UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY
MATEMATIKA – EKONOMIE SE ZAMĚŘENÍM NA BANKOVNICTVÍ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kulečník na elipse

Vedoucí diplomové práce:
Prof. RNDr. dr hab. Jan Andres CSc.,DSc.
Rok odevzdání: 2013

Vypracovala:
Michaela Kubiczková
III. Ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením prof. RNDr. dr hab. Jana Andrese CSc., DSc. a všechny použité zdroje jsem uvedla.

V Olomouci dne 22. 4. 2013.

Poděkování

Zde bych chtěla poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce a to panu prof. RNDr. dr hab. Janu Andresovi CSc., DSc. za jeho pomoc při vypracování této práce. Také bych chtěla vyjádřit svůj velký dík mým rodičům a mému příteli, kteří mě ve studii plně podporují.

Obsah

Úvod 4

1. Úvod do teorie kulečníků 5

1.1. Historie klasického kulečníku jako hry 5

1.2. Dynamické systémy a teorie deterministického chaosu 5

1.3. Historie matematických kulečníků 6

2. Základní konstrukce matematických kulečníků 8

2.1. Kulečníkové stoly 8

2.1.1. Neomezené kulečníkové stoly 11

2.2. Kulečníkový tok 12

2.3. Fázový prostor kulečníkového toku 14

2.4. Souřadnice reprezentující kulečníkový tok 16

2.5. Kolizní zobrazení 18

3. Příklady matematických kulečníků 21

3.1. Kulečník na kruhu 21

3.2. Kulečník na elipse 25

4. Praktické příklady 34

4.1. Zákl. myšlenka pohybu částice uvnitř elipsy z pohledu analytické geometrie . 34

4.2. Počítačová výpomoc při vykreslovaní drah pohybující částice 38

5. Teorie deterministického chaosu 40

6. Dodatky 41

6.1. Torus 41

6.2. Vnější součin diferenciální p-forem 42

6.3. Lebesgueova míra 43

Závěr 47

Seznam příloh 48

Příloha A 48

Seznam literatury 49

Úvod

Cílem této práce je popsat problematiku matematických kulečníků, konkrétněji kulečník na elipse. Budu se snažit studovat a popsat zejména základy tohoto tématu, které je jinak velice obšírné a složité. Toto téma není čistě matematické, ale také zde využíváme znalostí z fyziky a optiky.

Tato práce se hlavně opírá o knihu s názvem Chaotic Billiards od Nikolaie Chernova a Roberta Markariana [1], která je věnovaná Yakovu Sinaiovi (viz kapitola 1.3) k příležitosti jeho sedmdesátých narozenin. Tato kniha je v mé práci stěžejní a jsou odtud také převzaty i některé obrázky. Ostatní obrázky jsem vytvářela sama v programu Geogebra 4.2 nebo stáhla z internetu.

Nejprve se v první kapitole zajímám o historii matematických kulečníků a také o dynamické systémy, do kterých matematické kulečníky patří. Druhá kapitola je zaměřena na obecný popis matematických kulečníků a jejich konstrukcí, dále se ve třetí kapitole snažím zkoumat konkrétněji kulečník na elipse a jeho speciální případ kulečník na kruhu a k lepšímu porozumění jsem si vyhledala program Wolfram CDF Player 8, který umí vytvářet všelijaké demonstrace a také vykreslovat chování uvnitř kulečníku na elipse (také na kruhu) pomocí dráhy bezrozměrné pohybující se částice. Nakonec jsem se v páté kapitole zaměřila na definici chaosu, ale jedná spíše jen o takové nastínění toho, co tento pojem znamená.

1. Úvod do teorie kulečníků

1.1. Historie klasického kulečníku jako hry

Samotná hra kulečník se hraje už tak dlouho, že nejsme schopni říct, kdy přesně vznikla. Vyvinula se však ze hry, která se hrála na travnatých plochách a připomínala kroket. První zmínky o této hře se objevily už ve 14. století v Severní Evropě, pravděpodobně ve Francii, ale její pozměněné verze se hrály i v 17. století. Na konci 15. století se tato hra přeměnila z venkovní verze na trávě do vnitřní na stole, jehož povrch byl zelený, aby trávu napodobil. Také ohraničení se převzalo z původní hry, a tak vznikly hrany kulečníku. Do koulí se šťouchalo dřevěnými tyčemi, dnešními tágy. Dokonce i francouzský král Ludvík XI. si zakoupil kulečníkový stůl v roce 1470. Klasický kulečník v dnešní době známe jako stůl ve tvaru obdélníku se zeleným povrchem, kde mohou a nemusí být otvory na koule, do kterých šťoucháme tágy a snažíme se je do otvorů dostat, v případě kulečníku bez otvorů se snažíme o co nejvíce dotyků koulí navzájem.

Matematické kulečníky však nemusí být pouze na obdélníku, ale také na různých jiných tvarech jako například kruh, elipsa nebo čtverec. V těchto matematických kulečnících nás však bude zajímat pohyb bodové částice uvnitř, v mém případě, elipsy.

1.2. Dynamické systémy a teorie deterministického chaosu

Chování a pohyb koule po eliptickém kulečníku zkoumáme v rámci dynamických systémů, konkrétněji v kapitole chaotických deterministických dynamických systémů. Dynamické systémy vyjadřují dynamické chování konkrétního systému, to znamená, že popisuje stav systému a jeho změnu v čase. Tuto změnu určujeme pomocí dynamických podmínek, které jsou většinou dány jako soustava diferenciálních rovnic. Za pomocí takzvaného stavového vektoru popisujeme stav systému v libovolném časovém okamžiku. Stavový vektor náleží do takzvaného stavového prostoru. Tento prostor stanovuje, jakých

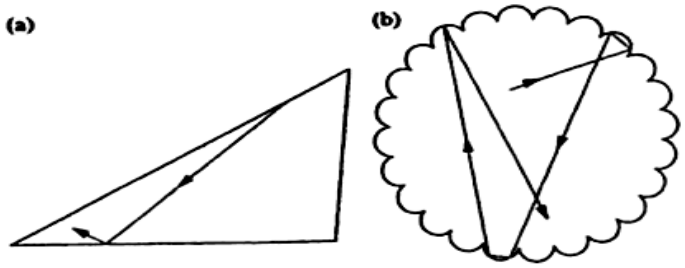
hodnot může stavový vektor nabývat. Pro nás je důležité klást si otázku, jak bude stav systém vypadat v budoucnosti a zda jej lze předpovědět.

