UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Durace a její využití při imunizaci dluhopisového portfolia

Vedoucí diplomové práce:

Mgr. Eva Bohanesová, Ph.D.

Vypracovala:

Marie Svobodová

ME, III. ročník

Rok odevzdání: 2010

Prohlášení

Prohlašuji, že bakalářskou diplomovou práci na téma DURACE A JEJÍ VYUŽITÍ PŘI IMUNIZACI DLUHOPISOVÉHO PORTFOLIA jsem vypracovala samostatně na základě uvedených pramenů a literatury.

V Olomouci dne 12. dubna 2010

…………………………………………….

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí mé bakalářské práce Mgr. Evě Bohanesové, Ph.D. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích. Také bych ráda poděkovala mé rodině a přátelům za jejich podporu po celou dobu mého studia a cenné rady při psaní této bakalářské práce.

OBSAH

Úvod

„Z ekonomického hlediska má pro každého emitenta vydání dluhopisů stejný význam jako získání úvěru nebo půjčky a pro banku jako přijetí termínových vkladů.“[1]

Dluhopis je jedním z nejdůležitějších cenných papírů, který by neměl chybět v žádném vyváženém portfoliu. Z dlouhodobého hlediska jsou totiž bezpečnější než jiné cenné papíry (např. akcie), neboť mají předem stanovený výnos (dluhopis s pevnou úrokovou sazbou) nebo zajišťují pravidelné výnosy vázané na pohyby úrokových měr (dluhopis s pohyblivou úrokovou sazbou). Proto nejsou určeny jen pro konzervativní investory, kteří na úkor výnosů podstupují menší rizika, ale i pro ostatní investory, společnosti, banky a pojišťovny, jež je mohou použít za účelem pokrytí svých krátkodobých a dlouhodobých závazků.

Teoretická část práce seznamuje čtenáře s pojmy dluhopis, časová struktura úrokových měr a durace.

V praktické části sestrojím výnosovou křivku zprůměrovaných výnosů krátkodobých dluhopisů a úrokových měr víceletých dluhopisů, které vypočítám metodou bootstrap. Z vybraných dluhopisů sestavím portfolia tak, aby se jejich durace vyrovnala duraci úvěru. Praktická část analyzuje jednotlivá dluhopisová portfolia při posunu časové struktury úrokových měr a kontroluje funkčnost imunizace. Analýza dluhopisových portfolií je rozdělena do jednotlivých kroků, na ukázkové výpočty pro dva vybrané dluhopisy a jejich aplikaci na zbývající soubory dluhopisů. Část kapitoly určená ke kontrole imunizace uvádí změny relativních podílů souborů dluhopisů při posunu časové struktury úrokových měr.

[1] LIŠKA, Václav; GAZDA, Jan. Kapitálové trhy a kolektivní investování, str. 40

1. Dluhopis

V následujících kapitolách se budu snažit o vymezení základních pojmů – dluhopis, náležitosti dluhopisu, typy dluhopisů, jejich význam v ekonomickém cyklu a výpočet ceny dluhopisu.

Samotné slovo dluhopis má mnoho významů. Nejobecněji je dluhopis popisován jako *„rozšířený druh cenných papírů, jejichž emisí si emitent opatřuje úvěrový kapitál."* [2] Dále je dluhopis definován jako obchodovatelný cenný papír, který si emitent opatřuje za účelem získání dlouhodobých finančních prostředků. Emitent se zavazuje majiteli dluhopisu splatit k určitému datu příslušnou nominální hodnotu a v pravidelných termínech vyplácet výnosy. Emitent (dlužník) je pouze právnická osoba, která je oprávněna vydávat dluhopisy všem majitelům za stejných podmínek. V České republice toto oprávnění může mít stát, komunální orgán, bankovní instituce a na základě povolení o schopnosti splácení emise i firma. Investor (věřitel) je držitel dluhopisu, který dobrovolně poskytuje finanční prostředky emitentovi za účelem získání zapůjčené částky a v daných termínech sjednaných úroků. *„Právo na výplatu výnosu má majitel kupónu, nárok na splacení jmenovité hodnoty má majitel dluhopisu."* [3] Dluhopis, který jsem definovala výše, je nejpoužívanějším typem a označuje se jako kuponový dluhopis s pevným kuponem.

1.1. Náležitosti dluhopisu

Dluhopis je cenný papír, se kterým se lze setkat v listinné nebo zaknihované podobě a musí obsahovat jemu příslušné náležitosti. Listinná podoba se skládá z *„ pláště a kuponového archu s legitimačním talonem.*"[4] Podle knihy Kapitálové trhy a kolektivní investování [5] má plášť tyto náležitosti:

- *označení emitenta (jeho název nebo jméno a sídlo nebo bydliště),*
- *název a číselné označení dluhopisu (pořadové číslo, pokud bude více sérií i označení série),*
- *nominální hodnotu, a to v české měně nejméně na jeden tisíc a vyšší hodnoty vždy v celých tisících korun českých, v cizí měně bez limitu,*
- *způsob stanovení výnosu,*

[2] CIPRA, Tomáš. Pojistná matematika, str. 58
[3] http://www.pravnipredpisy.cz/predpisy/ZAKONY/1990/530990/Sb_530990_------_.php#P1
[4] KOLEKTIV AUTORŮ. Bankovnictví, str. 195
[5] LIŠKA, Václav; GAZDA, Jan. Název knížky, str. 41

- *prohlášení emitenta, že majiteli dluží nominální hodnotu dluhopisu,*
- *závazek emitenta splatit nominální hodnotu dluhopisu v určitém termínu nebo termínech, vyplácet určený výnos ve stanovených termínech, způsob výplat a platební místo,*
- *jméno prvního majitele dluhopisu na jméno,*
- *datum vydání a otisk podpisů představitelů emitenta,*
- *údaj o povolení emise.*

Kuponový arch obsahuje poukázky (kupony). S kupónovým archem je spojeno právo na výnos, které závisí na délce doby splatnosti dluhopisu. Jednotlivé poukázky je možné převádět na jinou osobu, proto jsou označovány za samostatné cenné papíry spadající pod dluhopis. Kuponový arch je společně vydáván s talónem, což je legitimační lístek opravňující majitele vyžádat si nový kuponový arch, a to v případě, že vyčerpá všechny předchozí.

Při shromažďování dat k praktické části bakalářské práce jsem se setkala se státními dluhopisy, které v Oznámení o aukci státních pokladničních poukázek a v Oznámení České národní banky o výsledku aukce státních pokladničních poukázek navíc obsahovaly:
V případě krátkodobých dluhopisů:

- ISIN (International Security Identification Number) mezinárodní identifikační číslo cenného papíru, který se skládá z 10 číslic, jež tvoří kód země, národní bezpečnostní identifikátor a kontrolní číslice,
- typ, formu a způsob prodeje dluhopisu,
- datum splatnosti, datum aukce a lhůtu pro příjem pohledávek,
- objem emise a nabízený objem do aukce v české měně,
- poptávka na odkup, skutečný prodej a odkup emitenta v české měně,
- průměrný výnos, průměrnou cenu a koeficient uspokojení v procentech,

Dlouhodobé dluhopisy jsou rozšířeny o:

- datum vypořádání,
- administrátora emise,
- způsob zadávání objednávek a uzávěrku příjmu objednávek, která se rozděluje na konkurenční a nekonkurenční objednávky,

- alikvotní úrokový výnos v české měně na jeden kus,
- poptávka na odkup, skutečný prodej a odkup emitenta v české měně, které se také rozdělují na konkurenční a nekonkurenční,
- objem finančních prostředků získaných aukcí včetně alikvotního úrokového výnosu,
- nejnižší výnos, průměrný výnos a nejvyšší výnos, které jsou vyjádřeny v procentech za rok,
- nejvyšší cena, průměrná cena, nejnižší uspokojená cena a koeficient uspokojení na nejnižší ceně, cena je vyjádřena v procentech.

1.2. Klasifikace dluhopisů

Dluhopisy se vyznačují mnohými vlastnostmi, a proto jsem je rozdělila do pěti skupin podle následujících kriterií:

A. Dluhopisy rozdělené podle úrokové sazby

Dluhopisy s pevnou úrokovou sazbou jsem už blíže popsala v úvodu 1. kapitoly, a vyznačují se tím, že mají neměnnou úrokovou sazbu po celou dobu splatnosti.

Dluhopisy s pohyblivou úrokovou sazbou mají úrokovou sazbu, která není pevně stanovená. Odvíjí se od diskontní sazby, která je odvozena od 2T repo sazby, již stanovuje centrální banka (např.: úroková sazba dluhopisu činí 2% nad běžnou diskontní sazbou k datu výplaty úroku a pokud diskontní sazba je stanovena 5%, pak je dluhopis zúročen 7%). U mezinárodně obchodovatelných obligací jsou například používány úrokové sazby mezibankovních trhů LIBOR (London Interbank Offered Rate- londýnská mezibankovní nabídková sazba) a PRIBOR (Prague Interbenk Offered Rate- pražská mezibankovní nabídková sazba).

Dluhopisy bez úrokových sazeb nemají úrokovou sazbu a ceny dluhopisů jsou rovny diskontované nominální hodnotě, proto se tyto dluhopisy také nazývají diskontními dluhopisy (zerobonds).

Dluhopisy se speciálním kupónem jsou dány úroky, jež jsou vypláceny v pravidelných intervalech nebo jsou stanoveny z hodnoty kapitálu ke dni splatnosti. Vycházejí z cenového vývoje finančních ukazatelů, jako jsou akcie, akciová portfolia, podílové fondy, směnné kurzy a suroviny.

Hybridní dluhopisy se skládají ze dvou úrokových sazeb - z pevné a pohyblivé, která navíc může být doplněna o prémie nebo podíl na zisku emitenta.

Indexované dluhopisy mají úrokovou sazbu, která je ovlivněna indexem, většinou se jedná o míru inflace.

B. Podle emitenta

Státní dluhopisy vydává stát za účelem pokrytí deficitu státního rozpočtu nebo na nákladné financování např.: úhradu škod způsobených povodněmi, obnovu a rozšíření dopravní infrastruktury. V naší zemi jsou známy pouze čtyři typy, obchodovatelné na trhu krátkodobých dluhopisů. A to jsou:

- *„státní pokladniční poukázky (SPP: emitentem je Ministerstvo financí ČR)*
- *pokladniční poukázky České národní banky (P ČNB: emitentem je ČNB)*
- *pokladniční poukázky Fondu národního majetku (P FNM: emitentem je FNM)*
- *bankovní pokladniční poukázky (lze uvést emisi pokladničních poukázek Komerční banky).“*[6]

Vyznačují se téměř nulovým rizikem, neboť je lze považovat za téměř bezrizikové investice garantované státem. Mezi vhodné investory patří banky, pojišťovny a penzijní fondy.

Komunální dluhopisy jsou kryté dluhopisy, které vydávají banky nebo obce. V případě banky „z výtěžku poskytnou úvěr obci, která za splacení ručí veškerým svým majetkem“[7] a v případě, že emitentem je samotná obec, za splacení pak odpovídá též veškerým svým majetkem.

Firemní dluhopisy vydávají firmy nebo banky. Patří mezi více rizikové dluhopisy, než byly předchozí, ale za to se vyznačují vyšším úrokem. Zvláštním typem jsou **zaměstnanecké dluhopisy**, které vydávají firmy pouze pro své zaměstnance s možností pořídit je za nižší cenu, než je cena tržní. V případě ukončení pracovního poměru musí zaměstnanec vrátit obligaci emitentovi. Při úmrtí toto učiní dědicové.

Zahraniční dluhopisy jsou vydávány v dané zemi, v její měně, kdežto emitent je ze zahraničí, například korunové dluhopisy vydané v ČR rakouským emitentem.

Eurodluhopisy jsou vydány v měně, která je jiná než měna země, kde byly emitovány, například eurodluhopisy v dolarech vydané v Rakousku.

[6] CIPRA, Tomáš. Pojistná matematika, str. 60
[7] LIŠKA, Václav; GAZDA, Jan. Kapitálové trhy a kolektivní investování, str. 42

C. Podle doby splatnosti

Krátkodobé dluhopisy - doba splatnosti je do 1 roku.

Střednědobé dluhopisy - doba splatnosti je od 1 roku do 5- 10 let.

Dlouhodobé dluhopisy - na základě předchozí věty by mohly být do této skupiny zařazeny dluhopisy s dobou splatnosti delší než 10 let a též věčné dluhopisy, jejichž úroky se vyplácejí stále.

Vypověditelné dluhopisy může emitent splatit dříve, než je uvedeno v datu splatnosti.

Prolongované dluhopisy - na rozdíl od vypověditelných cenných papírů zde může emitent dobu splatnosti prodloužit.

D. podle formy dluhopisu

Dluhopisy na jméno - osoba vlastnící tyto dluhopisy může vykonávat všechna práva s nimi spojená, pouze tehdy, pokud je zapsána jako majitel v seznamu, jež vede emitent.

Dluhopisy na doručitele - osoba vlastnící tyto dluhopisy může vykonávat všechna práva s ním spojená.

E. Zvláštní druhy dluhopisů

Konvertibilní dluhopisy – majitel těchto dluhopisů se může rozhodnout, zdali si v době splatnosti nechá vyplatit nominální hodnotu cenného papíru nebo je vymění za jiné obligace nebo akcie téže nebo jiné firmy, která je vydala. [8]

Opční dluhopisy - jedná se o dluhopisy s opčním listem (warrantem), se kterým se, po oddělení od dluhopisu, může obchodovat zvlášť a majitel tohoto dluhopisu má právo na nákup určitého cenného papíru (nejčastěji akcie) za předem stanovenou cenu ve stanovené době.

