UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Cyklické křivky

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Radka Frkalová**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovnictví/pojišťovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2017

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Radka Frkalová

Název práce: Cyklické křivky

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2017

Abstrakt: Bakalářská práce je zaměřena na vlastnosti vybraných rovinných křivek, konkrétně křivek cyklických. Na začátku práce se o křivkách budeme bavit obecněji, nadefinujeme si pojem křivka, uvedeme si možnosti jejich reprezentace a dále se budeme zabývat délkou křivky a obsahem plochy, kterou ohraničují. U každé křivky zmíníme významné osobnosti, které se křivkami zabývaly, následně si řekneme jak křivka vzniká a vyjádříme si ji nejčastěji parametrickými rovnicemi. Uvedeme si také některé důležité vlastnosti každé křivky, zejména délku křivky a obsah plochy jimi vymezenými a odvodíme si je. Krátce se taky zaměříme na to, kde se lze s křivkami potkat v běžném životě. Pro vykreslení všech křivek použijeme Matlab.

Klíčová slova: křivka, délka, kružnice, obsah

Počet stran: 44

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Radka Frkalová

Title: Cyclic curves

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

The year of presentation: 2017

Abstract: This thesis is focused on properties of selected two-dimensional curves, especially cyclic curves. In the beginning we will talk about curves in general, define the word curve, introduce ways, how is possible to represent them and then will follow how we can count a length of a curve and an area limited by it. For each curve we will mention well-known people, who were working with them, then we will introduce, how is this curve created, and formulate it mostly with parametric equations. We will mention also some important properties of each curve, including length and area limited by it, for which we will also show, how to find the formulas. Shortly we will focus on situations, where we can find these curves in ordinary life. For all figures of curves was used Matlab software.

Key words: curve, length, circle, area

Number of pages: 44

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Pavly Kouřilové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí bakalářské práce Mgr. Pavle Kouřilové, Ph.D. za její rady a čas, který mi věnovala při vypracovávání mé bakalářské práce.

Obsah

Úvod **9**

1 Teorie křivek **10**
1.1 Křivka a její definice 10
1.2 Reprezentace křivek 11
1.3 Délka křivky 12
1.4 Obsah plochy pod křivkou 14

2 Cyklické křivky **16**
2.1 Typy cyklických křivek 16
2.2 Cykloidy 18
2.2.1 Základní vlastnosti prosté cykloidy 21
2.3 Epicykloidy 24
2.3.1 Speciální typy epicykloid a jejich vlastnosti 27
2.4 Hypocykloidy 31
2.4.1 Speciální typy hypocykloid a jejich vlastnosti 32
2.5 Pericykloidy 37
2.6 Evolventa 39

Závěr **42**

Literatura **44**

Seznam obrázků

1.1 Polární souřadnice . . . 12
1.2 Délka křivky . . . 13
1.3 Délka křivky zadané parametricky . . . 14
1.4 Obsah plochy ohraničené grafem funkce, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$ . . . 15
1.5 Obsah plochy pod křivkou zadanou polárními souřadnicemi . . . 15

2.1 Jak vzniká cykloida . . . 17
2.2 Jak vzniká epicykloida . . . 17
2.3 Jak vzniká hypocykloida . . . 17
2.4 Jak vzniká pericykloida . . . 18
2.5 Jak vzniká evolventa . . . 18
2.6 Prostá cykloida . . . 19
2.7 Prodloužená cykloida . . . 20
2.8 Zkrácená cykloida . . . 20
2.9 Plocha vymezená obloukem cykloidy a osou x . . . 22
2.10 Tunel Mrázovka, Zdroj: http://www.satra.cz/tunel-mrazovka/ . . . 23
2.11 Prostá epicykloida . . . 25
2.12 Epicykloidy . . . 25
2.13 Příklady epicykloid s různými poloměry kružnic . . . 26
2.14 Kardioida . . . 27
2.15 Nefroida . . . 29
2.16 Prostá hypocykloida . . . 31
2.17 Hypocykloidy . . . 32
2.18 Asteroida . . . 32
2.19 Steinerova hypocykloida . . . 35
2.20 Hypocykloida pro $b = \frac{a}{2}$ . . . 36
2.21 Prostá pericykloida . . . 37
2.22 Prodloužená pericykloida . . . 37
2.23 Zkrácená pericykloida . . . 38
2.24 Pericykloida jako epicykloida . . . 38
2.25 Prostá evolventa . . . 39
2.26 Zkrácená evolventa . . . 40

2.27 Prodloužená evolventa 40
2.28 Evolventa jako startovní čára 41
2.29 Archimédova spirála 41

Úvod

Tématem mé bakalářské práce jsou cyklické křivky, což je skupina křivek patřící mezi křivky rovinné. S křivkami se setkáváme nejen v matematice, ale také v běžném životě na různých místech, a většina z nás si to ani neuvědomuje. Kromě matematiky, v níž patří mezi nejdůležitější pojmy, na ně můžeme narazit ve spoustě dalších vědních oborů, jako je např. architektura, fyzika, ekonomie nebo astrologie. A protože křivek existuje celá řada, bylo nutné se v této bakalářské práci omezit pouze na některé, pro mě nejzajímavější.

Cílem první kapitoly je si velmi stručně rovinné křivky obecně nadefinovat a ukázat si různé možnosti jejich zadání a reprezentace. Dále jsou součástí první kapitoly vztahy důležité pro výpočet délky křivek a obsahu plochy, které tyto křivky vymezují. Tyto vztahy pak využijeme dále u jednotlivých křivek.

Ve druhé kapitole se budeme věnovat detailněji skupině cyklických křivek. Protože do této skupiny patří celkem pět různých typů křivek, rozdělíme si tuto kapitolu do pěti podkapitol, z nichž každá ponese jméno křivky, kterou se budeme právě zabývat. U každé křivky se zmíníme o osobnostech, jež se touto křivkou zabývaly, řekneme si, jak křivka vzniká, a vyjádříme ji nejčastěji parametrickými rovnicemi. Odvodíme si délku každé křivky a obsah plochy, kterou vymezuje. Řekneme si, kde se s křivkou můžeme potkat v běžném životě, a celá práce bude doplněna obrázky vytvořenými v Matlabu.

Kapitola 1

Teorie křivek

V této kapitole se budeme zabývat křivkami obecně. Řekneme si, kdy se jim začali lidé věnovat a kde na ně můžeme narazit dnes. Nadefinujeme si pojem křivka a ukážeme si několik způsobů, jak je vyjádřit. V závěru si uvedeme vztahy pro výpočet délky křivek a obsahu plochy, které vymezují.

1.1. Křivka a její definice

Shledání s křivkami je v dnešní době nevyhnutelné, setkáváme se s nimi na spoustě míst, např. v architektuře, přírodě, umění a v počítačových programech a aplikacích. Praktickou ukázkou jejich využití v textových editorech jsou fonty, kde konturu libovolného znaku chápeme jako křivku, jejíž transformací pak docílíme natočení písma či změn jejich velikostí. Důkazy zájmu člověka o křivky, ještě dřív než byly chápány jako matematické objekty, sahají hluboko do minulosti. Byly to ornamenty v podobě vln a spirál viditelné na pravěké keramice nebo záhyby řeckých a gotických soch. Jako součást každodenních činností člověka byly využívány k vytyčování různých míst a pozemků. Velký význam mají také v ekonomii. První křivkou, kterou se lidé zabývali byla přímka. Pohlíželi na ni jako na úsečku, kterou lze bezmezně prodlužovat. Později zkoumanou byla kružnice.

Existuje několik možností jak nadefinovat křivku v rovině. Jedná se o geometrický jednorozměrný útvar, který chápeme jako množinu bodů, již lze v rovině popsat několika různými způsoby.

1.2. Reprezentace křivek

Explicitní vyjádření křivky je dáno zápisem $y = f(x)$, kde $x \in \langle a, b\rangle$ a $f(x)$ je spojitá funkce definovaná na $\langle a, b\rangle$ přiřazující jednoznačně každému $x \in \langle a, b\rangle$ hodnotu $f(x) \in \mathbb{R}$. Takto vzniklé dvojice $[x, y]$ nazýváme souřadnicemi bodů křivky.

Implicitní vyjádření křivky je ve tvaru $F(x, y) = 0$, kde $F(x, y)$ je spojitá funkce dvou proměnných x a y . Pokud známe explicitní vyjádření křivky, můžeme z něj získat implicitní, protože mezi nimi existuje vztah, který lze charakterizovat způsobem

$$F(x, y) = y - f(x) = 0$$

Tato reprezentace křivek je důležitá zejména pro jejich třídění, neboť s využitím rovnice $F(x, y) = 0$ je můžeme rozdělit na algebraické a transcendentní. Křivka je *algebraická* právě tehdy, když je funkce $F(x, y)$ proměnných x a y polynomem, tedy

$$F(x, y) = \sum_{p+q=0}^{m} a_{pq} x^p y^q,$$

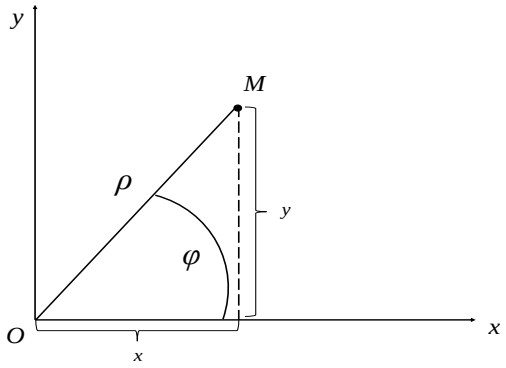
kde p a q jsou nezáporná celá čísla a a_{pq} reálné číselné koeficienty. Stupeň polynomu pak odpovídá stupni křivky a říká nám, zda se jedná o algebraickou křivku prvního, druhého či vyššího řádu. *Transcendentní* pak nazveme každou křivku, která není algebraická, tedy funkce $F(x, y)$ není polynom.[4]

Parametrické vyjádření křivky je nejvyužívanějším typem popisu křivky, vhodným zejména při jejich konstrukci. V tuto chvíli se na křivku díváme z fyzikálního pohledu, tedy že je vytvořena jako dráha pohybujícího se bodu a parametr t chápeme jako čas probíhající časový interval $\langle a, b\rangle$. Rovinná křivka zadaná parametricky je množina bodů v rovině, které jsou dány těmito parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b$$

kde funkce $x(t)$ a $y(t)$ jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Doposud jsme uvažovali kartézský systém souřadnic, mimo něj ale můžeme využít i **polární souřadnice**. Jejich použití se jeví prospěšnější oproti kartézským souřadnicím při práci se složitějšími křivkami, zejména se spirálami, kružnicemi a elipsami. Jedná se o souřadnice rovinné, kdy každý bod M křivky je definován vzdáleností ρ od počátku O a úhlem φ, který svírá kladný směr osy x s úsečkou OM. Úsečku OM lze pojmenovat jako průvodič bodu M a obloukovou míru φ orientovaného úhlu jako polární úhel bodu M.