Dynamické systémy se rozdělují na deterministické a stochastické. Deterministické systémy jsou poměrně přesně popsatelné, kdežto stochastické jsou náhodné, a tak zde můžeme využít jen statistické vlastnosti. Zvláštním typem deterministického dynamického systému je chaotický, který je velmi citlivý na počáteční podmínky, a proto je jeho budoucí stav nepředvídatelný (chaotický).

1.3. Historie matematických kulečníků

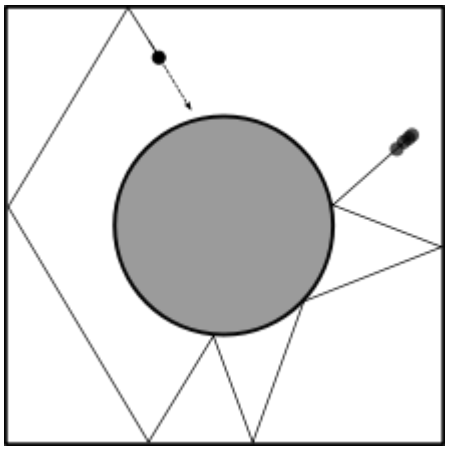
Již největší matematikové 18. a 19. století, jako byli Laplace, Lagrange nebo Dirichlet, se snažili seriózně zkoumat dynamické systémy zejména, na kolik jsou stabilní. Zajímali se například o stabilitu sluneční soustavy. Na přelomu 19. a 20. století Henri Poincaré dokázal, že v přírodních zákonech je možná nestabilita. Tato nestabilita způsobená libovolně malými poruchami může mít nepředvídatelné důsledky. Na Poincarého pak navázal ruský matematik Ljapunov, jehož pojetí se používá i dodnes.

Dynamikou kulečníků a jejich rolí ve fyzice se dostala velká pozornost od roku 1900, kdy skotský fyzik Lord Kelvin vyslovil svou velkou přednášku nazvanou „Mračna 19. století v dynamické teorii tepla a světla“. V této přednášce mimo jiné zkoumal pohyb bodové částice uvnitř kulečníku ve tvaru trojúhelníku nebo také květu a odrazy od jeho stěn.



Obrázek 1.1: trojúhelníkový a květový kulečník

Dále se kulečníky zabýval Američan Birkhoff, který je považován za zakladatele ergodické teorie (viz kapitola 3.2). Kulečníky s rozptylujícími neboli konkávními stěnami studoval ruský matematik Sinai, po kterém se kulečník s hladkou konkávní stěnou jmenuje.



Obrázek 1.2: Sinaiův kulečník

V dnešní době se kapitolou chaotických kulečníků zabývají matematici Chernov a Markarian.

2. Základní konstrukce matematických kulečníků

Nejdříve definujeme základní veličiny potřebné k dalšímu zkoumání konkrétních matematických kulečníků.

Kulečníky a jejich systémy v rovině jsou obecně definovány takto:

Definice 2.1: Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je oblast s hladkou nebo po částech hladkou hranicí. Do takzvaného *kulečníkového systému* patří volný, rovnoměrný a přímočarý pohyb bodové částice uvnitř D se specifickými zrcadlovými odrazy od hranice δD.

Zrcadlové odrazy vycházejí z fyzikální teorie o zrcadlech, která popisuje odrazy světelných paprsků od zrcadel a řídí se zákonem optiky, že úhel dopadu se rovná úhlu dopadu. Více se můžete dočíst zde [3].

2.1. Kulečníkové stoly

V mém případě jako oblast D uvažujeme elipsu s hladkou hranicí ∂D, kde ∂ označuje derivaci. Můžeme se však setkat s různými oblastmi D, a proto se v těchto případech vylučuje mnoho nepříjemných nepravidelností vytvořením vhodných předpokladů na oblast D. To nám umožňuje vyhnout se mnoha problémům a dostat tak obecnější model.

Definice 2.2: Nechť $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená ohraničená souvislá oblast a $D = \overline{D}_0$, kde $\overline{D}_0$ označuje uzávěr množiny D_0. *Hranice kulečníku* $\partial D = \partial D_0$, tj. $D = D_0 \cup \partial D_0$, se skládá z hladkých kompaktních křivek, pro které existují v každém bodě aspoň první tři derivace, a tím pádem je možno sestrojit tečnu ve všech bodech hranice.

Předpoklad 2.1: Hranice ∂D je konečné sjednocení hladkých kompaktních křivek:

$$\partial D = \Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_r, \tag{2.1}$$

kde Γ_i, $i = 1, \dots, r$ jsou jednotlivé křivky, které jsou definované pomocí zobrazení $f_i: \langle a_i, b_i \rangle \to \mathbb{R}^2$. Toto zobrazení je prosté na $\langle a_i, b_i \rangle$ a má definované aspoň první tři jednostranné derivace v bodech a_i a b_i.

Definice 2.3: Říkáme, že D je *kulečníkový stůl* a $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ *stěny kulečníku* nebo *komponenty* ∂D.

