

Posudek na disertační práci Mgr. Zdeňka Svobody „Operators on Ordered Algebras“

Disertační práce Zdeňka Svobody se věnuje několika typům operátorů na (ohraničených integrálních) reziduovaných svazech a na komutativních basic algebrách. Zjednodušeně řečeno, jde za prvé o multiplikativní vnitřkové operátory (mi-operátory) a aditivní uzávěrové operátory (ac-operátory), případně jejich modifikace wmi- a sac-operátory, a za druhé o monotónní modální operátory. Práce je souborem pěti hotových článků, z nichž jeden je v recenzním řízení a čtyři vyšly nebo jsou přijaté do tisku v časopisech Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica, Central Eur. Math. J., Math. Bohem. a Math. Slovaca.

Úvodní část, která by měla dosažené výsledky stručně shrnout a jednotně prezentovat, bohužel není příliš vydařená. Kapitola „Main results“ vznikla „slepením“ vybraných částí jednotlivých článků, a to bez jakékoliv snahy o komplexnější pohled na věc nebo jen sjednocení symboliky a odstranění drobných (typografických) nedostatků, které se objevují v člancích. Důsledkem je, že některé pasáže textu se opakují; např. definici (ohraničeného integrálního) reziduovaného svazu zde najdeme 3krát a definici basic algebry 2krát. Navíc kapitola „Introduction“ opakuje tyto definice ještě jednou.

Celkový dojem je proto rozporuplný. Není jasné, proč nebylo zvoleno jednotné formátování; pouze v případě jednoho článku je použit reprint, takže zbývající články a úvod bylo možné/vhodné upravit jednotně. Různé velikosti písma, okraje apod. a také (někdy výrazně) vyčnívající řádky nevypadají dobře. Nelze se tak zbavit pocitu, že autor nevěnoval závěrečné redakci textu náležitou pozornost.

Úvod je poměrně rozsáhlý (str. 7–31), ale jak už bylo uvedeno, jde v podstatě jen o vybrané části článků [A]–[E]. Základní definice a některé další věci se několikrát opakují. Např. definice ohraničeného integrálního reziduovaného svazu – ať už komutativního nebo obecného – se objevuje 4krát (na str. 9, 13, 18 a 27, z toho 3krát se stejnou nepřesností v bodě (iii)) a definice basic algebry 3krát (na str. 11, 23 a 29, přičemž jednou je chybně požadována komutativita). Matoucí je úmluva, co se rozumí reziduovaným svazem.

Vztah basic algeber a svazů s antitónními involucemi na str. 11 není vysvětlen dostatečně přesně – není řečeno, jak jsou v basic algebrách definovány antitónní involutione $x \mapsto x^a$. Na str. 11 také narazíme na zcela nesystematické značení algeber, a sice $\langle A; \dots \rangle$, $A = \langle A; \dots \rangle$, $(A, \dots)$ a $\mathcal{A} = (A; \dots)$.

Nekonzistentní jsou odkazy na tvrzení v člancích [A]–[E]. Najdeme např. (clA, 3.8), (A, 3.16), [B, 4.7], (C, X), ale také [29], protože článek [C] je uveden i v seznamu literatury na str. 33–35 jako [29].

Článek [A] je věnován (w)mi- a (s)ac-operátorům na komutativních (ohraničených integrálních) reziduovaných svazech, které splňují identitu $(x \odot y)^{-} = x^{-} \odot y^{-}$. Takové reziduované svazy se nazývají „normální“. Každému operátoru f je přiřazen duální operátor $f^{-} : x \mapsto f(x^{-})^{-}$. Je-li f (w)mi-operátor, pak f^{-} je sac-operátor, a je-li f (s)ac-operátor, pak f^{-} je wmi-operátor. Toto přiřazení určuje (antitónní) Galoisovu

konexi mezi uspořádanou množinou wmi-operátorů $wmi(M)$ a uspořádanou množinou sac-operátorů $sac(M)$.

Ve druhé polovině článku se zkoumají operátory na reziduovaném svazu $Reg(M)$. Je dokázáno, že když f je operátor na M , pak zobrazení $f^\# : x \mapsto f(x)^{--}$ je operátor příslušného typu na $Reg(M)$, a naopak, je-li f mi- nebo ac-operátor na $Reg(M)$, pak zobrazení $f^+ : x \mapsto f(x^{--})$ je wmi- nebo sac-operátor na M .