Naturální dluhopisy - opravňují „majitele k přednostnímu nákupu určitého druhu zboží či služeb.“[9]

[8] http://www.penize.cz/18132-konvertibilni-dluhopisy-chytry-hybrid-akcie-a-dluhopisu
[9] LIŠKA, Václav; GAZDA, Jan. Kapitálové trhy a kolektivní investování, str. 45

1.3. Ekonomický cyklus

Zde v jednoduchosti naznačím, jak souvisí cena, příp. výše výnosů dluhopisů s ekonomickým cyklem. Cena akcií a dluhopisů úzce souvisí s hospodářským cyklem země. Dluhopisy na rozdíl od akcií jsou méně rizikové, protože u dluhopisů bývá výplata výnosů pevně zaručena, i když její výše se může měnit (dluhopis s pohyblivým výnosem). Vliv ekonomické situace dané země na dluhopisy se může projevovat výší kupónové sazby. V době ekonomického růstu, kdy můžeme očekávat rostoucí prosperitu podniků, mj. podmíněnou cenovou dostupností úvěrů (rozumné výše úrokových měr) pro investice, a tedy tvorbu zisku, jsou tyto podniky schopny vyplácet podíly na zisku (např. u akciové společnosti dividendy). V případě akciových společností je o jejich akcie mezi investory zájem a stoupá jejich cena. Tento proces však postupně začne stagnovat, je-li trh nabízenými produkty nasycen. Tvorba zisku postupně upadá, pokud vedení podniků nenajde další odbyt nebo jiný výrobní program. Klesá-li zisk podniků, snižuje se jejich schopnost vyplácet podíly na zisku. O akcie těchto podniků přestává být zájem, jsou postupně prodávány a jejich cena klesá. Pro podniky to znamená menší příliv peněz. Jinou příčinou postupného ztrácení hodnoty podniku může být i růst úrokových měr z úvěrů, které se tímto stávají pro podniky hůře dostupnými. Pro vedení podniku to znamená omezenou, v horším případě až nulovou, možnost investovat do výroby, a tedy zhodnocovat kapitál tímto způsobem. Vyšší úrokové míry tedy signalizují zdražení peněz, což skýtá příležitost investovat do dluhopisů či jiných depozitních instrumentů. V této době investoři totiž požadují vyšší výnosy. Zvýšení úrokových měr vede u dluhopisů k poklesu jejich cen, proto se dá očekávat zvýšený zájem o ně. Toto období využívají investoři k výhodnému nákupu dluhopisů, u nichž požadují vyšší úrokovou sazbu. Pro emitenty dluhopisů, kteří jsou zatíženi slíbenými vysokými úroky, bude postupem času stále obtížnější investovat do výroby nebo jinak opatřovat peníze na výplatu závazků vůči svým věřitelům. Vykazují jen nízké nebo nulové zisky a dochází ke krizi. Postupně tedy začne docházet ke snižování úrokových měr. Emitentům se naskýtá přístup k cizím zdrojům, podniky mohou zase začít více investovat do výroby či prodeje, začíná růst jejich zisk a v případě a.s. opět začne stoupat cena akcií. Investoři pak požadují nižší výnosy, což vede k růstu cen dluhopisů a následně k poklesu zájmu o ně.

1.4. Základní pojmy

V této kapitole se budu věnovat vymezení následujících pojmů – cena dluhopisu, doba splatnosti, nominální hodnota, kuponová platba, kuponová sazba a kurz dluhopisu, které užiji v obecných vzorcích v teoretické části a ve výpočtech v praktické části.

Cenou dluhopisu (*PV* - present value) rozumíme skutečnou tržní hodnotu, za kterou je dluhopis obchodován na kapitálovém trhu, a tato cena je dána stavem nabídky a poptávky.

Doba splatnosti (*n* - maturity) je určené datum, ve kterém je majiteli dluhopisu vyplacena nominální hodnota tohoto cenného papíru.

Nominální hodnota (*F* - face value) je peněžní částka vytištěná na dluhopisu, která udává výši dluhu a je vyplacena oprávněnému majiteli na konci doby splatnosti. V den splatnosti je skutečná tržní hodnota dluhopisu (cena dluhopisu) rovna nominální hodnotě. Pro následující výpočty budu používat označení *NH*.

Kuponová platba (*C* - coupon payment) je platba v korunách odpovídající sjednané úrokové míře (kuponové sazbě), který je vyplácen majiteli dluhopisu v pravidelných intervalech.

Kuponová sazba (*c* - coupon rate) je procentuálně vyjádřená kuponová platba z nominální hodnoty. Platí tedy vztah $\boldsymbol{C = c\ NH}$.

Kurz dluhopisu je procentuálně vyjádřená cena z nominální hodnoty. Například dluhopis s nominální hodnotou 10 000 Kč (a tržní cenou 10 624 Kč) bude mít hodnotu kurzu 106,24 %.

1.5. Výpočet ceny dluhopisu

V této podkapitole uvedu příklady výpočtu ceny klasického a kuponového dluhopisu.

1.5.1. Cena kuponového dluhopisu

Při výpočtu ceny kuponového dluhopisu bude záležet na tom, zdali ji budeme počítat k datu, v němž dochází k výplatě kuponové platby, nebo k datu, které bude stanoveno v období mezi dvěma výplatami.

Cena kuponového dluhopisu k datu výplaty kuponové platby

Cena tohoto dluhopisu je rovna součtu všech jeho budoucích kuponových plateb a jmenovité hodnoty dluhopisu, které jsou diskontované k současnému datu. Nejčastěji využívaný interval výplat kuponů je roční, ale v některých případech se setkáváme i s intervalem pololetním. Cenu dluhopisu tedy vypočítáme ze vztahu:

$$PV = \frac{C}{1+r_1} + \frac{C}{(1+r_2)^2} + \frac{C}{(1+r_3)^3} + \cdots + \frac{C}{(1+r_{n-1})^{n-1}} + \frac{C+NH}{(1+r_n)^n}, \qquad (1)$$

kde $r_1,\ldots,r_n$ (yield) jsou úrokové míry pro diskontování jednotlivých finančních toků a převzaté z výnosové křivky (viz kap. 2), ***n*** je celkový počet ročních kuponových období tvořících dobu splatnosti, ***C*** je kuponová platba a ***NH*** je nominální hodnota dluhopisu. Tento zápis můžeme také upravit tímto způsobem:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r_i)^i} + \frac{NH}{(1+r_n)^n}. \qquad (2)$$

V případě spojitého úročení, vypočítáme cenu kuponového dluhopisu podle vztahu:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} C \cdot e^{-R(T_0,T_i)(T_i-T_O)} + NH \cdot e^{-R(T_0,T_n)(T_n-T_0)},$$

kde T_0 označuje dnešní datum, T je čas vypršení platnosti dluhopisu, $R\,(T_0, T_n)$ je spojitá úroková míra platná pro období od T_0 do T_n a čas $T_i = T_0 + i$.

Vztah mezi cenou dluhopisu a nominální hodnotou[10]:

- Tržní hodnota dluhopisu je rovna nominální hodnotě právě tehdy, když úrokové míry jsou rovny kuponové sazbě (selling at par).
- Tržní hodnota dluhopisu je větší než nominální hodnota právě tehdy, když úrokové míry jsou menší než kuponová sazba (selling at premium). Nižší

[10] Situace, které mohou nastat mezi cenou dluhopisu a nominální hodnotou, definují ve svých publikacích Eva Bohanesová a Tomáš Cipra. In BOHANESOVÁ, Eva. Finanční matematika, str.88; CIPRA, Tomáš. Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou, str. 91

úrokové míry způsobují zvýšení ceny dluhopisů, což má za následek snížení poptávky po nich.

- Tržní hodnota dluhopisu je menší než nominální hodnota právě tehdy, když úrokové míry jsou větší než kuponová sazba (selling at discount). Vyšší úrokové míry způsobují pokles ceny dluhopisů, proto se dá očekávat zvýšený zájem o ně.

<u>Cena kuponového dluhopisu k datu mezi dvěma výplatami kuponových plateb</u>

Ve skriptu Finanční matematika je výpočet ceny tohoto dluhopisu definován jako součet tržní ceny dluhopisu a části kuponové platby za období od poslední do následující výplaty kuponové platby.[11] Naběhlý úrok je označován jako alikvotní úrokový výnos (*AUV*), který se vyplácí ve výnosovém období. Toto období se nachází mezi dnem výplaty poslední minulé kuponové platby (nebo dnem emise obligace, jestliže nebyl ještě žádný kupon proplacen) a dnem vypořádání obchodu. Čím více se budeme blížit ke dni výplaty kuponové platby, tím vyšší bude tento výnos. S tímto faktem souvisí i datum ex-kupon. Kupec, který nakoupí dluhopis před tímto datem, musí zaplatit tržní cenu dluhopisu navýšenou o *AUV*, čímž získá právo na výplatu celého příštího kuponu. V případě, že kupec nakoupí dluhopis až po datu ex-kupon, zaplatí tržní cenu dluhopisu sníženou o *AUV* (záporný *AUV*) jako kompenzaci za ušlou výplatu příštího kuponu. Nový majitel tedy na kuponovou platbu nemá nárok a výplata příštího kuponu náleží předchozímu majiteli. Je-li dluhopis zakoupen až po datu ex-kupon, začíná výnosové období dnem výplaty nejbližšího budoucího kuponu a končí dnem vypořádání obchodu. Toto období se označuje jako záporné výnosové období.[12]

<u>A. Postup stanovení ceny kuponového dluhopisu před datem ex-kupon</u>

1. Podle vzorce (2) provedeme výpočet ceny dluhopisu PV_1 k datu poslední výplaty kuponové platby a PV_2 k datu nejbližší budoucí výplaty:

$$PV_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r_i)^i} + \frac{NH}{(1+r_n)^n},$$

$$PV_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r_i)^i} + \frac{NH}{(1+r_{n-1})^{n-1}}.$$

[11] BOHANESOVÁ, Eva. Finanční matematika, str. 88
[12] http://mant.upol.cz/soubory/skripta/Bohanesova.pdf

2. Lineární interpolací cen PV_1 a PV_2 vypočítáme cenu k datu vypořádání obchodu PV‘:

$$PV' = PV_1 + \frac{360(R_2 - R_1) + 30(M_2 - M_1) + D_2 - D_1}{360}(PV_2 - PV_1),$$

kde $R_1M_1D_1$ je datum poslední výplaty kuponové platby a $R_2M_2D_2$ je datum vypořádání obchodu, ke kterému cenu dluhopisu počítáme. Pro určení počtu dní používáme standard *30E/360* (kde rok má 360 dní a 12 měsíců po 30 dnech).

3. Nakonec vypočteme alikvotní úrokový výnos *AUV* za určené výnosové období:

$$AUV = C\frac{360(R_2 - R_1) + 30(M_2 - M_1) + D_2 - D_1}{360},$$

získaný *AUV* přičteme k interpolované ceně dluhopisu *PV´*:

$$PV = PV' + AUV .$$

B. Výpočet ceny kuponového dluhopisu po datu ex-kupon

První a druhý krok je stejný jako v případě výpočtu ceny kuponového dluhopisu před datem ex-kupon. Ve třetím kroku získáme alikvotní úrokový výnos za příslušné záporné výnosové období podle vzorce:

$$AUV = C\frac{360(R_3 - R_2) + 30(M_3 - M_2) + D_3 - D_2}{360},$$

kde $R_2M_2D_2$ je datum vypořádání obchodu a $R_3M_3D_3$ je datum nejbližší budoucí výplaty kuponové platby.

Vypočtený *AUV* odečteme od interpolované ceny dluhopisu *PV´*získaný ve 2. kroku:

$$PV = PV' - AUV .$$

1.5.2. Cena diskontovaného dluhopisu

Cena diskontovaného dluhopisu je rovna nominální hodnotě diskontované k dnešnímu datu. Matematicky je cena dluhopisu vyjádřena tímto vztahem:

$$PV = \frac{NH}{(1+r_n)^n} , \qquad (3)$$

kde ***n*** je doba splatnosti v letech. Ze vzorce (2) dostaneme po dosazení nulových kuponů vzorec (3).

V případě spojitého úročení, vypočítáme cenu bezkuponového dluhopisu podle vztahu:

$$PV = NHe^{-R(T_0,T_n)(T-T_0)} .$$

2. Časová struktura úrokových měr

V následující kapitole se budu zabývat speciálním vztahem mezi výnosnostmi dluhopisů stejných vlastností, a dobou do jejich splatnosti, tzv. *časovou strukturou úrokových měr* (term structure of interest rates). Tato struktura je z literatury též známa pod názvem výnosová křivka.[13] Sestavování časové struktury úrokových měr a výnosových křivek je jedním z důležitých ekonomických nástrojů. Pomocí nich můžeme odhadnout očekávání investorů, vývoj úrokových sazeb, či vývoj hospodářského cyklu.

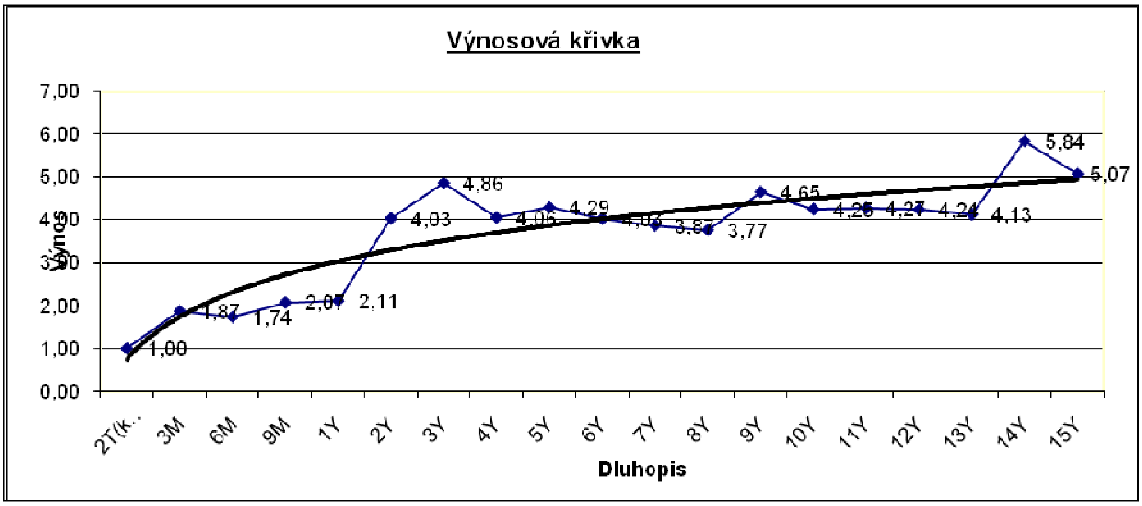
Výnosová křivka (yield curve) vyjadřuje vztah mezi výnosem do splatnosti (osa y) dluhopisu a dobou do splatnosti (osa x). Tato křivka může být také zkonstruována jako posloupnost spotových nebo forwardových úrokových měr uspořádaných podle délky doby splatnosti. Pro sestrojení křivky budeme uvažovat pouze dluhopisy, které se vyznačují podobnými vlastnostmi a liší se pouze v době splatnosti. Proto budeme potřebovat takové dluhopisy, které budou mít tyto předpoklady:

- stejné zdanění;
- stejný rating, který je dán bonitou emitenta;
- stejného emitenta;
- je jich dostatečné množství s různými dobami splatnosti;
- a na trhu jsou aktivně obchodovatelné.