Předpoklad 2.2: δD komponenty Γ_i se mohou navzájem křížit jen ve svých koncových bodech, tudíž

$$\Gamma_i \cap \Gamma_j \subset \partial\Gamma_i \cup \partial\Gamma_j, i \neq j, \tag{2.2}$$

Důsledek 2.2:
$$\Gamma_\star = \partial\Gamma_1 \cup \cdots \cup \partial\Gamma_r \text{ a } \tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \Gamma_\star, \tag{2.3}$$
kde $x \in \Gamma_\star$ je *rohový bod* D a $x \in \tilde{\Gamma}$ je pravidelný *hraniční bod*.

V rohových bodech neexistují derivace, a proto zde nemůžeme sestrojit tečny a tedy, jestliže se částice v tomto bodě odráží, další pohyb není definován.

Předpoklad 2.3: Každá křivka Γ_i má druhou derivaci f_i'', buď ve všech svých bodech nenulovou, nebo v každém bodě nulovou.

Definice 2.4: Stěny neboli hrany kulečníku se rozdělují na takzvané *rovné* ($f'' \equiv 0$), *rozptylující* neboli *konkávní* ($f'' \neq 0$ je vně D) a *soustřeďující* neboli *konvexní* ($f'' \neq 0$ je uvnitř D).

Tyto názvy vycházejí z fyzikální teorie o zrcadlech, které odrážejí světelné paprsky. Konkávní zrcadla mají tendenci paprsky rozptylovat a konvexní soustřeďovat.

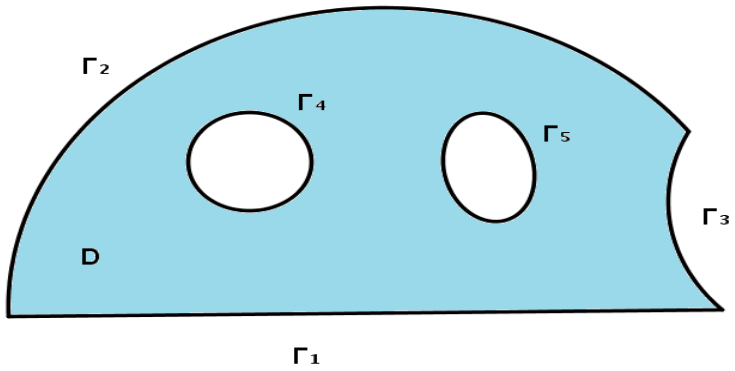
Definice 2.5: Budeme definovat takzvané *označené zakřivení* (anglicky signed curvature) na každém Γ_i následně

$$\mathrm{K} = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } \Gamma_\mathrm{i} \text{ je rovná stěna,} \\ -\|f''\| & \text{jestliže } \Gamma_\mathrm{i} \text{ je konvexní stěna,} \\ \|f''\| & \text{jestliže } \Gamma_\mathrm{i} \text{ konkávní stěna,} \end{cases} \tag{2.4}$$

kde ‖…‖ označuje euklidovskou normu, kterou lze definovat takto:

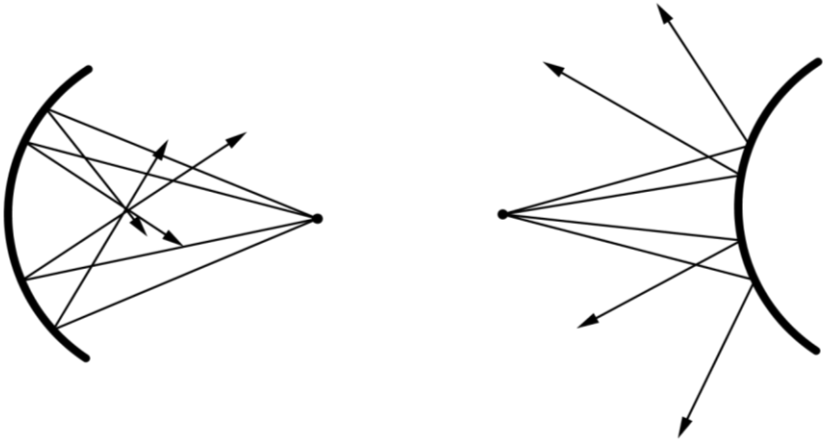
Definice 2.5.1: Euklidovská norma vektoru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je definovaná na $\mathbb{R}^n$ takto:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}. \tag{2.5}$$



Obrázek 2.1: různé typy stěn kulečníku

V obrázku 2.1 jsou zastoupeny všechny druhy kulečníkových stěn Γ_i. Γ_1 je stěna rovná, Γ_2 je stěna soustřeďující a Γ_3 je stěna rozptylující. Stěny Γ_4 a Γ_5 jsou rozptylující a navíc uzavřené stěny. Modrá část představuje daný vymyšlený tvar samotného kulečníkového stolu.



Obrázek 2.2

Na obrázku 2.2 je ukázáno, jak probíhají odrazy od rozptylující (vpravo) nebo soustřeďující (vlevo) stěny respektive zrcadla, jestliže se jedná o světelné paprsky.

Definice 2.6: Tudíž můžeme definovat *orientaci křivek* takto:

$$\Gamma_0 = \bigcup_{\mathrm{K}=0} \Gamma_i, \quad \Gamma_- = \bigcup_{\mathrm{K}<0} \Gamma_i, \quad \Gamma_+ = \bigcup_{\mathrm{K}>0} \Gamma_i, \tag{2.6}$$

kde K je definováno v definici 2.5.

