Posudok na dizertačnú prácu Mgr. J. Krňávka:
„Some classes of basic algebras and related structures"

Predložená práca J. Krňávka sa zamierava na teóriu tzv. basic algebier, ktorej počiatky boli založené práve na Univerzite v Olomouci. Je vypracovaná v anglickom jazyku bez podstatných gramatických problémov. Matematické spracovanie je na veľmi vysokej úrovni, použité symboly sú riadne zadefinované a konzistentné v celej práci. Dá sa povedať, že práca je „samonosná", t.j. obsahuje zopakovanie definícii a dôležitých vlastností použitých pojmov.

Spracovávaná tematika dizertačnej práce, je založená na už publikovaných prácach kandidáta. Okrem toho sú v prílohe (Appendix) uvedené ďalšie dve jeho publikované práce, ktorých obsah nesúvisí priamo s témou basic algebier, ale poukazujú na jeho orientáciu v algebraickej teórii a teórii univerzálnych algebier.

Práca okrem úvodu (Preface) obsahuje 4 kapitoly a už spomínanú prílohu. V prvej časti je zopakované zavedenie basic algebier a sú uvedené tvrdenia, ktoré dávajú do súvisu basic algebry a zväzy s antitónnymi involúciami definovanými na hlavných filtroch $[a, 1]$, resp. na hlavných ideáloch $[0, a]$. Je uvedené, že MV-algebry, ortomodulárne zväzy a zväzovo usporiadané efektové algebry sú špeciálne prípady basic algebrier. Sú zavedené špeciálne identity (M) a (C) a niektoré špecifické vlastnosti algebier, ktoré spĺňajú (C), resp. (M), napr. Rieszovu dekompozičnú vlastnosť. Sú študované vlastnosti konečných basic algebier s (C) a je dokázané, že sú to MV-algebry.

Druhá kapitola sa zaoberá teóriou pre-ideálov a ideálov (pre-ideály, ktoré sú 0-triedy kongruencií) na basic algebrách a vlastnosťami zväzov pre-ideálov ($Pr(A)$) a ideálov ($Id(A)$). Sú taktiež analyzované relatívne pseudo-komplementy v zväze $Pr(A)$ a s tým súvisiaci pojem polára. Pre pre-ideál P je definovaná relácie $\Theta_l(P)$, ktorá v prípade, že basic algebra spĺňa vlastnosť (C) a P je ideál, tak definuje kongruenciu, ktorej jadrom je P. Naviac, pre ľubovoľný pre-ideál a basic algebru s (C) je $\Theta_l(P)$ relácia ekvivalencie, ktorá je kompatibilná s operáciou $\wedge$ a P je 0-trieda $\Theta_l(P)$ je P. Ak basic algebra spĺňa aj (M), tak $\Theta_l(P)$ je zväzová kongruencia. Okrem toho je rozpracovaná teórie prime a minimálnych prime pre-ideálov na basic algebrách.

Tretia kapitola obsahuje súvis basic algebier a zväzovo-usporiadaných komutatívnych lúp. Po zopakovaní základných pojmov a vlastností lúp je zavedený Γ funktor (podobný z teórie MV- a pseudo MV-algebier), ktorý ku každej komutatívnej zväzovo-usporiadanej lupe priradí monotónnu basic algebru. Dôležité je, že pri aplikácii na abelovské ℓ-grupy dostávame práve Mundiciho Γ funktor definujúci MV-algebry.

Je dokázané, že inverzné komutatívne ℓ-lupy a prvky u spĺňajúce ekvivaletné podmienky z Lemy 3.1.4 (špeciálna forma asociativity) majú špeciálne vlastnosti, Γ funktor splýva s Mundiciho Γ funktorom, a v prípade, že prvok u je tzv. silná jednotka (strong order unit), tak každý prvok inverznej komutatívnej ℓ-lupy možno jednoznačne zapísať v tvare tzv. good postupnosti prvkov z $\Gamma(L, u)$.