Poznámky: Je nutné v §4 předpokládat, že M má Glivenkovu vlastnost? Zobrazení $\gamma : x \mapsto x^{--}$ je nucleus na M , takže $\gamma(M) = Reg(M)$ je reziduovaný svaz, ve kterém $x \vee_\gamma y = \gamma(x \vee y)$ a $x \odot_\gamma y = \gamma(x \odot y) = x \odot y$ díky normálnosti M . Viz např. citovaná monografie [18] (podle seznamu na str. 33–35). Práce nezmiňuje souvislost studovaných operátorů s pojmy nucleus a conucleus.

Nabízí se několik přirozených otázek. Např. jaký je vztah mi- a ac-operátorů na reziduovaných svazech splňujících zákon dvojí negace $x = x^{--}$? Jaký je vztah mezi uspořádanými množinami operátorů na M a $Reg(M)$? Jak s tím souvisí popsaná Galoisova konexe mezi $wmi(M)$ a $sac(M)$? Lze něco říct o vztahu operátorů na M a $B(M)$, kde $B(M)$ je podalgebra Booleovských prvků M ?

Další otázka vyvstává hned v souvislosti s motivací mi-operátorů jako zobecnění topologických vnitřkových operátorů na Booleových algebrách. Je-li f mi-operátor na reziduovaném svazu M , co je $f(M)$? V případě Booleových algeber je to Heytingova algebra.

Článek [B] se věnuje stejné problematice jako [A] v obecnějším případě (ohraničených integrálních) reziduovaných svazů, které splňují identity $x^{--} = x^{--}$ a $(x \odot y)^{--} = x^{--} \odot y^{--}$. Tyto reziduované svazy se nazývají „dobré normální“. Opět jsou definovány (w)mi- a (s)ac-operátory, každému operátoru f jsou přiřazeny tentokrát dva operátory $f^- : x \mapsto f(x^-)$ a $f^+ : x \mapsto f(x^+)$ a je dokázáno, že existuje Galoisova konexe mezi uspořádanými množinami wmi-operátorů a sac-operátorů. Ve druhé části se operátoru f na M přiřazuje operátor $f^* : x \mapsto f(x)^{--}$ na $Reg(M)$ a naopak operátoru f na $Reg(M)$ se přiřazuje operátor $f^+ : x \mapsto f(x^{--})$ na M .

Poznámky k tomuto článku se téměř shodují s poznámkami k [A]. Kde se používá Glivenkova vlastnost? Zobrazení $\gamma : x \mapsto x^{--}$ je nucleus. Operátory na reziduovaných svazech, které splňují zákon dvojí negace? Vztah uspořádaných množin operátorů na M a na $Reg(M)$? Úplně jasná není formulace věty 3.15. Tvrdí se zde, že $(f^-)^- = (f^+)^+$? Bylo by také vhodné uvést nekomutativní příklad; oba použité příklady jsou převzaty z [A].

Článek [C] se zabývá mi- a ac-operátory na komutativních basic algebrách, a to ve stejném duchu jako [A] a [B]. Operátoru f je přiřazen operátor $f^- : x \mapsto \neg f(\neg x)$. Když f je mi-operátor, f^- je ac-operátor, a naopak. Tím je určena (antitónní) Galoisova konexe mezi uspořádanými množinami mi-operátorů a ac-operátorů. Dále je zkoumán vztah operátorů na A a na $B(A)$. Je dokázáno, že restrikce operátoru na $B(A)$ je topologický operátor na $B(A)$ a že každý topologický uzávěrový operátor na $B(A)$ lze rozšířit na ac-operátor na A .

Poznámky: Je nutné předpokládat komutativitu? Není možné formulovat větu 3.3 silněji: přiřazení $f \mapsto f^-$ je duální izomorfismus mezi $ac(A)$ a $mi(A)$? Platí věta 4.3 pro

topologické vnitřkové operátory a mi-operátory? Vzhledem k definici operace $\ominus$ na str. 2 není popis ideálů na str. 9 správně, protože $x \ominus y$ musí být definováno jako $\neg(y \oplus \neg x)$, nikoliv $\neg(\neg x \oplus y)$.