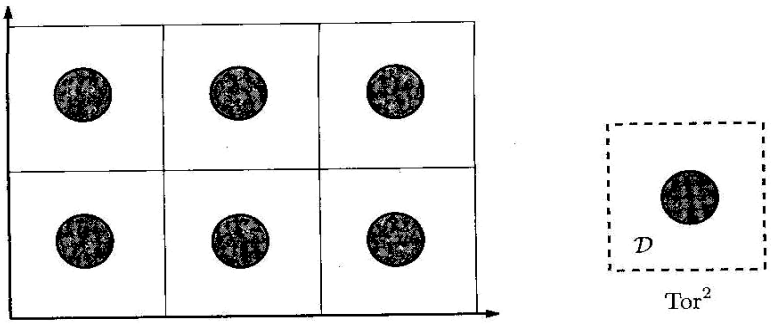
2.1.1. Neomezené kulečníkové stoly

Existují také kulečníky, kdy oblast $D \subset \mathbb{R}^2$ není ohraničena. V tomto případě je rozumné vyžadovat, aby hranice ∂D byla lokálně po částech hladká. Tudíž pro jakkoliv velký čtverec $Q_A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq A, |x_2| \leq A\}$ průnik $D \cap Q_A$ musí mít konečně po částech hladkou hranici vyhovující *Předpokladům 2.1-2.3*.

Mnoho studií usuzuje, že neohraničené kulečníky jsou periodické struktury. A to proto, že vezmeme-li například dva navzájem kolmé jednotkové vektory $u, v \in \mathbb{R}^2$, pro které platí:

$$q \in D \Leftrightarrow q + u \in D \Leftrightarrow q + v \in D. \tag{2.7}$$

Tím pádem si můžeme vybrat souřadnici os rovnoběžných k vektorům u a v, tak že $\mathbb{R}^2$ může být považováno za celistvý plášť odpovídajícího jednotkového toru (viz kapitola 6.1) $Tor^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$. Pak neohraničená periodická oblast D vyhovující (2.7), lze promítnout na Tor^2. Je zjevné, že $D \subset Tor^2$ bude vyhovovat *Předpokladům 2.1-2.3*. Navíc vždy uvažujeme, že $D \neq Tor^2$, abychom se vyhnuli triviálním „kulečníkům“ bez stěn a tím pádem kolizí.



Obrázek 2.3: neohraničený periodický kulečník a jeho projekce na $\boldsymbol{Tor^2}$

Věta 2.1: Kulečníkový stůl D je uzávěrem ohraničené otevřené souvislé oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ nebo $D \subsetneq Tor^2$, tak že ∂D vyhovuje *Předpokladům 2.1-2.3*.

Poznámka 2.1: Povrch toru, označení Tor^2, je takzvaná dvourozměrná varieta. Varieta je abstraktní prostor lokálně podobný obecnému n-rozměrnému Euklidovskému prostoru, může mít však globálně odlišnou topologii (viz kapitola 6.1). Varieta se definuje přes takzvané mapy, což je lokální zobrazení části variety do Euklidovského prostoru. Prostřednictvím zobrazení se pak přenášejí vlastnosti, které jsou definovány v Euklidovském prostoru, na varietu, čímž jsou vlastnosti na ní definovány. Jednorozměrná varieta je například kružnice S^1 a další dvourozměrná varieta je například povrch koule S^2.

2.2. Kulečníkový tok

Definice 2.7: Stav pohybující se částice uvnitř D v každém čase je specifikován pomocí pozice částice $q \in D$ a jednotkového rychlostního vektoru částice $v \in S^1$. Tudíž prostor tvořený všemi stavy, takzvaný *fázový prostor*, je třídimenzionální vyplněný torus (viz kapitola 6.1) a vyjadřuje se takto:

$$\Omega = \{(q, v)\} = D \times S^1 \text{ s hranicí } \partial\Omega = \Gamma \times S^1. \qquad (2.8)$$

Poznámka 2.2: S^1 je takzvaná jednorozměrná varieta (Poznámka 2.1) kružnice. Kružnice je lokálně podobná Euklidovskému prostu přímce, ale má odlišnou topologii.

Pohyb částice na kulečníku vyvolává skupinu transformací toru Ω v samo sebe. Lépe řečeno pro každý stav $(q, v) \in \Omega$ v každém čase $t \in \mathbb{R}$ kulečníková částice startuje ve stavu (q, v) až dojde do určitého bodu $(q_t, v_t) \in \Omega$ v čase t. Tedy dostáváme zobrazení $(q, v) \mapsto (q_t, v_t)$ na Ω, které označíme Φ^t.

Definice 2.8: Posloupnost zobrazení $\{\Phi^t\}$ se nazývá *kulečníkový tok* na fázovém prostoru Ω a je to vlastně grupa, pro kterou platí $\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{t+s}$ pro každé $t, s \in \mathbb{R}$.

Poznámka 2.3: Grupa je pojem z lineární algebry a představuje uspořádanou dvojici $(G,\circ)$, kde G je množina prvků a $\circ$ binární zobrazení označené jako $f: G \times G \to G$ nad prvky množiny G. Toto binární zobrazení, někdy také grupová operace, musí splňovat následující vlastnosti:

- asociativita – pro všechny prvky $a, b, c \in G$ platí $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- uzavřenost – pro všechny prvky $a, b \in G$ platí, že i $(a \circ b) \in G$
- existence neutrálního prvku – existuje prvek $n \in G$ takový, že pro všechna $a \in G$ platí $a \circ n = n \circ a = a$, takovýto prvek se nazývá neutrální
- existence inverzního prvku – pro každý prvek $a \in G$ existuje prvek $i \in G$, pro který platí $a \circ i = i \circ a = n$, prvek i se nazývá inverzní

Věta 2.2: Nechť $q \in D$ označuje pozici pohybující se bodové částice a $v \in \mathbb{R}^2$ její rychlostní vektor. Tedy $q = q(t)$ a $v = v(t)$ jsou funkce času $t \in \mathbb{R}$. Když se bodová částice pohybuje uvnitř kulečníkového stolu, tak že $q \in \operatorname{int} D$, pak je zachována konstantní rychlost a platí:

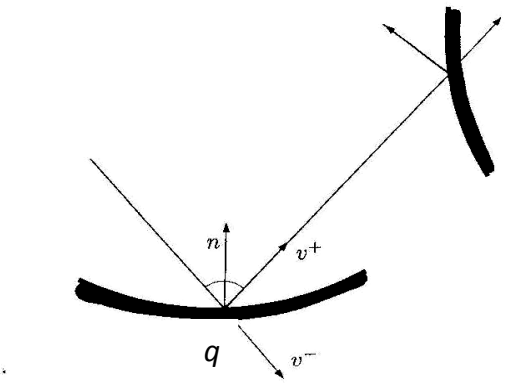
$$q' = v \quad \text{a} \quad v' = 0, \tag{2.9}$$

kde $\operatorname{int} D$ je vnitřní oblast kulečníkového stolu a čárka nad q a v označuje první derivaci.

