Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta

**Katedra optiky**
**Obor: Optika a optoelektronika**

# Dynamický Casimirův jev: Teoretické aspekty a numerická simulace

## Vojtěch Kala

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vedoucí práce: Mgr. Miroslav Gavenda, Ph.D.
Rok: 2018

| | |
|---|---|
| Vypracoval: | Vojtěch Kala |
| Studijní program: | B1701 Fyzika |
| Studijní obor: | Optika a optoelektronika, 3. ročník |
| Forma studia: | prezenční |
| Vedoucí bakalářské práce: | Mgr. Miroslav Gavenda, Ph.D. |

**Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

**Poděkování**

Děkuji vedoucímu práce Mgr. Miroslavu Gavendovi, Ph.D. za neocenitelné rady a pomoc při tvorbě bakalářské práce.

Vojtěch Kala

## Abstrakt

Tato práce se zabývá Dynamickým Casimirovým jevem, tedy generací fotonů z kvantového vakua vlivem časové změny okrajových podmínek [4]. Tento již experimentálně provedený jev, lze uvažovat například v podobě kavity s proměnnou délkou. V programu MATLAB byl vypracován numerický model, který umožňuje vyčíslit střední počet vygenerovaných částic v jednotlivých frekvenčních módech pro libovolný pohyb stěny kavity. Jedním z obdržených výsledků je vyzařovací charakteristika stěny kavity, která umožňuje získat hlubší názornou představu o průběhu jevu.

## Klíčová slova

Dynamický Casimirův jev, kavita proměnné délky, vyzařovací charakteristika

## Abstract

This bachelor thesis is concerned with Dynamical Casimir effect, which is a generation of photons out of quantum vacuum caused by boundary conditions changing in time [4]. It is possible to think about this experiment, which has already been done, as a cavity with changing width. A numerical simulation was made in MATLAB. The simulation calculates the mean number of generated particles in distinct frequency modes for any cavity wall movement. One of the results showed radiation characteristics of the cavity, which in return enables us to understand the Dynamical Casimir effect deeper.

## Keywords

Dynamical Casimir effect, variable-length cavity, radiation characteristics

# Obsah

# Úvod

Se jménem holandského fyzika Hendrika Casimira se setkáváme v názvu dvou fyzikálních jevů, které pramení z povahy polního vakua. Známější, statický Casimirův jev, předpověděl H. Casimir v roce 1948. Tímto názvem je označována makroskopická přitažlivá síla mezi ideálními zrcadly (nenabitými, perfektně vodivými, planparalelními plochami), způsobená vakuovými fluktuacemi[1]. Dynamický Casimirův jev, dále DCE z anglického *Dynamical Casimir Effect*, který je tématem této práce, byl poprvé popsán T. G. Moorem [2] a pojmenován Yablonovitchem a Schwingerem; jméno H. Casimira nese jako odkaz na vakuové fluktuace.

V přehledovém článku [3] je DCE popsán jako: "generace fotonů z kvantového vakua, způsobená časovou změnou hraničních podmínek, například pohybujícím se zrcadlem". V. V. Dodonov [4] uvádí obsáhlejší definici: "Termín DCE, zavedený Yablonovitchem a Schwingerem je v současnosti hojně používán pro množství jevů spojených s generací fotonů způsobenou rychlou změnou geometrie systému (konkrétně změnou ohraničení) nebo změnou vlastností materiálu elektricky neutrálních makroskopických nebo mezoskopických objektů."

Dále vzhledem k této definici se širším záběrem uvádí Dodonov dělení jevu v závislosti na způsobu generace fotonů. Označení *mirror induced DCE* náleží případu s rychlým pohybem zrcadel. *Parametric DCE* zahrnuje generaci fotonů způsobenou změnou vlastností materiálu bez pohybu nebo změny hranic či ohraničení.

V této práci je uvažován mirror induced DCE. Kvantové vakuum je uzavřeno v kavitě, prostoru ohraničeném dvěma planparalelními zrcadly.

# Kapitola 1

# Vývoj problematiky

## 1.1 Historické začátky

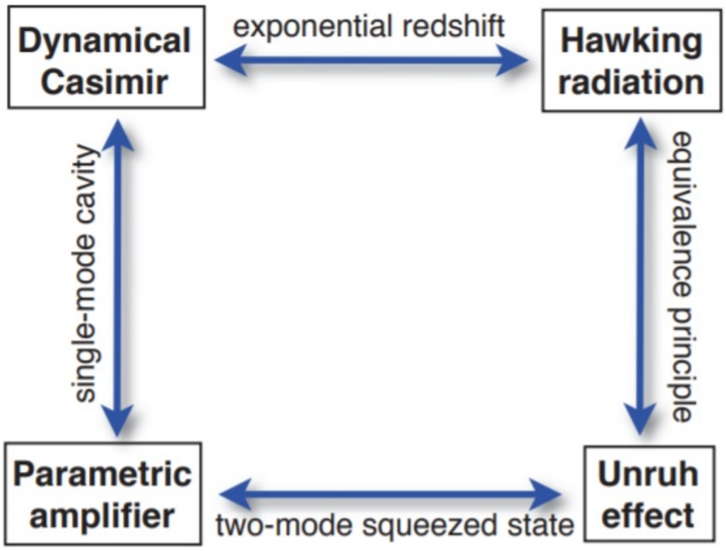
V roce 1970 uvedl Gerard T. Moore ve svém článku Quantum Theory of the Electromagnetic Field in Variable-Lenght One Dimensional Cavity [2] výpočet, který ukazoval, že pohybující se zrcadlo ve vakuu může vyzařovat fotony. Zároveň však uvádí, že pro nerelativistický a rovnoměrný pohyb zrcadla je množství záření nedetekovatelné. O 4 roky později dospěl britský fyzik Stephen Hawking k objevu Hawkingova záření - vyzařování černých děr [5] a za dva roky následoval objev Unruhova jevu.

Všechny tyto jevy lze klasifikovat jako zesilování vakuových fluktuací na fotony. Zároveň jsou vnitřně spjaty Bogoliubovou transformací, která je k výpočtu využita i v této práci. Příbuznost těchto jevů je zachycena v článku Colloquium: Stimulating uncertainity: Amplifying the quantum vacuum with superconducting circuits [3], viz Obrázek 1.2. "Unruhův jev je spjat s Hawkingovým zářením principem ekvivalence, který dává do souvislosti neinerciální vztažné soustavy a gravitační zrychlení. Exponenciální rudý posuv módů pole poblíž horizontu černé díry vede k Bogoliubově transformaci, která je shodná s tou pro DCE."(Pro určitý předepsaný pohyb zrcadla.) Metoda Bogoliubovy transformace bude dále zmíněna v teoretické části.

Není tedy divu, že vývoj poznání těchto fenoménů je časově i myšlenkově spjat. Když Eli Yablonovitch zavádí v roce 1989 termín *dynamický* (nebo alternativně *neadiabatický*) *Casimirův jev*, zmiňuje hned v prvním odstavci Hawkingovo záření i Unruhův jev. [6]

Motivace k zavedení pojmu dynamický Casimirův jev je následující: dvě paralelní vodivé desky umístěné do vakua mění strukturu vakuových fluktuací, redukují hustotu módů v prostoru, který ohraničují. Tlak záření na přivrácené plochy je poté menší než na odvrácené. Důsledkem je přitažlivá síla mezi deskami. Tato síla byla předpovězena Hendrikem Casimirem v roce 1948 [7].

Hlubší spojení s tímto jevem spatřoval Yablonovitch ve své představě experimentální realizace DCE. Základní nápad popsal těmito slovy: "Pozorujeme-li šíření elektromagnetického pole v základním stavu skrz okno, jehož index lomu klesá s časem, fázový posun pole je stejný jako při odrazu od zrychlujícího zrcadla. V tomto smyslu je nelineární optika experimentální cestou k vytvoření rychle se pohybujícího zrcadla"[6]. Na základě této představy navrhl využít vzniku plazmy při fotoionizaci plynu nebo tvorby párů elektron - díra v polovodičích. Při těchto jevech index lomu rychle klesá až k nulovým hodnotám. (Nakolik byl blízko skutečné experimentální




Obrázek 1.1: Relace mezi DCE a příbuznými jevy, převzato z [3]

realizaci DCE experimentu, uvidíme později.)

Dále v tomtéž článku dodává: "Poněvadž plazma ruší elektromagnetické záření pod svou vlastní frekvencí, modifikuje konfiguraci fluktuací základního stavu zodpovědné za Casimirovu sílu. Jsou-li změny (prostředí) dostatečně pomalé, odezva vakuových fluktuací je adiabatická. Na druhé straně uvažujeme náhlé neadiabatické změny, které způsobují skutečné přechody a zesílení kvantových fluktuací na reálné fotony. V tomto smyslu můžeme tento proces nazvat dynamickým nebo neadiabatickým Casimirovým jevem."[6]

Zajímavé je, že ačkoli objev a vývoj problematiky DCE souvisel s popisem dalších jevů způsobených vakuovými fluktuacemi, v případě Casimirovy síly tomu bylo trochu jinak. K tomuto tématu přivedla Casimira jeho dřívější práce, ve které se zabýval interakcí mezi vodivou deskou a atomem nebo molekulou. Prvotním teoretickým východiskem byla van der Waalsova síla. Následně zjistil, že ke stejným závěrům lze dospět i v případě, že jako výchozí bod zvolí změny energie základního stavu (zero point energy). Když se jej P. W. Milloni v dopise tázal, zda byl ke změně přístupu inspirován tehdejším vývojem problematiky Lambova posunu a anomálního magnetického momentu elektronu ve světle vakuových fluktuací, odpověděl:

> "Ne, nebyl jsem celkově obeznámen s prací Weltona a dalších. Šel jsem svou vlastní, trochu neohrabanou cestou.
> ...
> Během procházky jsem zmínil výsledky své práce Nielsu Bohrovi. Pěkné, řekl, to je něco nového. Svěřil jsme se mu, že jsem zmatený z nesmírně jednoduché formy popisu interakce na velké vzdálenosti a on zamumlal něco o "zero point energy". To bylo vše, ale nasměrovalo mě to zcela novým směrem"[8].

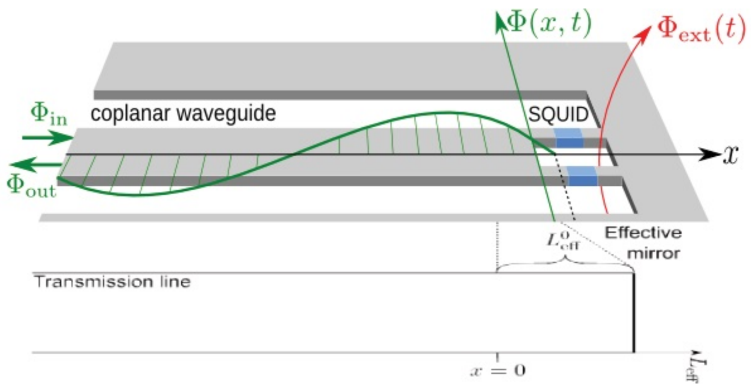
Historie Casimirova jevu tedy začíná na procházce s Nielsem Bohrem.

## 1.2 Experimenty

Lambův posuv a anomalita magnetického momentu elektronu jsou nepřímými důkazy existence vakuových fluktuací. Mooreův článek z roku 1970 [2] byl odpovědí na otázku, zda je možné provést přímější pozorování vakuových fluktuací, či jejich měřitelných důsledků.

Na cestě k experimentu však stále zůstávalo mnoho podstatných překážek. Experiment zahrnující pohyb zrcadla s rychlostí blízkou rychlosti světla je nerealizovatelný.