Obrázek 1.1: Polární souřadnice

Navíc platí, že mezi kartézskými souřadnicemi a polárními souřadnice existují tyto vztahy:

$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

Rovnice křivky v polárních souřadnicích je ve tvaru

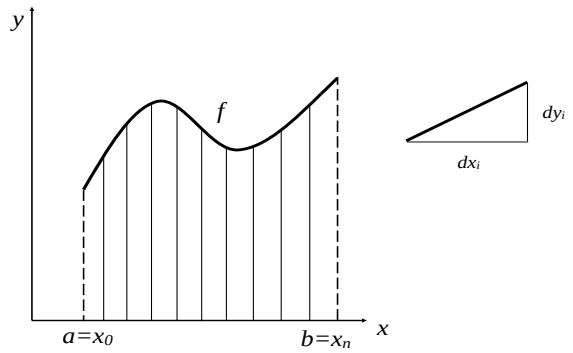
$$\rho = f(\varphi),$$

kde f je spojitá a nezáporná funkce proměnné $\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

1.3. Délka křivky

Předpokládejme, že máme křivku zadanou explicitně, tzn. ve tvaru $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$. Pro křivku zadanou tímto způsobem nyní odvodíme vztah, pomocí

něhož lze vypočítat délku této křivky. Abychom její délku určili, rozdělíme interval $\langle a, b\rangle$ na n částí s délkou dx_i, kde dx_i je vzdálenost bodů x_{i-1} a x_i ležících v intervalu $\langle a, b\rangle$, takových že $x_0 = a$ a $x_n = b$. Křivku jsme tak rozdělili na n dílčích částí, které můžeme díky jejich velikosti považovat za přímky. K výpočtu délky každé dílčí části lze použít Pythagorovu větu.



Obrázek 1.2: Délka křivky

Abychom mohli použít Pythagorovu větu, potřebujeme znát délku dx_i a délku dy_i. Délku dy_i získáme vynásobením délky dx_i směrnicí přímky, která je dána derivací funkce f v bodě x_{i-1} (jestliže tyto derivace existují a jsou vlastní), tzn. $dy_i = f'(x_{i-1})dx_i$. Délku křivky dostaneme následným sečtením délek všech částí.

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{dx_i^2 + dy_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{dx_i^2 + [f'(x_{i-1})dx_i]^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_{i-1})]^2}dx_i$$

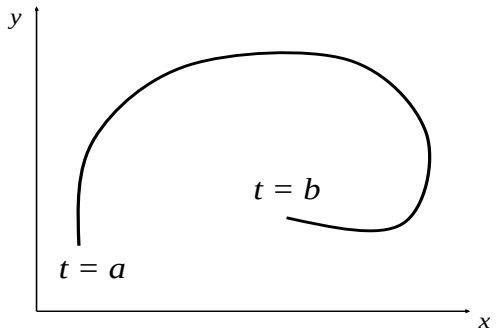
Roste-li hodnota n do nekonečna, bude tento součet v limitě definovat příslušný integrál potřebný k určení délky křivky.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_{i-1})]^2}dx_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

Uvažujeme-li křivku z obrázku 1.2 zadanou grafem funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$, která má na tomto intervalu spojitou derivaci, potom lze její délku určit vztahem

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Jiný vztah bychom použili pro křivku zadanou parametricky, tzn. ve tvaru $x = x(t), y = y(t)$, pro $t \in \langle a, b \rangle$. Opět si křivku rozdělíme na několik menších částí a k určení jejich délek opět použijeme Pythagorovu větu. Rozdíl je však v tom, že nebudeme dělit křivku rozdělením osy x, ale rozdělením časového intervalu $T = \langle a, b \rangle$.



Obrázek 1.3: Délka křivky zadané parametricky

Výsledný vztah pro výpočet délky křivky zadané parametricky, kde funkce $x(t)$ a $y(t)$ jsou spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, je

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Při vyjádření křivky pomocí polárních souřadnic ve tvaru $\rho = f(\varphi), \varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$ vypočítáme její délku pomocí vzorce

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2(\varphi) + [f'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

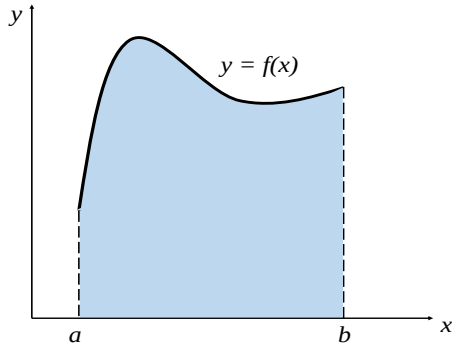
Ne vždy jsme však schopni délku křivky určit. Výše uvedené vztahy mají smysl pouze tehdy, má-li křivka konečnou délku, tedy pokud je tzv. *rektifikovatelná*.

1.4. Obsah plochy pod křivkou

Uvažujeme křivku zadanou explicitně, tedy ve tvaru $y = f(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$ a zajímá nás obsah plochy vymezený touto křivkou, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$. Předpokládejme, že máme uzavřený interval $\langle a, b \rangle$ a funkce $f(x)$ je na

tomto intervalu nezáporná a integrovatelná, potom obsah plochy vyznačené pod grafem funkce $f(x)$ je dán vztahem

$$S = \int_b^a f(x)dx.$$



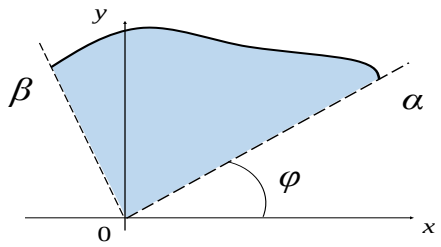
Obrázek 1.4: Obsah plochy ohraničené grafem funkce, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$

Nyní uvažujeme křivku zadanou parametrickými rovnicemi, tzn. ve tvaru $x = x(t), y = y(t), t \in \langle a, b\rangle$. Pro výpočet obsahu plochy vymezené touto křivkou znázorněnou také na obrázku 1.4 využijeme vztahy

$$S = \left|\int_b^a y(t)x'(t)\ dt\right| \qquad \text{nebo} \qquad S = \left|\int_b^a x(t)y'(t)\ dt\right|.$$

Plocha ohraničená křivkou v polárních souřadnicích, tzn. ve tvaru $\rho = f(\varphi)$, kde $f(\varphi) \geq 0$ je spojitá na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, je dána vztahem

$$S = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\ d\varphi.$$



Obrázek 1.5: Obsah plochy pod křivkou zadanou polárními souřadnicemi

Kapitola 2

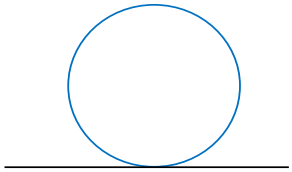
Cyklické křivky

V této kapitole si představíme křivky patřící do skupiny cyklických křivek a každé z nich se budeme blíže věnovat. Uvedeme si několik významných osobností, které se křivkami zabývaly, řekneme si, jak křivky vznikají, a ukážeme si jejich rovnice. Všechny křivky si vykreslíme a u každé si odvodíme délku a obsah plochy, kterou ohraničují.

2.1. Typy cyklických křivek

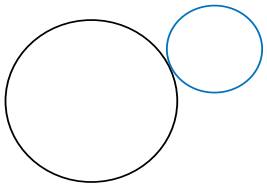
Cyklické křivky jsou křivky rovinné, jejichž součástí jsou vždy dva útvary neboli polodie, dvě kružnice nebo kružnice a přímka. Z těchto dvou polodií je vždy jedna pohyblivá a druhá pevná. Zvolíme-li bod ležící na pohyblivé polodii, bude trajektorie bodu vznikající válením pohyblivé polodie po pevné představovat křivku. Ve všech následujících obrázcích bude vždy pohyblivá polodie vykreslena modrou barvou, pevná černou a výsledná křivka barvou červenou. Zelená barva nám bude znázorňovat polohu bodu vůči pohyblivé polodii. Podle toho, která polodie je pevná a která pohyblivá, a podle toho jestli se jedná o kružnici či přímku, můžeme cyklické křivky rozdělit takto:

a) Cykloidy jsou křivky, které vznikají kotálením se pohyblivé kružnice po pevné přímce.



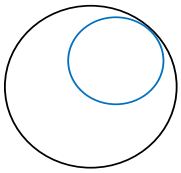
Obrázek 2.1: Jak vzniká cykloida

b) Epicykloidy jsou křivky vznikající kotálením pohyblivé kružnice po pevné kružnici, tentokrát hovoříme o vnějším dotyku.