Článek [D] je věnován monotónním modálním operátorům, tj. multiplikativním uzávěrovým operátorům, na (ohraničených integrálních) reziduovaných svazech. Hlavním výsledkem je charakterizace těchto operátorů ve větě 6. V závěru je dokázáno, že $\text{Fix}(f)$ je reziduovaný svaz, ve kterém $x \odot_{\text{Fix}(f)} y = x \odot y$ a $x \vee_{\text{Fix}(f)} y = f(x \vee y)$, i když toto plyne z faktu, že monotónní modální operátor je nucleus.

Článek [E], který je v recenzním řízení, se zabývá modálními operátory na komutativních basic algebrách. Je otázkou, zda zařazení tohoto článku práci prospělo. Objevují se zde výše zmiňované nedostatky (např. $A = \langle A; \dots \rangle$ a $(A, \dots)$ na jednom řádku) a dokazují se věci dokázané už v [C]. V důkazu věty 3.7 se využívá toho, že modální operátor je uzávěrový operátor, což je evidentní, ale je to dokázáno až v lemmatu 3.10 (i). Podle lemmatu 3.10 (iv) platí nerovnost $f(x) \leq x \oplus f(0)$. Přitom ale $f(0) \in B(A)$, takže $x \oplus f(0) = x \vee f(0) \leq f(x)$, a tedy $f(x) = x \vee f(0)$. To znamená, že každý modální operátor na komutativní basic algebře je ve tvaru $x \mapsto x \vee a$, kde $a \in B(A)$.

Závěr. Zvolená forma disertační práce je poněkud problematičtější a prezentace není ideální. Výsledky jsou ale nové, korektní a dostatečně aktuální, což je doloženo i tím, že byly (nebo budou) publikovány v recenzovaných mezinárodních časopisech. Proto myslím, že po úspěšné obhajobě je možné Mgr. Zdeňku Svobodovi přiznat titul doktor (Ph.D.) v oboru algebra a geometrie.

Olomouc 10. 5. 2016


doc. RNDr. Jan Kühr, Ph.D.

Posudek oponenta

na disertační práci Mgr. Zdeňka Svobody „Operators on Ordered Algebras“

Posuzovaná disertační práce se zabývá tzv. uzávěrovými operátory, operátory vnitřku a modálními operátory na komutativních basic algebrách a ohraničených integrálních reziduovaných svazech, které obsahují třídy algeber některých neklasických logik (např. MV -algebry, BL -algebry a jejich nekomutativní protějšky a Heytingovy algebry). Právě tato souvislost je jedním z důvodů výzkumu reziduovaných svazů v posledních letech. Jedná se tedy o aktuální téma. Z práce je patrná návaznost na výzkum autorových předchůdců a jejich školitele prof. RNDr. Jiřího Rachůnka, DrSc.

Doktorand předložil disertační práci jako soubor pěti samostatných, tématicky souvisejících článků, z nichž tři již byly publikovány, jeden je v tisku a jeden v recenzním řízení. U tohoto článku je uchazeč jediným autorem, u ostatních je spoluautorem školitel Jiří Rachůnek. Součástí práce je úvod, kde je nastíněna studovaná problematika, a kapitola „Main results“, ve které jsou zopakovány výsledky, případně definice z uvedených článků, avšak bez jakýchkoliv vysvětlujících poznámek nebo shrnujícího komentáře.

V článcích [A], resp. [B] jsou zavedeny a studovány multiplikativní vnitřkové a aditivní uzávěrové operátory (krátce mi - a ac -operátory) na komutativních, resp. nekomutativních ohraničených integrálních reziduovaných svazech. Popisují se zde vztahy mezi nimi. Dále se zde tyto pojmy zobecňují na tzv. slabé mi -operátory a silné ac -operátory a je ukázán Galoisův vztah mezi nimi. Pozornost je věnována vztahům mezi mi - a ac -operátory na reziduovaných svazech s Glivenkovou vlastností a na reziduovaných svazech jejich regulárních prvků.