Věta 2.3: Jestliže se bodová částice střetne s pravidelnou částí hranice (stěny) kulečníku, pak její pozice se změní na $q \in \Gamma_i$ a její rychlostní vektor se odrazí přes tečnu v bodě q. Opět vše probíhá na základě základního pravidla, že úhel dopadu se rovná úhlu odrazu, a můžeme to matematicky vyjádřit takto:

$$v^+ = v^- - 2\langle v, n\rangle n, \tag{2.10}$$

kde v^+ a v^- značí rychlostní vektory po a před kolizí s hranicí, n jednotkový normální vektor v bodě q, Γ_i stěny kulečníku a $\langle v, n\rangle$ skalární součin vektorů v a n.



Obrázek 2.4

Obrázek 2.4 vyznačuje odrazy od rozptylující a soustřeďující stěny kulečníku a jak se rychlostní vektor mění od kolize ke kolizi.

Rovnice o pohybu bodové částice (2.9) a (2.10) zachovávají rychlostní vektor v a je obvyklé nastavit ho na 1 tedy $v = 1$.

Definice 2.9: Říkáme, že kolize je *pravidelná*, když $q \in \Gamma_i$ a vektor v^- není tečnou k Γ a $\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_r$, $i = 1 \ldots r$. V tomto případě je $v^+ \neq v^-$ (v^- musí být vně D a v^+ uvnitř D). Jestliže je v^- tečnou k Γ v bodě střetu, pak $v^+ = v^-$, a takováto kolize se nazývá *tangenciální*.

2.3. Fázový prostor kulečníkového toku

Fázový prostor kulečníkového toku je třídimenzionální vyplněný torus $\Omega = \{(q, v)\} = D \times S^1$ s hranicí $\partial\Omega = \Gamma \times S^1$ (viz Definice 2.7).

Označíme pomocí π_q a π_v zobrazení z Ω na D (pro q) a S^1 (pro v), tak aby $\pi_q(q,v) = q$ a $\pi_v(q,v) = v$.

Věta 2.4: Nechť $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ představuje soubor stavů (q,v), na kterých je dynamika pohybující se částice definována ve všech časech $-\infty < t < \infty$. Tudíž obdržíme skupinu transformací (tok) s jedním parametrem:

$$\Phi^t: \widetilde{\Omega} \to \widetilde{\Omega}, \tag{2.11}$$

se spojitým časem $t \in \mathbb{R}$. Navíc $\Phi^0 =$ identifikovatelné a $\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s$ pro všechny $t, s \in \mathbb{R}$.

Každá trajektorie kulečníkového toku $\{\Phi^t x\}$, kde $x \in \widetilde{\Omega}$, představuje spojitý oblouk v Ω. Je také obvyklé nazývat zobrazení z trajektorie kulečníkového toku $\pi_q(\Phi^t x)$ na kulečníkový stůl D kulečníkovou trajektorií. Její části mezi po sobě jdoucími kolizemi jsou takzvané spojení.

Jestliže je kulečníkový stůl ohraničená oblast $D \subset \mathbb{R}^2$, pak volná dráha pohybu mezi kolizemi nemůže být větší než průměr D, a proto každá trajektorie kulečníkového toku prochází nekonečně mnoho kolizemi. Toto ale neplatí, jestliže $D \subsetneq Tor^2$.

Věta 2.5: Jestliže D je kulečníkový stůl na Tor^2, pak každá trajektorie kulečníkového toku prochází, buď nekonečně mnoho kolizemi, nebo žádnou.

Definice 2.10: Nechť $\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}_c \cup \widetilde{\Omega}_f$, kde $\widetilde{\Omega}_c$ obsahuje všechny *trajektorie s kolizemi* a $\widetilde{\Omega}_f$ je sjednocení všech *trajektorií bez kolizí*, které mohou existovat jen za podmínky $D \subsetneq Tor^2$. Je důležité poznamenat, že $\widetilde{\Omega}_c$ i $\widetilde{\Omega}_f$ jsou neměnné podle Φ^t.

Definice 2.11: Kulečníkový stůl $D \subsetneq Tor^2$ má takzvaný *konečný (ohraničený) horizont*, jestliže platí $\widetilde{\Omega}_f = \emptyset$. V opačném případě se říká, že má *nekonečný (neohraničený) horizont*.

2.4. Souřadnice reprezentující kulečníkový tok

V této kapitole se budeme zabývat kulečníkovým tokem Φ^t se souřadnicemi (x, y, ω) na Ω, kde $q = (x, y) \in D$. Zde jsou x a y klasické kartézské souřadnice v rovině a $\omega \in \langle 0, 2\pi)$ označuje protichůdný (proti směru hodinových ručiček) úhel mezi kladnou x-ovou osou a rychlostním vektorem v.