Konečně po čtyřiceti letech od článku Gerarda T. Moorea publikovala skupina autorů v čele s C. M. Wilsonem ze švédské Chalmers University of Technology v Göteborgu v časopisu Nature zprávu o první experimentální realizaci DCE [9]. V experimentální sestavě využili supravodivého obvodu s koplanárním vlnovodem, jehož efektivní délku byli schopni velmi rychle měnit pomocí citlivého magnetometru zvaného SQUID (v češtině krakatice, jinak zkratka z názvu Superconducting quantum interference device), který sestává ze dvou Josephsonových spojů paralelně zapojených do smyčky, viz Obrázek 1.2. Induktanci tohoto SQUIDu byli schopni měnit s frekvencí větší než 10 GHz a co se týká změny efektivní délky vlnovodu dosáhli zlomků rychlosti světla. Vzhledem k $c_0$ ve vlnovodu odpovídající asi 0,4 rychlosti světla ve vakuu, dosáhli rychlosti 0,25 $c_0$. SQUID umístili na konec vlnovodu, ovládali jej tokem magnetického pole, což vedlo ke změnám okrajových podmínek pro pole ve vlnovodu analogickým pohybujícímu se zrcadlu. Zařízení bylo chlazeno na 50mK.




Obrázek 1.2: Experimentální schéma realizace DCE převzato z [mit.edu]

Další zpráva o realizaci DCE byla uveřejněna v lednu roku 2013 Pasi Lähteenmäkiem a kol. [10]. K experimentální realizaci použili Josephsonův metamateriál umístěný do mikrovlnné kavity ochlazené podobně jako v předchozím experimentu na 50mK. Tento metamateriál byl tvořen 250 SQUIDy. Využili periodické změny indexu lomu prostředí zchlazeného do základního kvantového stavu.

# Kapitola 2

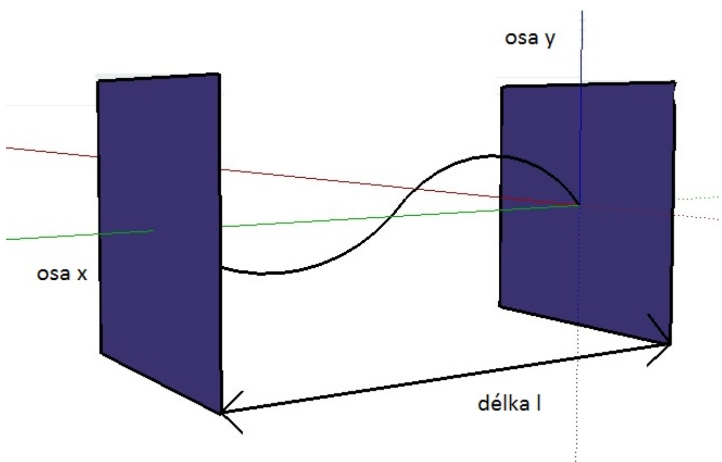
# Teoretická část

V této kapitole bude nejprve popsán rozvoj pole na intervalu konstantní, posléze proměnné délky do módových funkcí, na což bude navázáno v dalším výpočtu. Dále je využito hamiltonovského formalizmu a Bogoliubovy transformace.

## 2.1 Kavita s konstantní délkou

Následující rozbor částečně vychází z kvantování pole v knize Introductory Quantum Optics [11] avšak je přepočítán v soustavě jednotek $c = 1$, $\hbar = 1$ a $k_b = 1$ kvůli lepší korespondenci se samotným výpočtem DCE.

Uvažujme kavitu o délce $l$ neobsahující volné náboje, dielektrická prostředí ani zdroje záření. Hranice kavity tvoří dokonale vodivé paralelní roviny, kolmé na osu x a nacházející se v $x = 0$ a $x = l$. Nechť je zářivé pole uvnitř kavity polarizováno podél osy y. Vzhledem ke spojitosti složek elektromagnetického pole na rozhraní nabývá elektrická intenzita pole na hranicích nulové hodnoty. Ve vysoce vodivém prostředí je totiž elektromagnetické pole velmi rychle (uvažujeme nekonečně rychle) utlumeno.




Obrázek 2.1: Kavita

Elektromagnetické pole uvnitř kavity se řídí Maxwellovými rovnicemi. V případě, že zkoumaná oblast neobsahuje zdroje, nabývají tvaru:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \partial_t \vec{B} \tag{2.1}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \partial_t \vec{E} \tag{2.2}$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 \tag{2.3}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0. \tag{2.4}$$

Řešením Maxwellových rovnic a okrajových podmínek je elektrická intenzita:

$$E_y = \sqrt{\frac{2\omega^2}{V}} q_n(t) \sin(\omega_n x). \tag{2.5}$$

Význam funkce $q(t)$ bude objasněn později. $V$ je efektivní objem kavity a $\omega$ označuje frekvenci, která je s délkou kavity svázána následujícím vztahem:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}; \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$

Odtud je patrné, že neexistuje pouze jedna možná frekvence. Zároveň okrajové podmínky ústí v diskrétní spočetné spektrum. Tyto možnosti s různými frekvencemi budeme označovat jako frekvenční módy. Pro jednoduchost uvažujme pro další rozbor jednomódové pole; $n = 1$. Zajímavé je, že toto řešení je podobné mechanickým stojatým vlnám na struně konečné délky. Z pohledu mechanického vlnění odpovídají různé frekvenční módy různému počtu kmiten, který musí být vždy celočíselný.

Z tvaru elektrické intenzity a Maxwellových rovnic lze zjistit podobu magnetického pole:

$$B_y = \sqrt{\frac{2}{V}} \dot{q}(t) \cos(\omega_x) \tag{2.7}$$

$\dot{q}(t)$ označme jako $p(t)$. Pro objasnění funkce časového vývoje elektrické intenzity $q(t)$ spočtěme celkovou energii, která je v tomto případě rovna hamiltoniánu.

$$H = \frac{1}{2} \int (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) dV \tag{2.8}$$

Po dosazení (2.5) a (2.7) do (2.8) a integraci získáme tuto podobu hamiltoniánu:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) \tag{2.9}$$

Funkce p a q tedy nabývají významu kanonických proměnných. Z podoby hamiltoniánu jednoduchého harmonického oscilátoru

$$H = \frac{1}{2}(\frac{p^2}{m} + m\omega^2 q^2) \tag{2.10}$$

je patrno, že elektromagnetické pole v kavitě je po formální stránce shodné s oscilátorem o jednotkové hmotnosti. Celkové pole sestávající z nekonečného spočetného množství módů poté odpovídá nekonečné spočetné množině oscilátorů o frekvencích splňujících podmínku (2.6).

Nyní podle korespondenčního pravidla přiřadíme kanonickým proměnným odpovídající operátory $\hat{q}$ a $\hat{p}$. Elektrická intenzita, magnetická indukce a hamiltonián nyní také nabývají podoby operátorů:

$$\hat{E}_y = \sqrt{\frac{2\omega^2}{V}}\hat{q}(t)\sin(\omega x) \tag{2.11}$$

$$\hat{B}_y = \sqrt{\frac{2}{V}}\hat{p}(t)\sin(\omega x) \tag{2.12}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2) \tag{2.13}$$

přičemž ve tvaru magnetické indukce již byla časová derivace funkce $q(t)$ nahrazena $p(t)$.

Podobně jako se v klasické optice s výhodou využívá komplexní amplitudy elektrické intenzity (což je umožněno linearitou Maxwellových rovnic), zavádí se v kvantové optice kreační a anihilační operátor. Anihilační operátor je definován jako lineární kombinace kanonických proměnných:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\hat{q} + i\hat{p}). \tag{2.14}$$

Kreační operátor $\hat{a}^\dagger$ lze získat hermitovským sdružením rovnice (2.14). Analogie s komplexní amplitudou využívanou v klasické optice je potom patrná ze vztahu:

$$\hat{E}_y = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\sin(\omega x). \tag{2.15}$$

Celkový hamiltonián se rovná součtu hamiltoniánů jednotlivých módů:

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{\infty}\hat{H}_n. \tag{2.16}$$

## 2.2 Pole na intervalu proměnné délky

Při popisu tohoto problému nelze užít pouze kvantové teorie, ale je nutné vzít v potaz také relativistickou povahu jevu. Důsledky dynamického Casimirova jevu jsou signifikantní až při relativistických rychlostech zrcadla. Je tedy nutné prodiskutovat transformaci elektromagnetického pole, protože okrajové podmínky, nulovost elektrické intenzity na ploše zrcadla, se uplatňují v soustavě spojené s pohybujícím se zrcadlem.

Je konvencí použít přirozené jednotky, ve kterých $c = 1$, $\hbar = 1$ a $k_b = 1$.

Vyjděme z Maxwellových rovnic pro oblast beze zdrojů:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \partial_t\vec{B} \tag{2.17}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \partial_t\vec{E} \tag{2.18}$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 \tag{2.19}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{2.20}$$

s Dirichletovými okrajovými podmínkami. Ty korespondují s naším uvažovaným případem. Vzhledem ke spojitosti složek elektromagnetického pole na rozhraní nabývá elektrická intenzita pole na hranicích nulové hodnoty.

$$\vec{E}\| = 0; x = 0 \vee x = l \tag{2.21}$$

$$\vec{B}\perp = 0; x = 0 \vee x = l \tag{2.22}$$

Jak bylo zmíněno výše, tyto okrajové podmínky jsou uplatněny na povrchu zrcadla a v případě, že se zrcadlo pohybuje, platí v soustavě $S'$ spojené se zrcadlem. Musíme tedy okrajové podmínky přetransformovat do laboratorní soustavy $S$.

Za tímto účelem rozložíme pole do TE a TM módů a zavedeme vektorové potenciály $\vec{A_{\mathrm{TE}}}$ a $\vec{A_{\mathrm{TM}}}$ následujícím způsobem [12]:

$$\begin{aligned} \vec{E_{\mathrm{TE}}} &= -\partial_t \vec{A_{\mathrm{TE}}}, \quad \vec{B_{\mathrm{TE}}} = \mathrm{rot}\vec{A_{\mathrm{TE}}}, \\ \vec{E_{\mathrm{TM}}} &= \mathrm{rot}\vec{A_{\mathrm{TM}}}, \quad \vec{B_{\mathrm{TM}}} = \partial_t \vec{A_{\mathrm{TM}}}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

M. Ruser ve své disertační práci [1] poukazuje na to, že volba těchto potenciálů souvisí s antisymetričností Maxwellových rovnic při záměně elektrické intenzity a magnetické indukce (v přirozeném systému jednotek). Dále dodává, že oba vektorové potenciály splňují vlnovou rovnici a skalární potenciály jsou nulové kvůli absenci zdrojů. Navíc zavedený potenciál splňuje kalibrační podmínku (2.24).

$$\mathrm{div}\vec{A} = 0 \tag{2.24}$$

$$\Box\vec{A} = 0 \tag{2.25}$$

Z rozkladu pole do TE a TM módů vyplývá, že:

$$\vec{E}_{\mathrm{TE}} \cdot \vec{e_x} = 0, \tag{2.26}$$

$$\vec{B}_{\mathrm{TM}} \cdot \vec{e_x} = 0. \tag{2.27}$$

Z rovnice 2.26 vyplývá, že x-ová složka vektorového potenciálu $\vec{A}_{\mathrm{TE}}$ je konstantní v čase a bez újmy na obecnosti ji lze určit jako nulovou. Odtud dostáváme důležitý výsledek:

$$\vec{A}_{\mathrm{TE/TM}} \cdot \vec{e_{\mathrm{x}}} = 0. \tag{2.28}$$

Okrajové podmínky můžeme přepsat pro potenciály:

$$\partial_{t'}\vec{A}_{\mathrm{TE}}(t' = 0, x' = 0, y, z) = 0 \tag{2.29}$$

$$\partial_{x'}\vec{A}_{\mathrm{TM}}(t' = 0, x' = 0, y, z) = 0. \tag{2.30}$$

Dále využijeme rozvoj $l(t)$ do prvního řádu v nějakém čase $t_0$ a $\dot{l}(t_0)$ použijeme jako rychlost pro Lorentzovu transformaci. Z ní vyjádříme diferenciály a dostaneme následující podobu počátečních podmínek v laboratorní soustavě $S$:

$$\gamma(v\partial_x + \partial_t)\vec{A}_{\mathrm{TE}}(t = t_0, x = l(t_0), y, z) = 0 \tag{2.31}$$

$$\gamma(\partial_x + v\partial_t)\vec{A}_{\mathrm{TM}}(t = t_0, x = l(t_0), y, z) = 0. \tag{2.32}$$

Protože potenciál $\vec{A}_{\mathrm{TE}}$ nezávisí na $x$ je na stěně zrcadla z pohledu laboratorní soustavy konstantní, tuto konstantu můžeme bez újmy na obecnosti určit jako nulovou. TE mód tedy v laboratorní soustavě splňuje Dirichletovy okrajové podmínky, zatímco TM mód zobecněné Neumannovy [1].