Vzhledem k tomu, že je velmi obtížné najít skupinku dluhopisů, která by splňovala tato kritéria, se výnosová křivka konstruuje ze státních dluhopisů. Všechny státní dluhopisy se vyznačují jak stejnými vlastnostmi, tak i téměř nulovým rizikem (risk free yield). Potom tedy výnosová křivka ze státních dluhopisů *„představuje časovou strukturu minimálních (bezrizikových) výnosových měr“*[14]. K ní se pak vztahují výnosové křivky ostatních dluhopisů (popřípadě ostatních cenných papírů), kdy výnosová křivka státních dluhopisů se navýší o hodnotu, která se jinak nazývá kreditní rozpětí (credit spread) daného dluhopisu.

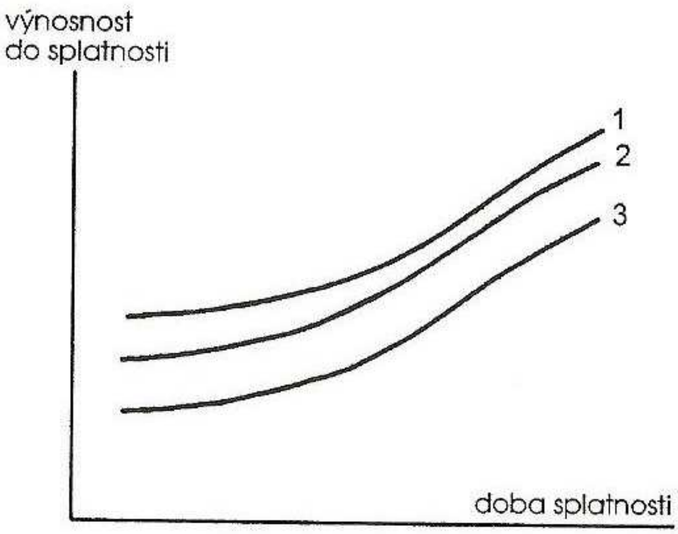
---

[13] CIPRA, Tomáš. Matematika cenných papírů, str. 40.
[14] BUREŠ, Jan. Úvod do problematiky výnosových křivek, str. 4.



Obr. 1 Výnosová křivka

Výnosová křivka pro dluhopisy s nižší mírou rizika leží vždy pod výnosovou křivkou pro rizikovější dluhopisy, což je způsobeno poskytnutou prémií za podstoupené riziko. Z následujícího grafu (Obr. 2) lze rozpoznat, že výnosová křivka státních dluhopisů je nejníže položena, nad ní se nachází výnosová křivka více rizikových dluhopisů a nejvýše umístěna je výnosová křivka pro nejrizikovější dluhopisy. Výnosová křivka pro státní dluhopisy je stabilnější než pro korporátní rizikové dluhopisy.



Obr. 2 Výnosové křivky pro korporátní dluhopis s ratingem A (křivka 1), AAA (křivka 2) a státní dluhopis (3)

(zdroj: LIŠKA, Václav, GAZDA, Jan. Kapitálové trhy a kolektivní investování)

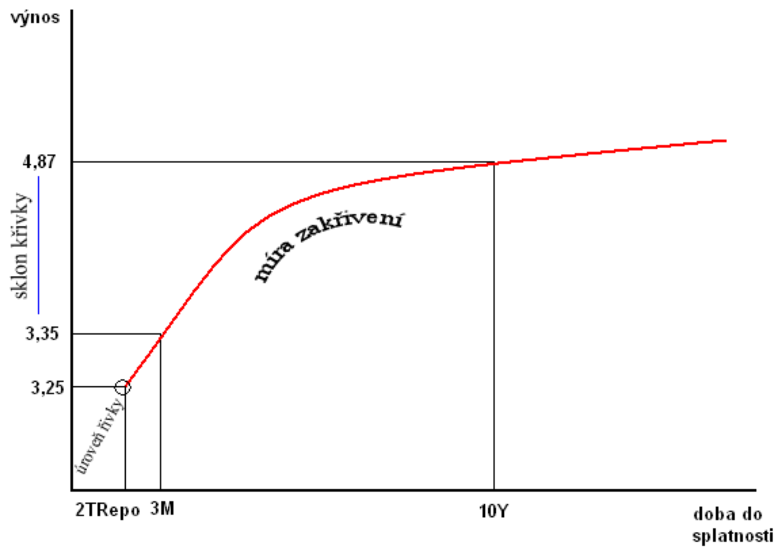
2.1. Tvar výnosové křivky

Tvar výnosové křivky můžeme posuzovat[15] a rozdělit do tří částí: úroveň, sklon a zakřivení. **Úroveň** je definována bodem, kde začíná výnosová křivka (krátký konec). Nejčastěji je určena 2T repo sazbou, kterou stanovuje centrální banka. **Sklon** křivky je vyjádřen jako rozdíl mezi dlouhodobými a krátkodobými sazbami. Je ovlivněna mnoha faktory (měnovou politikou CB, poptávkou po úvěrech, očekávání investorů a mezní produktivitou kapitálu), což se projevuje na tvaru křivky. Poslední částí je **zakřivení**, které poukazuje na to, že závislost mezi výnosem do splatnosti a dobou do splatnosti není lineární. Proto výnosová křivka nemá podobu přímky.

Podle tvaru můžeme rozlišovat výnosovou křivku:

- **rostoucí (pozitivně skloněnou)**,
- **klesající (inverzně skloněnou)**,
- **vyboulenou**,
- **plochou**.

Velmi často se setkáváme s rostoucím tvarem, kdy u dluhopisů s delší dobou splatnosti očekáváme vyšší výnosnost do splatnosti.



Obr. 3 Tvar výnosové křivky

(zdroj: BUREŠ, Jan. Úvod do problematiky výnosových křivek)

[15] BUREŠ, Jan. Úvod do problematiky výnosových křivek

2.2. Teorie vysvětlující tvar výnosové křivky

V následující kapitole přiblížím teorie, které se snaží vysvětlit tvar výnosové křivky. Jedná se o teorii očekávání, teorii preference likvidity, teorii oddělených trhů a teorii preferovaného umístění, které vysvětlují tvar a vývoj výnosové křivky. V teorii očekávání uvádím termíny spotová a forwardová úroková míra a praktický příklad výpočtu výnosnosti do splatnosti pro následující rok, jenž poukazuje na provázanost těchto úrokových měr.

Teorie očekávání (expectations theory)

Tato teorie předpokládá, že součet výnosů uskutečněných při opakované investici do krátkodobých dluhopisů je roven výnosu do dlouhodobého dluhopisu. Investor pak neupřednostňuje žádnou z těchto splatností, protože mu obě přinášejí stejné výnosy. Tento fakt platí pouze za předpokladu, že dluhopisy s různými délkami splatnosti jsou dokonalými substituty. Pak teorie očekávání *„znamená, že forwardový výnos odpovídající určitému budoucímu období je nejlepším odhadem budoucího spotového výnosu pro toto období.“* [16]

Spotová úroková míra je úroková míra, která platí od současného okamžiku po určitou sjednanou dobu.

Forwardová úroková míra je úroková míra, která platí od nějakého budoucího okamžiku po určitou sjednanou budoucí dobu.

Mezi spotovými a forwardovými úroky platí tento vztah:

$$(1+s_n)^n(1+f_{nk})^k = (1+s_{n+k})^{n+k}, \qquad (4)$$

kde $\boldsymbol{s_n}$ je spotová úroková míra platná od současného okamžiku na n let, $\boldsymbol{f_{nk}}$ je forwardová úroková míra platná od n-tého roku do roku $\boldsymbol{n+k}$ a $\boldsymbol{s_{n+k}}$ je spotová úroková míra platná od současného okamžiku na $n+k$ let.

Příklad Uvažujeme dva bezkuponové dluhopisy: jednoletý s 6% výnosností do splatnosti a dvouletý s 8% výnosností do splatnosti. Zajímá nás, jaká bude výnosnost do splatnosti u jednoletého dluhopisu pro následující rok.

[16] CIPRA, Tomáš. Matematika cenných papírů, str. 45.

Víme, že n = 1, k = 1, s_1 = 0,06 a s_2 = 0,08, po dosazení do vzorce (4) dostaneme:

$$(1+s_1)(1+f_{1,1})=(1+s_2)^2$$

$$(1+0{,}06)(1+f_{1,1})=(1+0{,}08)^2$$

$$f_{1,1}=\frac{1{,}08^2}{1{,}06}-1$$

$$f_{1,1}=0{,}1004, \qquad \text{tj. } 10{,}04\%$$

Potom forwardová úroková míra (výnosnost) do splatnosti jednoletých dluhopisů pro následující rok je přibližně kolem 10%.

Rovnost mezi spotovými a forwardovými úroky zamezuje vzniku arbitráže. To znamená, že pokud by investice do krátkodobých dluhopisů umožňovaly vyšší výnos, pak by zvýšená poptávka po nich následně tento vztah vyrovnala (došlo by ke snížení úrokových sazeb). Přestože to není pravidlem, mají výnosové křivky rostoucí tvar. Lze předpokládat, že tento tvar výnosové křivky kopíruje očekávání investorů, kteří předpokládají neustálý růst úrokových měr v budoucnu. V této situaci však nelze spoléhat na pouhé zvýšení sazeb, proto tato rovnice byla rozšířena o rizikovou prémii, kterou požadují investoři za dlouhodobé poskytnutí svých aktiv. Pak rozšířená rovnice teorie očekávání má tvar:

$$(1+s_n)^n(1+f_{nk})^k=(1+s_{n+k})^{n+k}+rp_{n+k},$$

kde $\boldsymbol{rp_{n+k}}$ je riziková prémie přisuzována ***(n+k)***-letým dluhopisům.

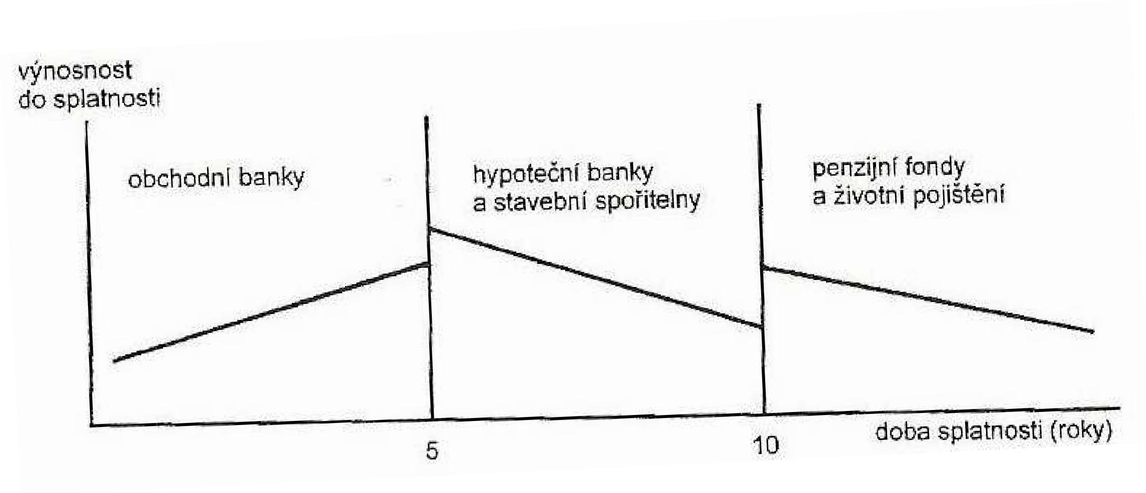
Teorie preference likvidity

Teorie preference likvidity opět předpokládá rostoucí tvar výnosové křivky, která je na rozdíl od předešlé teorie způsobena prémií za likviditu. Investoři preferující krátkodobé investice zde předpokládají, že dlouhodobé dluhopisy nesou vyšší míru rizika způsobenou rostoucí dobou splatnosti.[17] Zatímco emitenti dávají přednost půjčkám s delší dobou splatnosti. Jestliže se pak investoři mají vzdát svých likvidnějších prostředků na delší dobu, požadují za to vyšší míru výnosnosti ve formě prémie za likviditu.

[17] *„ Jejich durace a úroková elasticita jsou větší než u krátkodobých dluhopisů a v důsledku toho ceny dlouhodobých dluhopisů kolísají více než ceny dluhopisů krátkodobých, a to i když krátkodobé úrokové sazby kolísají více než sazby dlouhodobé." In:* CIPRA, Tomáš. Kapitálové trhy a kolektivní investování, str. 110.

Teorie oddělených trhů (segmentation theory)

Segmentační teorie předpokládá, že na kapitálovém trhu jsou krátkodobé a dlouhodobé dluhopisy striktně oddělené a neexistuje mezi nimi pojítko ve formě forwardových sazeb. Potom je tento trh rozdělen do vzájemně nezávislých segmentů podle různých dob splatnosti. To znamená, že někteří investoři preferují krátkodobé dluhopisy z důvodů likvidnějších prostředků (např. obchodní banky) a někteří zas preferují dlouhodobé dluhopisy za účelem pokrytí svých dlouhodobých závazků (např. pojišťovny). Samotná výnosová křivka je pak sestrojena ze součtu všech jednotlivých segmentů.