V další části práce (článek [C]) se zavádějí a studují aditivní uzávěrové a multiplikativní vnitřkové operátory na komutativních basic algebrách a popisují vztahy mezi nimi. Dále je zde dokázáno, že množina aditivně idempotentních prvků komutativní basic algebry tvoří její podalgebru, která je Booleovou algebrou. Studovány jsou také operátory na podílových komutativních basic algebrách.

V posledních dvou částech ([D] a [E]) se definují a studují monotónní modální operátory na komutativních basic algebrách a ohraničených integrálních reziduovaných svazech. Zvláštní pozornost je věnována modálním operátorům na dobrých a normálních reziduovaných svazech.

Je chvályhodné, že práce prakticky neobsahuje překlepy. Našla jsem pouze jeden na str. 8, 10. ř. zdola ve slově „lattices“.

K práci mám následující připomínky:

- Od kapitoly s názvem „Introduction“ bych u práce tohoto typu očekávala stručné představení práce – že se jedná o soubor článků, čím se články zabývají, na co práce navazuje apod.

- Poznámky ke vztahu příslušných algeber k neklasickým logikám působí nepřírozně a vzhledem k názvu práce "Operators on Ordered Algebras" ani nebyly nutné. Myslím, že formulace „... logics in the theory of fuzzy sets.“ na straně 8 není správná.
- Nedomyšlené opakování změny v tom, co budeme rozumět reziduovaným svazem: str. 9, str. 13, str. 18.
- Na str. 9 je uveden seznam identit charakterizujících jednotlivé třídy reziduovaných svazů, dále se však názvy těchto identit prakticky nepoužívají.
- Nekonzistentní zápis odkazů. V prvních dvou kapitolách je možné najít všechny tyto tvary: (A, 3.16), (clA, 3.8), ([A], 3.12) a [C, 3.3].
- Opakování definic již v kapitolách 1 a 2, nehledě na jejich výskyt v připojených člancích:
 - definice reziduovaného svazu se vyskytuje na str. 9, str. 18 a str. 27 – na 25 stranách textu celkem třikrát.
 - str. 10, odstavec týkající se pojmu „good“, identický odstavec je na str. 18 dole.
 - definice basic algebry se vyskytuje na str. 11, str. 23 a str. 29 – na 25 stranách textu opět celkem třikrát!
- Některé jazykové formulace, podle mého názoru, ztěžují pochopení textu.
 - str. 15, ř. 4, místo „i.e.“ vhodnější „because“.
 - str. 28, ř. 13, co se rozumí „However, in general residuated lattices the converse need not hold.“?
 - str. 29, odst. 1.
- Zbytečně komplikovaná vyjádření.
 - str. 10, „pseudo *BL*-algebra, která je subdirektním součinem lineárně uspořádaných pseudo *BL*-algeber“ je reprezentovatelná pseudo *BL*-algebra.
 - str. 18, totéž.
 - str. 29, „dobrý reziduovaný svaz splňující $x^{\sim} = x$ pro všechna $x \in M$ “ je involutivní reziduovaný svaz.
- Znáte nějaký příklad reziduovaného svazu, který je dobrý a současně není normální?

Přes uvedené (spíše formální) nedostatky práce obsahuje nové a zajímavé výsledky v aktuálně se rozvíjející oblasti výzkumu, které již ve velké většině byly publikovány v recenzovaných matematických časopisech.

Proto **doporučuji**, aby po úspěšné obhajobě byla uznána jako práce disertační.

V Ostravě dne 24. března 2016


doc. RNDr. Dana Šalounová, Ph.D.