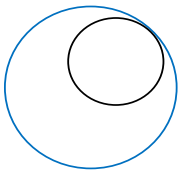
Obrázek 2.2: Jak vzniká epicykloida

c) Hypocykloidy jsou opět křivky, jejichž obě polodie jsou kružnice. Tentokrát se pohyblivá kružnice kotálí svou vnější stranou po vnitřní straně pevné kružnice.



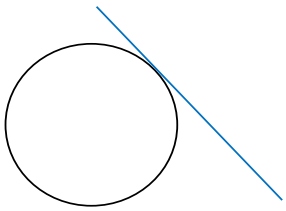
Obrázek 2.3: Jak vzniká hypocykloida

d) Pericykloidy jsou křivky vznikající kotálením pohyblivé kružnice svou vnitřní stranou po vnější straně pevné kružnice.



Obrázek 2.4: Jak vzniká pericykloida

e) Evolventa vzniká kotálením pohyblivé přímky po pevné kružnici.



Obrázek 2.5: Jak vzniká evolventa

2.2. Cykloidy

Ačkoliv zájem o cykloidy spadá pravděpodobně už do starověké geometrie, první zmínky přichází až ve 14. a 15. století, kdy se jimi zabývali Mikuláš Kusánský a Charles de Bouvelles. Další významnou osobností v historii cykloidy je Galileo Galilei, autor jejího pojmenování. Bylo to přibližně okolo roku 1599, kdy o cykloidě Galileo napsal i první spis. V 17. století byla cykloida jedna z nejzkoumanějších křivek. Ve 20. letech 17. století se o cykloidu zajímal Marin Mersenne, v roce 1635 Gilles Personne de Roberval, který spočítal obsah plochy vymezené jedním obloukem cykloidy. Za zmínku stojí i nizozemský fyzik, matematik a astronom Christiaan Huygens, vynálezce kyvadlových hodin s pohybem kyvadla po cykloidálním oblouku. Významný výsledek přinesl také Sir Christopher Wren, který určil délku jednoho oblouku cykloidy. Dalšími významnými matematiky, jež se cykloidou zabývali, byli René Descartes, Blaise Pascal a Jacob a Johann Bernoulli.

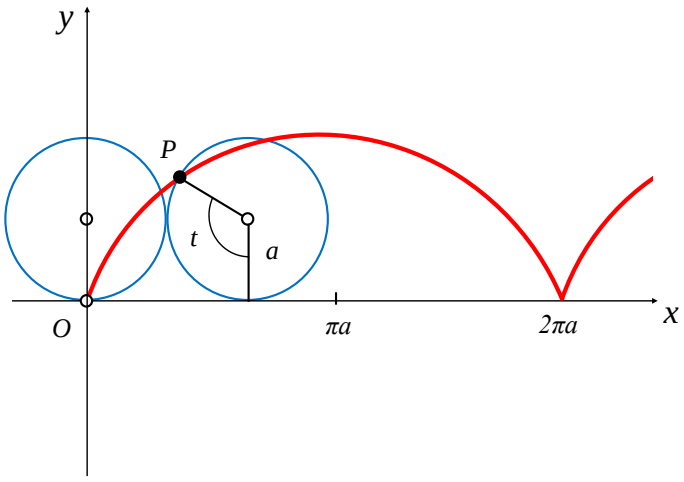
Cykloida je transcendentní křivka, která vzniká pomocí dvou polodií, pohyblivé kružnice a pevné přímky. Zvolíme-li bod ležící na kružnici, popřípadě vně či uvnitř kružnice, kotálením se pohyblivé kružnice po pevné přímce vzniká trajektorie pohybu bodu zvaná cykloida.

Podle toho, kde se námi zvolený bod na kružnici nachází, rozlišujeme tři typy cykloid. Obyčejná neboli prostá cykloida vzniká, leží-li bod na kružnici. Zvolíme-li však tento bod vně kružnice, kotálením kružnice vzniká smyčka a hovoříme o cykloidě prodloužené. Posledním typem je cykloida zkrácená, která vzniká, leží-li bod uvnitř kružnice a místo smyčky teď vzniká vlna.

Prostou cykloidu lze vyjádřit parametrickými rovnicemi ve tvaru

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t),$$

kde a je poloměr kružnice a $t \in \mathbb{R}$ je úhel odvalení. Pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ bychom získali jeden oblouk cykloidy, tzn. čím delší interval pro t si zvolíme, tím delší dostaneme křivku.

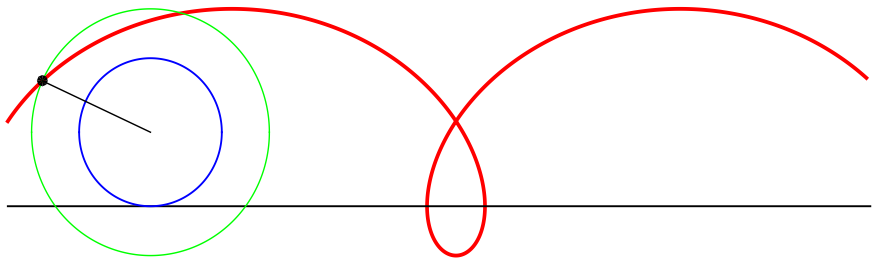


Obrázek 2.6: Prostá cykloida

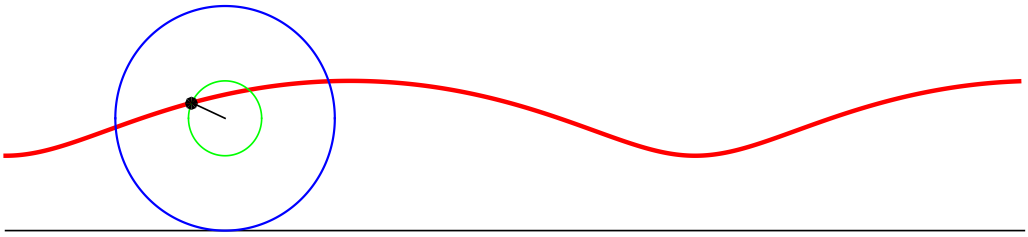
Prodlouženou a zkrácenou cykloidu lze vyjádřit parametrickými rovnicemi

$$x = at - d\sin t$$
$$y = a - d\cos t,$$

kde d je vzdálenost bodu od středu kružnice s poloměrem a.



Obrázek 2.7: Prodloužená cykloida



Obrázek 2.8: Zkrácená cykloida

2.2.1. Základní vlastnosti prosté cykloidy

Jedná se o periodickou křivku s délkou periody $2\pi a$, kde a je poloměr pohyblivé kružnice. Dalšími důležitými vlastnostmi jednoho oblouku cykloidy jsou délka a obsah plochy, kterou spolu s osou x ohraničuje.

Délka jednoho oblouku cykloidy

Jak jsme si již uváděli, vztah pro výpočet délky parametricky zadané křivky je $L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$. Abychom však do tohoto vzorce mohli dosadit, je potřeba nejprve provést derivaci parametrických rovnic.

$$x = a(t - \sin t) \qquad x' = a(1 - \cos t)$$
$$y = a(1 - \cos t) \qquad y' = a \sin t$$

Jeden oblouk prosté cykloidy odpovídá hodnotě $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, tj. jeho délku určíme jako

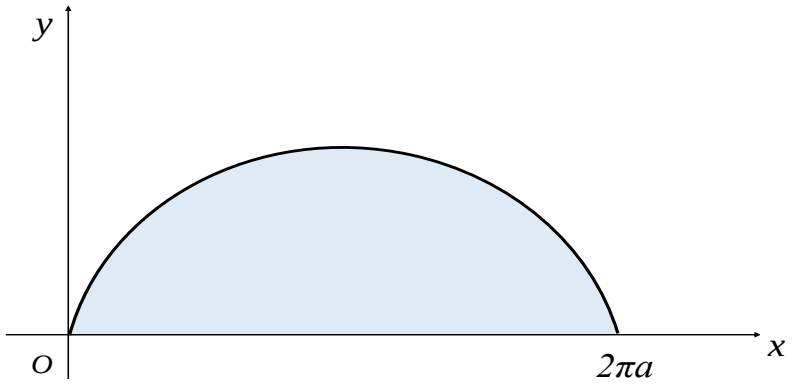
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2 \sin^2 t}\, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$
$$= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot \tfrac{\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{2}}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \tfrac{t}{2} dt =$$
$$= 2a \left[-2 \cos \tfrac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2a(2 + 2) = 8a$$

Využili jsme vztahu $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$.

Plocha vymezená jedním obloukem cykloidy a osou x

Vztah pro výpočet plochy zadané parametrickými rovnicemi $x = x(t), y = y(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ je $S = \left| \int_0^{2\pi} y(t) \cdot x'(t) dt \right|$. Pro připomenutí, parametrické rovnice cykloidy jsou ve tvaru

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t).$$



Obrázek 2.9: Plocha vymezená obloukem cykloidy a osou x

Pro výpočet nám tentokrát bude stačit derivace rovnice x, kterou jsme si vypočítali výše a obsah jednoho oblouku této cykloidy pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ spočítáme takto:

$$S = \left| \int_0^{2\pi} a(1-\cos t) \cdot a(1-\cos t)dt \right| = \left| a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt \right| =$$
$$= \left| a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt \right| = \left| a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \tfrac{1+\cos 2t}{2})\, dt \right| =$$
$$= \left| a^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \tfrac{1}{2} + \tfrac{\cos 2t}{2}\, dt \right| = \left| a^2 \int_0^{2\pi} -2\cos t + \tfrac{3}{2} + \tfrac{\cos 2t}{2}\, dt \right| =$$
$$= \left| a^2 (\int_0^{2\pi} -2\cos t\, dt + \int_0^{2\pi} \tfrac{3}{2}\, dt + \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2t\, dt) \right| =$$
$$= \left| a^2 \left[-2\sin t + \tfrac{3}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{2\pi} \right| = |a^2(0 + 3\pi + 0)| = 3\pi a^2$$

Během výpočtu jsme využili vztahu $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Výpočet délky prodloužené či zkrácené cykloidy podobným způsobem není možný analyticky. Určení jejich délky je možné pouze numericky pro konkrétní hodnoty a a d. Integrál pro délku zobecněné cykloidy vypadá takto

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a - d\cos t)^2 + d^2 \sin t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos t}\, dt.$$

Dosazením skutečných hodnot a a d lze pak pomocí nějakého softwaru délku křivky určit. Pro názornost si určíme délku oblouku jedné zkrácené a jedné prodloužené cykloidy s využitím Wolfram Alpha.