Obr. 4 Výnosová křivka jako výsledek segmentační teorie
(zdroj: LIŠKA, Václav, GAZDA, Jan. Kapitálové trhy a kolektivní investování)

Rostoucí tvar výnosové křivky je především vysvětlován větším zájmem o krátkodobé dluhopisy, které se vyznačují nižší mírou rizika. Vyšší poptávka pak způsobuje růst ceny, což snižuje výnos. Naopak u dluhopisů s delší dobou splatnosti zájem investorů klesá, cena se snižuje a výnos roste.

Teorie preferovaného umístění (liquidity preference theory)

Teorie preferovaného umístění neboli teorie prémie za likviditu, vychází z teorie oddělených trhů a teorie očekávání. Teorie preferovaného umístění připouští vzájemnou provázanost krátkodobých a dlouhodobých dluhopisů, ale respektuje investorovy preference určitých dob splatností a předpokládá, že investor bude požadovat prémii za riziko.

Důvod pro poskytnutí této prémie se u jednotlivých teorií liší. Pro teorii očekávání je důvodem to, že je investor ochoten se svých aktiv vzdát na delší dobu splatnosti a prémie je zde vnímána jako odměna za toto podstoupené riziko. U teorie preferovaného umístění investor požaduje prémii za to, že poskytuje své finanční prostředky do aktiva s jinou dobou splatnosti, než měl v úmyslu.

Teorie preferovaného umístění je jako jediná z teorií schopna vysvětlit jakýkoliv tvar výnosové křivky, dokonce i *plochý*,[18] a předpokládá, že rostoucí tvar v praxi převládá nad klesajícím tvarem výnosové křivky.

2.3. Typy výnosových křivek

Typy výnosových křivek se různí podle spotového nebo forwardového výnosu do splatnosti a vztahují se k době splatnosti bezkuponových či kuponových dluhopisů. V následující kapitole se zabývám výnosovými křivkami bezkuponových a kuponových dluhopisů a forwardovou výnosovou křivkou, které jsem doplnila o grafy souvisejícími s problematikou dluhopisů.

Výnosová křivka bezkuponových dluhopisů (zero-coupon yield curve)

Vyjadřuje vztah mezi okamžitými úrokovými mírami do splatnosti v závislosti na době do splatnosti bezkuponových dluhopisů. Z důvodu nízkého obchodování s kuponovými dluhopisy na kapitálovém trhu se tato křivka odvozuje od výnosové křivky kuponových dluhopisů. Většina bezkuponových dluhopisů bývá emitována na kratší dobu splatnosti (např. jednoleté a dvouleté bezkuponové dluhopisy).

Výnosová křivka kuponových dluhopisů (coupon-bearing yield curve)

Vyjadřuje vztah mezi okamžitými úrokovými mírami do splatnosti a dobou do splatnosti kuponových dluhopisů. Nejčastěji se pro konstrukci výnosové křivky kuponových dluhopisů používají dluhopisy v pari[19], jejichž výnosy do splatnosti jsou rovny kuponovým sazbám.

---

[18] *„Výnosy jsou tak podél celé křivky identické, což za předpokladu existence prémie interpretujeme jako očekávaný mírný pokles úrokových sazeb. Pokud pro srovnání použijeme příklad čisté hypotézy očekávání, tak ta interpretuje plochou výnosovou křivku jako období stabilních (stejných) sazeb po celé délce výnosové křivky."* In: BUREŠ, Jan. Úvod do problematiky výnosových křivek, str. 10.

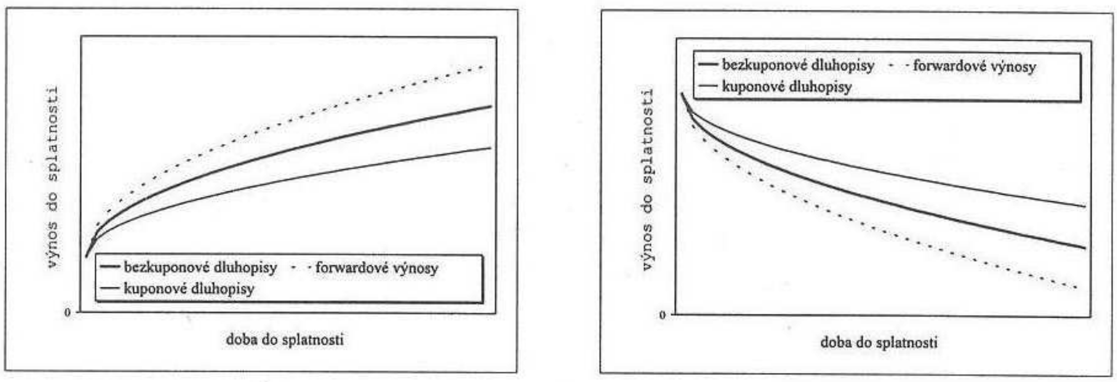
[19] Dluhopisy v pari se prodávají za nominální hodnotu. Dluhopisy pod pari se prodávají za cenu nižší než je jejich nominální hodnota tzv. prodej s diskontem. Dluhopisy nad pari se prodávají za cenu vyšší než je jejich nominální hodnota s tzv. prémií. In: http://journal.fsv.cuni.cz/storage/2524_199806jj.pdf

Forwardová výnosová křivka (forvard yield curve)

Vyjadřuje vztah mezi budoucími úrokovými mírami (forwardovými) do splatnosti a dobou do splatnosti kuponových nebo bezkuponových dluhopisů. Výnosové křivky, které nepovažujeme za forwardové, obecně nazýváme spotovými výnosovými křivkami.

Máme-li rostoucí výnosovou křivku, pak nejníže umístěná je výnosová křivka kuponových dluhopisů. Nad ní se nachází výnosová křivka bezkuponových dluhopisů a nejvýše umístěnou je forwardová výnosová křivka. Pořadí těchto křivek je způsobeno tím, že kuponové dluhopisy, u kterých dochází k výplatám kuponu před datem do splatnosti, mají při diskontování těchto plateb nižší úrokové míry než bezkuponové dluhopisy, které podléhají diskontování plateb k datu splatnosti.

Máme-li klesající výnosovou křivku, pak nastane opačná situace, jež můžeme vidět na grafu (b).



Obr. 5 Vztahy mezi (a) rostoucími výnosovými křivkami;
(b) klesajícími výnosovými křivkami
(zdroj: CIPRA, Tomáš. Matematika cenných papírů)

2.4. Konstrukce výnosové křivky

. Konstrukce výnosové křivky je z důvodů častých omezení velice obtížná (množství dluhopisů podobných vlastností s různou dobou splatnosti).

Výnosová křivka je nejčastěji zkonstruována ze *„strips bondů*“[20] nebo z dluhopisů. Pro výpočet časové struktury úrokových měr jsem si vybrala konstrukci pomocí státních dluhopisů metodou bootstrap (bootstrappping). V této metodě potřebuji

[20] Do českého jazyka se překládá jako „svlečené dluhopisy“. Jedná se o kuponové dluhopisy rozdělené na dvě části, nominální hodnotu a kuponové platby, které jsou pak samostatně obchodovatelné.

nejdříve vypočítat výnosy kuponových dluhopisů, které pak převedu na odpovídající výnosy bezkuponových dluhopisů. Takto získám úrokové míry pro různé doby splatnosti a následně mohu graficky sestrojit hledanou časovou strukturu úrokových měr. Existují však i další metody např. vyhlazovací a splinové (exponenciální spliny).

2.5. Výnosnost dluhopisu

Výnosnost dluhopisu můžeme změřit mnoha způsoby – kuponovou výnosností, běžnou výnosností, výnosností za dobu držby nebo výnosností do splatnosti. Kuponová a běžná výnosnost se vztahuje pouze ke kuponovým platbám. Ostatní výnosnosti získáme ze vztahu mezi kuponovými platbami, nákupní a prodejní cenou.

Kuponová výnosnost (r_k) poměřuje hodnotu kuponové platby $\boldsymbol{C}$ s nominální hodnotou dluhopisu $\boldsymbol{NH}$:

$$r_K = \frac{C}{NH}.$$

Běžná výnosnost (r_B) poměřuje hodnotu kuponové platby $\boldsymbol{C}$ s tržní cenou dluhopisu $\boldsymbol{PV}$:

$$r_B = \frac{C}{PV}.$$

Výnosnost za dobu držby (r_r) je dána matematickým vzorcem:

$$r_R = \frac{C}{PV_0} + \frac{PV_k - PV_0}{k \cdot PV_0},$$

kde symbolem $\boldsymbol{PV_0}$ označíme nákupní cenu dluhopisu a $\boldsymbol{PV_k}$ jeho prodejní cenu v čase $\boldsymbol{k}$, kde $k < n$ a n je splatnost.

Výnosnost do splatnosti

Výnosnost do splatnosti (YTM- yield to maturity) je míra zisku investice do dluhopisu za dobu od momentální koupě za aktuální tržní cenu až do konce doby splatnosti. Jinak řečeno, je to vnitřní míra výnosnosti pro množství finančních prostředků vynaložených na nákup dluhopisu.

Z kapitoly 1.5.1. víme, že cenu kuponového dluhopisu při diskrétním úročení vypočítáme podle vzorce (2):

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r_i)^i} + \frac{NH}{(1+r_n)^n}$$

Nahradíme-li ve vzorci úroky jednou společnou hodnotou ***r***, dostaneme vztah:

$$P = \sum_{i=n}^{n} \frac{C}{(1+r)^i} + \frac{NH}{(1+r)^n}$$

kde ***r*** je výnosnost do splatnosti.

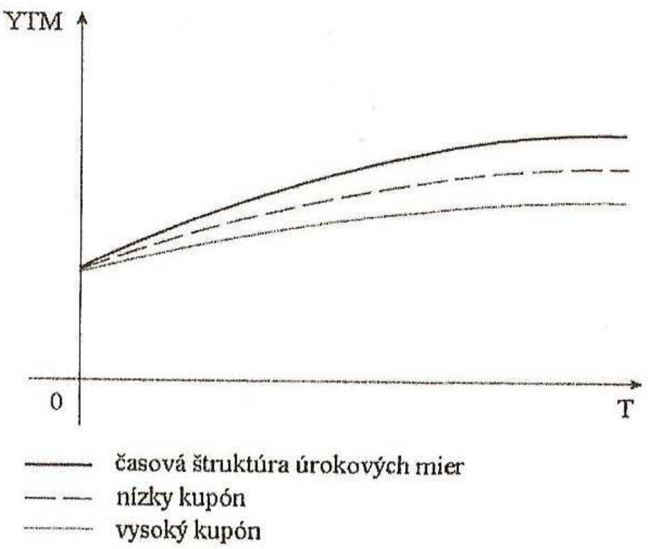
Přibližně ji můžeme vypočítat pomocí tohoto vztahu:

$$r \cong \frac{C + \frac{NH - TC}{n}}{0{,}5NH + 0{,}5TC},$$

kde ***TC*** je tržní cena dluhopisu a ***n*** je počet let do jeho splatnosti.

<u>Vztah mezi časovou strukturou úrokových měr a výnosem do splatnosti:</u>

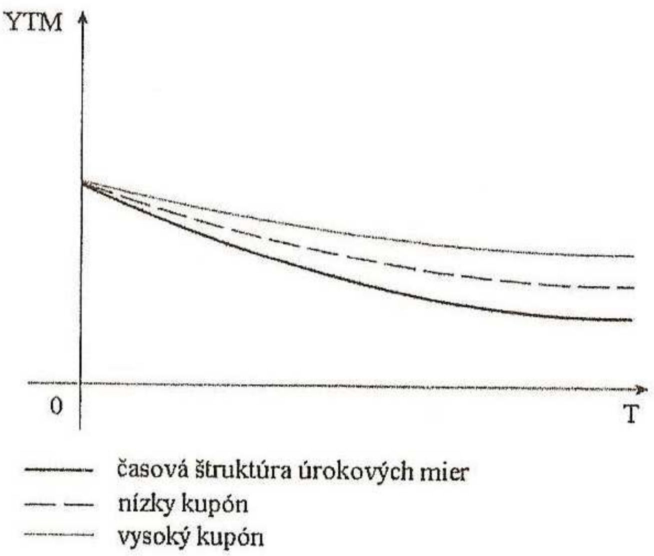
Rostoucí výnosová křivka předpovídá ekonomický růst, který je spojen s růstem cen a rostoucí cenovou hladinou (zvýšení cen výrobků a služeb). Dochází k inflaci a centrální banka zvyšuje úrokové sazby, čímž ovlivňuje krátký konec výnosové křivky (v České republice je dán 2T repo sazbou). Očekává-li trh růst, může očekávat i vyšší inflaci a tím i vyšší úrokové sazby. V období s vyššími úrokovými sazbami se zvyšuje zájem o dluhopisy s proměnlivým kuponem a klesá zájem o cenu dluhopisů s pevným kuponem. Je-li výnosová křivka rostoucí, zvýšení kuponu způsobuje posun křivky směrem dolů.



Obr. 6 Rostoucí časová struktura úrokových měr

(zdroj: MELICHERČÍK, I., OLŠAROVÁ, L., ÚŘADNÍČEK, V. Kapitoly z finančnej matematiky 1)

Klesající křivka může být odrazem hospodářského poklesu. Krátkodobé sazby jsou příliš vysoké a investoři očekávají pokles úrokových sazeb. Proto je výhodné investovat do dluhopisů s pevnou úrokovou sazbou. V případě, že výnosová křivka je klesající, zvýšení kuponu táhne křivku směrem nahoru.



Obr. 7 Klesající časová struktura úrokových měr
(zdroj: MELICHERČÍK, I., OLŠAROVÁ, L., ÚŘADNÍČEK, V. Kapitoly z finančnej matematiky 1)

3. Durace

Durace dluhopisu je známa jako průměrná doba, za kterou lze získat zpět investovaný kapitál. Používáme ji při výpočtu změny tržní ceny dluhopisu v souvislosti se změnou výnosu do splatnosti, což znamená, že duraci lze též považovat za míru citlivosti ceny dluhopisu na změnu úrokové míry. Durace je také důležitým nástrojem k sestavení imunizovaného dluhopisového portfolia, pomocí něhož lze za předpokladu paralelního posunu časové struktury úrokových měr zajistit dostatečný kapitál na pokrytí našich závazků (např. úvěr).

