je-li tento mnohoúhelník symetrický podle osy se stejným sklonem jako je sklon osy $y = x$, pak tato osa prochází bodem status quo a leží na ní řešení hry.

Axiom o nezávislosti na nepodstatných alternativách říká, že zvětšíme-li daný konvexní mnohoúhelník o nepodstatné výplaty, nezmění se řešení hry.

Díky zavedení čtyř rozumných axiomů jsme tedy schopni s využitím bodu status quo určit jediný bod jádra hry. Bod status quo v konvexním mnohoúhelníku lze určit vždy, vyjednávací bod nám určuje řešení hry. Podrobnější popis je dostupný v literatuře [7].

Závěr

Cílem diplomové práce bylo vytvořit ucelený odborný text, který by zájemce o matematiku seznamoval s hlavními myšlenkami teorie her dvou hráčů. Tato práce může sloužit jako stručný průvodce zavedených pojmů, na kterých je vystavěna teorie her, a závěrů z nich vyplývajících.

V první kapitole byly zavedeny základní definice, které se využívají při řešení konfliktních situací. Obecně jsme v teorii her motivováni hledat Nashův rovnovážný bod. Tento bod je z hlediska řešení díky své stabilitě velmi žádoucí. V souvislosti se snahou nalézt Nashův rovnovážný bod definujeme ryzí a smíšené strategie ve smíšeném rozšíření dané hry.

Druhá kapitola je dnes chápána jako klasická část teorie her, která je již zcela vyřešena. Při hledání řešení her dvou hráčů s konstantním součtem je třeba se nejprve zaměřit na to, má-li hra sedlový bod. V takovém případě je doporučeno hráčům, aby volili ty strategie, které tento sedlový bod obsahují. Nemá-li hra sedlový bod, měli by se hráči zavázat k volbě svých optimálních smíšených strategií, přičemž bylo ukázáno, že takové strategie nejen vždy existují, ale že máme i dobrý algoritmus k jejich nalezení. Při řešení jednodušších her často není třeba sahát k dosti sofistikované simplexové metodě lineárního programování. V tomto textu byly při řešení jednodušších her zvoleny jiné výhodnější metody výpočtu.

Třetí kapitola rozděluje hry dvou hráčů s nekonstantním součtem na nekooperativní a kooperativní. V nekooperativních hrách vznikají v obecném pojetí problémy, jaké strategie hráčům doporučit. Má-li hra pouze jeden rovnovážný bod, je pro hráče výhodné, aby volili ty strategie, které jsou tímto bodem vymezeny. Při existenci více rovnovážných bodů jsme schopni doporučit uspokojivé řešení jen tehdy, když hra vykazuje jisté specifické vlastnosti, v ostatních případech jsme tyto hry prohlásili za neřešitelné. Nemá-li hra žádný rovnovážný bod, máme tendenci hledat optimální smíšené strategie ve smíšeném rozšíření dané hry, ovšem jakým způsobem tyto optimální smíšené strategie najít nám opět činí potíže. V závěru nekooperativní teorie bylo vyřešeno Vězňovo dilema, aplikace těchto závěrů by mohla posloužit jako inspirace při jednání v sociálních konfliktech. Kooperativní teorie byla zaměřena na spolupráci hráčů a jejich snahu spravedlivě mezi sebe rozdělit společnou výplatu. Dohodnout se na optimálních strategiích nedělá hráčům problémy, jednoduše zvolí ty strategie, které jim dohromady přinesou největší výplatu. Spravedlivé rozdělení této výplaty však může působit těžkosti. Tuto situaci jsme řešili pro případ existence extrémů, které představovaly sedlové body příslušných her každého z hráčů. V závěru textu bylo zmíněno, že v případě neexistence sedlových bodů v těchto hrách je možné pomocí jistých smysluplných axiomů vybrat ze všech rozdělení společné výplaty jediný bod.

Teorie her se při rozhodování v reálném světě jeví jako poměrně nepraktický nástroj. Je to způsobeno obrovským počtem možností volby jednotlivých hráčů, navíc jedinec často ani netuší, k jakému výsledku jeho chování povede. Přesto studovat teorii her a seznámit se s jejími hlavními myšlenkami může alespoň v jistém stadiu pomoci ke správnému rozhodnutí.

Literatura

- [1] Chvoj, M.: *Pokročilá teorie her ve světě kolem nás*. Grada Publishing, a.s., Praha, 2013.
- [2] Mañas, M.: *Teorie her a optimální rozhodování*. Nakladatelství technické literatury, n. p., Praha, 1974.
- [3] Mañas, M.: *Teorie her a konflikty zájmů*. Vysoká škola ekonomická v Praze, Nakladatelství Oeconomica, Praha, 2002.
- [4] Osborne, M. J.: *An Introduction to Game Theory*. Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [5] Rubinstein, A., Osborne, M. J.: *A Course in Game Theory*. MIT Press, Cambridge, 1994.
- [6] Schelling, T. C.: *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press, Cambridge, 1960.
- [7] Straffin, P. D.: *Game Theory and Strategy*. Mathematical Association of America, Washington, 1993.
- [8] Štecha, J.: *Optimální rozhodování a řízení*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1999.
- [9] Švrček, J.: *Lineární programování v úlohách*. Skriptum UP, Olomouc, 1995.
- [10] Williams, J. D.: *The Compleat Strategyst - Being a Primer on the Theory of Games of Strategy*. Dover Publications, Inc., New York, 1986.