Posudok na dizertačnú prácu
“Operators on Ordered Algebras” od Zdeňka Svobody

Dizertačná práca Mgr. Z. Svobody sa zaoberá zovšeobecneniami topologických boolovských algebier v podobe uzáverových, interior a modálnych operátorov na reziduovaných zväzoch a tzv. basic algebrách. Jej textová časť je rozdelená na 2 hlavné celky, úvod a sumarizácia hlavných výsledkov z 5 článkov, ktoré sú už publikované prípadne prijaté na publikovanie. Keďže uvedené výsledky v práci sú overené recenznými konaniami, ich správnosť je preukázaná. Jediné, čo sa dá práci vyčítať je jej formálne spracovanie, ktoré vyústilo do prílišnej nezávislosti uvádzaných hlavných výsledkov, čo sa prejavilo v zbytočnom opakovaní definícií v susedných podkapitolách. Na jednej strane je to výhoda, stačí si prečítať sumarizáciu výsledkov v konkrétnej podkapitole, ale pri čítaní práce ako celku to pôsobí rušivo. Podľa mňa nebol dostatočne využitý potenciál pre porovnanie dosiahnutých výsledkov na rôznych typoch algebier, ktorý mohol slúžiť ako referencia pri čítaní konkrétnych výsledkov. Ako príklad môže slúžiť nasledujúca situácia, ac- a mi-operátory boli definované na (komutatívnych) ohraničených reziduovaných zväzoch a basic algebrách. Podmienka monotónnosti sa nenachádza pri basic algebrách, pretože vyplýva z predošlých axiém, ale v texte nie je na túto skutočnosť upozornenie.

Ďalšie pripomienky k práci sú formálneho charakteru.

Označovanie referencií je nejednotné. Práce iných autorov citované v texte sú v hranatých zátvorkách, práce doktoranda sú nejednotne označované bez zátvoriek, začínajú cA a ešte v tej istej kapitole sú označené len ako A. Ďalšie články [B]–[E] sú už označované len písmenami bez hranatých zátvoriek. Hoci v časti Papers sú články číslované [A]–[E]. Ako vrchol nejednotnosti v kapitole 2.2.2 sú citované výsledky z článku [29], ktorý predstavuje článok [C], čím dochádza k miernemu zmäteniu a nezvýrazneniu, že sa citujú vlastné dosiahnuté výsledky.

Okrem preklepov, gramatiky (členy), nejednotného štýlu uvádzanej použitej literatúry v časti Bibliography, viac vid' časť Pripomienky a návrhy, mám k obsahu práce tieto hlavné pripomienky.

1. Definícia wmi-operátora (str. 19), nechýba tam náhodou zmienka o good residuated lattice? Pretože potom by podmienka 2a mohla byť definovaná 2 spôsobmi ($f(x) \leq x^{\sim}$, resp. $f(x) \leq x^{\sim\sim}$).
2. Podobne, nechýba str. 20, r. -13 podmienka good? Definujú sa na normálnom, ?good? reziduovanom zväze M množiny wmi- a sac- operátorov, pričom v definícii sac-operátorov sa už podmienka good vyskytuje.

- str. 14, r. 3, $f(1) = 1$, ;
- Sekcia 2.1.2, r. 1: investigate;
- str. 19, r. 4: multiplicative inerior (not interior multiplicative);
- str. 22, r. 7: their normal filters H .;
- Bibliography: Pri uvádzaní autorov v poradí Priezvisko Iniciály by mala byť čiarka medzi týmito 2 položkami, ako napr. v [6].
- Bibliography: Nejednotný štýl, medzi autormi a názvom diela je niekedy dvojbodka [3] a niekedy čiarka [7].
- Bibliography, [7]: nesprávni autori, Cignoli, R.L., d'Ottaviano, I.M., Mundici, D.;
- Bibliography, nejednotnosť uvádzania roku: [25] vs. [37]; [24] chýbajú zátvorky.
- Autoreferát, str. 3, r. 2: booleovské; r. 12: booleovských; (aspoň v slovenčine, je rozdiel vo veľkosti začiatočných písmen - Boolova vs. bo-olovská algebra)
- Autoreferát, str. 4, r. 8: of (not ofa);
- Autoreferát, Introduction, r. 2: as a generalization;
- Autoreferát, str. 7, r. 5: as a generalization;
- Autoreferát, str. 7, definícia, typografia: , nemá byť na začiatku riadku.
- Autoreferát, str. 7, r. -9: in such case (pravdepodobne);
- Autoreferát, str. 9, r. 5: asi bez the, of Łukasiewicz logic (konkrétny názov logiky);
- Autoreferát, str. 10, sekcia 2.1.1, r. 2: , na začiatku riadku;
- Autoreferát, str. 11, bod 4.: $f(1) = 1$,;

Marek Hyčko

V Bratislave 23. 3. 2016

Mgr. Marek Hyčko, PhD.