Předpokládejme, že nastane paralelní posun časové struktury úrokových měr. Pak se okamžité úrokové míry $r_1, r_2, \ldots, r_n$ změní o λ a výnosová křivka bude určena novými úrokovými mírami $r_1 + \lambda, r_2 + \lambda, \ldots, r_n + \lambda$ v původním časovém období.

Příklad č.1

K dispozici máme dva bezkuponové dluhopisy: jednoletý a desetiletý. Za předpokladu, že časová struktura úrokových měr je neměnná (mají všechny výnosy jednu společnou hodnotu ***q***), máme zjistit, jak se budou chovat ceny dluhopisů při paralelním posunu časové struktury úrokových měr. Známe NH = 10000 Kč, q = 4%, Δr =1% (výnosová křivka se posune o 1% směrem nahoru).

Ceny bezkuponových dluhopisů vypočítáme podle vztahu (3):

$$PV = \frac{NH}{(1+\mathrm{r_n})^n}\ .$$

Při 4% výnosu dostaneme ceny dluhopisů:

$$PV_1 = \frac{10000}{(1+0{,}04)^1} \cong 9615\,\text{Kč},$$

$$PV_2 = \frac{10000}{(1+0{,}04)^{10}} \cong 6756\ \text{Kč}.$$

Ceny dluhopisů při posunu výnosové křivky:

$$PV_1 = \frac{10000}{(1+0{,}05)^1} \cong 9524\,\text{Kč},$$

$$PV_2 = \frac{10000}{(1+0{,}05)^{10}} \cong 6139\,\text{Kč}.$$

Při změně výnosů cena PV_1 jednoletého bezkuponového dluhopisů klesla přibližně o 91 Kč a u desetiletého bezkuponového dluhopisu došlo k poklesu ceny PV_2 přibližně o 617 Kč. Na tomto příkladu můžeme vidět, že dluhopisy s delší dobou splatnosti jsou citlivější na změny úrokových měr než dluhopisy s kratší dobou splatnosti.

3.1. Druhy durací

V následující kapitole se věnuji těmto druhům durací: Macaulayova durace, modifikovanou Macaulayovu durace, durace při diskrétním úročení, kvazimodifikovaná durace a Fischer-Weilova durace.

3.1.1. Macaulayova durace

Macaulayova durace je váženým průměrem dob splatností (střední doba životnosti dluhopisu), ve kterých jsou vypláceny jednotlivé kuponové platby.[21] Duraci tedy vypočítáme podle matematického vzorce:

$$D = \frac{\frac{C}{1+r} + \frac{2C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{n(C+NH)}{(1+r)^n}}{\frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C+NH}{(1+r)^n}}. \qquad (5)$$

Tento zápis můžeme také upravit tímto způsobem:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} i \frac{C}{(1+r)^i} + \frac{nNH}{(1+r)^n}}{PV(r)} \qquad (6)$$

Durace je důležitým nástrojem, pomocí kterého vyšetřujeme míru citlivosti změny ceny dluhopisu $PV(r)$ při změnách v úrokových mírách Δr. Tento vztah vyjádříme:

[21] CIPRA, Tomáš. Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou, str. 111, BOHANESOVÁ, Eva. Finanční matematika, str. 95

$$\frac{PV(r+\Delta r)-PV(r)}{PV(r)} \approx \frac{-D}{1+r}\cdot \Delta r$$ [22]

.

Při výpočtech můžeme používat tzv. *modifikovanou Macaulayovu duraci*:

$$D_M = \frac{D}{1+r} = \frac{1}{PV(r)}\left(\sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{C}{(1+r)^{i+1}} + \frac{nNH}{(1+r)^{n+1}}\right). \quad (7)$$

Potom

$$\frac{PV(r+\Delta r)-PV(r)}{PV(r)} \approx \frac{-D_M(1+r)}{1+r}\cdot \Delta r$$

$$\frac{PV(r+\Delta r)-PV(r)}{PV(r)} \approx -D_M \cdot \Delta r \qquad (8)$$

Vztah (8) lze získat též pomocí Taylorova rozvoje funkce *PV(r):*

$$PV(r+\Delta r) \approx PV(r) + PV'(r)\Delta r \qquad \Big|\div PV(r)$$

$$\frac{PV(r+\Delta r)-PV(r)}{PV(r)} \approx \frac{1}{PV} PV'\Delta r$$

$$\frac{PV(r+\Delta r)-PV(r)}{PV(r)} \approx \frac{1}{PV}\left(\sum_{i=1}^{n} -i\cdot\frac{C}{(1+r)^{i+1}} + \frac{nNH}{(1+r)^{n+1}}\right)\cdot \Delta r$$

$$-D_M = \frac{1}{PV(r)}\left(\sum_{i=1}^{n} -i\cdot\frac{C}{(1+r)^{i+1}} + \frac{nNH}{(1+r)^{n+1}}\right)$$

$$\frac{PV(r+\Delta r)-PV(r)}{PV(r)} \approx -D_M \cdot \Delta r$$

Macaulayova durace pro různé typy dluhopisů:

Durace bezkuponového dluhopisu je rovna době splatnosti ***n***:

$$D = n\,.$$

Durace konzoly (věčného dluhopisu) je dána limitním přechodem výrazu D_n (durace klasického dluhopisu) pro $n \to \infty$:

[22] Vztah je odvozen ve skriptu in: BOHANESOVÁ, Eva. Finanční matematika, str. 96

$$D = \lim_{n\to\infty} D_n ,$$

$$D = \frac{1+r}{r} .$$[23]

3.1.2. Durace pro diskrétní úročení

Je-li dána úroková míra r_i a platby C vypláceny v periodách i, pak cena dluhopisu má tvar:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r_i)^i} + \frac{NH}{(1+r_i)^n} .$$

Pokud se úroková míra posune o hodnotu λ (úroková míra se změní na $r_i + \lambda$), pak cena dluhopisu bude mít tvar:

$$PV(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r_i+\lambda)^i} + \frac{NH}{(1+r_i+\lambda)^n}$$

$$\frac{dPV(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n} (-i)\cdot \frac{C}{(1+r_i+\lambda)^{i+1}} + \frac{nNH}{(1+r_i+\lambda)^{n+1}} \;\Big|\div PV(\lambda)$$

$$\frac{1}{PV(\lambda)}\frac{dPV(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{PV(\lambda)}\sum_{i=1}^{n} (-i)\cdot \frac{C}{(1+r_i+\lambda)^{i+1}} + \frac{nNH}{(1+r_i+\lambda)^{n+1}} \qquad \Big|\lambda = 0$$

$$\frac{1}{PV(0)}\frac{dPV(0)}{d\lambda} = \frac{1}{PV(0)}\sum_{i=1}^{n} (-i)\cdot \frac{C}{(1+r_i)^{i+1}} + \frac{nNH}{(1+r_i)^{n+1}}$$

$$-\frac{1}{PV(0)}\frac{dPV(0)}{d\lambda} = -D_Q ,$$

$$D_Q = \frac{-dPV(0)}{d\lambda}\frac{1}{PV(0)} \qquad (9)$$

kde D_Q nazýváme *kvazimodifikovanou durací*.

Analogicky jako u modifikované durace pomocí Taylorova rozvoje funkce *PV(λ), λ = 0* s přírůstkem *Δλ* lze dojít ke vztahu:

---

[23] Výpočet limity je proveden in: BOHANESOVÁ, Eva. Finanční matematika, str. 88

$$\frac{PV(r_i + \Delta\lambda) - PV(r_i)}{PV(r_i)} \cong -D_Q \cdot \Delta\lambda . \quad (10)$$

3.1.3. Fischer- Weilova durace

Zde je cena dluhopisu definována pomocí spojitého úročení, tj.:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} C \cdot e^{-r_i t_i} + NH \cdot e^{-r_i t_n} ,$$

kde r_i úroková míra a platby C vypláceny v periodách i, $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$.

Pokud se úroková míra posune o hodnotu λ, pak cena dluhopisu bude mít tvar:

$$PV(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} C \cdot e^{-(r_i + \lambda)t_i} + NH \cdot e^{-(r_i + \lambda)t_n}$$

$$\frac{dPV(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n} (-t_i) \cdot C \cdot e^{-(r_i + \lambda)t_i} + (-t_i) NH \cdot e^{-(r_i + \lambda)t_n} \quad \Big| \div PV(\lambda)$$

$$\frac{1}{PV(\lambda)} \frac{dPV(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{PV(\lambda)} \sum_{i=1}^{n} (-t_i) \cdot C \cdot e^{-(r_i + \lambda)t_i} + (-t_i) NH \cdot e^{-(r_i + \lambda)t_n} \quad \Big| \ \lambda = 0$$

$$\frac{1}{PV(0)} \frac{dPV(0)}{d\lambda} = \frac{1}{PV(0)} \sum_{i=1}^{n} (-t_i) \cdot C \cdot e^{-r_i t_i} + (-t_i) NH \cdot e^{-r_i t_n}$$

$$D_{FW} = \frac{1}{PV(0)} \sum_{i=1}^{n} (-t_i) C \cdot e^{-r_i t_i} + (-t_i) NH \cdot e^{-r_i t_n} \qquad (11)$$

$$\frac{1}{PV(0)} \frac{dPV(0)}{d\lambda} = -D_{FW}$$

$$D_{FW} = -\frac{1}{PV(0)} \frac{dPV(0)}{d\lambda} ,$$

kde D_{FW} je Fischer-Weilova durace.

Analogicky jako u modifikované durace pomocí Taylorova rozvoje funkce *PV(λ)*, *λ = 0* s přírůstkem *Δλ* lze dojít ke vztahu:

$$\frac{PV(r_i + \Delta\lambda) - PV(r_i)}{PV(r_i)} \cong -D_{FW} \cdot \Delta\lambda . \qquad (12)$$

3.2. Imunizace dluhopisového portfolia

Durace je důležitým nástrojem při sestavování imunizovaného dluhopisového portfolia. Cílem imunizace dluhopisového portfolia je odstranění úrokového rizika, jež je způsobeno růstem nebo poklesem úrokových měr. Této vlastnosti nejčastěji využívají banky při svých investicích do zástavních listů nebo investiční manažeři, kteří pomocí strategie svazování durací (matching strategy) požadují, aby celkovou duraci dluhopisového portfolia zvolili tak, aby se rovnala duraci portfolia závazků jejich společnosti.

Uvažujeme-li *N* různých dluhopisů, které mají různé doby splatnosti, pak durace dluhopisového portfolia má tvar:

$$D = \frac{PV_1 D_1 + \cdots + PV_N D_N}{PV_1 + \cdots + PV_N}, \quad (13)$$

kde PV_k je cena k-tého dluhopisu v dluhopisovém portfoliu pro $k=1,...,N$ a D_k je durace *k*-tého dluhopisu pro $k=1,...,N$.

Pro vybraný soubor dvou dluhopisů platí, že w je podíl prvního souboru dluhopisu, který investujeme do výsledného portfolia a $(1-w)$ je podíl druhého souboru dluhopisu. Pak lze vztah (13) modifikovat způsobem:

$$w \cdot D_1 + (1-w) \cdot D_2 = D, \qquad (14)$$

Z rovnice vyplývá, že můžeme teoreticky dosáhnout durace portfolia *D*, kde $D \in \langle D_1, D_2 \rangle$ pro $D_1 \leq D_2$ pokud platí vztah:

$$w = \frac{D_2 - D}{D_2 - D_1}.$$

Jestliže máme dluhopis, jehož cena dluhopisu $PV(1+r^*)^D$ se vztahuje k času $t = D$, pak pro duraci dluhopisu platí:

$$\frac{d\left[PV(1+r^*)^D\right]}{dr} = 0 \qquad (15)$$

Což znamená, že hodnota dluhopisu zúročená do budoucna, právě o dobu durace, je imunní vůči nekonečně malému zvýšení nebo snížení úrokových měr.

4. Praktická část

V praktické části se budu snažit o vytvoření výnosové křivky, kterou následně použiji k sestavení dluhopisového portfolia imunizovaného od změn v úrokových mírách, za předpokladu paralelního posunu této výnosové křivky. Portfolio bude složené z různých dvojic dluhopisů takovým způsobem, abychom na konci doby držby, která je stejná jako doba splatnosti úvěru, získali prodejem portfolia kapitál k jednorázovému uhrazení úvěru.

Řešení:

1. Sestrojím výnosovou křivku pomocí metody bootstrap.
2. Vytvořím portfolia složená ze dvou druhů dluhopisů s různými délkami dob splatnosti, imunizovaná vůči změnám v úrokových mírách, za použití durace dluhopisů.
3. Paralelním posunem výnosové křivky směrem nahoru i dolů budu zjišťovat, zda je dluhopisové portfolio dostatečně imunní vůči těmto změnám v úrokových mírách.

4.1. Sestrojení výnosové křivky

K vytvoření výnosové křivky budu potřebovat dostatečné množství dluhopisů s podobnými vlastnostmi (viz předpoklady na str. 17), které by obsáhly co nejvíce různých dob splatností. Proto jsem si vybrala státní dluhopisy obchodované na Pražské burze. Jejich nominální hodnota je 10 000 Kč a délka splatnosti u bezkuponových dluhopisů je 3, 6, 9 měsíců a 1 rok. Kuponové dluhopisy jsou vydané na dobu 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14 a 15 let. Je zřejmé, že se neobchoduje s dluhopisy šestiletými, sedmiletými, jedenáctiletými a dvanáctiletými. Pro přesnost jsem si vybrala více krátkodobých dluhopisů. Pro konstrukci výnosové křivky jsem použila jako nejnižší úrokovou míru 2T repo sazbu ČNB[24] a pro úrokové míry platné pro 3, 6, 9 a 12 měsíců zprůměrované průměrné výnosy příslušných dluhopisů, kde hodnoty průměrných výnosů jsem převzala ze zdroje – internetových stránek ČNB.[25] Úrokové míry dvou a víceletých dluhopisů byly spočteny metodou bootstrap.[26] V ceně těchto dluhopisů nejsou zahrnuty alikvotní úrokové výnosy plynoucí z naběhlých kuponových plateb.
V následující tabulce uvádím vstupní data, která jsem použila pro konstrukci výnosové křivky.