Pre úplne (lineárne) usporiadanú basic algebru A je skonštruovaná lineárne usporiadaná komutatívna inverznú ℓ-lupa $\mathfrak{L}_A$ (definovaná na karteziánskom súčine $\mathbb{Z} \times A$) taká, že A je izomorfná s $\Gamma(\mathfrak{L}_A, (1, 0))$. Každú semilineárnu komutatívnu basic algebru (t.j. subdirektný súčin lineárnych komutatívnych basic algebier), možno vnoriť do $\Gamma(L, u)$ pre nejakú lineárnu komutatívnu inverznú

ℓ-lupu a vhodný prvok u z L^+. Konštrukciou tejto ℓ-lupy pomocou tzv. good funkcií sa zaoberá ďalšia podkapitola.

Ešte sú študované vlastnosti lexikografických súčinov $\mathbb{Z}$ a komutatívnych ℓ-lúp L a je definovaná nová trieda príkladov komutatívnych basic algebier.

V štvrtej kapitola je najprv zavedený pojem centrálnych a tzv. ostrých (sharp) prvkov a následne je dokázaný súvis medzi centrálnymi prvkami a rozkladovými kongruenciami. V prípade, že basic algebra spĺňa identitu (M), tak centrálne a ostré (sharp) prvky splývajú. Ďalej je rozpracovaná teória tzv. derivácii, t.j. aditívnych zobrazení, ktoré spĺňajú tiež identitu pripomínajúcu vzorec pre deriváciu súčinu funkcií v reálnej analýze. Vzhľadom, na to, že operácia $\oplus$ nemusí byť komutatívna, sú uvažované 2 základné prípady (hoci formálne by sa dalo uvažovať až 8 možností). Tieto uvažované prípady vychádzajú z teórii derivácií na iných nekomutatívnych algebrách v teórii kvantových štruktúr. Je dokázané, že derivácie d majú špecifický tvar a sú determinované hodnotou $d(1)$. Naviac, aj v prípade nekomutatívnych basic algebier, oba typy derivácií vedú na rovnaké zobrazenia. Okrem toho je ešte uvedené pojednanie o deriváciách na špecialnych typoch basic algebier, na zväzových efektových algebrách a MV-algebrách a je dokázaný jedno-jednoznačný súvis medzi deriváciami na zväzových efektových algebrách (resp. MV-algebrách) a priamymi rozkladmi na súčin dvoch algebier, kde prvá algebra je ortomodulárny zväz (resp. boolovská algebra).

Záver a hodnotenie: Ako bolo už spomínané v úvode posudku, práca je starostlivo vypracovaná, bez vážnejších matematických, či terminologických problémov. Niektoré malé výhrady sú uvedené v časti Pripomienky, ale na kladný dojem z práce nemajú žiadny väčší vplyv. Uchádzač týmto preukázal svoju orientáciu v problematike a schopnosť vypracovať ucelené vedecké matematické dielo obsahujúce nové poznatky, na ktorých sa tiež podieľal. Preto navrhujem **po úspešnej obhajobe dizertačnej práce udeliť mu akademický titul PhD.**

Pripomienky:

1. str. 24, r. 3: of all algebraic distributive lattices
2. str. 29, Example 3.1.3 case (i): $x - 2y + y + \min(x - 2y, y)$
3. str. 29, Example 3.1.3, r. -3: $x \boxplus y = \min(x \circ y, u)$
4. str. 35, (v): or equivalently, $x < y$
5. str. 36, r. 11: $i = p + q$, for some p, q, where
6. str. 44, (ii): ak som sa nepomýlil, tak $f(x \odot y) = f(f(x) \odot f(y))$ je možné dokázať aj pomocou (i) a aditivity f.
7. str. 44, (iv): follows from (ii) and (iii):
8. str. 45, proof (v): By (ii), (iii) and (iv) (nie (b), (c), (d))
9. Číslovanie v autoreferáte sa občas líši s číslovaním v dizertačnej práci. (napr. Lemma 3.1.3 vs. Lemma 3.1.4, Proposition 2.1.3 vs. Proposition 2.1.5 a pod.)

V Bratislave 30. 4. 2015

Mgr. Marek Hyčko, PhD.

Hyčko

Oponentský posudek doktorské disertační práce Mgr. Jana Krňávka *Some classes of basic algebras and related structures*

Disertační práce Mgr. M. Jana Krňávka se věnuje aktuální problematice algebraických struktur, které jsou matematickým modelem jak pro fuzzy logiku tak pro kvantovou mechaniku. Předložená práce se řadí mezi takto zaměřené odborné výstupy a je tak bezpochyby v oblasti mezinárodního výzkumu takovýchto struktur přínosem.