Dále se budu zabývat pouze TE módy, pro které lze využít rozvoj do módových funkcí z předcházející kapitoly. Problematika TM módů zasahuje nad rámec této práce.

## 2.3 Cesta k Hamiltonovým rovnicím

Nyní využijeme rozvoj pole z podkapitoly 2.1. Módové funkce budeme uvažovat ve tvaru:

$$\phi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l(t)}}\sin(\omega_n(t)x). \tag{2.33}$$

Frekvence jednotlivých módů se nyní stávají kvůli časově proměnné délce kavity $l(t)$ také časově závislou a to následovně:

$$\omega_n(t) = \frac{n\pi}{l(t)}. \tag{2.34}$$

Celkové pole popíšeme jako superpozici módových funkcí s časově závislými vahami:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} q(t)\phi_n(t,x). \tag{2.35}$$

K popisu pole uvnitř kavity použijeme reálné skalární hmotné pole. Každému bodu v prostoru přiřazuje reálnou hodnotu. Jeho hustota lagrangiánu je následující [13]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_t\psi)^2 - (\partial_x\psi) - \mathbf{m}^2\psi^2]. \tag{2.36}$$

Tento tvar je nejjednodušší lorentzovsky invariantní. Po dosazení tohoto lagrangiánu do Euler-Lagrangeových rovnic bychom obdrželi Klein-Gordonovu rovnici, která popisuje dynamiku tohoto pole a je relativisticky kovariantní [14].

Lagrangián získáme integrací přes prostor kavity:

$$L = \int_{I(t)} \mathcal{L}dx. \tag{2.37}$$

Zároveň využijeme vlastnosti módových funkcí. První je jejich ortonormalita:

$$\int_{I(t)} \phi_n\phi_m = \delta_{nm}. \tag{2.38}$$

Druhou z vlastností módových funkcí, kterou použijeme, je jejich příslušnost do množiny vlastních vektorů operátoru $\partial_x$ s vlatní hodnotou $\omega_n$.

$$\partial_x\phi_n = \omega_n\phi_n \tag{2.39}$$

Po dosazení (2.35) a s využitím (2.38,2.39) získáváme postupně:

$$
\begin{aligned}
L &= \int_{I(t)} \mathcal{L} dx \\
&= \frac{1}{2}(\partial_t \psi)^2 - (\partial_x \psi)^2 - \mathbf{m}^2\psi^2] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(\dot{q}_n^2 - \mathbf{m}^2 q_n^2) + \sum_{n,m=1}^{\infty} q_n \int_{I(t)} \dot{\phi}_n \phi_m dx \dot{q}_m + \frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{\infty} q_n \int_{I(t)} \dot{\phi}_n \dot{\phi}_m dx q_m - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\omega_n^2 q_n
\end{aligned}
$$

Použitím substitucí

$$\Omega_n^2 = \omega_n^2 + \mathbf{m}^2, \tag{2.40}$$

$$M_{nm} = \int_{I(t)} \dot{\phi}_n \phi_m dx \tag{2.41}$$

a

$$N_{nm} = \int_{I(t)} \dot{\phi}_n \dot{\phi}_m dx, \tag{2.42}$$

dostaneme kompaktnější výsledný tvar lagrangiánu:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dot{q}_n^2 - \Omega_n^2 q_n^2\right) + \sum_{n,m=1}^{\infty}\left(q_n M_{nm}\dot{q}_m + \frac{1}{2}q_n N_{nm} q_m\right) \tag{2.43}$$

Z lagrangiánu můžeme získat tvar druhé kanonické proměnné, hybnosti $p_n$ ze vztahu:

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \tag{2.44}$$

$$p_n = \dot{q}_n + \sum_{m=1}^{\infty} M_{mn} \tag{2.45}$$

$$H = \sum_{m=1}^{\infty} \dot{q}_n p_n - L \tag{2.46}$$

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \dot{q}_n p_n - \frac{1}{2}\left(\dot{q}_n^2 - \Omega_n^2 q_n^2\right) - \left(q_n M_{nm}\dot{q}_m + \frac{1}{2}q_n N_{nm} q_m\right) \\
&= \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\dot{q}_n^2 + q_n M_{nm}\dot{q}_m + \frac{1}{2}\Omega_n^2 q_n^2 - \left(q_n M_{nm}\dot{q}_m + \frac{1}{2}q_n N_{nm} q_m\right) \\
&= \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\dot{q}_n^2 + \frac{1}{2}\Omega_n^2 q_n^2 - \frac{1}{2}q_n N_{nm} q_m
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

Dále lze ukázat následující vztah matic $M$ a $N$:

$$
\begin{aligned}
N_{nm} &= \int_{I(t)} \dot{\phi}_n \dot{\phi}_m dx \\
&= \int_{I(t)} \int_{I(t)} \dot{\phi}_n \phi_k \phi_k \dot{\phi}_m dx dy \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} M_{nk} M_{mk}.
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

Pomocí něj můžeme přepsat poslední člen hamiltoniánu a pokud přičteme a odečteme členy $q_n M_{nm} q_m$ a $q_n M_{nk} M_{mk} q_m$, čímž doplníme na čtverec a získáme výraz $p_n^2$ získáme konečný tvar hamiltoniánu:

$$H = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{2}(p_n^2 + \Omega_n^2 q_n^2) - p_m M_{mn} q_n, \tag{2.49}$$

jehož první dva členy tvoří základní hamiltonián, který je shodný s harmonickým oscilátorem o jednotkové hmotnosti, poslední člen potom lze označit jako interakční hamiltonián. Nyní můžeme dosadit hamiltonián do Hamiltonových rovnic:

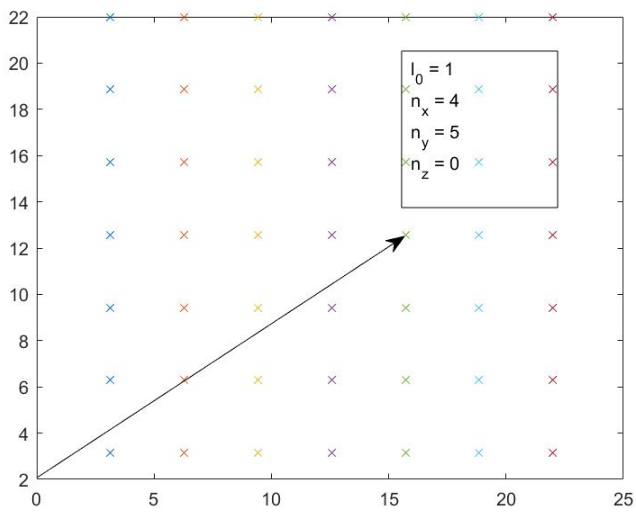
$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} = p_n - \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} q_m \tag{2.50}$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} = -\Omega_n^2 q_n + \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} p_m. \tag{2.51}$$

Pomocí formalizmu pro jednorozměrný případ můžeme obdržet výsledky odpovídající třídimenzionální kavitě za předpokladu, že využijeme parametr $\mathbf{m}$, který lze interpretovat jako složku vlnového vektoru kolmou na osu $x$.

$$\mathbf{m} = k_{\|} = \pi \sqrt{\left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2} \tag{2.52}$$

Nastavením parametru $\mathbf{m}$ můžeme zkoumat generaci fotonů vlivem DCE v různých prostorových módech. Například na Obrázku 2.2 je zobrazen případ pro $k_z = 0$. Pokud začneme v nule a budeme hodnotu $\mathbf{m}$ měnit dosazováním různých $n_y$ z přirozených čísel a při $n_z = 0$,budeme měnit sklon vlnového vektoru od osy $x$ a můžeme takto vyšetřit vyzařovací charakteristiku stěny kavity v rovině $xy$.




Obrázek 2.2: Vlnový vektor pro mód (4,5,0)

Způsob výpočtu pomocí hamiltonovského formalizmu byl převzat z [1].

## 2.4 Intermezzo: Bogoliubova transformace

Během výpočtu budu používat Bogoliubovu transformaci definovanou vztahem:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}^{out} \\ \hat{a}^{out\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}^* \\ \mathcal{B} & \mathcal{A}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}^{in} \\ \hat{a}^{in\dagger} \end{pmatrix}. \tag{2.53}$$

Bogoliubova transformace umožňuje vyjádřit kreační a anihilační operátory konečného stavu kvantového systému pomocí kreačního a anihilačního operátoru počátečního stavu. Koeficienty matice splňují následující vztah:

$$\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2 = 1, \tag{2.54}$$

což zaručuje platnost komutačních relací.

V literatuře lze o povaze Bogoliubovy transformace najít následující: "Diagonalizace hamiltoniánu vypovídá o kvazičásticových excitacích základního stavu. To jsou bogolony, které reprezentují pohyb velkého množství původně interagujících bosonů"[13].

Tuto transformaci lze použít pro popis kvantových zesilovacích systémů [15]. Což je případ i DCE.

V našem případě využijeme Bogoliubovu transformaci pro výpočet počtu částic vygenerovaných DCE následovně: Spočteme střední hodnotu počtu částic v konečném stavu, přičemž využijeme vyjádření kreačního a anihilačního operátoru konečného stavu pomocí operátorů vstupního stavu, což nám umožňuje právě Bogoliubova transformace.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{N} \rangle &= \langle 0 | \hat{\mathcal{N}} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{a}^{out\dagger} \hat{a}^{out} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (\mathcal{B} \hat{a}^{in} + \mathcal{A}^* \hat{a}^{in\dagger})(\mathcal{A} \hat{a}^{in} + \mathcal{B}^* \hat{a}^{in\dagger}) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \mathcal{B}\mathcal{B}^* (1 + \hat{a}^{out\dagger} \hat{a}^{out}) | 0 \rangle \\ &= |\mathcal{B}|^2 \end{aligned}$$

Výsledek:

$$\langle \mathcal{N} \rangle = |\mathcal{B}|^2 \tag{2.55}$$

jsme obdrželi za využití

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^{in\dagger}\right] = 1$$

a

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1.$$

Počet částic tedy závisí na hodnotě koeficientu $\mathcal{B}$ a skutečně, ukazuje se, že v některých fyzikálních situacích může být nenulový.

## 2.5 Kanonické kvantování

V případě konzervativních systémů odpovídá hamiltonián celkové energii systému. V námi uvažované fyzikální situaci však dochází k dodávání energie oscilací jednoho ze zrcadel kavity a tato korespondence neplatí. Důkaz tohoto tvrzení je uveden v [1].