[24] http://www.cnb.cz/cs/menova_politika/mp_nastroje/index.html#mp_nastroje
[25] www.cnb.cz
[26] BUREŠ, Jan. Úvod do problematiky výnosových křivek, str. 14

Dluhopis	Výnos (%)	Kuponová sazba (%)	Průměrná cena (% z nominální hodnoty)
2T(k 2/2010)	1,00		
3M	1,87	-	-
6M	1,74	-	-
9M	2,07	-	-
1Y	2,11	-	-
2Y	-	-	-
3Y	-	4,10	98,09
4Y	-	3,55	98,16
5Y	-	3,55	96,80
6Y	-	-	-
7Y	-	-	-
8Y	-	3,80	99,99
9Y	-	4,00	96,01
10Y	-	5,00	106,24
11Y	-	-	-
12Y	-	-	-
13Y	-	3,75	96,18
14Y	-	4,70	93,79
15Y	-	5,70	109,25

Tab. 1 Státní dluhopisy

Pro sestrojení výnosové křivky potřebuji znát hodnoty všech úrokových měr. Bootstrap metodou vypočítám úrokové míry pro jednotlivé dluhopisy dvouleté až patnáctileté doby splatnosti a pomocí lineární interpolace dopočítám ceny a kuponové sazby dvojic dluhopisů šestiletou, sedmiletou, jedenáctiletou a dvanáctiletou splatností.

<u>Postup při výpočtu úrokových měr dvou a víceletých dluhopisů</u>

Úrokovou míru r_n jednotlivých dluhopisů budu počítat podle vztahu (1):

$$PV = \frac{C}{1+r_1} + \frac{C}{(1+r_2)^2} + \frac{C}{(1+r_3)^3} + \cdots + \frac{C}{(1+r_{n-1})^{n-1}} + \frac{C+NH}{(1+r_n)^n},$$

kde $r_1, \ldots r_n$ jsou úrokové míry, C je kuponová platba, NH je nominální hodnota dluhopisu a PV je cena dluhopisu.

Dluhopis dvouletý

Známe r_1 = 2,11 % p.a.; c_2 = 3,25 % p.a.; NH = 10 000 Kč; PV = 9 858 Kč

$C_2 = 0{,}0325 \cdot 10000 = 325\,\text{Kč}$

$$PV_2 = \frac{C_2}{1+r_1} + \frac{C_2 + NH}{(1+r_2)^2}$$

$$9858 = \frac{325}{1+0{,}021} + \frac{325+10000}{(1+r_2)^2}$$

$$r_2 = \sqrt[2]{\frac{10325}{9858-318{,}28}} - 1$$

$$\underline{r_2 \cong 4{,}03\%\ \text{p.a.}}$$

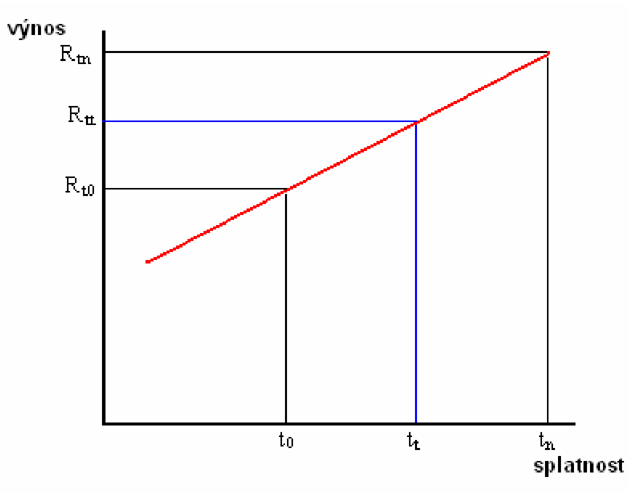
Výnosnost dvouletého dluhopisu je přibližně rovna 4,03 % p.a. Tímto způsobem dopočítám zbývající úrokové míry dalších kuponových dluhopisů, tj. v diskontních faktorech použiji úrokové míry z výnosové křivky, které jsou už známé, a úrokovou míru r_n, která je v posledním diskontním faktoru dopočítáme.

Postup při výpočtu úrokových měr v případě dluhopisů, které nejsou na trhu dostupné

1) Stanovíme cenu a kuponovou sazbu dluhopisu, kterou vypočteme pomocí lineární interpolace podle následujícího vztahu:

$$R_{tt} = R_{t0} + \frac{R_{tn} - R_{t0}}{t_n - t_0} * (t_t - t_0), \qquad (16)$$

kde R_{tt} je neznámá cena dluhopisu s dobou splatnosti t_t, R_{to} je cena dluhopisu s dobou splatnosti t_0 a R_{tn} je cena dluhopisu s dobou splatnosti t_n (to platí i pro kuponovou sazbu).



Obr. 8 Lineární interpolace

(zdroj: BUREŠ, Jan. Úvod do problematiky výnosových křivek)

2) Vypočítané hodnoty (cenu dluhopisu a kuponovou sazbu) dosadíme do vzorce (1) a zjistíme úrokovou míru:

$$PV = \frac{C}{1+r_1} + \frac{C}{(1+r_2)^2} + \frac{C}{(1+r_3)^3} + \cdots + \frac{C}{(1+r_{n-1})^{n-1}} + \frac{C+NH}{(1+r_n)^n}.$$

<u>Výpočet úrokové míry pro šestiletý a sedmiletý dluhopis</u>

K dispozici máme následující údaje:

Dluhopis	Výnos	Kuponová sazba (%)	Průměrná cena (% z NH)
5Y	4,29	3,55	96,80
6Y	-	-	-
7Y	-	-	-
8Y	-	3,80	99,99

Tab. 2 Data pro bootstrap metodu

1) Nejprve použijeme lineární interpolaci pro určení ceny obou dluhopisů, ve formě soustavy rovnic:

$PV_5 = 9680\,\text{Kč}$ a $PV_8 = 9999\,\text{Kč}$

$$1.\ PV_6 = PV_5 + \frac{PV_7 - PV_5}{7-5}(6-5)$$

$$2.\ PV_7 = PV_6 + \frac{PV_8 - PV_6}{8-6}(7-6)$$

$$1.\ PV_6 = 9680 + \frac{PV_7 - 9680}{2}$$

$$2.\ PV_7 = PV_6 + \frac{9999 - PV_6}{2}$$

$$1.\ PV_6 = 9680 + \frac{1}{2}\left(PV_6 + \frac{9999 - PV_6}{2} - 9680\right)$$

$$PV_6 = 9680 + \frac{1}{2}PV_6 + \frac{1}{4}9999 - \frac{1}{4}PV_6 - \frac{1}{2}9680$$

$$\underline{PV_6 = 9786{,}33\,\text{Kč}}$$

$$2.\ PV_7 = 9786{,}33 + \frac{9999 - 9786{,}33}{2}$$

$$\underline{PV_7 = 9892{,}665\,\text{Kč}}$$

Podle stejného postupu vypočítám, pomocí soustavy dvou rovnic, neznámé kuponové sazby c_6 a c_7:

$c_5 = 3{,}55\,\%$ p.a. a $c_8 = 3{,}80\,\%$ p.a.

$$1.\; c_6 = c_5 + \frac{c_7 - c_5}{7-5}(6-5)$$

$$2.\; c_7 = c_6 + \frac{c_8 - c_6}{8-6}(7-6)$$

$$1.\; c_6 = 3{,}55 + \frac{c_7 - 3{,}55}{2}$$

$$2.\; c_7 = c_6 + \frac{3{,}80 - c_6}{2}$$

$$1.\; c_6 = 3{,}55 + \frac{1}{2}\left(c_6 + 1{,}9 - \frac{1}{2}c_6 - 3{,}55\right)$$

$$c_6 = 3{,}55 + \frac{1}{2}c_6 - \frac{1}{4}c_6 + \frac{1}{2}(1{,}9 - 3{,}55)$$

$\underline{c_6 \cong 3{,}63\,\%}$ p.a.

$$2.\; c_7 = 3{,}63 + \frac{3{,}80 - 3{,}63}{2}$$

$\underline{c_7 \cong 3{,}72\,\%}$ p.a.

2) Podle vztahu (1) dopočítáme úrokové míry pro šestiletý a sedmiletý dluhopis:

Dluhopis šestiletý

$$C_6 = 0{,}0363 \cdot 10000 = 363\,\text{Kč}$$

$$PV_6 = \frac{C_6}{1+r_1} + \frac{C_6}{(1+r_2)^2} + \frac{C_6}{(1+r_3)^3} + \frac{C_6}{(1+r_4)^4} + \frac{C_6}{(1+r_5)^5} + \frac{C_6 + NH}{(1+r_6)^6}$$

$$9786{,}33 = \frac{363}{1+0{,}021} + \frac{363}{(1+0{,}0403)^2} + \frac{363}{(1+0{,}0486)^3} + \frac{363}{(1+0{,}0406)^4} + \frac{363}{(1+0{,}0429)^5} + \frac{363+10000}{(1+r_6)^6}$$

$$r_6 = \sqrt[6]{\frac{10363}{9786{,}33 - 1609{,}59}} - 1$$

$\underline{r_6 \cong 4{,}03\,\%}$ p.a.

Dluhopis sedmiletý

$C7 = 0{,}0372 \cdot 10000 = 372\,\text{Kč}$

$$PV_7 = \frac{C_7}{1+r_1} + \frac{C_7}{(1+r_2)^2} + \frac{C_7}{(1+r_3)^3} + \frac{C_7}{(1+r_4)^4} + \frac{C_7}{(1+r_5)^5} + \frac{C_7}{(1+r_6)^6} + \frac{C_7 + NH}{(1+r_7)^7}$$

$$9892{,}665 = \frac{372}{1+0{,}021} + \frac{372}{(1+0{,}0403)^2} + \frac{372}{(1+0{,}0486)^3} + \frac{372}{(1+0{,}0406)^4} + \frac{372}{(1+0{,}0429)^5} +$$

$$+ \frac{372}{(1+0{,}0403)^6} + \frac{372+10000}{(1+r_7)^7}$$

$$r_7 = \sqrt[7]{\frac{10372}{9892{,}665 - 1943{,}02}} - 1$$

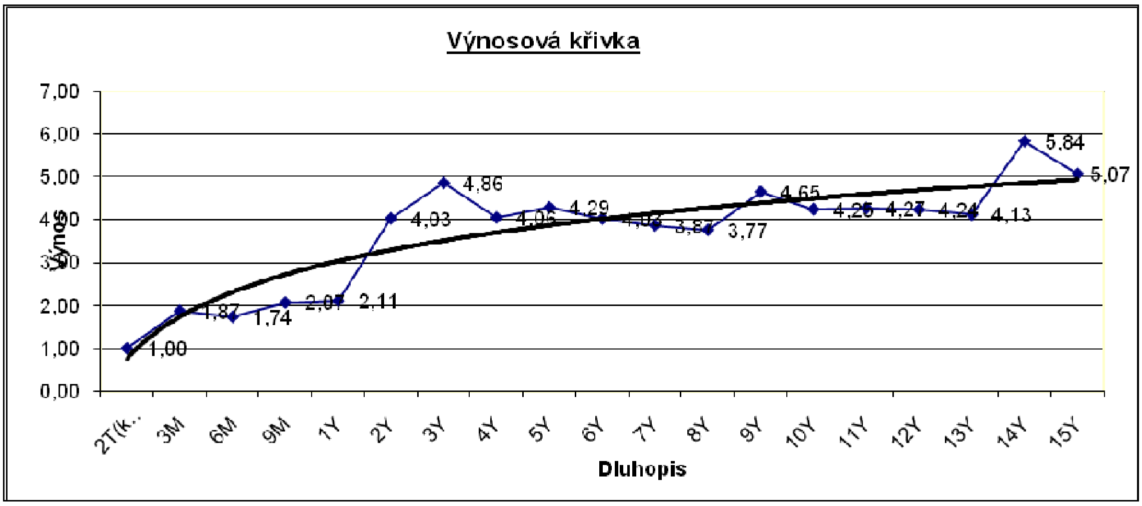
$\underline{r_7 \cong 3{,}87\,\%\ \text{p.a.}}$

Při výpočtu úrokových měr u jedenáctiletého a dvanáctiletého dluhopis jsem postupovala stejně.

<u>Z vypočítaných výnosů můžeme graficky sestrojit výnosovou křivku</u>

Dluhopis	Výnos
2T(k 2/2010)	1,00
3M	1,87
6M	1,74
9M	2,07
1Y	2,11
2Y	4,03
3Y	4,86
4Y	4,06
5Y	4,29
6Y	4,03
7Y	3,87
8Y	3,77
9Y	4,65
10Y	4,25
11Y	4,27
12Y	4,24
13Y	4,13
14Y	5,84
15Y	5,07

Tab. 3 Vypočítané úrokové míry



Obr. 9 Výnosová křivka

Na grafu výnosové křivky vidíme, že její krátký konec je definován 2T Repo sazbou, která v únoru činila 1% p.a.[27] Pro zjištění tvaru křivky jsem pomocí vhodného nástroje, logaritmické spojnice trendu, v Excelu vyjádřila trend. Z něj je patrné, že křivka má rostoucí trend, a proto ji nadále budeme považovat za rostoucí. Úrokové míry pro doby splatnosti 4 – 13 let kolísají kolem hodnoty 4% p.a., v tomto rozmezí se křivka ukazuje být plochou. Na křivce jsou patrná 3 lokální maxima – pro úrokové míry r_3 = 4,86 % (p.a.), r_9 = 4,65 % (p.a.) a r_{14} = 5,84 % p.a. Sklon výnosové křivky je popsán rozdílem mezi patnáctiletým dluhopisem s r_{15} = 5,07 % p.a. a tříměsíčním dluhopisem s r_{3M} = 1,87 % p.a. Na **Obr. 9** u krátkodobých dluhopisů dochází k výraznému poklesu a mezi dvouletým, čtyřletým a třináctiletým, patnáctiletým dochází naopak k výraznému růstu.