Počátkem tohoto století skupina algebraiků kolem I. Chajdy na Univerzitě Palackého v Olomouci zavedla tzv. basic algebry jakožto zobecnění MV-algeber odpovídající svazům majících antitonní involuce na hlavních filtrech. Ukázalo se, že tato třída algeber obsahuje svazové efektové algebry a tedy i MV-algebry a ortomodulární svazy.

Cílem disertační práce bylo nejprve v rámci první části použít algebraický přístup při zkoumání variet basic algeber splňující identity označené v práci jako (C) resp. (M), zejména se zaměřením na jejich strukturální algebraickou teorii. Přitom (C) plyne z (M). V druhé části se autor věnuje kongruencím a preideálům, resp. ideálům v rámci výše uvedených variet basic algeber. Třetí, hlavní část práce obsahuje popis přechodu, tj. jedná se o zobecnění slavné Mundiciho věty pro MV-algebry, od semilineárních (komutativních) basic algeber k svazově uspořádaným komutativním inverzním lupám (obrácený směr je zřejmý). V závěrečné čtvrté části autor studuje pojem derivace v rámci studia basic algeber. Přílohou této práce jsou navíc další dva články autora - první věnovaný tzv. skew reziduovaným svazům a druhý pak kongruencím na direktoidech.

Za najvýznamnější výsledky uvedené v disertační práci považuji:

- To, že každá konečná basic algebra s vlastností (C) je MV-algebra (Theorem 1.4.4).
- Popis svazu preideálů pro basic algebry s vlastností (M) (Theorem 2.3.2).
- To, že lineárně uspořádaná komutativní basic algebra je intervalem v lineárně uspořádané komutativní inverzní lupě (Theorem 3.2.2.).
- Zobecnění pojmu dobré funkce pro basic algebry a jeho následné využití v tom, že semilineární komutativní basic algebra je intervalem ve svazově uspořádané komutativní inverzní lupě (Theorem 3.3.11.).

- To, že v případě svazových efektových algeber lze derivace na nich ztotožnit s přímým součinem dvou svazových efektových algeber, přičemž jedna z nich je ortomodulární svaz.

V závěru textu vlastní práce je uvedeno 38 citací. Autor prostudoval velký rozsah prací souvisejících se studovanou problematikou. Práce jsou správně a pečlivě citovány. Práce uvedené v seznamu literatury jsou citovány v textu a práce citované v textu jsou obsaženy v seznamu literatury.

U obhajoby disertační práce by autor například mohl odpovědět na níže uvedené otázky:

1. Lze předpoklad (M) v Lemmatu 1.3.13 nahradit distributivitou basic algebry A?
2. Vysvětlete, proč platí Lemma 1.4.1 (zejména přechod mezi čtvrtým řádkem důkazu zezdola ke třetímu) - za předpokladu (M) je důkaz jasný.
3. Které části Corollary 2.3.7 platí bez předpokladu (M)? Jaká je správná definice kompaktně generované basic algebry?
4. Je nějaký rozdíl mezi dobrou posloupností a funkcí? Pokud ano, proč dává autor přednost dobrým funkcím.
5. Z jakého důvodu autor používá označení $'$ ve dvou různých souvislostech - jednou jako inverzi a podruhé jako nějaký obecný prvek?

V průběhu zpracovávání disertační práce se Mgr. Jan Krňávek aktivně zapojil do odborných projektů, např. do projektu Algebraické metody v kvantové logice, CZ.1.07/2.3.00/20.0051. Jeho publikační aktivita (celkem 6 publikací, z toho 3 v impaktových časopisech) reflektuje jak témata bezprostředně související s tématem předložené práce, tak i s odborným zaměřením školitelského pracoviště.

Text disertační práce o rozsahu 72 stran je klasicky členěn do částí zahrnujících úvod a cíle práce, výsledky, apendix sestávající z článků se spoluautory I. Chajda a H. Länger, literatura, seznam základních pojmů použitých v rámci práce.

Disertační práce je pečlivě zpracována, její téma byla vhodně zvoleno. Má logické členění, přehledné uspořádání a výbornou grafickou úpravu. Práce je napsána srozumitelně, v anglickém jazyce a po jazykové stránce má předložená disertační práce dobrou úroveň (v práci jsem našel pouze zanedbatelné nepřesnosti resp. překlepy). K práci nemám zásadní připomínky.