Prodloužená cykloida pro $a = 2, d = 3$ a $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2^2 + 3^2 - 12\cos t}\, dt \approx 21.01$$

Zkrácená cykloida pro $a = 2, d = 1$ a $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2^2 + 1^2 - 4\cos t}\, dt \approx 13.3649$$

Prostá cykloida pro $a = 2, d = 2$ a $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2^2 + 2^2 - 8\cos t}\, dt \approx 16$$

S cykloidou se dnes můžeme setkat v řadě případů, nejen v přírodě, ale i v technice. Nejtypičtějším příkladem v přírodě, se kterým se může setkat úplně každý, jsou vlny na vodě. Dále protože právě cykloida snese největší zatížení, což odhadoval už Galileo, jsou součástí i mostních a tunelových konstrukcí (nové tunely pražského metra, tunel Mrázovka). V oblasti sportu je to cykloidální výřez na carvingových lyžích.

Obrázek 2.10: Tunel Mrázovka, Zdroj: http://www.satra.cz/tunel-mrazovka/

2.3. Epicykloidy

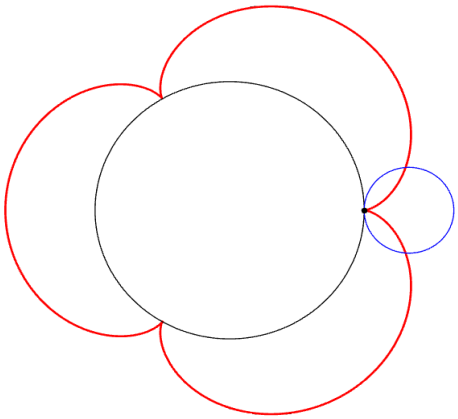
Epicykloidu pojmenoval v roce 1674 dánský matematik a astronom Ole Roemer. Na tyto jeho myšlenky postupně navázali i Girard Desargues, Phillippe de la Hire a Charles Stephen. Dalšími významnými osobnostmi zabývajícími se epicykloidou byli Albrecht Dürer, Christiaan Huygens, Gottfried W. Leibniz, Isaac Newton, Guillaume de L'Hôpital, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli a Leonhard Euler.

Nyní uvažujeme situaci, kdy se pohyblivá kružnice kotálí po jiné nehybné kružnici. Zvolíme-li bod ležící na pohyblivé kružnici, popřípadě vně nebo uvnitř ní, potom se dráha tohoto bodu vznikající kotálením kružnice nazývá epicykloida. Reperezentace této křivky parametrickými rovnice je

$$x = (a+b)\cos\, t - b\cos(\tfrac{a+b}{b}\, t)$$
$$y = (a+b)\sin\, t - b\sin(\tfrac{a+b}{b}\, t),$$

kde a je poloměr pevné kružnice, b je poloměr pohyblivé kružnice a t opět představuje úhel odvalení. U epicykloid, stejně jako u všech následujících křivek, budeme uvažovat střed nepohyblivé kružnice v $[0, 0]$.

S různými poloměry obou polodií mohou vznikat různé epicykloidy. Jestliže je podíl $\frac{a}{b} = m$ celé číslo, k uzavření křivky dojde ve chvíli, kdy se pohyblivá kružnice poprvé vrátí do své původní polohy vůči kružnici pevné a počet větví je roven m. Je-li však $\frac{a}{b}$ racionální číslo $\frac{p}{q}$, bude po q obězích pohyblivé kružnice po pevné kružnici křivka uzavřená s p větvemi. Pro $\frac{a}{b}$ z množiny iracionálních čísel bude epicykloida neuzavřená s nekonečným počtem větví.[10] Podle velikostí poloměrů obou kružnic a podle toho, kde leží námi zvolený bod, vznikají různé typy epicykloid. Leží-li námi zvolený bod na kružnici, jež se pohybuje, vzniká epicykloida prostá.

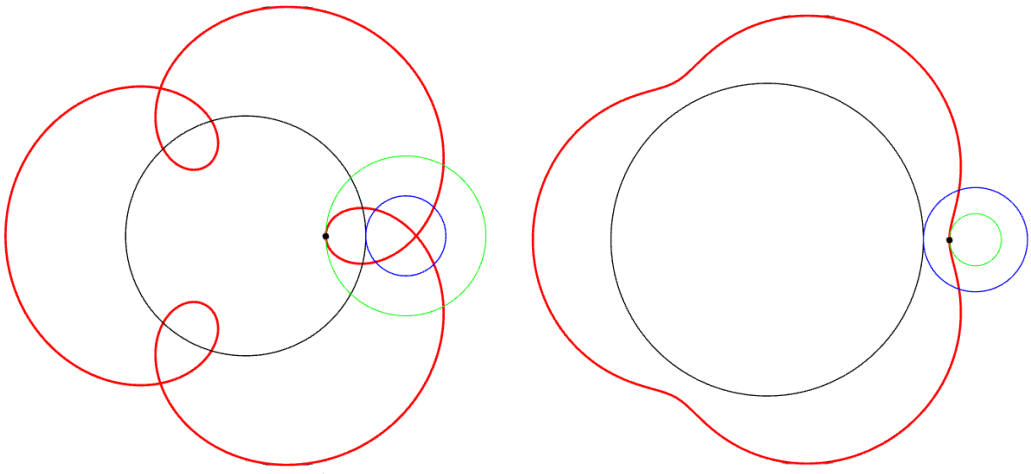


Obrázek 2.11: Prostá epicykloida

V případě, že zvolený bod leží uvnitř nebo vně pohybující se kružnice, vznikají epicykloida zkrácená nebo prodloužená s parametrickými rovnicemi

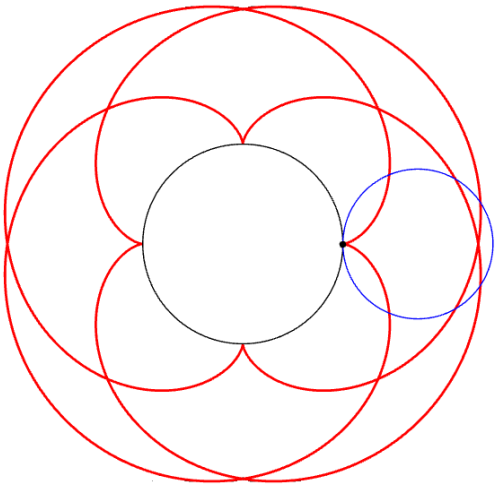
$$x = (a+b)\cos\, t - d\cos(\tfrac{a+b}{b}\, t)$$
$$y = (a+b)\sin\, t - d\sin(\tfrac{a+b}{b}\, t),$$

kde b je poloměr odvalující se kružnice, d je vzdálenost bodu od středu pohyblivé kružnice a a je poloměr pevné kružnice. Pokud je $d < b$, získáváme epicykloidu zkrácenou, je-li $d > b$, jedná se o epicykloidu prodlouženou.

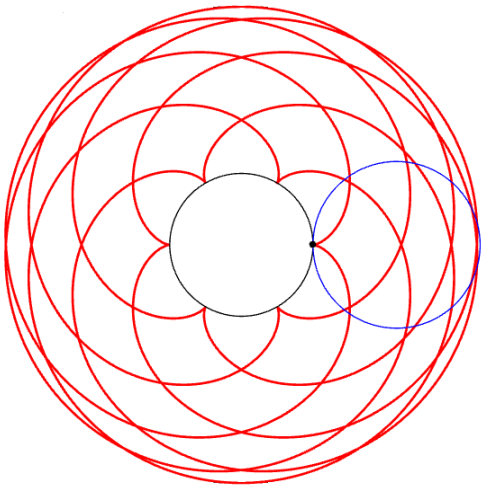


(a) Prodloužená epicykloida (b) Zkrácená epicykloida

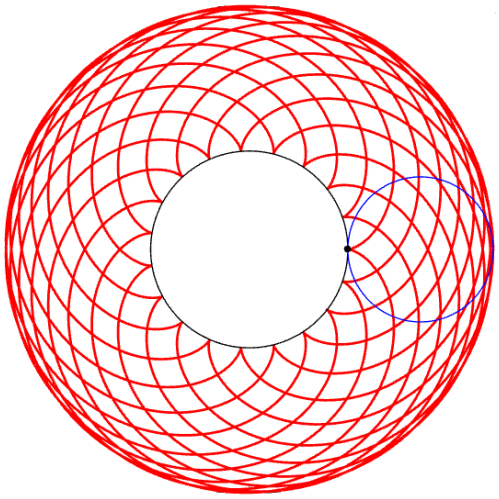
Obrázek 2.12: Epicykloidy



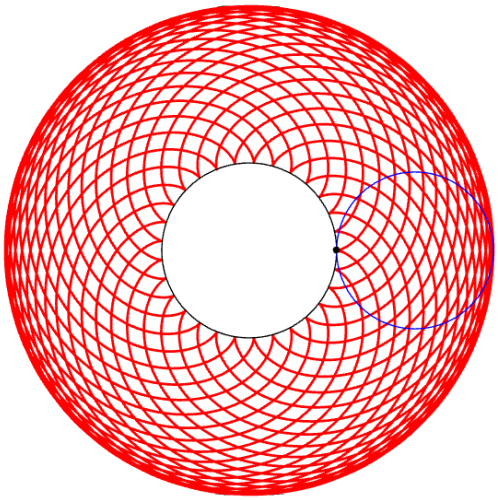
(a) Epicykloida: $a = 6, b = 4,5, t \in \langle 0, 6\pi \rangle$