Nyní sestrojenou křivku použiji pro sestavení dluhopisových portfolií, imunizovaných vůči paralelnímu posunu výnosové křivky (tj. předpokládáme, že všechny úrokové míry se mění o stejné přírůstky či úbytky) a složených vždy ze dvou druhů dluhopisů s různými dobami splatnosti s cílem získat kapitál na jednorázové uhrazení úvěru ve výši 1 000 000 Kč. Imunizace je zajištěna podmínkou stejných durací portfolia i úvěru a po zjištění složení portfolia bude zkontrolována. Aby následující výpočty byly přesnější, tak při sestavování dluhopisového portfolia nebudu používat dluhopisy (s šestiletou, sedmiletou, jedenáctiletou a dvanáctiletou splatností), u nichž jsem neznámé hodnoty úrokových měr musela dopočítat.

[27] http://www.cnb.cz/cs/menova_politika/mp_nastroje/index.html#mp_nastroje

4.2. Vzorový příklad – imunizace portfolia tvořeného tří a osmiletými dluhopisy

Máme tříletý dluhopis s kuponovou sazbou 4,10% p.a. s průměrnou cenou 9809 Kč a nominální hodnotou 10 000 Kč (nominální hodnota je pro všechny dluhopisy stejná). A osmiletý dluhopis s kuponovou sazbou 3,80% p.a. s průměrnou cenou 9999 Kč a se stejnou nominální hodnotou. Úvěr je ve výši 1 milionu na dobu 5 let a chceme investovat takové množství peněz tak, abychom mohli po 5 letech tento úvěr jednorázově splatit.

Rok	Úroková míra	Diskontní faktor	Kupon	PV_3	D_M	D_Q	D_{FW}
1	2,11%	0,979336	410	401,53	401,53	393,23	401,44
2	4,03%	0,924023	410	378,85	757,70	728,35	756,50
3	4,86%	0,867302	10410	9028,62	27085,85	25830,49	26993,04
SUMA				9808,99	28245,07	26952,06	28150,98
DURACE					2,88	2,75	2,87

Tab. 4 Dluhopis s 3letou dobou splatnosti

Rok	Úroková míra	Diskontní faktor	Kupon	PV_8	D_M	D_Q	D_{FW}
1	2,11%	0,979336	380	372,15	372,15	364,46	372,07
2	4,03%	0,924023	380	351,13	702,26	675,05	701,15
3	4,86%	0,867302	380	329,57	988,72	942,90	985,34
4	4,06%	0,852834	380	324,08	1296,31	1245,73	1292,15
5	4,29%	0,810563	380	308,01	1540,07	1476,72	1533,20
6	4,03%	0,788948	380	299,80	1798,80	1729,12	1790,29
7	3,87%	0,7666	380	291,31	2039,16	1963,18	2028,76
8	3,77%	0,743747	10380	7720,10	61760,78	59516,99	61419,20
SUMA				9996,15	70498,25	67914,15	70122,14
DURACE					7,05	6,79	7,01

Tab. 5 Dluhopis s 8letou dobou splatnosti

V **Tab. 4** uvádím výpočty pro tříletý dluhopis. V prvním sloupci je doba splatnosti, ve druhém sloupci jsou úrokové míry pro tyto jednotlivé doby splatnosti a ve třetím sloupci jsou vypočítané hodnoty diskontního faktoru podle vzorce $1/(1+r_i)^i$. Čtvrtý sloupec obsahuje kuponové platby vyplacené v příslušném období a v pátém sloupci jsem vypočítala cenu dluhopisu podle vzorce (2). V posledních třech sloupcích se věnuji výpočtům jednotlivých durací, tj. v šestém sloupci je Macaulayova durace podle vztahu (7), v sedmém sloupci je kvazimodifikovaná durace podle vztahu (9) a v osmém sloupci je Fisher-Weilova durace podle vztahu (11). Stejné výpočty jsem provedla i pro osmiletý dluhopis v **Tab. 5**.

Rok	Úroková míra	Diskontní faktor	ÚVĚR	D_M	D_Q	D_{FW}
1	2,11%	0,979336	0	0	0	0
2	4,03%	0,924023	0	0	0	0
3	4,86%	0,867302	0	0	0	0
4	4,06%	0,852834	0	0	0	0
5	4,29%	0,810563	1000000	4052813,95	3886100,25	4034724,06
SUMA			810562,79	4052813,95	3886100,25	4034724,06
DURACE				5,00	4,79	4,98

Tab. 6 Úvěr na 5 let

V **Tab. 6** uvádím výpočty pro úvěr. Ve třetím sloupci je výpočet současné hodnoty úvěru v pátém roce. A v posledních třech sloupcích uvádím výpočty jednotlivých durací úvěru jako u tříletého a osmiletého dluhopisu.

Imunizace portfolia

Nyní potřebujeme, aby se durace našeho dluhopisového portfolia vyrovnala duraci pětiletého úvěru v hodnotě 1 000 000 Kč. Tímto zajistíme, aby naše dluhopisové portfolio bylo imunní vůči paralelnímu posunu úrokových měr.

Složení portfolia pro případ každé z durací počítám podle vztahu (14), kde jsem pomocí Microsoft Excel- Hledání řešení dostala tyto hodnoty:

	Rel.podíly (v %)	Počty ks	Cena dnes (Kč) na 1 dluhopis	Hodnota (Kč)	D_M (roky)
Dluhopis 3:	49,186	41	9808,99	398682,07	2,88
Dluhopis 8:	50,814	41	9996,15	411880,72	7,05
Úvěr:			810562,79		5,00
Hodnota portfolia:				810562,79	
Durace portfolia:					5,00

Tab. 7 Imunizované dluhopisové portfolio (Macaulayova durace)

	Rel.podíly (v %)	Počty ks	Cena dnes (Kč) na 1 dluhopis	Hodnota (Kč)	D_Q (roky)
Dluhopis 3:	49,527	41	9808,99	401447,38	2,75
Dluhopis 8:	50,473	41	9996,15	409115,41	6,79
Úvěr:			810562,79		4,79
Hodnota portfolia:				810562,79	
Durace portfolia:					4,79

Tab. 8 Imunizované dluhopisové portfolio (kvazimodifikovaná durace)

	Rel.podíly (v %)	Počty ks	Cena dnes (Kč) na 1 dluhopis	Hodnota (Kč)	D_{FW} (roky)
Dluhopis 3: Dluhopis 8: Úvěr:	49,093 50,907	41 41	9808,99 9996,15 810562,79	397931,75 412631,04	2,87 7,01 4,98
Hodnota portfolia:				810562,79	
Durace portfolia:					4,98

Tab. 9 Imunizované dluhopisové portfolio (Fisher-Weilova durace)

Na uvedených tabulkách můžeme vidět, že relativní podíly imunizovaného dluhopisového portfolia jsou ve všech třech případech přibližně stejné. Relativní podíl tříletého dluhopisu je přibližně 49% a osmiletého dluhopisu je přibližně 51%.

Kontrola imunizace

V následujících výpočtech budu předpokládat paralelní posun časové struktury úrokových měr dolů a nahoru, konkrétně posuny lambda budou činit +1, -1, +3, -3, +5, -5, +10, -10 procentních bodů. Při výpočtu budu opět užívat vzorce (7), (9) a (11) pro výpočty jednotlivých durací, kdy ke každé úrokové míře připočtu nebo odečtu změnu úrokové míry λ.

Změna úrok. měr (v % bodech)	Rel. podíl dluhopisu 3	Rel. podíl dluhopisu 8	D_M (roky) dluhop. 3	D_M (roky) dluhop. 8	D_M (roky) úvěru
-10	53%	47%	2,90	7,38	5
-5	51%	49%	2,89	7,23	5
-3	51%	49%	2,88	7,16	5
-1	50%	50%	2,88	7,09	5
0	49%	51%	2,88	7,05	5
1	49%	51%	2,88	7,01	5
3	48%	52%	2,87	6,93	5
5	46%	54%	2,87	6,85	5
10	43%	57%	2,86	6,62	5

Tab. 10 Výsledky imunizace (Macaulayova durace)

Změna úrok. měr (v % bodech)	Rel. podíl dluhopisu 3	Rel. podíl dluhopisu 8	D_Q (roky) dluhop. 3	D_Q (roky) dluhop. 8	D_Q (roky) úvěru
-10	53%	47%	3,06	7,87	5,3
-5	51%	49%	2,89	7,32	5,04
-3	51%	49%	2,83	7,11	4,94
-1	50%	50%	2,78	6,90	4,84
0	50%	50%	2,75	6,79	4,79
1	49%	51%	2,72	6,69	4,75
3	48%	52%	2,67	6,49	4,66
5	47%	53%	2,61	6,29	4,57
10	43%	57%	2,49	5,81	4,37

Tab. 11 Výsledky imunizace (kvazimodifikovaná durace)

Změna úrok. měr (v % bodech)	Rel. podíl dluhopisu 3	Rel. podíl dluhopisu 8	D_{FW} (roky) dluhop. 3	D_{FW} (roky) dluhop. 8	D_{FW} (roky) úvěru
-10	53%	47%	2,88	7,27	4,96
-5	51%	49%	2,89	7,23	5
-3	51%	49%	2,88	7,16	5
-1	50%	50%	2,88	7,07	4,99
0	49%	51%	2,87	7,01	4,98
1	49%	51%	2,86	6,95	4,97
3	47%	53%	2,85	6,81	4,94
5	46%	54%	2,83	6,66	4,9
10	42%	58%	2,78	6,2	4,77

Tab. 12 Výsledky imunizace (Fisher-Weilova durace)

Na uvedených tabulkách můžeme vidět, že relativní podíly imunizovaného dluhopisového portfolia se mění až při velkých změnách v úrokové míře (3 a více procentních bodů). Z výpočtů je tedy patrné, že zvolené dluhopisové portfolio lze před pohybem úrokových měr ochránit jen v případě, že jejich změny jsou velmi malé. Posuny o +/-5 a +/-10 procentních bodů jsem uvedla jen pro zajímavost, protože v praxi je takto velká změna úrokových měr nereálná.

Při paralelním posunu časové struktury úrokových měr jsou ve všech třech případech opět přibližně stejné.

Pokud se pozorně podíváme na výsledky v **Tab. 11** zjistíme, že vytvořené dluhopisové portfolio je nejvíce imunní vůči paralelnímu posunu časové struktury úrokových měr dolů. Naproti tomu v **Tab. 10** a **Tab. 12** je zřejmé, že dluhopisová portfolia jsou nejvíce imunní vůči paralelnímu posunu časové struktury úrokových měr nahoru. K větším změnám dochází až při paralelním posunu nahoru a dolů o 5% a 10%.

4.3. Imunizace dluhopisového portfolia pro další vybrané dvojice dluhopisů

Pro sestavení imunizovaného portfolia jsem si vybrala tyto dvojice dluhopisů:

Dvojice dluhopisů
Dluhopis 3 Dluhopis 8
Dluhopis 3 Dluhopis 9
Dluhopis 3 Dluhopis 10
Dluhopis 4 Dluhopis 8
Dluhopis 4 Dluhopis 9
Dluhopis 4 Dluhopis 10
Dluhopis 5 Dluhopis 8
Dluhopis 5 Dluhopis 9
Dluhopis 5 Dluhopis 10

Tab. 13 Vybrané dvojice dluhopisů

Jelikož sestrojená výnosová křivka je rostoucí, budeme pro další výpočty používat pouze Fisher-Weilovou durací.

V **Tab. 14** jsem pro zajímavost uvedla imunizované dluhopisové portfolio sestavené ze souboru dluhopisů dvouletého se čtyřletým a třináctiletého s patnáctiletým. V případě použití dluhopisů s krátkými dobami splatností (2 a 4 roky) vyprší tyto doby splatnosti ještě předtím, než nastane doba splatnosti úvěru (5 let). To znamená, že kapitál určený ke splacení úvěru je nutné ještě na tři roky, resp. jeden rok investovat. Méně rizikové bude investovat jen na jeden rok, čemuž odpovídají relativní podíly obou dluhopisů na portfoliu. Záporný podíl čtyřletého dluhopisu na portfoliu lze vysvětlit tak, že částku odpovídající podílu dvouletých dluhopisů si vypůjčíme a koupíme za ni dluhopisy čtyřleté.

V případě dlouholetých dluhopisů se splatnostmi 13 a 15 let je tomu naopak. Investor bude preferovat dluhopis s kratší dobou splatnosti, i když doby splatnosti obou dluhopisů jsou příliš dlouhé, abychom mohli získat jejich nominální hodnoty, které ke splátce úvěru přispějí nejvíce. V tom případě musíme nakoupit těchto dluhopisů takové množství, abychom z kuponů získali požadovanou částku na splacení úvěru. Protože v souboru beru v úvahu pouze dva dluhopisy, pak částku odpovídající hodnotě dluhopisů s delší dobou splatnosti si musím vypůjčit a investovat ji do dluhopisů s kratší dobou splatnosti, neboť ta je bližší době splatnosti úvěru. Ukazuje se tedy, že nemá smysl investovat do takových dluhopisů, jejichž doby splatnosti jsou buď obě kratší než doba splatnosti úvěru, nebo obě o mnoho delší. Lepším řešením je investovat do dluhopisů, které kombinují krátké a dlouhé doby splatnosti tak, aby doba splatnosti úvěru ležela mezi nimi.

V tabulce **Tab. 14** uvádím všechna zkoumaná dluhopisová portfolia, jejich složení, durace i délky dob splatnosti dluhopisů. Je zřejmé, že pokud jsem k dluhopisům s krátkou dobou splatnosti přiřazovala dluhopisy s delší dobou splatností, která se zvyšovala, pak podíl krátkodobého dluhopisu ve výsledném portfoliu roste a dlouhodobého dluhopisu klesá.