O odborné úrovni autora svědčí i podíl na publikacích, na kterých je práce založena (2 již vyšlé články v impaktových časopisech a jeden v redakčním procesu). Vzhledem k pozitivním výsledkům se dá očekávat, že na ně bude dobrý ohlas a výzkum bude pokračovat. Při řešení zvolené problematiky autor použil řadu originálních přístupů (zejména v třetí části).

Na závěr konstatuji, že doktorand prokázal vynikající znalosti a přehled v dané problematice, dosáhl víc než dostatečný počet relevantních a netriviálních výsledků, které jsou velkým přínosem do teorie algebraických struktur a dokázal, že je schopen samostatně vědecky pracovat. Cíle disertační práce byly splněné a disertační práce splňuje požadavky kladené na obsah a formu disertační práce a proto ve smyslu Zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách, §47 Doktorský studijní program, po úspěšné obhajobě doporučuji udělit Mgr. Janu Krňávkovi akademický titul „doktor" (Ph.D.)

V Brně 30. 5.2015

doc. RNDr. Jan Paseka, CSc.

Jan Paseka

Posudek na disertační práci Mgr. Jana Krňávka

„Some classes of basic algebras and related structures"

Basic algebry byly zavedeny jako společné neasociativní a nekomutativní zobecnění MV-algeber, ortomodulárních svazů a svazových efektových algeber. Předložená disertační práce se zabývá studiem široké třídy basic algeber a některých jejích důležitých podtříd. Práce je členěna do čtyř kapitol, které jsou doplněny apendixem složeným ze dvou článků týkajících se algebraických struktur do jisté míry souvisejících s basic algebrami.

V první kapitole autor připomíná pojem basic algebry jako algebry typu (2,1,0,0), jejíž binární operace sčítání nemusí být obecně ani komutativní ani asociativní. Následně uvádí také odvozené binární operace násobení a dvou odčítání. Připomíná také antitónní involuce na hlavních filtrech a hlavních ideálech generovaných libovolnými prvky basic algeber. Navíc uvádí také přehled vztahů mezi antitónními involucemi ohraničených svazů a basic algebrami. Obsahem další části kapitoly je přehled hlavních speciálních tříd algeber, které je možno interpretovat jako basic algebry (MV-algebry, ortomodulární svazy, svazové efektové algebry). Dále autor uvádí přehled vybraných vlastností basic algeber a následně se zaměřuje na třídy basic algeber splňujících podmínky (C), resp. (M), na jejich vzájemný vztah i na vztah k třídě komutativních basic algeber. Uvádí také příklady basic algeber splňujících (M), které ale nejsou komutativní. Hlavním výsledkem kapitoly je důkaz věty, že každá konečná basic algebra splňující (C) je MV-algebrou.

V druhé kapitole jsou zavedeny pojmy preideálu a ideálu basic algeber. Preideály jsou definovány formálně stejně jako ideály MV-algeber, ale zde nemusí být 0-třídami žádných kongruencí. Ideály jsou pak zavedeny právě jako 0-třídy kongruencí basic algeber. Je zde ukázáno, že preideály libovolné basic algebry A tvoří vzhledem k inkluzi algebraický svaz $Pr(A)$ a že svaz ideálů $Id(A)$ je úplným podsvazem v $Pr(A)$. Speciální pozornost je věnována svazům $Pr(A)$ pro libovolné basic algebry A splňující (M). Mj. se ukazuje, že v takovém případě svaz $Pr(A)$ je relativně pseudokomplementární a že kompaktními prvky v $Pr(A)$ jsou právě hlavní preideály. Ačkoliv preideály nemusí být ideály, je zde ukázáno, že každý preideál P určuje jistou ekvivalenci, v níž P je 0-třídou a která je pro A splňující podmínku (M) svazovou kongruencí. V další části kapitoly se autor věnuje prime preideálům basic algeber. Ukazuje řadu podmínek kladených na libovolný preideál P basic algebry splňující (M), které jsou ekvivalentní s tím, že P je prime. V dalším je ukázáno, že svaz $Pr(A)$ pro A splňující (M) je relativně normální, což mj. umožňuje popsat minimální preideály.