Pro každé $t \in \mathbb{R}$ definujeme zobrazení Φ^t na Ω a uvažujeme libovolný bod a jeho obraz:

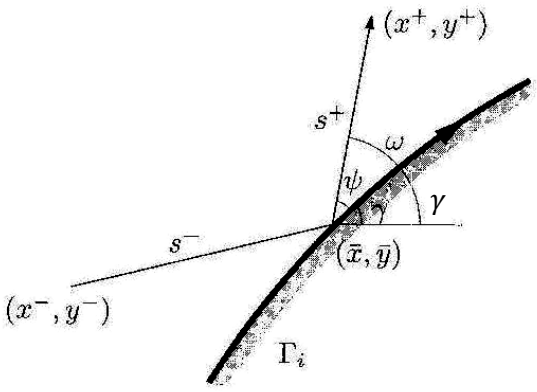
$$(x^-, y^-, \omega^-) \overset{\Phi^t}{\to} (x^+, y^+, \omega^+). \tag{2.12}$$

Náš cíl je vypočítat první derivaci zobrazení Φ^t.

Jestliže nenastanou kolize, potom:

$$x^+ = x^- + t\cos\omega,\ y^+ = y^- + t\sin\omega,$$
$$\omega^+ = \omega^-. \tag{2.13}$$

Předpokládejme, že nastala právě jedna kolize v bodě na kulečníkové stěně Γ_i v průběhu časového intervalu $(0, t)$. Pak přímý vztah mezi (x^-, y^-, ω^-) a (x^+, y^+, ω^+) je docela těžký odvodit. Abychom zjednodušili situaci, zavádíme některé jednoduché proměnné.



Obrázek 2.5

Zavádí se tyto proměnné: $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma_i$ označuje bod střetu, T je tečný vektor k Γ_i v bodě střetu a úhel γ svírající T a kladná x-ová osa. Dále nechť s^- značí čas kolize a ψ označující úhel mezi v^+ a T, vše je vykresleno v obrázku 2.5.

Potom platí tyto vztahy:

$$\begin{aligned} x^- &= \bar{x} - s^- \cos\omega^-, \quad & x^+ &= \bar{x} + s^+ \cos\omega^+, \\ y^- &= \bar{y} - s^- \sin\omega^-, \quad & y^+ &= \bar{y} + s^+ \sin\omega^+, \\ \omega^- &= \gamma - \psi, & \omega^+ &= \gamma + \psi. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Budeme diferencovat rovnice (2.14), pak:

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= \cos\gamma \, dr, \\ d\bar{y} &= \sin\gamma \, dr, \\ d\gamma &= -\mathrm{K} \, dr, \end{aligned} \tag{2.15}$$

kde r označuje parametr délky oblouku na Γ_i a K značí zakřivení ($d\gamma$ je určeno orientací Γ_i viz rovnice 2.6).

Dále pomocí rovnic (2.14) dostaneme:

$$\begin{aligned} dx^+ &= \cos\gamma \, dr + \cos\omega^+ \, ds^+ - s^+ \sin\omega^+ \, d\omega^+ \\ dy^+ &= \sin\gamma \, dr + \sin\omega^+ \, ds^+ + s^+ \cos\omega^+ \, d\omega^+ \\ d\omega^+ &= -\mathrm{K} dr + d\psi \end{aligned} \tag{2.16}$$

a

$$\begin{aligned} dx^- &= \cos\gamma \, dr - \cos\omega^- \, ds^- + s^- \sin\omega^- \, d\omega^- \\ dy^- &= \sin\gamma \, dr - \sin\omega^- \, ds^- - s^- \cos\omega^- \, d\omega^- \\ d\omega^- &= -\mathrm{K} dr - d\psi. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Upozorněme, že $s^+ + s^- = t =$ konstantně, a proto $ds^+ + ds^- = 0$, a obdržíme:

$$dx^+ \wedge dy^+ \wedge d\omega^+ = dx^- \wedge dy^- \wedge d\omega^-, \tag{2.18}$$

kde symbol ∧ označuje *vnější součin diferenciálních p-forem* (viz kapitola 6.2).

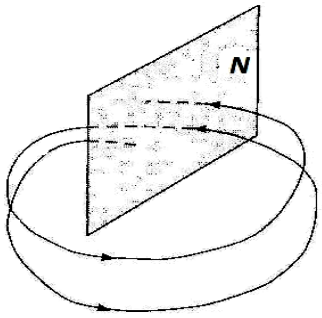
Věta 2.6: Kulečníkový tok Φ^t zachovává objem formy $dx \wedge dy \wedge d\omega$, tudíž zachovává takzvanou *Lebesgueovu míru* (viz kapitola 6.3) $dx\ dy\ d\omega$ na Ω.

2.5. Kolizní zobrazení

Ve studiích o dynamických systémech je běžné zredukovat kulečníkový tok na zobrazení zkonstruované jako průřez.

Definice 2.12: Je dán kulečníkový tok $\Phi^t: \Omega \longrightarrow \Omega$ na Ω, zde můžeme najít takzvanou *nadrovinu* $N \subset \Omega$ příčnou ke kulečníkovému toku tak, že každá trajektorie protíná N nekonečně mnohokrát.

Definice 2.13: Pak kulečníkový tok vyvolává takzvané *zobrazení návratu* $F: N \longrightarrow N$ a *funkci doby návratu* $L(x) = min\{s > 0: \Phi^s(x) \in N\}$ na N tak, aby $F(x) = \Phi^{L(x)}(x)$.



Obrázek 2.6: nadrovina N

Věta 2.7: Naopak je dán měřitelný prostor N, měřitelné zobrazení $F: N \longrightarrow N$, a pozitivní funkce $L: N \longrightarrow \mathbb{R}^+$, pak můžeme sestrojit prostor $\Omega = \{(x, s): x \in N, 0 \leq s \leq L(x)\}$ a kulečníkový tok $\Phi^t: \Omega \longrightarrow \Omega$ definovaný pomocí $\Phi^t(x, s) = (x, s + t)$ s identifikací bodů $(x, L(x))$ a $(F(x), 0)$.