(b) Epicykloida: $a = 6, b = 7, t \in \langle 0, 10\pi \rangle$



(c) Epicykloida: $a = 6, b = \frac{84}{19}, t \in \langle 0, 36\pi \rangle$

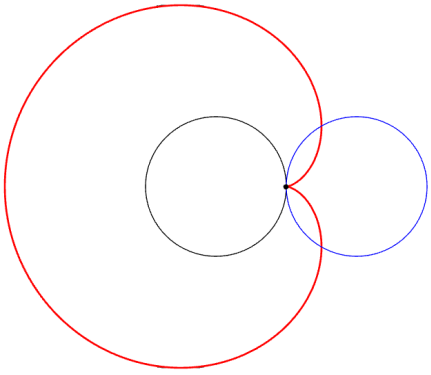


(d) Epicykloida: $a = 6, b = \frac{156}{29}, t \in \langle 0, 56\pi \rangle$

Obrázek 2.13: Příklady epicykloid s různými poloměry kružnic

2.3.1. Speciální typy epicykloid a jejich vlastnosti

1) Kardioida neboli srdcovka je speciálním případem prosté cykloidy pro $a = b$, tedy poloměr odvalující se kružnice se rovná poloměru pevné kružnice.



Obrázek 2.14: Kardioida

Parametrické rovnice kardioidy jsou

$$x = a(2\cos t - \cos 2t)$$
$$y = a(2\sin t - \sin 2t)\ ,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Kardioida vyjádřená pomocí polárních souřadnic vypadá takto

$$\rho = 2a(1 - \cos\varphi).$$

Délka kardioidy

Délku kardiody zadané rovnicí $\rho = 2a(1 - \cos\varphi) = d(1 - \cos\varphi)$ (využijeme označení $d = 2a =$ průměr kružnic), $\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$, tedy vyjádřené pomocí polárních souřadnic, určíme s využitím vzorce

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2(\varphi) + [f'(\varphi)]^2}\, d\varphi$$

$$L = 2\int_0^\pi \sqrt{d^2(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) + d^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2d\int_0^\pi \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi =$$
$$= 4d\int_0^\pi \cos\tfrac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4d\left[2\sin\tfrac{\varphi}{2}\right]_0^\pi = 8d = 16a$$

Využili jsme vzorec $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

Plocha ohraničená kardioidou

Nyní určíme obsah plochy ohraničené kardioidou s parametrickými rovnicemi $x = a(2\cos t - \cos 2t), y = a(2\sin t - \sin 2t), a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi$. Protože se jedná o křivku, která je souměrná podle osy x, její obsah počítáme jako dvojnásobek obsahu pro $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Jako první je potřeba zderivovat $x(t)$:

$$x' = a(-2\sin t + 2\sin 2t)$$

Pokračujeme dosazením do vzorce pro výpočet obsahu plochy ohraničené křivkou.

$$\begin{gathered}
\tfrac{S}{2} = \left|\int_0^\pi a(2\sin t - \sin 2t)a(-2\sin t + 2\sin 2t)\,dt\right| = \\
= \left|a^2 \int_0^\pi (-4\sin^2 t + 4\sin t \sin 2t + 2\sin 2t \sin t - 2\sin^2 2t)\,dt\right| = \\
= \left|v \int_0^\pi (-4\sin^2 t + 6\sin t \sin 2t - 2\sin^2 2t)\,dt\right| = \\
= \left|-4a^2 \int_0^\pi \tfrac{1-\cos 2t}{2}\,dt + 6a^2 \int_0^\pi \sin 2t \sin t\,dt - 2a^2 \int_0^\pi \tfrac{1-\cos 4t}{2}\,dt\right| = \\
= \left|-2a^2 \int_0^\pi (1-\cos 2t)\,dt - a^2 \int_0^\pi (1-\cos 4t)\,dt + 6a^2 \int_0^\pi 2\sin t \cos t \sin t\,dt\right| = \\
= \left|-2a^2 \left[t - \tfrac{\sin 2t}{2}\right]_0^\pi - a^2 \left[t - \tfrac{\sin 4t}{4}\right]_0^\pi + 12a^2 \int_0^\pi \sin^2 t \cos t\,dt\right|.
\end{gathered}$$

Využili jsme rovnosti $\sin 2t = 2\sin t \cos t$.
K vyřešení posledního intergrálu použijeme substituci $\sin t = u$.

$$\int \sin^2 t \cos t\,dt = |\sin t = u, \cos t\,dt = du| = \int u^2\,du = \tfrac{u^3}{3}$$

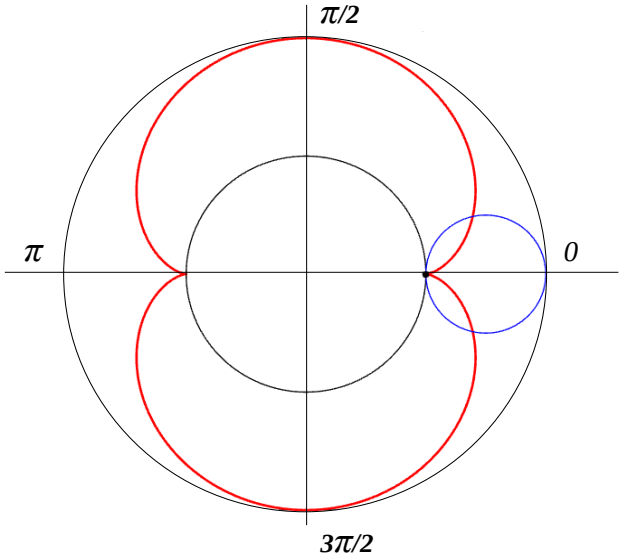
Nyní dosadíme zpátky za u hodnotu $\sin t$ a dostaneme

$$12a^2 \int_0^\pi \sin^2 t \cos t\,dt = 12a^2 \left[\tfrac{\sin^3 t}{3}\right]_0^\pi = 0.$$

Pokračujeme ve výpočtu

$$\begin{gathered}
\tfrac{S}{2} = |-2a^2(\pi - 0) - a^2(\pi - 0) + 0| = |-3\pi a^2| = 3\pi a^2 \\
S = 6\pi a^2
\end{gathered}$$

2) Nefroida je opět zvláštním typem prosté epicykoloidy, nyní však pro $a = \frac{b}{2}$, kde a je poloměr pevné kružnice a b je poloměr kružnice pohyblivé.



Obrázek 2.15: Nefroida

Její parametrické rovnice jsou

$$x = a(3\cos t - \cos 3t)$$
$$y = a(3\sin t - \sin 3t),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Délka nefroidy

Předpokládáme, že máme nefroidu zadanou parametrickými rovnicemi. Abychom mohli využít odpovídající vzorec pro výpočet její délky, musíme nejprve rovnice křivky zderivovat

$$x' = a(-3\sin t + 3\sin 3t)$$
$$y' = a(3\cos t - 3\cos 3t).$$

Protože je nefroida symetrická podle osy x, stačí vypočítat jen polovinu její délky pro $t \in \langle 0, \pi\rangle$ a výslednou hodnotu vynásobíme dvěma.

$$\tfrac{L}{2} = \int_0^\pi \sqrt{a^2(-3\sin t + 3\sin 3t)^2 + a^2(3\cos t - 3\cos 3t)^2}\, dt =$$
$$a\int_0^\pi \sqrt{(9\sin^2 t - 18\sin t\sin 3t + 9\sin^2 3t) + (9\cos^2 t - 18\cos t\cos 3t + 9\cos^2 3t)}dt =$$
$$= 3a\int_0^\pi \sqrt{(\sin^2 t - 2\sin t\sin 3t + \sin^2 3t) + (\cos^2 t - 2\cos t\cos 3t + \cos^2 3t)}\, dt$$

Nyní pro úpravu využijeme rovnosti $\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \sin^2 3t + \cos^2 3t = 1$ a dostaneme:

$$3a \int_0^\pi \sqrt{2 - 2(\sin t \sin 3t + \cos t \cos 3t)}\, dt$$

Dále využijeme součtového vzorce $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

$$3a \int_0^\pi \sqrt{2 - 2\cos 2t}\, dt = 3\sqrt{2}a \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2t}\, dt = 3\sqrt{2}a \int_0^\pi \sqrt{2}\frac{\sqrt{1-\cos 2t}}{\sqrt{2}}\, dt =$$
$$6a \int_0^\pi \sin t\, dt = 6a \left[-\cos t\right]_0^\pi = 3a(-(-1) + 1) = 6a$$

Odvodili jsme, že délka nefroidy je $2 \cdot 6a = 12a$.