Dalším problémem, na který narážíme, je provázanost jednotlivých módů, která odpovídá interakci mezi mezi nimi a nediagonalitě hamiltoniánu. Zatímco elektromagnetické pole v kavitě s konstantní délkou můžeme popsat jako množství (nekonečně mnoho) navzájem neinteragujících oscilátorů, jejich souhrnný hamiltonián je v řeči kreačních a anihilačních operátorů diagonální a snadno můžeme určit počet částic (kvant energie) v jednotlivých módech. V případě proměnné délky kavity se jednotlivé módy provazují, stávají se závislými a jak je vidět z předpisu hamiltoniánu (2.49), ten není diagonální ani diagonalizovatelný obvyklou cestou za využití operátoru počtu částic $\hat{N}$. Za účelem diagonalizace hamiltoniánu budeme definovat nové polní operátory a pomocí výše zmíněné Bogoliubovy transformace hamiltonián zdiagonalizujeme. Tím přejdeme ke tvaru, ve kterém již jednotlivé oscilátory popisující pole neinteragují a problém bude vyřešen. Nově definované anihilační a kreační operátory přitom popisují kvazičástice, excitace základního stavu zvané bogolony [13].

Navíc použijeme trik uvedený v článku T.G. Moorea [2], kdy budeme předpokládat nějaký časový interval $(t_{in}, t_{out})$, během kterého pohyb zrcadla probíhá, mimo něj však nikoliv. Před započetím pohybu, a po jeho skončení, tedy budeme mít dobře definovaný počet částic.

Před započetím pohybu je rozvoj pole do kreačního a anihilačního operátoru následující:

$$\begin{aligned}\hat{q}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega_n^{in}}}\hat{a}_n^{in}e^{-i\Omega_n^{in}t} + h.c.\\ \hat{p}(t) &= i\frac{\Omega_n^{in}}{\sqrt{2}}\hat{a}_n^{in\dagger}e^{i\Omega_n^{in}t} + h.c.\end{aligned} \tag{2.56}$$

Pro konečný stav budou rozvoje obdobné jen s tím rozdílem, že $\hat{a}_n^{in}$ a $\hat{a}_n^{out}$ nejsou totožné operátory. V průběhu pohybu zrcadla můžeme pole rozvést následovně:

$$\begin{aligned}\hat{q}(t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\Omega_n^{in}}}\hat{a}_m^{in}e_{nm}(t) + h.c.\\ \hat{p}(t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\Omega_n^{in}}}\hat{a}_n^{in\dagger}f_{nm}(t) + h.c.\end{aligned} \tag{2.57}$$

Funkce $e_{nm}$ a $f_{nm}$ jsou neznámé komplexní funkce, které se řídí dynamikou (2.50) a (2.51).

Pro výpočet v praktické části jsem si rovnice pro $e$ a $f$ vyjádřil v maticovém tvaru:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= f - M^T \cdot e\\ \dot{f} &= -\Omega^2 \cdot e + M \cdot f,\end{aligned} \tag{2.58}$$

kde tečka značí maticové násobení a $\Omega$ je diagonální matice s hodnotami $\Omega_n$ na $n$-té pozici na diagonále.

Na tomto místě je vhodné upozornit, že ačkoli je normalizace v druhém rozvoji nezvyklá, je správná. Normalizační koeficienty v (2.56) jsou vázány na harmonickou časovou závislost. Porovnáním (2.56) a (2.57) snadno získáme koeficient Bogoliubovy transformace $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}_{mn}(t_{out}) = \frac{1}{2}e^{-i\Omega_n^{in}t_{in}}\sqrt{\frac{\Omega_n^{out}}{\Omega_m^{in}}}\left(e_{nm}(t_{out}) - \frac{i}{\Omega_n^{out}}f_{nm}\right). \tag{2.59}$$

## 2.6 Vakuový stav a princip neurčitosti

Zaměřme se nyní více na analogii s jednoduchým harmonickým oscilátorem. Uvažujme například klasickou dětskou houpačku. Je-li houpačka v nejnižší poloze (má minimální možnou potenciální energii) a zároveň je nulová i její hybnost, nelze ji rozhoupat z pozice dítěte na sedátku bez vnějšího dodání energie. Houpačka je v klidu. U kvantového harmonického oscilátoru, potažmo elektromagnetického pole v kavitě však tato situace nemůže nastat. Pravidla kvantové fyziky neumožňují současné určení hodnot obou těchto pozorovatelných, dokonce vyúsťují v závěr, že neexistují elementy reality odpovídající nějakým hodnotám fyzikální veličiny před měřením. Z tohoto důvodu nelze tvrdit, že hodnota elektromagetického pole je nenulová, protože to by znamenalo jakousi restrikci na oboru možných naměřitelných hodnot. Exaktnější je mluvit o možnosti naměření i nenulových hodnot.

Pokud dítě naskočí na dětskou houpačku a tím jí dodá nějaký silový impulz, může poté zvětšovat rytmickým natahováním a pokrčením nohou zesilovat oscilace houpačky. Tento proces lze použít jako analogii zesilovacích procesů. Podobně působí zrcadlo, které dodává do systému energii (tím je tlumen jeho pohyb), počáteční impulz je analogický vakuovým fluktuacím. Rozdílem je, že v případě kavity se jedná o mnoho oscilátorů s proměnnými frekvencemi, které si navzájem předávají energii.

## 2.7 Energie vakuového stavu, statický Casimirů jev, dynamický Casimirův jev a konvergence

Jeden mód v kavitě o frekvenci $\omega$ má hamiltonián:

$$\hat{H} = \omega(\hat{N} + \frac{1}{2}), \tag{2.60}$$

kde $\hat{N}$ je operátor počtu částic tvořený kreačním a anihilačním operátorem a $\frac{1}{2}$ člen vzniklý v důsledku nekomutativnosti těchto operátorů, potažmo operátoru polohy a hybnosti, která pramení ve Fourierově transformaci. Vlastní energie tohoto hamiltoniánu tedy budou nenulové i při nulovém počtu částic:

$$\hat{H}\left|n\right\rangle = (n + \frac{1}{2})\omega\left|n\right\rangle. \tag{2.61}$$

Tohoto faktu se využívá při výpočtu velikosti Casimirovy síly. Ačkoli se při sčítání energií jednotlivých módů ve vakuovém stavu musíme potýkat s divergentní řadou

$$\sum_{m=1}^{\infty} n, \tag{2.62}$$

lze tuto řadu sečíst pomocí Riemanovy zeta-funkce rozšířením do komplexní roviny a spočítáním limity v bodě, který nás zajímá.

V případě dynamického Casimirova jevu se s touto záležitostí lze vypořádat poněkud jiným způsobem. Dirichletovy okrajové podmínky způsobené zrcadlem budou ve skutečnosti pociťovat jen módy do určitých frekvencích. Například pro fotony $\gamma$ záření už zrcadlo nebude odraznou plochou. Tato úvaha opravňuje provést zavedení parametru $n_{max}$, který označuje maximální módové číslo uvažované ve výpočtu. Tímto způsobem se lze vyhnout renormalizaci.

Pro spojitý pohyb zrcadla je počet vygenerovaných částic nedivergentní [2].

# Kapitola 3

# Praktická část

## 3.1 Eulerova jednokroková metoda

Rovnice (2.58) jsem řešil pomocí Eulerovy jednokrokové metody, která vychází z rozvinutí funkce do Taylorovy řady prvního stupně. Také na ni lze nahlížet jako na aproximaci derivace konečnou diferencí.

Mějme Cauchyovu úlohu formulovanou následovně:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{3.1}$$

$$y(0) = g, \tag{3.2}$$

kde (3.1) je obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu a (3.2) její počáteční podmínka na intervalu $t \in \langle t_{in}, t_{out} \rangle$; $t$, $g \in \mathbb{R}$.

Hodnoty funkce $y$ budeme numericky vyšetřovat pouze v některých bodech intervalu, na kterém je úloha definovaná. Tento interval rozdělíme pro jednoduchost ekvidistantně na množství podintervalů o délce $\Delta t$.

Takto vytvoříme množinu bodů $\{t_i\}$, $i = 1, 2, ...n$, kde pro každý následující bod platí: $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ a zároveň musíme dělení uzpůsobit podmínce: $t_1 = t_{in}$ a $t_n = t_{out}$. V bodech této množiny budeme evaluovat hodnoty funkce $y$.

Derivace je definována následovně:

$$y'(t_i) = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{y(t_i + \Delta t) - y(t_i)}{\Delta t}. \tag{3.3}$$

Pokud budeme limitu aproximovat konečným podílem, získáme vztah

$$y'(t_i) \approx \frac{y(t_i + \Delta t) - y(t_i)}{\Delta t}, \tag{3.4}$$

dosadíme-li do (3.1),vynásobíme $\Delta t$ dostáváme:

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + \Delta t f(t_i, y(t_i)). \tag{3.5}$$

Rovnice (3.5) představuje rekurentní vztah pro výpočet hodnoty funkce y v následujícím časovém okamžiku [16]. Tento vztah jsem implementoval do forcyklu, ve kterém je postupně počítán časový vývoj systému.

## 3.2 Optimalizace solveru

Vzhledem k mohutnosti výpočtů bylo potřeba provést úpravy pro zrychlení běhu solveru. Nejprve jsem rovnice pro $e$ a $f$ převedl do vektorové (maticové) podoby, čímž se zvýšila efektivnost výpočtů a také přehlednost vlastního kódu.

Dalším krokem bylo odseparování časových závislostí koeficientů diferenciálních rovnic. Vytknutím časově proměnných prvků, jejich výpočtem na začátku každého cyklu a skalárním vynásobením s příslušným koeficientem v rovnici došlo k dalšímu zrychlení kódu.

Jedním z problémů, se kterými jsem se během optimalizace potýkal, byla otázka paměti. Pro vysoké hodnoty horní hranice módů $n_{max}$ nabývaly proměnné paměťově značně náročných rozměrů. Za účelem snížení paměťové náročnosti jsem nezachovával hodnoty funkcí $e$ a $f$ během celého časového vývoje, ale vždy je po jejich kombinaci na koeficient Bogoliubovy transformace $\mathcal{B}$ přepsal aktualizovanou hodnotou.

Koeficient $\mathcal{B}$ Bogoliubovy transformace pro mnoho simulací není nutné vyhodnocovat ve všech uvažovaných bodech intervalu, na kterých je simulace prováděna. V simulacích, jejichž výstupem je závislost počtu částic na frekvenčních módech jej stačí vyhodnotit až z konečných hodnot funkcí $e$ a $f$. V simulacích, které sledují časovou dynamiku počtu částic v průběhu celé simulace jsem nastavil rozlišení $r$, které zajišťovalo vyčíslení $\mathcal{B}$ vždy po určitém počtu cyklů.

## 3.3 Základní schéma kódu

Pro implementaci Eulerovy jednokrokové metody jsem vytvořil kód s následující strukturou:

1. Úvodní alokace a zadávání parametrů
   (a) nastavení parametrů numeriky (časový krok, počet časových kroků, délka časového intervalu),
   (b) alokace proměnných a počátečních podmínek,
   (c) alokace koeficientů diferenciálních rovnic,
   (d) vyčíslení počátečních podmínek,
   (e) vyčíslení koeficientů diferenciálních rovnic (kde možno, bez časové závislosti),
   (f) uplatnění počátečních podmínek.
2. Samotná simulace
   (a) forcyklus pro výpočet časového vývoje,
   (b) převedení indexu forcyklu na vzdálenost od počátku časového intervalu,
   (c) výpočet členů s časovou závislostí,
   (d) výpočet nové hodnoty funkce pomocí Eulerovy jednokrokové metody,
   (e) funkce if, která po určitém počtu kroků zobrazí kolik procent simulace proběhlo.