Portfolio	Podíly (%)	Durace (D_{FW})	Splatnost (roky)
Dluhopis 2 Dluhopis 4	-66% 166%	1,97 3,80	2 4
Dluhopis 3 Dluhopis 8	49% 51%	2,87 7,01	3 8
Dluhopis 3 Dluhopis 9	56% 44%	2,87 7,62	3 9
Dluhopis 3 Dluhopis 10	60% 40%	2,87 8,10	3 10
Dluhopis 4 Dluhopis 8	63% 37%	3,78 7,01	4 8
Dluhopis 4 Dluhopis 9	69% 31%	3,78 7,62	4 9
Dluhopis 4 Dluhopis 10	72% 28%	3,78 8,10	4 10
Dluhopis 5 Dluhopis 8	86% 14%	4,64 7,01	5 8
Dluhopis 5 Dluhopis 9	89% 11%	4,64 7,62	5 8
Dluhopis 5 Dluhopis 10	90% 10%	4,64 8,10	5 10
Dluhopis 13 Dluhopis 15	169% -169%	10,37 10,5	13 15

Tab. 14 Imunizovaná portfolia vybraných dvojic dluhopisů

Kontrola imunizace vybraných dvojic dluhopisů

Při posunu časové struktury úrokových měr se mění též ceny dluhopisů. Je zřejmé, že při snížení úrokové míry se ceny jednotlivých dluhopisů zvyšují a při zvýšení úrokových měr je tomu naopak. Se zvyšující se úrokovou mírou se zvyšuje hodnota diskontního faktoru, která pak snižuje jednotlivé finanční toky (kupony a jmenovitou hodnotu), a tedy i cenu dluhopisu

Na následující tabulce bych chtěla ukázat, jak se mění ceny jednotlivých dluhopisů při změně úrokových měr. Změny cen dluhopisů při jednotlivých změnách úrokových měr jsem počítala podle vztahu (1).

Změna úr. měr (v % bodech)	PV_3	PV_4	PV_5	PV_8	PV_9	PV_{10}
-10	13104,38	14431,91	15550,17	20789,77	21332,51	25145,77
-5	11294,12	11837,72	12183,28	14223,48	14083,62	16024,78
-3	10665,44	10969,23	10665,44	12313,15	12037,09	13531,69
-1	10083,66	10181,28	10124,7	10704,38	10340,24	11498,29
0	9808,99	9814,69	9679,72	9996,15	9601,79	10623,96
1	9544,46	9464,99	9259,04	9344,33	8927,15	9831,27
3	9043,99	8812,63	8484,5	8190,23	7745,32	8457,71
5	7789,96	8217,42	7789,96	7207,33	6752,78	7320,36
10	7550,83	6942,04	6343,87	5325,35	4893,99	5236,32

Tab. 15 Změny cen dluhopisů při změně úrokových měr

Dále jsem provedla kontrolu imunizace vybraných portfolií a zjistila jsem, že sestrojená dluhopisová portfolia jsou imunní vůči malým změnám úrokových měr jako v případě portfolia složeného z tříletého a osmiletého dluhopisu. Kontrolu imunizace jsem prováděla pro posun výnosové křivky o -1, + 1, - 5 a +5 procentních bodů.

Portfolio	-1% Podíly (%)	-1% Durace	0% Podíly (%)	0% Durace	+1% Podíly (%)	+1% Durace	Splatnost (roky)
Dluhopis 3	50%	2,88	49%	2,87	49%	2,86	3
Dluhopis 8	50%	7,07	51%	7,01	51%	6,95	8
Dluhopis 3	56%	2,88	56%	2,87	55%	2,86	3
Dluhopis 9	44%	7,70	44%	7,62	45%	7,53	9
Dluhopis 3	60%	2,88	60%	2,87	59%	2,86	3
Dluhopis 10	40%	8,20	40%	8,10	41%	7,98	10
Dluhopis 4	63%	3,79	63%	3,78	62%	3,77	4
Dluhopis 8	37%	7,07	37%	7,01	38%	6,95	8
Dluhopis 4	69%	3,79	69%	3,78	68%	3,77	4
Dluhopis 9	31%	7,70	31%	7,62	32%	7,53	9
Dluhopis 4	73%	3,79	72%	3,78	72%	3,77	4
Dluhopis 10	27%	8,20	28%	8,10	28%	7,98	10
Dluhopis 5	86%	4,66	86%	4,64	85%	4,62	5
Dluhopis 8	14%	7,07	14%	7,01	15%	6,95	8
Dluhopis 5	89%	4,66	89%	4,64	88%	4,62	5
Dluhopis 9	11%	7,70	11%	7,62	12%	7,53	8
Dluhopis 5	91%	4,66	90%	4,64	90%	4,62	5
Dluhopis 10	9%	8,22	10%	8,10	10%	7,98	10

Tab. 16Výsledky imunizace portfolií u zbývajících dluhopisů
při změně úrokových měr o -1% a +1%

Z **Tab. 16** vyplývá, že při změně úrokové míry o 1% dolů jsou zcela imunní dvojice dluhopisů zvýrazněné červenou barvou. Naopak při změně úrokové míry o 1% nahoru jsou zcela imunní dvojice dluhopisů označené zeleně.

Portfolio	-5%		0%		+5%		Splatnost (roky)
	Podíly (%)	Durace	Podíly (%)	Durace	Podíly (%)	Durace	
Dluhopis 3	51%	2,89	49%	2,87	46%	2,83	3
Dluhopis 8	49%	7,23	51%	7,01	54%	6,66	8
Dluhopis 3	58%	2,89	56%	2,87	52%	2,83	3
Dluhopis 9	42%	7,94	44%	7,62	48%	7,12	9
Dluhopis 3	63%	2,89	60%	2,87	55%	2,83	3
Dluhopis 10	37%	8,54	40%	8,10	45%	7,45	10
Dluhopis 4	65%	3,82	63%	3,78	60%	3,72	4
Dluhopis 8	35%	7,23	37%	7,01	40%	6,66	8
Dluhopis 4	71%	3,82	69%	3,78	65%	3,72	4
Dluhopis 9	29%	7,94	31%	7,62	35%	7,12	9
Dluhopis 4	75%	3,82	72%	3,78	68%	3,72	4
Dluhopis 10	25%	8,54	28%	8,10	32%	7,45	10
Dluhopis 5	88%	4,7	86%	4,64	82%	4,52	5
Dluhopis 8	12%	7,23	14%	7,01	18%	6,66	8
Dluhopis 5	91%	4,7	89%	4,64	86%	4,52	5
Dluhopis 9	9%	7,94	11%	7,62	14%	7,12	8
Dluhopis 5	92%	4,7	90%	4,64	87%	4,52	5
Dluhopis 10	8%	8,54	10%	8,10	13%	7,45	10

Tab. 17 Výsledky imunizace portfolií u zbývajících dluhopisů při změně úrokových měr o -5% a +5%

V tabulce **Tab. 17** jsou uvedeny relativní podíly vybraných dvojic dluhopisů při paralelním posunu výnosové křivky o -5, +5 procentních bodů. Změny relativních podílů dluhopisů v portfoliu jsou výraznější než v případě posunu výnosové křivky o +/-1 procentních bodů u portfolií uvedených v tabulce **Tab. 16**. Při poklesu úrokové míry o 5% se relativní podíly některých dluhopisů (označené červenou barvou) změní o 2% a ostatní o 3%. V opačném případě, při růstu úrokové míry o 5%, se relativní podíly některých dluhopisů (označené zelenou barvou) změní o 3% a zbývající o 4%, s výjimkou dvojice dluhopisů tříleté a desetileté splatnosti, kde se změní o 5%. Roste-li úroková míra, roste též podíl dluhopisu s delší dobou splatnosti, zřejmě v důsledku očekávání vyšších kuponových plateb, naopak, při poklesu úrokových měr lze čekat růst podílu dluhopisu s kratší dobou splatnosti.

Závěrem můžeme říct, že vytvořená dluhopisová portfolia jsou imunní při nepatrném paralelním posunu časové struktury úrokových měr tak, jako tomu bylo v případě portfolia složeného z tříletých a osmiletých dluhopisů.

Závěr

Ve své práci jsem chtěla ukázat sestavování dluhopisových portfolií z aktivně obchodovaných státních dluhopisů tak, aby pomocí nich bylo možno jednorázově splatit úvěr, přičemž předpokládáme, že doba držení portfolia je stejná jako doba splatnosti úvěru.

Obtížným úkolem bylo najít skupinku dluhopisů, která by splňovala kritéria k sestrojení výnosové křivky. Proto jsem si nakonec vybrala státní dluhopisy obchodované na Pražské burze, které většinu těchto kritérií splňují. K sestavení časové struktury úrokových měr jsem použila metodu bootstrap. U čtyř dluhopisů (s dobami splatnosti 6, 7, 11 a 12 let) bylo nutné nejprve dopočítat jejich ceny a kuponové sazby, což jsem provedla lineární interpolací, a následně jsem dopočítala úrokové míry pomocí rovnice pro teoretickou cenu dluhopisu. Ze získaných úrokových měr byla sestrojena výnosová křivka, u níž byl pomocí MS Excel zjištěn rostoucí trend.

Na základě získané časové struktury úrokových měr jsem hledala portfolio složené z tříletých a osmiletých dluhopisů, které mělo být imunizováno proti pohybu úrokových měr, přesněji proti paralelnímu posunu výnosové křivky. Úlohu jsem řešila pro duraci diskrétního úročení, Macaulayovu a Fisher- Weilovu duraci tříletého a osmiletého dluhopisu a výsledkem byla portfolia, která se ve svém složení od sebe příliš nelišila. Kontrolu imunizace jsem pak provedla posunováním výnosové křivky o +1, -1, +3, -3, +5, -5, +10, -10 procentních bodů. Zjistila jsem, že zvolené dluhopisové portfolio lze před pohybem úrokových měr ochránit jen v případě, že jejich změny jsou velmi malé.

Dále jsem řešila problém imunizace portfolia i s následnou kontrolou imunizace pro vybrané dvojice dluhopisů, a to již pouze pro Fisher –Weilovu duraci, jednak proto, že výnosová křivka byla rostoucí a jednak proto, že složení portfolia z tříletých a osmiletých dluhopisů bylo pro různé typy durací téměř stejné. Jestliže byly doby splatnosti vybraných dluhopisů voleny tak, že doba splatnosti úvěru ležela mezi nimi, pak se potvrdily závěry z předchozí úlohy, tj. portfolio je dobře chráněno pouze před nepatrným pohybem úrokových měr, tj. v rozmezí +/- 1 procentní bod. Při výraznějších změnách úrokových měr bylo nové složení portfolia též více odlišné od původního složení. Zajímavý výsledek jsem obdržela u portfolia sestaveného z dluhopisů, jejichž doby splatnosti byly obě kratší než doba splatnosti úvěru (konkrétně se jednalo o dvouleté a čtyřleté dluhopisy) nebo obě delší (třináctileté a patnáctileté dluhopisy).

V případě krátkodobých dluhopisů jsme si museli vypůjčit částku odpovídající hodnotě dluhopisu s kratší dobou splatnosti a investovat ji do dluhopisu s delší dobou splatnosti. V případě dlouholetých dluhopisů se splatnostmi 13 a 15 let tomu bylo naopak. Z tohoto důvodu, pak nemá smysl investovat do těchto dluhopisů a je lepší investovat do dluhopisů, které kombinují krátké a dlouhé doby splatnosti tak, aby doba splatnosti úvěru ležela mezi nimi.

Závěrem lze říci, že imunizace portfolia proti pohybu úrokových měr za předpokladu paralelního posunu časové struktury je vhodná tehdy, dochází-li jen k nepatrným změnám v úrokových mírách.

Seznam použité literatury:

BOHANESOVÁ, Eva, *Finanční matematika. I*, 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2006. ISBN 8024412942

CIPRA, Tomáš, *Matematika cenných papírů*, 1. vydání. Praha: HZ, 2000. ISBN 8086009351

CIPRA, Tomáš, *Pojistná matematika: teorie a praxe*, 1. vydání. Praha: Ekopress, 1999. ISBN 8086119173

CIPRA, Tomaš, *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*, 1. vydání. Praha: HZ, 1995. ISBN 8090191800

LIŠKA, V., GAZDA, J., *Kapitálové trhy a kolektivní investování*, 1. vydání. Praha: Professional Publishing, 2004. ISBN 8086419630

MELICHERČÍK, I., OLŠAROVÁ, L. ÚŘADNÍČEK, V., *Kapitoly z finančnej matematiky 1*, 1. vydání. Zvolen: Bratia Sabovci, s.r.o., 2005. ISBN

Elektronické zdroje:

BOHANESOVÁ, Eva. Finanční matematika. *Mant.upol.cz* [online]. [cit. 2010-01-15]. Dostupné z WWW: <http://mant.upol.cz/soubory/skripta/Bohanesova.pdf>.

BUREŠ, Jan. Úvod do problematiky výnosových křivek [online]. [cit. 2010-02-05]. Dostupné z WWW: <khp.vse.cz/KHP/WCMS_KHP.nsf/files/5HP501_vynosove_ krivky_pdf_zs07/ $file/5HP501_vynosove_krivky_pdf_zs07.pdf>.

Členění dluhopisů. *Peníze.cz* [online]. 29.07.2003, [cit. 2010-01-15]. Dostupné z WWW: <http://www.penize.cz/15922-cleneni-dluhopisu>.

JÍLEK, Josef. Úrokový a kapitálový výnos dluhopisů. *Finance a úvěr* [online]. 1998, 48, 6, [cit. 2010-02-05].

Dostupné z WWW: <http://journal.fsv.cuni.cz/storage/2524_199806jj.pdf>.

KOHOUT, Pavel. Ekonomická analýza výnosových křivek [online]. [cit. 2010-02-05]. Dostupné z WWW: <http://panda.hyperlink.cz/cestapdf/pdf05c3/kohout.pdf>.

URBÁNEK, David. Konvertibilní dluhopisy: chytrý hybrid akcie a dluhopisu. *FOND SHOP* [online]. 13.06.2006, [cit. 2010-01-15].
Dostupné z WWW: <http://www.penize.cz/18132-konvertibilni-dluhopisy-chytry-hybrid-akcie-a-dluhopisu>.

Zákon o dluhopisech. *PravniPredpisy.cz* [online]. 2010 [cit. 2010-01-15].
Dostupné z WWW:<http://www.pravnipredpisy.cz/predpisy/ZAKONY/1990/530990 /Sb_530990_------_.php#P1>.

WWW:

www.ceed.cz
www.cnb.cz
www.finance.cz
www.mfcr.cz
www.pse.cz