Plocha ohraničená nefroidou

Opět využijeme vlastnosti nefroidy, že je symetrická podle osy x a vypočítáme její obsah jako dvojnásobek obsahu pro $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Provedeme derivaci souřadnice x a můžeme dosadit do vzorce.

$$\frac{S}{2} = \left| \int_0^\pi a\ (-3\sin t + 3\sin 3t) a\ (3\sin t - \sin 3t)\, dt \right| =$$
$$= \left| a^2 \int_0^\pi (-9\sin^2 t + 3\sin t \sin 3t + 9\sin t \sin 3t - 3\sin^2 3t)\, dt \right| =$$
$$= \left| a^2 \int_0^\pi (-9 \cdot \tfrac{1-\cos 2t}{2} + 12\sin 3t \sin t - 3 \cdot \tfrac{1-\cos 6t}{2})\, dt \right|$$

Dále rozdělíme na tři integrály a pro úpravu použijeme vzorec $\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$.

$$\left| -\tfrac{9}{2}a^2 \int_0^\pi (1 - \cos 2t)\, dt + 12a^2 \int_0^\pi \sin 3t \sin t\, dt - \tfrac{3}{2}a^2 \int_0^\pi (1 - \cos 6t)\, dt \right| =$$
$$\left| -\tfrac{9}{2}a^2 \int_0^\pi (1 - \cos 2t)\, dt + 6a^2 \int_0^\pi \cos 2t\, dt - 6a^2 \int_0^\pi \cos 4t\, dt - \tfrac{3}{2}a^2 \int_0^\pi (1 - \cos 6t)\, dt \right| =$$
$$= \left| -\tfrac{9}{2}a^2 \left[t - \tfrac{\sin 2t}{2}\right]_0^\pi + 6a^2 \left[\tfrac{\sin 2t}{2}\right]_0^\pi - 6a^2 \left[\tfrac{\sin 4t}{4}\right]_0^\pi - \tfrac{3}{2}a^2 \left[t - \tfrac{\sin 6t}{6}\right]_0^\pi \right| =$$
$$= \left| -\tfrac{9}{2}a^2(\pi - 0) + 6a^2(0 - 0) - 6a^2(0 - 0) - \tfrac{3}{2}a^2(\pi - 0) \right| = \left| -\tfrac{12}{2}\pi a^2 \right| = 6\pi a^2$$

Plocha ohraničení nefroidou je tedy $2 \cdot 6\pi a^2 = 12\pi a^2$

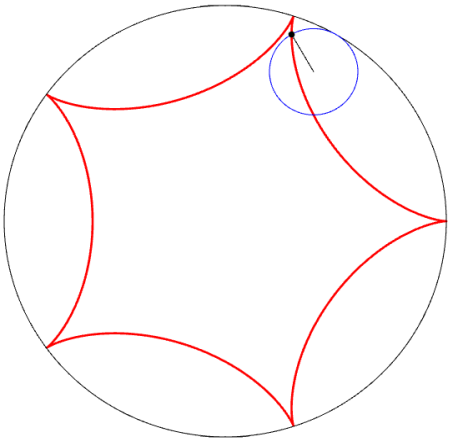
2.4. Hypocykloidy

I touto křivkou se zabývalo spoustu velmi významných osobností, byli to například Albrecht Dürer, Girard Desargues, Christiaan Huygens, Gottfried W. Leibniz, Isaac Newton, Guillaume de L'Hôpital, Jacob Bernoulli, Philippe la Hire, Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli, Leonhard Euler.

Hypocykloida vzniká hypocykloidálním pohybem, jehož součástí jsou opět dvě kružnice. Kotálí-li se kružnice o poloměru b uvnitř pevné kružnice s poloměrem a, bude trajektorie bodu zvoleného na pohyblivé kružnici představovat křivku zvanou prostá hypocykloida. Její parametrické rovnice jsou

$$x = (a-b)\cos t + b\cos(\tfrac{a-b}{b}t)$$
$$y = (a-b)\sin t - b\sin(\tfrac{a-b}{b}t),$$

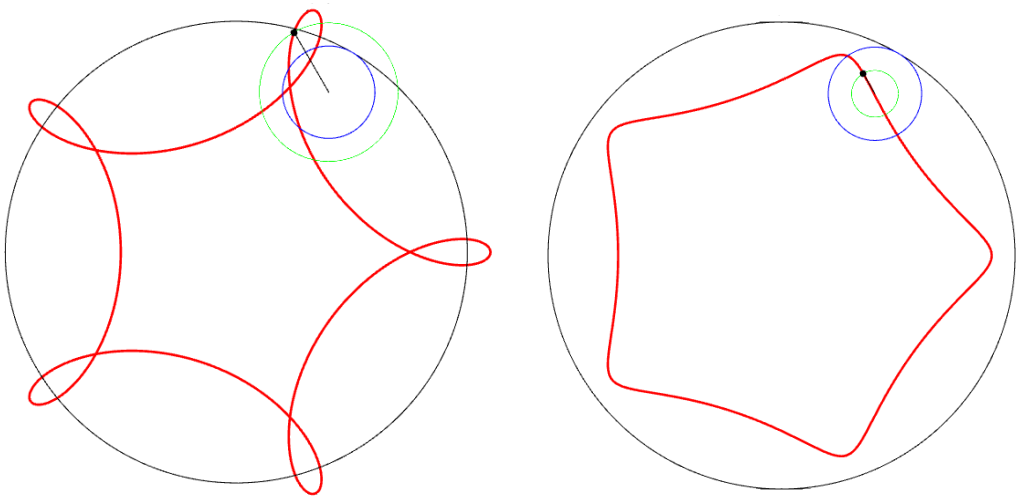
kde $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ je úhel odvalení a $b < a$.



Obrázek 2.16: Prostá hypocykloida

Leží-li bod tvořící křivku uvnitř pohyblivé kružnice, tedy je-li $d < b$, mluvíme o hypocykloidě zkrácené, v opačném případě, je-li $d > b$, o hypocykloidě prodloužené. Reprezentace těchto křivek parametrickými rovnicemi vypadá takto

$$x = (a-b)\cos t + d\cos(\tfrac{a-b}{b}t)$$
$$y = (a-b)\sin t - d\sin(\tfrac{a-b}{b}t)$$



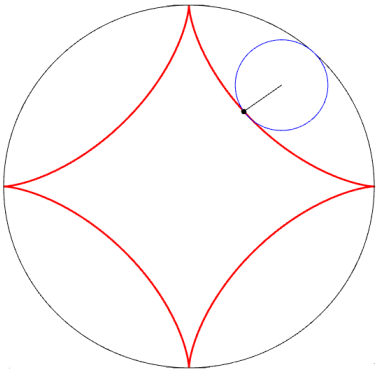
(a) Prodloužená hypocykloida (b) Zkrácená hypocykloida

Obrázek 2.17: Hypocykloidy

Stejně jako u epicykloid, tak i pro hypocykloidy je důležitý poměr poloměrů kružnic $\frac{a}{b}$. Je-li $\frac{a}{b} = m$ celé číslo, po jednom oběhu kružnice vzniká uzavřená hypocykloida s m větvemi. Je-li $\frac{a}{b}$ racionální číslo $\frac{p}{q}$, po q obězích hybné kružnice vzniká uzavřená hypocykloida s p větvemi. Křivka se nám však neuzavře, je-li $\frac{a}{b}$ iracionální číslo a navíc má tato křivka nekonečný počet větví.[10]

2.4.1. Speciální typy hypocykloid a jejich vlastnosti

1) Asteroida je zvláštním typem prosté hypocykloidy pro $b = \frac{a}{4}$, kde b je poloměr pohyblivé kružnice a a poloměr pevné kružnice.



Obrázek 2.18: Asteroida

Parametrické rovnice jsou

$$x = a\cos^3 t$$
$$y = a\sin^3 t.$$

Délka asteroidy

Předpokládáme, že máme asteroidu zadanou parametrickými rovnicemi. Abychom mohli využít odpovídající vzorec pro výpočet její délky, musíme nejprve rovnice křivky zderivovat.

$$x' = -3a\cos^2 t\sin t$$
$$y' = 3a\sin^2 t\cos t$$

Protože se asteroida skládá ze čtyř stejně dlouhých částí, stačí vypočítat jen čtvrtinu její délky pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ a výslednou hodnotu vynásobíme čtyřmi.

$$\begin{aligned}
\tfrac{L}{4} &= \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\ dt = \\
&= \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(9a^2\cos^4 t\sin^2 t) + (9a^2\sin^4 t\cos^2 t)}\ dt = \\
&= \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)}\ dt = \\
&= 3a\textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\sin^2 t)(1-\sin^2 t)\sin^2 t + \sin^4 t(1-\sin^2 t)}\ dt = \\
&= 3a\textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t - \sin^4 t}\ dt = 3a\textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t(1-\sin^2 t)}\ dt = \\
&= 3a\textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}\ dt = 3a\textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{4\sin^2 t\cos^2 t}{4}}\ dt = 3a\textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\ dt
\end{aligned}$$

Tento integrál upravíme metodou substituce a dostaneme

$$3a\left[\tfrac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{3}{2}a.$$

Vynásobíme-li tuto hodnotu čtyřikrát, dostaneme výslednou délku asteroidy, tedy

$$4 \cdot \tfrac{3}{2}a = 6a$$

Plocha ohraničená asteroidou

Pro výpočet obsahu plochy, kterou asteroida zadaná parametrickými rovnicemi vymezuje, využijeme tentokrát derivaci y'.

$$S = \left| \int_0^{2\pi} a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t \cos t \ dt \right| = \left| 3a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^4 t \ dt \right| =$$
$$= \left| 3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 t - \cos^6 t \ dt \right|$$

Pro další úpravu použijeme vztah $\int \cos^n t = \frac{1}{n}\cos^{n-1} t \sin t + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} t \ dt$

$$\left| 3a^2 \left\{ \left[\frac{\cos^3 t \sin t}{4} \right]_0^{2\pi} + \frac{3}{4} \left(\left[\frac{\cos t \sin t}{2} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^0 t \ dt \right) - \left[\frac{\cos^5 t \sin t}{6} \right]_0^{2\pi} - \frac{5}{6} \int_0^{2\pi} \cos^4 t \ dt \right\} \right| =$$
$$= \left| 3a^2 \left(0 + 0 + \frac{6}{8}\pi - 0 - \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{8}\pi \right) \right| = \frac{3}{8}\pi a^2$$

2) Steinerova hypocykloida neboli deltoid je opět typem prosté hypocykloidy, tentokrát však pro $b = \frac{a}{3}$, kde význam a a b je stejný jako u asteroidy. Důvodem pojmenování deltoid, je tvar křivky připomínající řecké písmeno Δ delta. Parametrické vyjádření náležící této křivce je