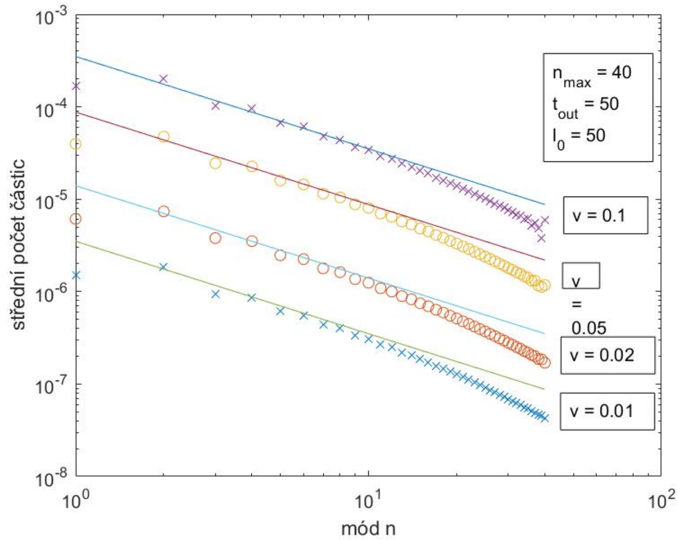
3. Konečné výpočty a vykreslení grafu
   (a) dva forcykly pro výpočet koeficientu $\mathcal{B}$ po složkách (pro výpočet konečné hodnoty, závisí na typu simulace),
   (b) výpočet středního počtu částic (spolu s výpočtem $\mathcal{B}$ v některých případech už v 2. části),
   (c) vykreslení grafu.

Velmi důležitá je alokace všech proměnných. V případě používání matic, které mají ve výsledku velkou dimenzionální velikost, bez předchozího alokování dochází ke značnému zpomalování výpočtu.

## 3.4 Zrcadlo pohybující se konstantní rychlostí

Vzhledem k absenci předchozích zkušeností s psaním solveru diferenciálních rovnic a také kvůli několika chybám v implementaci rovnic, které jsem během optimalizace objevil (vedly například na divergující oscilace řešení) jsem se rozhodl nejprve zopakovat jednu z numerických simulací, jejíž výsledky včetně vstupních parametrů byly dostupné v disertační práci M. Rusera.

Jedná se o závislost počtu vygenerovaných částic na jejich energii (čísle módu) v případě kavity, jejíž jedna stěna se pohybuje konstantní relativistickou rychlostí.




Obrázek 3.1: Populovanost stavů po pohybu stěny kavity konstantní rychlostí $v$

Výsledky simulace jsou zobrazeny na Obrázku 3.1 a jsou totožné s výsledky ve zmíněné dizertační práci. Jedná se o výsledky čtyř simulací příslušné čtyřem uvedeným rychlostem, $v = 0,1$, $v = 0,05$, $v = 0,02$ a $v = 0,01$. Rychlosti zrcadla jsou vztaženy k rychlosti světla.

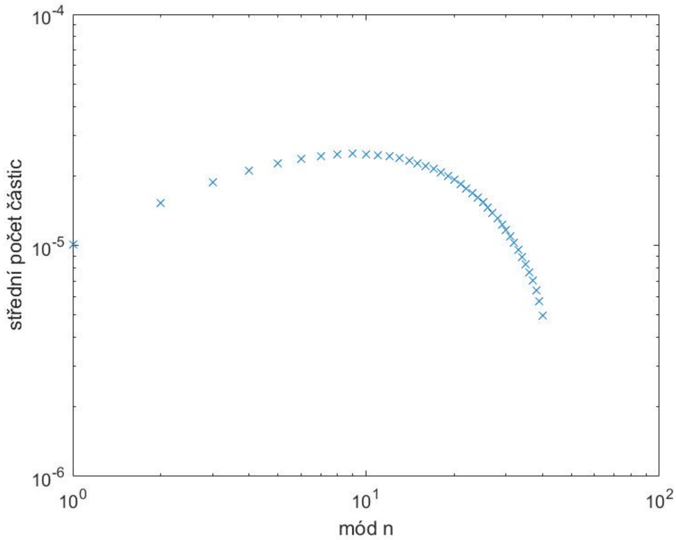
Numerické výsledky jsou zobrazeny body, souvislá čára je poté teoretický výsledek obdržený Castagninem a Ferrarem [17]:

$$\langle N \rangle \propto \frac{v^2}{n}, \tag{3.6}$$

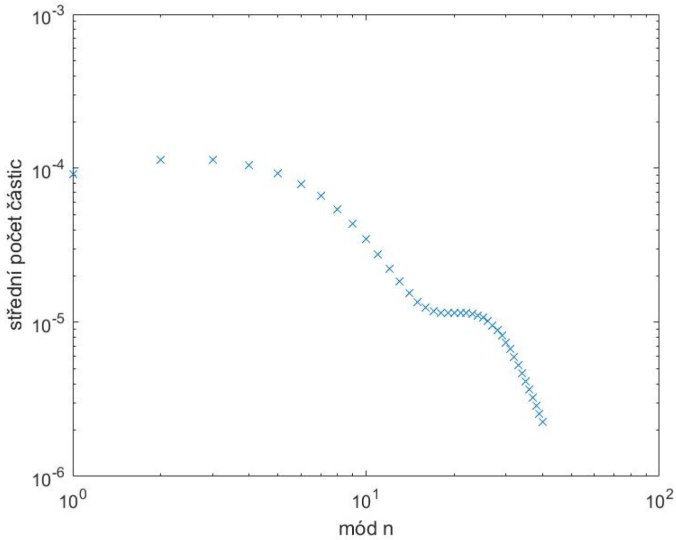
platné za podmínky $n > 6$ a $v \ll 1$.

Odchylka vyšších módů od teoretické křivky je způsobena zavedením $n_{max}$ a pokud budeme tento parametr zvyšovat, bude klesat.

Po zopakování této simulace jsem se začal zabývat dalšími aspekty tohoto nastavení. Například počáteční nespojitost rychlosti hraje v tomto případě velkou roli.



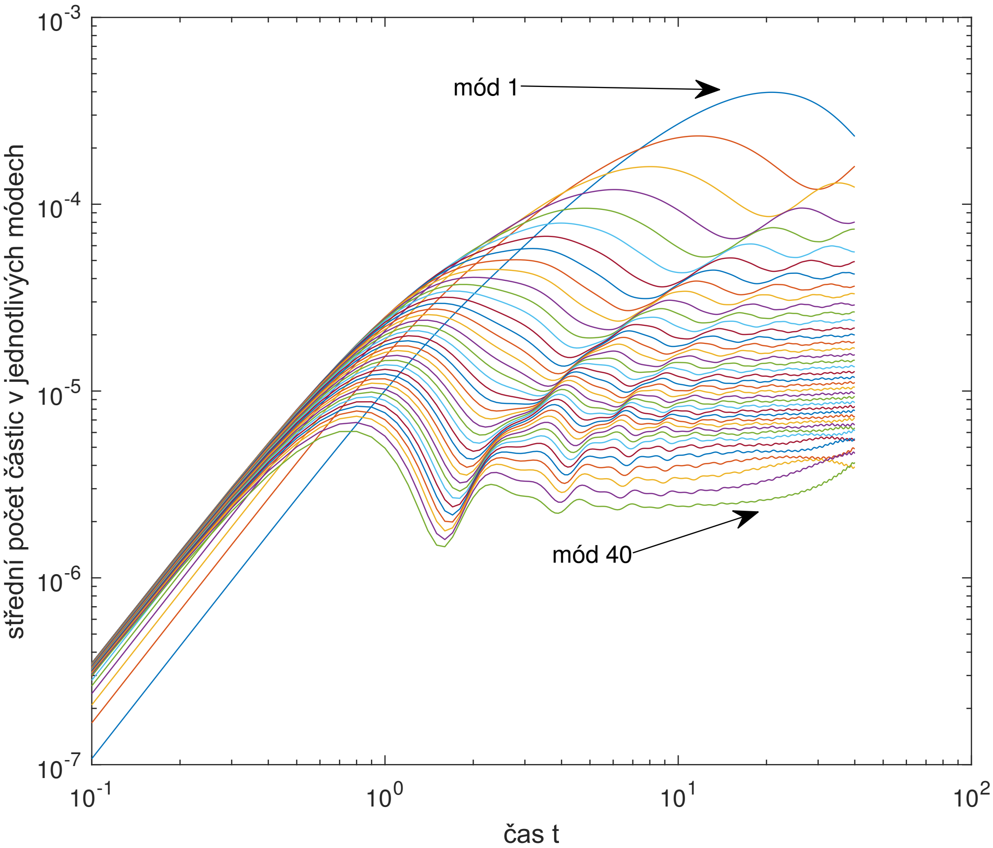

Obrázek 3.2: Populovanost stavů v čase $t = 1$ $(v = 0,1)$




Obrázek 3.3: Populovanost stavů v čase $t = 6$ $(v = 0,1)$

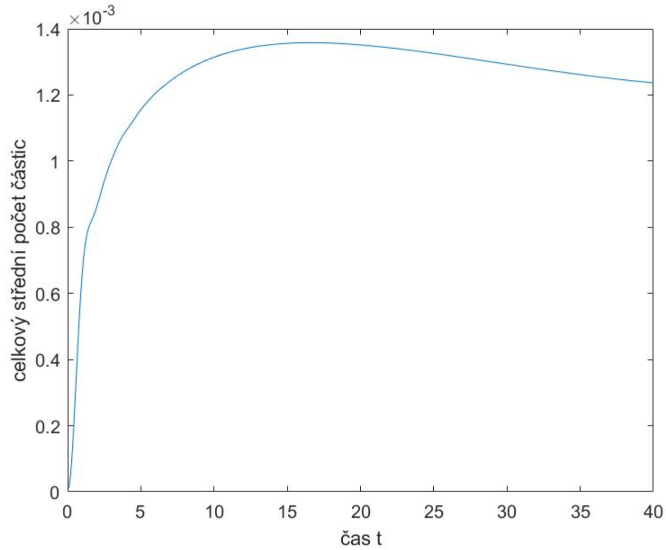
Na Obrázku 3.2 je vykresleno rozložení středního počtu částic v módech a jejich excitace v důsledku počáteční nespojitosti rychlosti. Na Obrázku 3.3, na kterém je zobrazen stav systému v čase $t = 6$, je již patrný projev mezimódového provázání, které postupně přesunuje výraznější pík excitací směrem k nižším módům, až populovanost módů v čase $t = 50$ kopíruje teoretickou křivku.

Celkový časový průběh je zobrazen na Obrázku 3.4, kde lze sledovat jak počáteční vybuzení, tak působení mezimódové provázanosti.




Obrázek 3.4: Časový vývoj počtu částic v jednotlivých módech

Vzniká otázka, jaký je časový vývoj celkového počtu částic. Sumací přes všechny módy získáme závislost z Obrázku 3.5, na které lze sledovat redistribuci energie dodané na počátku simulace nespojitostí a poté klesající tendenci způsobenou nejspíše absorpcí vodivé plochy zrcadla.