Jak je dobře známo, libovolnou MV-algebru A je možno (jednoznačně) reprezentovat jako interval $[0,u]$ vhodné abelovské svazově uspořádané grupy (l-grupy) G se silnou jedničkou u. Píšeme pak $A=\Gamma(G,u)$. Ve třetí kapitole autor tento výsledek zobecňuje i pro některé třídy basic algeber, kde roli l-grupy G přebírá komutativní svazově uspořádaná lupa (l-lupa) L. Nejdříve se věnuje možnostem reprezentace lineárně uspořádaných basic algeber. Metodou, která vychází z Changovy konstrukce lineárně uspořádané grupy $\Gamma(G,u)$ pro lineárně uspořádanou MV-algebru, dochází ke konstrukci lineárně uspořádané unitální lupy pro reprezentaci dané lineárně uspořádané komutativní basic algebry ve tvaru $\Gamma(L,u)$. Je zde pak také ukázáno, že pokud A je semilineární komutativní basic algebra, pak existuje semilineární komutativní inverzní l-lupa L taková, že A je pak možno vnořit do $\Gamma(L,u)$ pro vhodný kladný prvek u z L.

Další část kapitoly je věnována možnosti sestrojení takové l-lupy L, že $A=\Gamma(L,u)$. Je ale známo, že množina L^+ kladných prvků l-lupy obecně neurčuje tuto lupu jednoznačně. Proto nelze sestrojit takovou l-lupu metodou, která by jen zobecňovala Mundiciho konstrukci pomocí dobrých posloupností použitou pro MV-algebry. Autor ale ukazuje jinou žádanou konstrukci, která vede přímo ke konstrukci l-lupy L. V této konstrukci nahrazuje dobré posloupnosti tzv. dobrými funkcemi, které zobrazují množinu všech celých čísel $\mathbf{Z}$ do dané basic algebry A. Výsledkem pak jsou komutativní semilineární inverzní l-lupa L a silná jednička u v L takové, že $A=\Gamma(L,u)$. V závěrečné části kapitoly je ukázána nová třída komutativních basic algeber, které nejsou MV-algebrami.

V úvodní části čtvrté kapitoly jsou připomenuty pojmy ostrý a centrální prvek libovolné basic algebry. Ukazuje se, že centrální prvky basic algebry A tvoří podalgebru v A izomorfní s Booleovou algebrou faktorových kongruencí na A a charakterizuje ostré prvky pomocí aditivních zobrazení. Derivace na basic algebrách jsou zde zavedeny jako aditivní zobrazení splňující formálně stejnou identitu jako derivace na MV-algebrách. Ukazuje se, že každá derivace d na basic algebře A je homomorfismus A na intervalovou algebru $[0, d(1)]$. Závěr kapitoly je věnován derivacím na svazových efektových algebrách a MV-algebrách.

Předložená disertační práce navíc obsahuje dodatek skládající se ze dvou článků týkajících se šikmých (skew) reziduovaných svazů a direktoidů, tedy algeber, které do jisté míry souvisejí s basic algebrami.

U obhajoby by autor mohl vysvětlit definici monotónní basic algebry (str. 11): Platí, že A je monotónní, právě když splňuje (M)? Proč pak dva názvy? Dále by bylo vhodné, kdyby byl ukázán diagram algebry A použité v Remark 2.1.2 (str. 17).

Disertační práce Mgr. Krňávka obsahuje původní a zajímavé výsledky z oblasti výzkumu, která je v posledních letech intenzívně rozvíjena. Tyto výsledky budou určitě využity při dalším rozvoji studované teorie. Disertační práce je zpracována přehledně a dosažené výsledky na sebe logicky navazují. Značná část uváděných důkazů byla náročná, protože nemohla být využita ani asociativnost ani komutativnost výchozí operace sčítání. Přesto se s nimi disertant dobře vyrovnal. Jako přínosné hodnotím i příklady, které jsou v práci obsaženy a které umožňují prokázat skutečnou rozdílnost některých tříd basic algeber.

Předložená práce svým obsahem i kvalitou splňuje podmínky kladené na disertační práce a proto ji doporučuji k obhajobě.

V Olomouci dne 21. 5. 2015

Prof. RNDr. Jiří Rachůnek, DrSc.
oponent