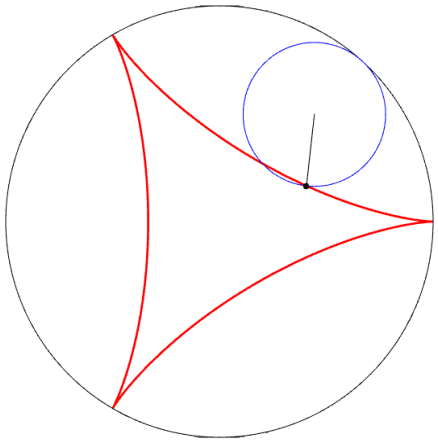
$$x = a(2\cos t + \cos 2t)$$
$$y = a(2\sin t - \sin 2t)$$

Délka Steinerovy hypocykloidy

Předpokládáme, že máme Steinerovu hypocykloidu zadanou parametrickými rovnicemi. Abychom mohli využít odpovídající vzorec pro výpočet její délky, musíme nejprve rovnice křivky zderivovat.

$$x' = a(-2\sin t - 2\sin 2t)$$
$$y' = a(2\cos t - 2\cos 2t)$$

Využijeme-li vlastnost, že se deltoid skládá ze tří stejně dlouhých částí, vypočítáme nejprve třetinu délky deltoidu pro $t \in \left\langle 0, \frac{2}{3}\pi \right\rangle$ a tu pak vynásobíme třemi.



Obrázek 2.19: Steinerova hypocykloida

$$\frac{L}{3} = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{a^2(-2\sin t - 2\sin 2t)^2 + a^2(2\cos t - 2\cos 2t)^2}\ dt =$$

$$a\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{(4\sin^2 t + 8\sin 2t \sin t + 4\sin^2 2t) + (4\cos^2 t - 8\cos 2t\cos t + 4\cos^2 2t)}\ dt =$$

$$= 2a\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{(\sin^2 t + 2\sin 2t \sin t + \sin^2 2t) + (\cos^2 t - 2\cos 2t\cos t + \cos^2 2t)}\ dt =$$

Nyní pro úpravu použijeme vzorec

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$= 2a\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{2 - 2(\cos t\cos 2t - \sin t \sin 2t)}\ dt = 2a\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{2 - 2\cos 3t}\ dt =$$

$$= 2\sqrt{2}a\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{1-\cos 3t} = 4a\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin\tfrac{3t}{2}\ dt = 4a\left[-\tfrac{2}{3}\cos\tfrac{3t}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi} = \tfrac{16}{3}a$$

Vynásobíme-li výslednou hodnotu třemi, získáme délku celé Steinerovy hypocykloidy, tedy $3 \cdot \frac{16}{3}a = 16a$.

Plocha ohraničená Steinerovou hypocykloidou

Pro výpočet obsahu plochy, kterou Steinerova hypocykloida zadaná parametrickými rovnicemi vymezuje, využijeme tentokrát derivaci x'.

$$S = \left|\int_0^{2\pi} a(-2\sin t - 2\sin 2t)a(2\sin t - \sin 2t)\ dt\right| =$$

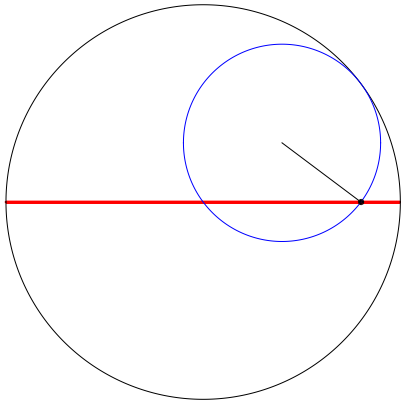
$$= \left|a^2\int_0^{2\pi}(-2\sin t - 4\sin t\cos t)(2\sin t - 2\sin t\cos t)\ dt\right| =$$

$$= \left| -4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \sin^2 t \cos t - 2 \sin^2 t \cos^2 t \ dt \right| =$$
$$= \left| -4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos t - \cos^3 t - 2 \sin^2 t + 2 \sin^4 t \ dt \right| =$$
$$= \left| -4a^2 (\pi - 2\pi + 2 \cdot \tfrac{3}{4}\pi) \right| = \left| -4a^2 \cdot \tfrac{\pi}{2} \right| = 2\pi a^2$$

Využili jsme vztah

$$\int \sin^n t = -\tfrac{1}{n} \cos t \sin^{n-1} t + \tfrac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} t \ dt$$

3) Úsečka je typ prosté hypocykloidy pro $b = \frac{a}{2}$. Hypocykloidou je průměr pevné kružnice, tedy úsečka. Délka takovéto křivky je rovna průměru pevné kružnice.



Obrázek 2.20: Hypocykloida pro $b = \frac{a}{2}$

Parametrické rovnice v tomto případě budou mít tvar

$$x = a \cos t$$
$$y = 0, \ t \in \langle 0, \pi \rangle$$

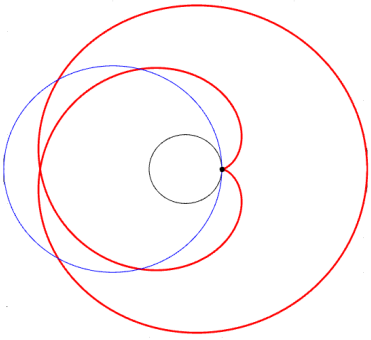
Stejně jako u cykloidy jsme nemohli pomocí odpovídajícího integrálu vypočítat délku zkrácené a prodloužené cykloidy, nelze určit ani délku hypocykloidy. Lze to jen pro konkrétní hodnoty a, b a d s využitím softwaru Wolfram Aplha.

2.5. Pericykloidy

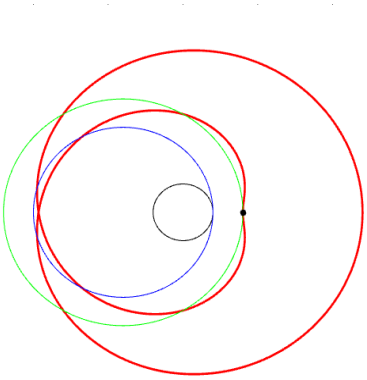
Pericykloidy jsou křivky vznikající kotálením pohyblivé kružnice svým vnitřním obvodem po vnějším obvodu pevné kružnice. Parametrické rovnice pericykloidy jsou ve tvaru

$$x(t) = (a-b)\cos t + d\cos\left(\tfrac{b-a}{b}t\right)$$
$$y(t) = (a-b)\sin t + d\sin\left(\tfrac{b-a}{b}t\right),$$

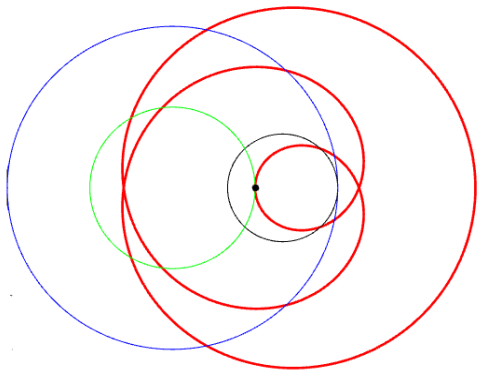
kde a je poloměr pevné kružnice, b je poloměr pohyblivé kružnice a d je vzdálenost bodu od středu pohyblivé kružnice. Leží-li námi zvolený bod na pohyblivé kružnici, vzniká prostá pericykloida. Je-li $d > b$, vzniká prodloužená pericykoida, pro $d < b$ dostaneme pericykloidu zkrácenou.



Obrázek 2.21: Prostá pericykloida



Obrázek 2.22: Prodloužená pericykloida



Obrázek 2.23: Zkrácená pericykloida

Navíc platí, že každou pericykloidu lze vyjádřit jako epicykloidu a naopak.[5] Do rovnic pro epicykloidu

$$x = (a' + b')\cos s - d'\cos(\tfrac{a'+b'}{b'}s)$$
$$y = (a' + b')\sin s - d'\sin(\tfrac{a'+b'}{b'}s),\ \ s \in R$$

dopočítáme

$$d' = b - a \qquad b' = \tfrac{d(b-a)}{b} \qquad a' = \tfrac{da}{b} \qquad s = \tfrac{(b-a)t}{b}$$

Uvedeme si příklad převedení pericykloidy na epicykloidu.

pericykloida: $a = 5, b = 7, d = 7$

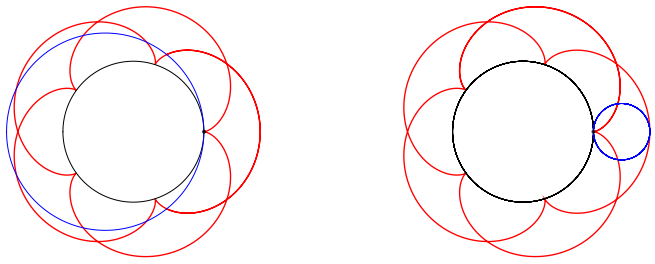
$x(t) = -2\cos t + 7\cos\tfrac{2}{7}t$

$y(t) = -2\sin t + 7\sin\tfrac{2}{7}t,\ \ t \in R$

epicykloida: $a' = 5, b' = 2, d' = 2$

$x(s) = 7\cos s - 2\cos\tfrac{7}{2}s$

$y(s) = 7\sin s - 2\sin\tfrac{7}{2}s,\ \ s \in R$



(a) Pericykloida (b) Epicykloida

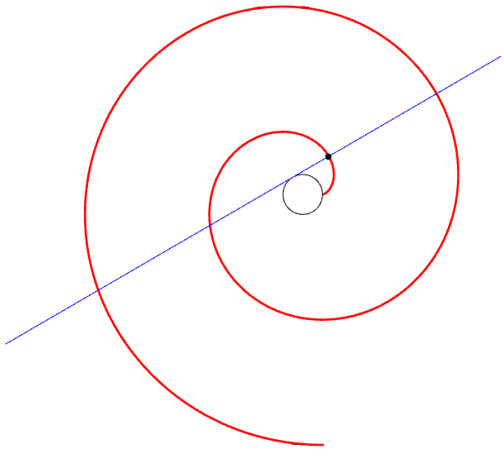
Obrázek 2.24: Pericykloida jako epicykloida

2.6. Evolventa

Evolentní pohyb je pohyb, jehož hybnou polodií je přímka a pevnou kružnice. Trajektorii bodu umístěného na pohyblivé přímce nazýváme evolventou kružnice. Parametrické rovnice jsou

$$x = a\cos t + at\sin t$$
$$y = a\sin t - at\cos t,$$

kde a je poloměr kružnice a $t \in \langle 0, \infty \rangle$. Leží-li bod na pohyblivé polodii, tedy jeho vzdálenost d od přímky je rovna 0 , získáme prostou evolventu.