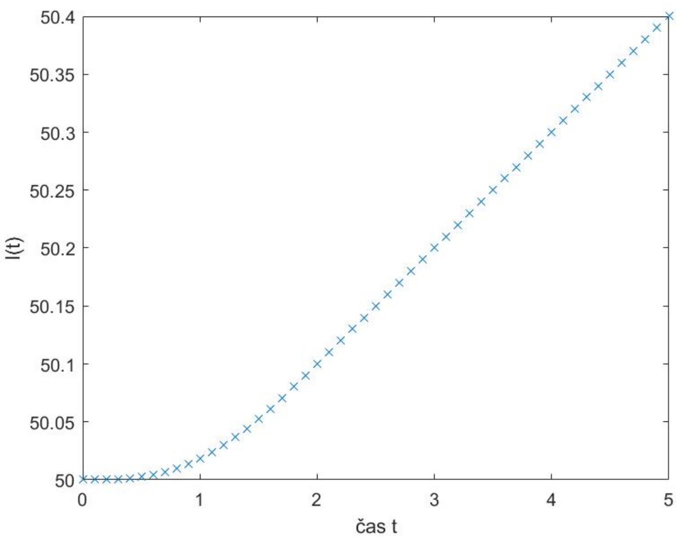



Obrázek 3.5: Časový vývoj celkového počtu částic v kavitě

Pro prozkoumání vlivu počáteční nespojitosti jsem posléze uvažoval situaci, při které je zrcadlo na počátku v klidu a na konstantní rychlost je urychleno v průběhu prvních dvou časových jednotek. Průběh rychlosti je pro čas $0 < t < 2$ následující:

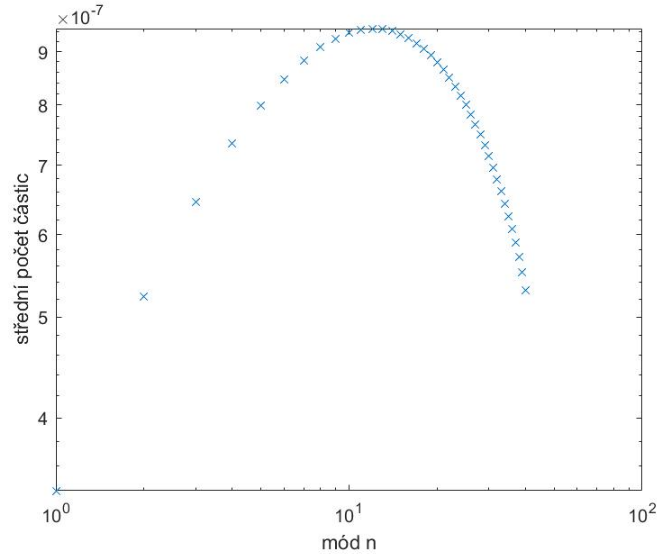
$$v = 0,5v_0(-\cos(0,5\pi t) + 1). \tag{3.7}$$

Pro čas $t = 0$ je tedy rychlost nulová a pro čas $t = 2$ nabývá hodnoty $v_0$, přičemž časové derivace v těchto časech jsou nulové. Délka kavity se poté bude v čase vyvíjet dle Obrázku 3.6.

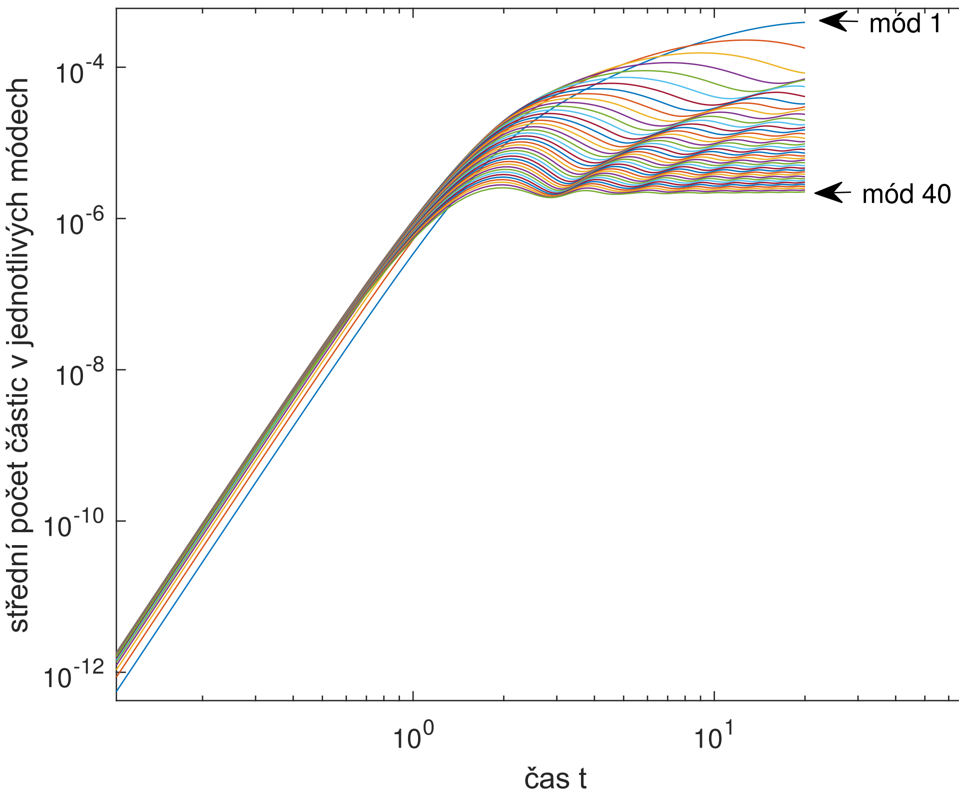



Obrázek 3.6: Časový vývoj délky kavity při hladkém náběhu na hodnotu konstantní rychlosti

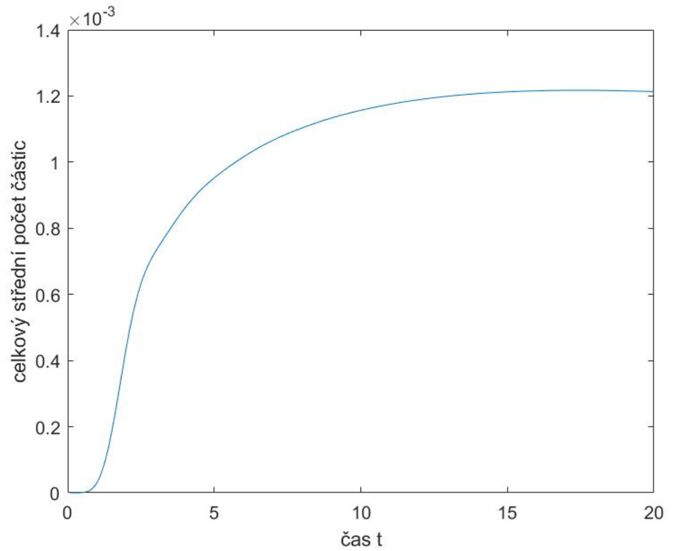
Nutno podotknout, že na generaci fotonů se nyní bude podílet i počáteční zrychlení.




Obrázek 3.7: Populovanost módů při spojitém náběhu na konstantní rychlost v čase $t = 1$




Obrázek 3.8: Časový vývoj populovanosti módů při pohybu se spojitým vývojem rychlosti



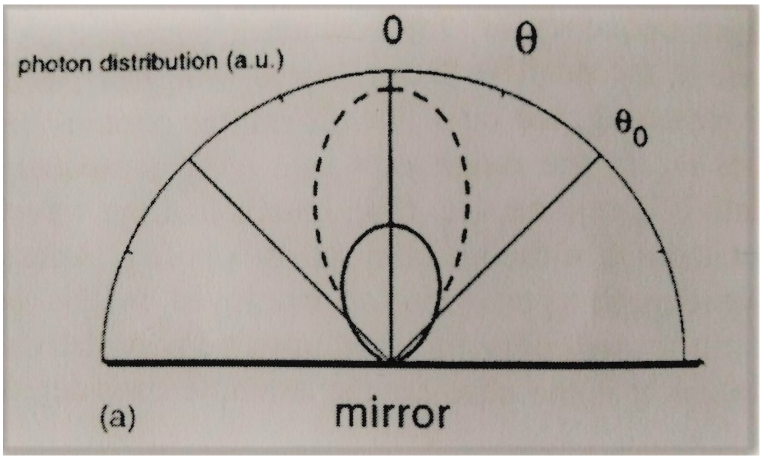

Obrázek 3.9: Časový vývoj celkového počtu částic při pohybu se spojitým vývojem rychlosti

Z Obrázku 3.7 je patrné, že v čase $t = 1$ je nárůst středního počtu částic oproti případu s nespojitostí (Obrázek 3.2) nižší. Dále však vývoj středního počtu částic v jednotlivých módech probíhá velmi podobně, stejně jako v předchozím případě se objevuje pík výraznějších excitací a přesunuje se k nižším módům. Na Obrázku 3.8 je vidět podobnost časového vývoje.

Co se týká celkového počtu částic, pro pohyb se spojitým průběhem rychlosti je jeho maximální hodnota asi o jednu desetitisícinu menší (rozdíl na druhém místě z pohledu platných číslic) a nabývá jí o 0,6 časové jednotky později než v předchozím případě. Pro porovnání je uveden na Obrázku 3.9.

## 3.5 Vyzařovací charakteristika oscilujícího zrcadla

Další zajímavou vlastností generovanou oscilující kavitou a hodnou prozkoumání je vyzařovací charakteristika aneb prostorové směrování generovaných fotonů. Zaujala mě teoretická predikce v článku P. A. M. Neta a L. A. S. Machada [12], založená na nerelativistické a nízkofrekvenční aproximaci. Výsledek, ke kterému v případě TE módů dospěli není nepodobný vyzařování klasické antény, Obrázek 3.10.




Obrázek 3.10: Směrová charakteristika vyzařování zrcadla, převzato z [12]

Výsledky obdrželi pro případ rovinného absolutně vodivého zrcadla pohybujícího se podél své normály v třídimenzionálním prostoru, pro fixní frekvenci. Zrcadlo oscilovalo tlumenými harmonickými kmity.

V rámci aproximativních metod uvažovali pohyb rychlostí výrazně menší než rychlostí světla. Na základě tohoto předpokladu by mělo docházet pouze k excitaci nízkofrekvenčních módů, což umožňuje použít dlouhovlnnou aproximaci. Poloha zrcadla tedy byla popsána funkcí:

$$x(t) = \delta q_0 e^{-\frac{|t|}{T}} \cos(\omega_0 t), \tag{3.8}$$

kde malé delta značí, že jde o drobný pohyb, jakousi poruchu, parametr $T$ určuje rychlost útlumu a $\omega_0$ je frekvence harmonické složky pohybu, na které kladou následující podmínky:

$$\omega_0 \delta q \ll 1 \tag{3.9}$$

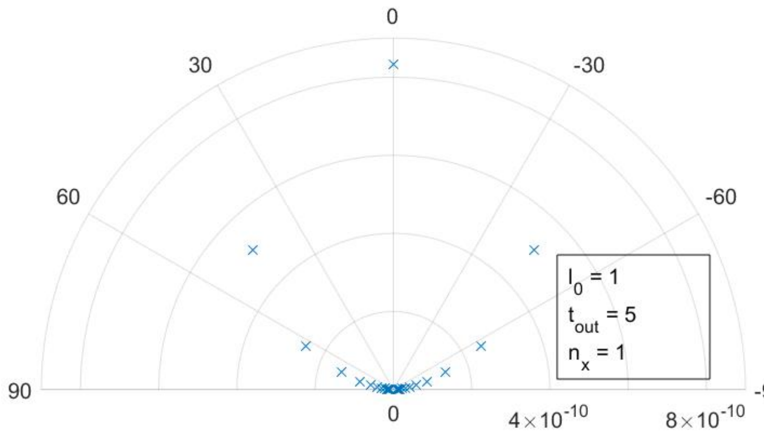
a

$$\omega_0 T \gg 1. \tag{3.10}$$

První požadavek odpovídá nerelativistické aproximaci a druhý je spíše technického rázu.