Věta 2.8: Kulečníkový tok Φ^t je měřitelný na Ω. Jestliže zobrazení F zachovává míru pravděpodobnosti μ na N a

$$\bar{L} = \int_N L(x)d\mu(x) < \infty, \tag{2.19}$$

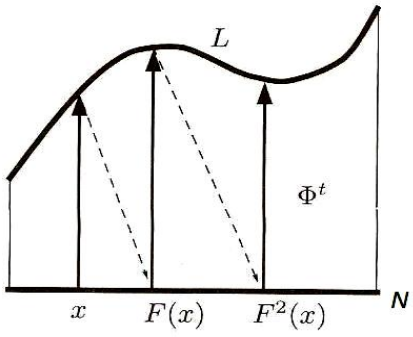
pak kulečníkový tok Φ^t zachovává míru pravděpodobnosti μ_1 na Ω definovanou takto:

$$d\mu_1 = \bar{L}^{-1}d\mu \times ds. \tag{2.20}$$

Poznámka 2.4: Pro připomenutí nadefinujeme míru pravděpodobnosti μ na G jako každé zobrazení $\mu: G \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, kde G je σ-algebra $G \subseteq 2^{\Omega}$, a platí:

- $\mu(A) \geq 0$ pro $A \in G$,
- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $\mu(\Omega) = 1$, kde Ω je množina všech možných výsledků pokusu,
- $\mu(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$ pro libovolnou spočetnou množinu $\{A_i \in G | i \in I\}$, kde $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in I$ takové, že $i \neq j$,
- σ-algebra je podmnožina 2^{Ω} obsahující Ω uzavřená na sjednocení, doplňky a navíc na spočetná sjednocení.

Definice 2.14: Zobrazení F se často označuje jako *základní transformace*, $L(x)$ *funkce horní meze* a Φ^t *nosný kulečníkový tok*.



Obrázek 2.5: nosný kulečníkový tok

Pro kulečníkový systém se nadrovina na Ω obvykle konstruuje na hranici kulečníkového stolu, tudíž na množině $\Gamma \times S^1$. Vzhledem k tomu, že máme identifikované rychlostní vektory před kolizí v^- a po kolizi v^+ vztahující se k rovnici (2.10), lze efektivně transformovat S^1 na půl kružnici. Abychom mohli toto spočítat, je obvyklé popsat průřez jako množinu všech rychlostních vektorů po kolizi:

$$M = \cup_i M_i, \quad M_i = \{x = (q, v) \in \Omega: q \in \Gamma_i, \langle v, n\rangle \geq 0\}, \tag{2.21}$$

kde n označuje jednotkový normální vektor k Γ_i uvnitř D. Množina M je dvojdimenzionální v Ω a nazývá se kolizní prostor (viz kapitola 2.2).

Definice 2.15: Jestliže trajektorie $\Phi^t x$ pro $x \in M$ je definovaná během nějakého časového intervalu $(0, \varepsilon)$, pak musí trajektorie křížit plochu $\Gamma \times S^1$ v budoucím čase $\tau(x) > 0$ podle Věty 2.5 a $\tau(x)$ se nazývá *doba návratu*.

Vzhledem k tomu, že rychlost je určena na 1, $\tau(x)$ bude stejná jako vzdálenost kulečníkové trajektorie vytvářející se v x dříve než nastane další kolize. Jakákoliv trajektorie kulečníkového toku $\Phi^t: \widetilde{\Omega}_c \longrightarrow \widetilde{\Omega}_c$ protíná plochu M nekonečně mnohokrát.

Definice 2.16: Nechť $\widetilde{M} = M \cap \widetilde{\Omega}$ a pomocí následující rovnice definujeme *zpětné zobrazení*:

$$\mathcal{F}: \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M} \text{ a } \mathcal{F}(x) = \Phi^{\tau(x)+0} x. \tag{2.22}$$

Zobrazení $\mathcal{F}$ se nazývá kolizní zobrazení.

3. Příklady matematických kulečníků

V dalším zkoumání pokračujeme s jednoduchými příklady na téma matematické kulečníky a to zejména s kulečníkem na elipse. Také se ale zaměříme na kulečník na kruhu, který je speciálním případem kulečníku na elipse.

3.1. Kulečník na kruhu

Připomeňme, že kružnice představuje množinu všech bodů roviny, které mají od daného bodu - středu, danou stejnou vzdálenost, která se nazývá poloměr. Množina bodů ležící uvnitř a na kružnici se nazývá kruh.

Kružnice je speciálním případem elipsy, kdy ohniska elipsy splývají v jedno.

Definice 3.1: Kruh má v analytické geometrii předepsanou *středovou rovnici*

$$x^2 + y^2 \leq r^2, \tag{3.1}$$

kde r je poloměr kružnice a střed kruhu splývá s počátkem kartézské soustavy souřadnic.

Nechť D představuje jednotkový kruh o rovnici $x^2 + y^2 \leq 1$. D zde považujeme za kulečníkový stůl. Máme bodovou bezrozměrnou částici, která se pohybuje uvnitř D s konstantní rychlostí a odráží se od hranice kruhu (kružnice) ∂D podle základního zákonu optiky: úhel dopadu se rovná úhlu odrazu.

Definice 3.2: Souřadnice pohybující se částice definujeme pomocí *vektoru pozice* $q_t = (x_t, y_t)$ v čase t a *rychlostní vektor* (ve smyslu směrového vektoru) této částice určíme takto $v_t = (u_t, w_t)$.