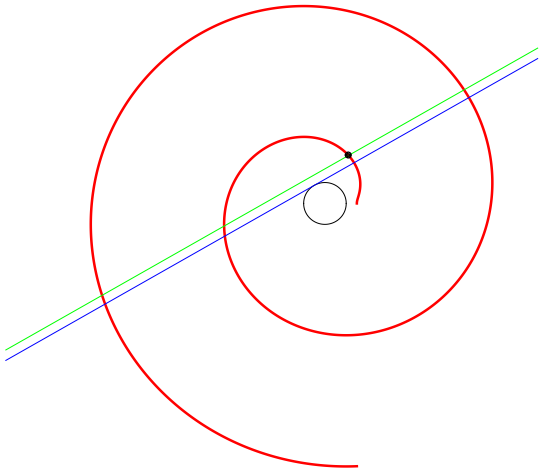
Obrázek 2.25: Prostá evolventa

Pro $d > 0$ získáme zkrácenou evolventu s parametrickými rovnicemi

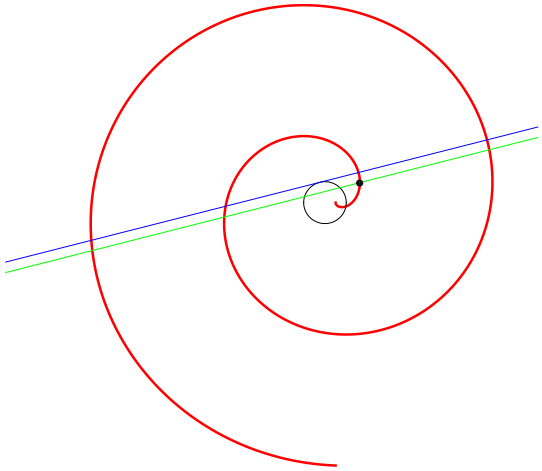
$$x = (a+d)\cos t + at\sin t$$
$$y = (a+d)\sin t - at\cos t.$$

Pro $d < 0$ vzniká prodloužená evolventa s pamaretrickými rovnicemi

$$x = (a-d)\cos t + at\sin t$$
$$y = (a-d)\sin t - at\cos t.$$

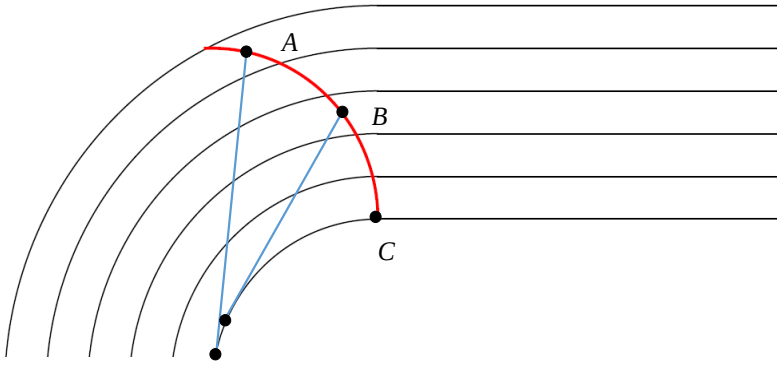


Obrázek 2.26: Zkrácená evolventa



Obrázek 2.27: Prodloužená evolventa

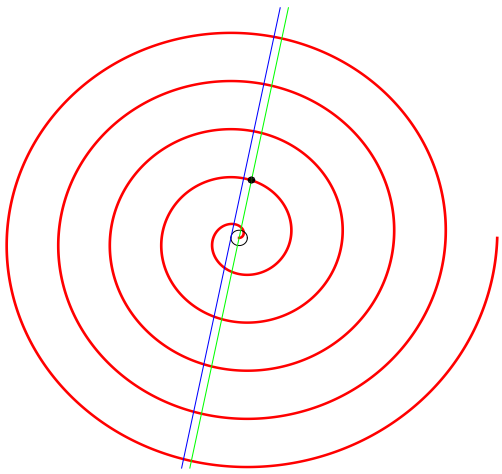
Uplatnění evolventy můžeme nalézt například v atletice při rozmisťování startovních bloků. Při běhu na delší vzdálenost je start v místě, kde rovina přechází v zatáčku, následně závodníci běží po tečně k vnitřnímu okraji a tím dojde k vyrovnání délky jejich trati s ostatními závodníky. Je-li startovní čára částí evolventy (červená křivka), mají závodníci A, B, C stejně dlouhou trať.



Obrázek 2.28: Evolventa jako startovní čára

Speciálním příkladem evolventy pro $d = -a$ je prodloužená evolventa nazývaná jako **Archimédova spirála** s parametrickými rovnicemi

$$x = at \sin t$$
$$y = at \cos t.$$



Obrázek 2.29: Archimédova spirála

Závěr

Na začátku jsme se stručně seznámili s tím, co je to rovinná křivka a uvedli jsme si možnosti, jak lze křivku vyjádřit matematicky. Dále jsme si uvedli, jak můžeme vypočítat jejich délku a obsah plochy, kterou křivka vymezuje, a to jak v případě explicitního vyjádření, tak i v případě zadání křivky parametricky či pomocí polárních souřadnic.

V druhé kapitole už jsme se zabývali konkrétní skupinou křivek zvaných cyklické křivky. Jedná se o speciální typ křivek vznikajících kotálením dvou tzv. poloid po sobě, z nichž jedna je vždy pevná a druhá pohyblivá. Křivky jsme si podle typů polodií rozdělili na cykloidy, epicykloidy, hypocykloidy, pericykloidy a evolventy. Důležité bylo, si nejprve u každé křivky uvést rovnice, křivku si pro názornost vykreslit, což se nám podařilo s využitím Matlabu, a dále se věnovat vlastnostem a zajímavostem. Cílem bylo si u každé křivky odvodit její délku a obsah plochy, jež vymezuje. Při počítání délky křivek jsme však narazili na problém, kdy nebylo možné určit délku některých křivek pomocí vzorce uvedeného v první kapitole. Tento výpočet byl možný pouze pro konkrétní parametry jednotlivých polodií. Délku některých těchto křivek jsme si tak určili s využitím softwaru Wolfram Alpha. Dozvěděli jsme se také, že u křivek, u kterých jsou obě polodie kružnice, určuje právě poměr poloměrů těchto kružnic, zda dojde k uzavření křivky či nikoliv. Pro různé poloměry kružnic také vznikají speciální typy křivek jako jsou kardioida a nefroida patřící mezi epicykloidy nebo asteroida a Steinerova hypocykloida patřící mezi hypocykloidy. Při zkoumání pericykloid jsme se dozvěděli, že mezi nimi a epicykloidami existuje vztah a platí, že každá pericykloida je epicykloidou a naopak. Pro názornost jsme si uvedli

také příklad. Posledním typem křivky patřící mezi cyklické je evolventa vznikající kotálením přímky po pevné kružnici. Zajímavostí této křivky je její využití v praxi, konkrétně v atletice při rozmisťování startovních bloků. Na závěr jsme si ještě uvedli a vykreslili Archimédovu spirálu, speciální typ evolventy. Cíl práce, představit si skupinu cyklických křivek, ukázat si jak vznikají a jak lze určit jejich délku a obsah plochy, kterou ohraničují, byl tedy splněn.

Literatura

[1] Jarešová, M., Volf, I.: *Matematika křivek: Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku.* Hradec Králové, 2007. Dostupné z: http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf

[2] Barcht, H.: *Matematické vzorce.* SNTL, Praha, 1987. [cit. 25. 2. 2017] Dostupné z: http://sps.watzke.cz/dl/mat/mat/matematicke_vzorce.pdf

[3] Pospíšilová, L., Kolář, I.: *Diferenciální geometrie křivek a ploch.* Masarykova Univerzita, Brno, 2007 (elektronické skriptum). Dostupné z: http://is.muni.cz/elportal/estud/prif/js08/geometrie/index.html

[4] Shikin, E. V.: *Handbook and Atlas of Curves.* CRC Press, Boca Raton (FL), 1995.

[5] Čečáková, S.: *Cyklické křivky.* FA ČVUT, Praha, 2017 (elektronická skripta).

[6] Lockwood, E.H.: *A book of curves.* CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1961.

[7] Yates, C.R.: *A Handbook on Curves and Their Properties.* United States Military Academy, 1947.

[8] Brabec, J., Martan, F., Rozenský Z.: *Matematická analýza I.* SNTL, Praha, 1985

[9] *History.mcs.st-and.ac.uk* [online]. MacTutor History of Mathematics archive, 2011. [cit. 10. 3. 2017] Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/

[10] *Kinematická geometrie v rovině* [online]. [cit. 23. 2. 2017] Dostupné z: http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/download/527/1490-/file/kinematika.pdf