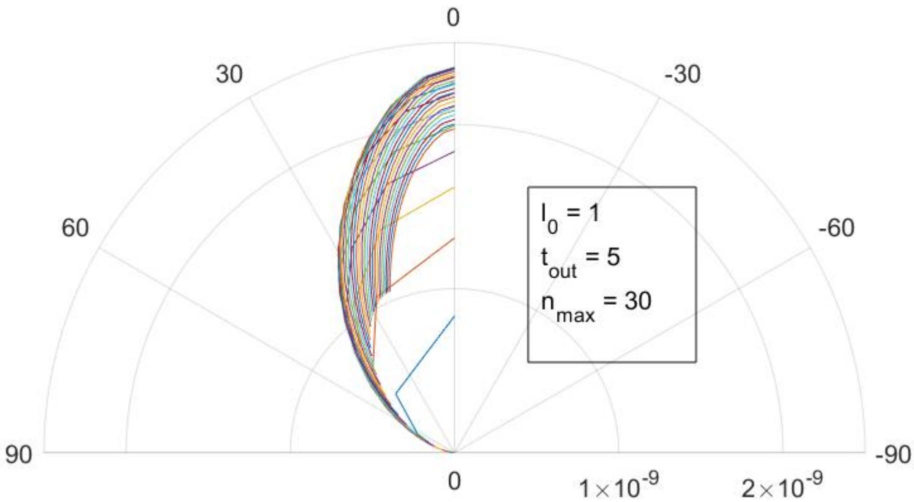
Tento článek byl inspirací a podnětem pro prozkoumání prostorové charakteristiky vyzařování i v této práci. Jedním z aspektů, které mne zaujaly, jsou aproximace nutné k analytickému řešení, kterým se za cenu, že budu nucen uchýlit se k řešení numerickému, mohu vyhnout. Na tomto místě je nutné podotknout, že se svou simulací nejsem schopen napodobit zcela totožné podmínky jako ve zmíněném článku. Hlavním rozdílem je, že uvažuji dvojici zrcadel. Jak bylo zmíněno výše, výsledky zobrazené na Obrázku 3.10 jsou pro fixní frekvenci fotonů. S jistými implementačními obtížemi jsem schopen simulovat situaci, ve které se budu pohybovat v nějakém okolí zvolené frekvence $\omega_0$. Přesto byl tento článek podnětným impulzem, který mne nasměroval k této problematice. Prozkoumejme nejprve vyzařovací charakteristiku zrcadla kavity na již vybudovaném modelu s rezonanční frekvencí oscilací a poté se pokusme přiblížit podmínkám, za nichž obdrželi výše zmíněné analytické výsledky.

Pro prvotní vyzařovací charakteristiky uvedené v této práci zvolím nejprve poněkud jiný postup, kdy budu uvažovat fixní módové číslo $n_x$ podél osy x (směr pohybu




Obrázek 3.11: Směrová charakteristika stěny kavity pro $n_x = 1$

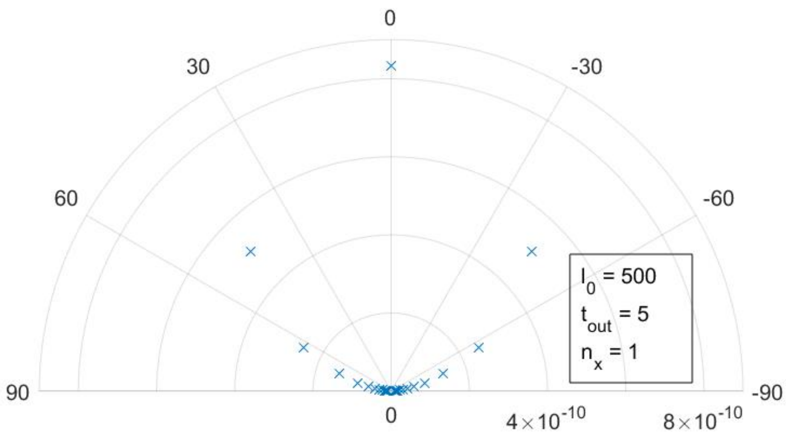
zrcadla) a postupně budu zvyšovat módové číslo $n_y$, což bude odpovídat naklánění vlnového vektoru (zároveň i změně velikosti).




Obrázek 3.12: Směrová charakteristika vyzařování zrcadla pro 30 módů

Na Obrázcích 3.11 a 3.12 jsou vykresleny vyzařovací charakteristiky zrcadla pro případ harmonického pohybu stěny kavity s rezonanční frekvencí rovnající se dvojnásobku frekvence základního módu. Parametry jsou zvoleny $t_{out} = 5$, pro nižší časy byly ostatní hodnoty oproti největší příliš malé, délka kavity $l = 1$ a maximální počet módů $n_{max} = 30$. Na prvním grafu je vykreslena pro první mód, na druhém pak pro všechny módy. Rozlišení, vzdálenost jednotlivých bodů, je dáno sklonem vlnového vektoru. Pro $n_x = 1$ lze obdržet pouze hodnoty úhlu 0°, pak 45°, následující si jsou již bližší. O který mód se jedná, lze poznat z koncového bodu křivky. Čím větší módové číslo $n_x$, tím menší koncový úhel byl vyšetřen.

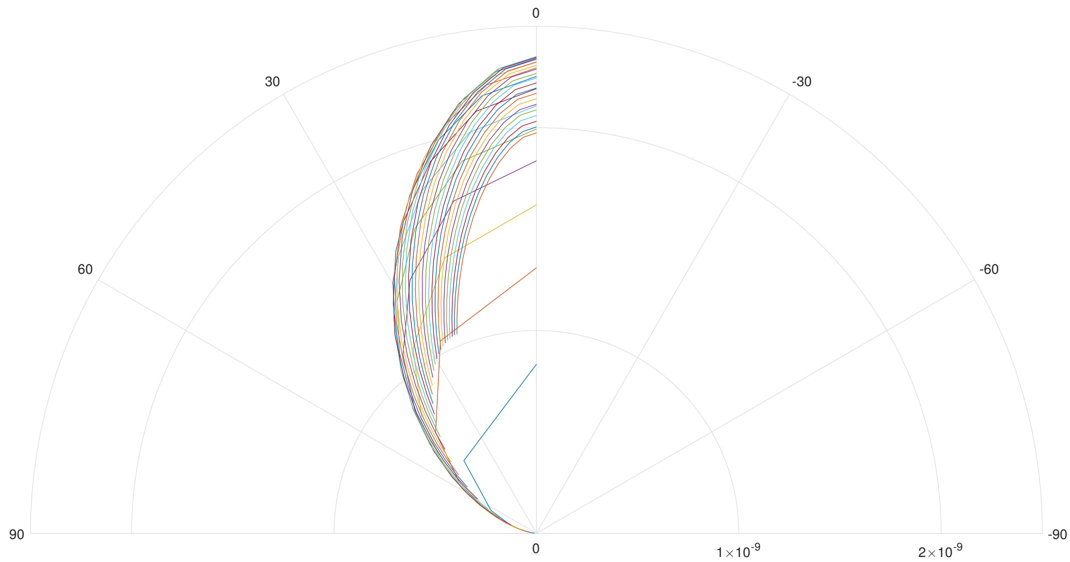
Další otázkou, kterou jsem se zabýval bylo, zda se tvar vyzařovací charakteristiky nějak výrazně změní při zvětšení vzdáleností zrcadel. Pro délku kavity $l = 500$ jsem obdržel pro $n_x = 1$ výsledky viz. Obrázek 3.13.



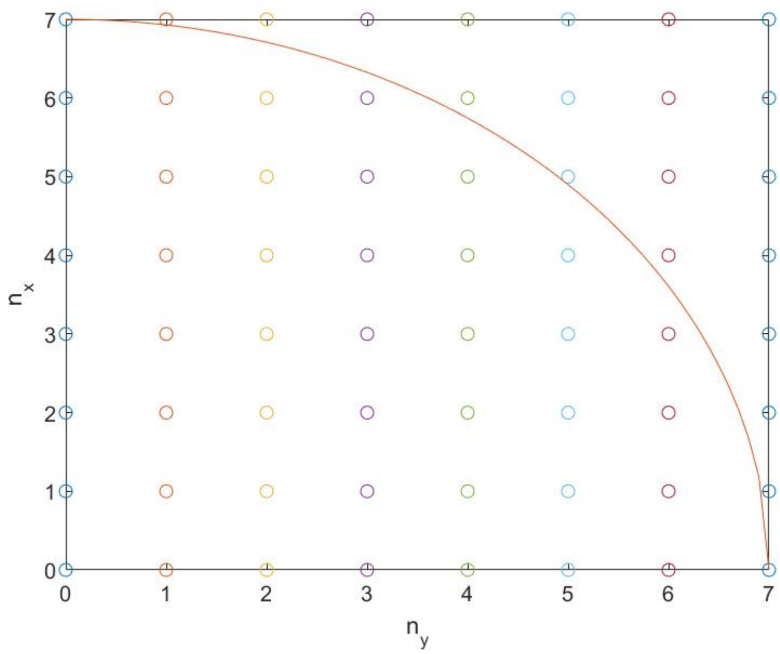

Obrázek 3.13: Směrová charakteristika stěny kavity pro $n_x = 1$

Lze vidět pokles středního počtu částic způsobený prodloužením kavity. Tvar vyzařovací charakteristiky je však obdobný. Zatímco v kavitě je frekvenční módové spektrum diskrétní, v případě, který byl zmíněn výše počítali se spojitým spektrem. To je jeden z důvodů, proč by nejspíše při velmi výrazném prodloužení kavity počet částic na základě výše vybudovaného výpočtu razantně klesal, avšak při uvažování spojitého spektra lze ukázat, že vyzařovat může i jediné zrcadlo. Přesto lze na Obrázku 3.13 vidět lalok podobný klasické anténě.

Co se týká dalších módových čísel $n_x$, jejich vyzařovací charakteristiky jsou vykresleny na Obrázku 3.14. Charakteristika je samozřejmě ze symetrie krychlové kavity symetrická, pokud ji vyšetřujeme v rovině $n_z = 0$, takže v grafu je vykreslena jen její polovina. O symetriích vyzařovací charakteristiky pro případ, kdy jsou $n_y$ a $n_z$ zároveň nenulové si netroufám nic tvrdit. Pokud by však během vyšetřování charakteristiky měnila složka vlnového vektoru ležící v rovině zrcadla svůj směr, znamenalo by to postupné stáčení roviny, v níž je charakteristika vyšetřována Takový případ by byl vypovídající jen pokud bychom uvažovali válcovou symetrii.




Obrázek 3.14: Směrová charakteristika stěny kavity pro 30 módů



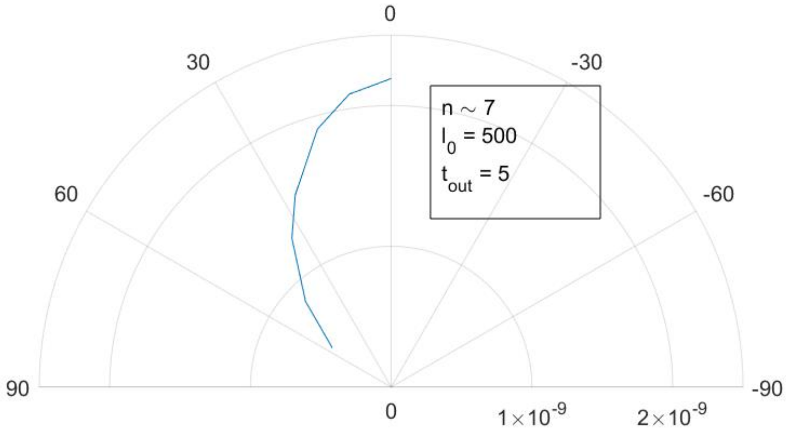

Obrázek 3.15: Možné kombinace módových čísel

Na Obrázku 3.15 jsou znázorněny možnosti kombinací módových čísel při diskrétním spektru frekvencí. Kružnice zobrazuje hodnoty odpovídající konstantní frekvenci módu při změně úhlu, který svírá vlnový vektor s osou x. Jako rozumné hodnoty módových čísel pro simulaci se ukazují ty, pro něž je odchylka nejmenší, viz Tabulka 3.1.

Tabulka 3.1: Hodnoty módových čísel pro jednotlivé simulace

| $n_x$ | $n_y$ |
|---|---|
| 7 | 0 |
| 7 | 1 |
| 7 | 2 |
| 6 | 3 |
| 6 | 4 |
| 5 | 5 |
| 4 | 6 |
| 3 | 6 |
| 2 | 7 |
| 1 | 7 |
| 0 | 7 |

Při harmonickém pohybu v rezonanci s prvním módem a s využitím kombinací módových čísel uvedených výše jsem obdržel výsledek viz. Obrázek 3.16.




Obrázek 3.16: Směrová charakteristika stěny kavity pro $n \sim 7$

# Závěr

Předmětem této práce bylo shrnutí základních teoretických a výpočetních aspektů DCE a vytvoření numerické simulace, která umožňuje simulovat vývoj počtu částic v kavitě důsledkem parametrické změny délky kavity.

Nejprve jsem uvedl krátký přehled historického vývoje této problematiky a zasazení do kontextu příbuzných jevů, které sdílí původ ve vakuových fluktuacích, projevující se i ve struktuře výpočtu. Následoval přehled analytických řešení a experimentálních pozorování DCE.

Jako úvod do teoretické části jsem zvolil módovou strukturu elektromagnetického pole v kavitě. Následovala argumentace vedoucí k vybudování modelu pro TE složku pole. Použil jsem hamiltonovský formalizmus a s pomocí Bogoliubovy transformace dospěl k předpisu středního počtu částic pomocí koeficientu Bogoliubovy transformace $\mathcal{B}$, který bylo lze získat z funkcí popisujících rozvoj do kreačních a anihilačních operátorů.

V praktické části jsem shrnul hlavní myšlenku Eulerovy jednokrokové metody a schématicky popsal její implementaci v programu Matlab v kontextu teoretického modelu vytvořeného v Teoretické části. Pro ověření správnosti implementace jsem nejprve zopakoval v literatuře uvedené výsledky pro zrcadlo kavity pohybující se konstantní rychlostí, poté jsem na stejném modelu zkoumal časový vývoj populovanosti módů a vliv počáteční nespojitosti.

Nejzajímavějším výsledkem celé práce je vyzařovací charakteristika stěny kavity. Napomáhá získání názornější představy, která je u kvantových jevů vždy velmi cenná. Nejprve jsem zkoumal prostorové směrování fotonů s fixním módovým číslem $n_x$. Poté jsem vyšetřil vyzařovací charakteristiku pro aproximativně konstantní frekvenci. Vzhledem k diskrétní frekvenční struktuře pole v kavitě nelze při sklápění vlnového vektoru sledovat frekvenci ryze konstantní. Zajímavé bylo srovnání s vyzařovací charakteristikou jediného kmitajícího zrcadla ve volném prostoru nalezenou v literatuře, kterou autoři obdrželi za pomoci aproximací. Mnou numerickými metodami obdržená vyzařovací charakteristika má obdobný tvar. Výsledek, ve kterém je největší podíl vyzařování ve směru proměnné délky kavity a rovnoběžně se směrem zrcadla (v konstantním rozměru kavity) je vyzařování nulové je poměrně intuitivní a sleduje časově závislou vzdálenost zrcadel jako původ generace fotonů.

Možným krokem pro další výzkum by mohlo být elektromagnetické pole v kavitě, jejíž stěny se harmonicky pohybují tak, že celková délka kavity je v laboratorní soustavě konstantní. Tato problematika bude klást vyšší nároky co se týká relativistické části problému.

# Literatura


[1] M. Ruser. Disertační práce: Dynamical Casimir Effect: From Photon Creation in Dynamical Cavities to Graviton Production in Braneworlds, Ženeva, 2007.

[2] G. T. Moore. Quantum Theory of the Electromagnetic Field in Variable-Lenght One Dimensional Cavity, J. Math. Phys., vol 11, s. 2679, 1970.

[3] P. D. Natio, J. R. Johansson, M. P. Blencowe, F. Nori. Colloquium: Stimulating Uncertainity: Amplifying the Quantum Vacuum with Superconducting Circuits, Reviews of Modern Physics, vol 84, 2012.

[4] V. V. Dodonov. Current Status of the Dynamical Casimir Effect, Physica scripta, The Royal Swedish Academy of Sciences, 2010.

[5] S. W. Hawking. Nature, vol 248, 30, 1974.

[6] E. Yablonovitch. Accelerating Reference Frame for Electromagnetic Waves in a Rapidly Growing Plasma: Unruh-Davies-Fulling-DeWitt Radiation and the Nonadiabatic Casimir Effect, Phys. Rev Lett., vol 62, s. 1742, 1989.

[7] H . B. G. Casimir. On the attraction between two perfectly conducting plates. Dostupné z: http://www.dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00018547.pdf

[8] P. W. Milloni. The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics, Boston, Academic Press, 1994.

[9] C. M. Wilson, G. Johansson, A. Pourkabirian, M. Simoen, J. R. Johansson, T. Duty, F. Nori, P. Delsing. Observation of the Dynamical Casimir Effect in a Superconducting Circuit, Nature, vol 479, s. 376, 2011.

[10] P. Lähteenmäki, G. S. Paraoanu, J Hassel, P. J. Hakonen. Dynamical Casimir effect in a Josephson metamaterial, PNAS, vol. 110, 11, 2013.

[11] C. C. Gerry, P. L. Knight. Introductory Quantum Optics, Cambridge, Cambridge University Press, 2005.

[12] P. A. M. Maia Neto, L. A. S. Machado. Quantum radiation generated by a moving mirror in free space, Phys. Rev. A, vol 54, 4, 1996.

[13] T. Lancaster,S. J. Blundell. Quantum Field Theory for the Gifted Amateur,Oxford, Oxford University Press, 2014.

[14] L. S. Brown. Quantum Field Theory, Cambridge, Cambridge University Press, 1992.

[15] U. Leonhardt. Essential Quantum Optics: From Quantum Measurement to Black Holes, Cambridge, Cambridge University Press, 2010.

[16] H. Jašková. Diplomová práce: Diferenční metody pro diferenciální rovnice a inkluze, UP, Olomouc , 2011.

[17] M. Castagnino, R. Ferraro, The Radiation from Moving Mirrors: The Creation And Absorption Of Particles, Ann. Phys., New York, vol. 154, 1, 1984.

# Příloha A

# Kód pro zápis kaplovací matice M bez časové závislosti

```
function Mjk = Matice(n)
Mjk=zeros(n,n);
    for j = 1 : n
        for k = 1: n
            if (j==k)%na diagonale nuly
                Mjk(j,k) = 0;
            else
                Mjk(j,k)=((-1).^(j+k)).*(2.*j.*k)./(k^2-j^2);
            end
        end
    end
end
```

# Příloha B

# Kód solveru pro případ konstantní rychlosti zrcadla

```
%DCE maticově
%Vstupní paramery
tic
n = 40;                      %dimenze matic n_max
dt = .00001;                 %časový element
tout = 40;                   %čas ukončení simulace
Ncas = floor(tout/dt) + 1;  %počet časových kroků
l = 50;                      %délka kavity
v = 0.1;                     %rychlost zrcadla
r = 10000;
m=0;                         %hmotnost pole (jen pozn. není dále použitá)
O1 = pi.*diag(1:n);          %Omega s nulovým m, bez časové závislosti,
%pro rychlost přidána vždy dodatečně
O2 = O1.*O1;

Mbeztd = Matice(n);              %Kaplovací matice
%bez časové závislosti,
%pro rychlost je přidávána dodatečně
%Alokace

e0 = eye(n,n);                       %Počáteční podmínka e
e = NaN(n,n);
f0 = - 1i.*O1./l;                    %Počáteční podmínka f
f = NaN(n,n);

B = NaN(n,n);
N = NaN(n,Ncas./r);                  %Alokace na střední počet částic



%Počáteční podmínky
e(:,:) = e0;                     %Uplatnění počátečních podmínek
```

```
f(:,:) = f0;



for t = 1:Ncas
   nt = (t-1).*dt;                %Převedení na časový krok dt z forcyklového t

   tdep2 = l+v.*nt;                  %l(t)
   tdep = v./tdep2;                   %(dl(t)/dt)/l(t)

   e(:,:) = e(:,:) + dt.*f(:,:) - dt.*tdep.*Mbeztd'*e(:,:); %rovnice pro e
   f(:,:) = f(:,:) - dt.*O2*e(:,:)./(tdep2^2) + dt.*tdep.*Mbeztd*f(:,:);
   %rovnice pro f,
   %O2 je Omega na druhou, je k ní přidána časová zavislost tdep2


   if mod(t,10000)==0             %Ukáže, kolik procent forcyklu uběhlo
      disp(t*100/Ncas)
   end

if mod(t,r)==0                    %Po r krocích vypočítá střední počet částic

for j = 1:n
    for k = 1:n
       B(j,k) = exp(-1i.*k.*pi.*tout./tdep2)./2.*sqrt(k./j).*(e(k,j)
       - 1i./(k.*pi./tdep2).*f(k,j));
    end
end


N(:,t./r) = sum((abs(B).*abs(B)),1);        %Výpočet středního počtu částic
end
end
toc
figure
ch=1:size(N,2);
ch=ch.*tout./size(N,2);
loglog(ch,N,'x')
```

# Příloha C

# Kód solveru pro výpočet vyzařovací charakteristiky

```
%DCE vyzařovací charakteristika
%Vstupní paramery
tic
n = 20;                       %dimenze matic n_max
dt = .000001;                 %časový element
tout = 20;                    %čas ukončení simulace
Ncas = floor(tout/dt) + 1;    %počet časových kroků
l = 1;                        %délka kavity
Nm = 12;
Nk = NaN(n,Nm+1);
nx=1;
for z = 0:Nm
m=pi.*z./l;                          %hmotnost pole

O2 = pi.*pi.*diag(1:n).*diag(1:n)./l^2+eye(n).*m.*m;
%Omega s nulovým m, bez časové závislosti,
%pro rychlost přidána vždy dodatečně
O1 = sqrt(O2);

Mbeztd = Matice(n);
%Kaplovací matice bez časové závislosti,
%pro rychlost je přidávána dodatečně
%Alokace

e0 = eye(n,n);                          %Počáteční podmínka e
e = NaN(n,n);
f0 = - 1i.*O1;                          %Počáteční podmínka f
f = NaN(n,n);
enew=NaN(n,n);
fnew=NaN(n,n);

B = NaN(n,n);
```

```
N = NaN(n,1); % Alokace na počet částic



%Počáteční podmínky
e(:,:) = e0;
f(:,:) = f0;



for t = 1:Ncas
   nt = (t-1).*dt;              %Převedení na časový krok dt z forcyklového t

   tdep2 = l.*(1.01 - 0.01.*cos(nt.*2.*pi./l));           %l(t)

   tdep = 0.01.*2.*pi.*sin(nt.*2.*pi./l)./tdep2;               %(dl(t)/dt)/l(t)

   O2 = pi.*pi.*diag(1:n).*diag(1:n)./tdep2^2+eye(n).*m.*m;

   enew(:,:) = e(:,:) + dt.*f(:,:) - dt.*tdep.*Mbeztd'*e(:,:);
   %rovnice pro e

   fnew(:,:) = f(:,:) - dt.*O2*e(:,:) + dt.*tdep.*Mbeztd*f(:,:);
   %rovnice pro f

   e = enew;
   f = fnew;
   if mod(t,10000)==0           %Ukáže, kolik procent forcyklu uběhlo
      disp(t*100/Ncas);
      disp(z);
   end

end


for j = 1:n
    for k = 1:n
       B(j,k) = exp(-1i.*k.*pi.*tout./tdep2)./2.*sqrt(O1(k,k)./O1(j,j)).*(e(k,j)
       - 1i./(O1(k,k)).*f(k,j));
    end
end




N(:) = sum((abs(B).*abs(B)),1);
Nk(:,z+1) = N(:);
```

```
end
toc

figure
A = Nk(nx,:);
g = 0:Nm;
fli = atan(g./nx);
polarplot(fli,A,'x')
FLI = NaN(n,Nm);
for h = 0:Nm
    for j = 1:n
FLI(j,h+1) = atan(h./j);
    end
end
figure
ax=gca;

polarplot(FLI',Nk')
thetalim([-90 90])
ax.ThetaZeroLocation = 'top';
```