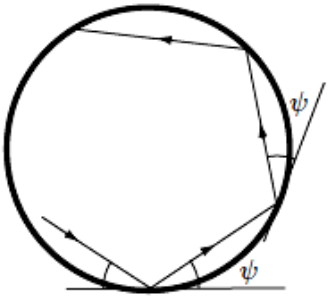
Důsledek 3.2: Pak umístění částice a její rychlost v čase $t + s$ se vypočítá následně,

$$x_{t+s} = x_t + u_t s \qquad u_{t+s} = u_t$$

$$y_{t+s} = y_t + w_t s \qquad w_{t+s} = w_t \tag{3.2}$$

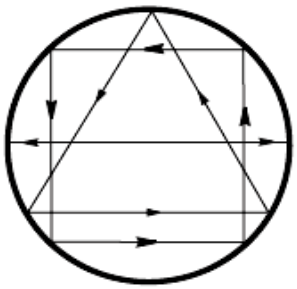
ale za předpokladu, že se částice pohybuje uvnitř *D* a nestřetává se s hranicí ∂D.

Jestliže se pohybující částice střetne s hranicí $\partial D = \{x^2 + y^2 = 1\}$, její rychlostní vektor v_t se odrazí napříč tečnou k hranici ∂D v bodě střetu. Následně po tomto střetu s hranicí pokračuje pohybující částice uvnitř *D* ve svém volném pohybu, až dokud se opět nestřetne s hranicí kruhu. Potom se znovu odrazí a tento pohyb může pokračovat až do nekonečna.



Obrázek 3.1: odrazy uvnitř kruhového kulečníku

Mohou nastat také zvláštní případy, kdy se například částice pohybuje podél průměru kružnice a tím pádem se její rychlostní vektor neustále vrací tam a zpátky podél průměru po každém střetnutí s hranicí. Existují i další podobné případy, kdy rychlostní vektor částice opisuje strany některých pravidelných mnohoúhelníků.



Obrázek 3.2: zvláštní případy pohybu částice uvnitř kruhového kulečníku

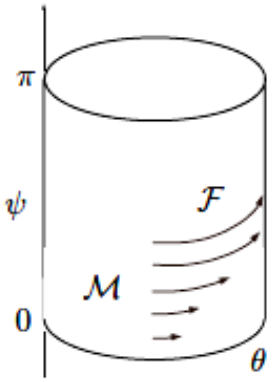
Hlavní cíl dynamických systémů je popsat vývoj systému v čase a jeho asymptotické chování v čase $\boldsymbol{t} \to \infty$. Budeme se soustředit na takovýto popis.

Předpoklad 3.1: Nechť je jednotková kružnice $x^2 + y^2 = 1$ parametrizována protichůdným (proti směru hodinových ručiček) úhlem $\theta \in [0,2\pi]$. Jeho hodnoty 0 a 2π jsou identifikované. Také označíme úhel odrazu symbolem $\psi \in [0, \pi]$ (obrázek 3.1).

Každá kolize s hranicí je charakterizována dvěma čísly: θ (bod) a ψ (úhel).

Definice 3.4: Všechny kolize vytvářejí *kolizní prostor* se souřadnicemi θ a ψ. Tento prostor má tvar válce s kruhovou podstavou, protože θ je kruhová souřadnice, a budeme ho značit M.

Definice 3.5: Pohyb částice, od střetu do střetu, odpovídá zobrazení $\mathcal{F}: M \to M$, které nazýváme *kolizním zobrazením*.



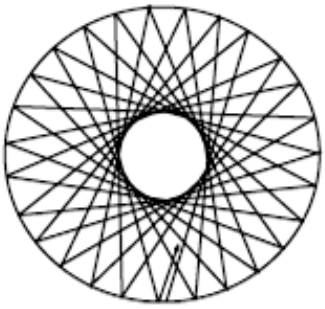
Obrázek 3.3: kolizní prostor kruhového kulečníku

Pozorujeme, že $\mathcal{F}$ stále spirálovitě opouští každý vodorovný stupeň válce, který označíme $C_\psi = \{\psi = konstanta\}$. Úhel rotace neboli rotační číslo se neustále mění z kruhu na kruh, na dně ($\psi = 0$) je úhel 0 a pak roste až na 2π na vrcholu ($\psi = \pi$). Válec M je šroubovitě rostoucí podle zobrazení $\mathcal{F}$ (obrázek 3.3).

Pevná rotace kruhu je elementární příklad v takzvané *ergodické teorii*. Rotace o racionálních úhlech jsou periodické, zatímco rotace o iracionálních úhlech jsou ergodické.

Poznámka 3.1: Na obrázku 3.4 lze dobře vidět, že trajektorie pohybující částice vypadají hustější blízko vnitřní hranice prstenu znázorněného na obrázku. Trajektorie se soustřeďují k vnitřní kružnici prstenu, proto by zde bylo „velmi horko“, kdyby trajektorie

představovaly laserové paprsky a jednotkový kruh perfektní zrcadlo. Tato vnitřní kružnice prstenu se označuje jako *caustická*, což znamená horký v řečtině. Tento termín je vypůjčený z optiky, kde označuje oblouk, na který se soustředí světelné paprsky po odrazu od zrcadla.



Obrázek 3.4

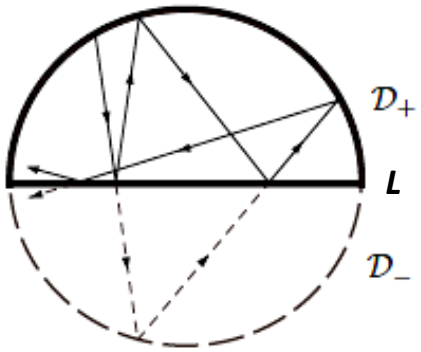
Dále můžeme zafixovat rychlost pohybující se částice, ta zůstane konstantní. Je obvyklé rychlost nastavit na jedna ($v = 1$). Potom rychlostní vektor v čase t může být popsán pomocí úhlové souřadnice ω_t, takže $v_t = (cos\omega_t, sin\omega_t)$ a $\omega_t \in [0, 2\pi]$ s krajními body 0 a 2π, které jsou identifikované. Tím pádem kolizní zobrazení $\mathcal{F}: M \to M$ reprezentuje jen střety s hranicí kruhu.

Abychom popsali pohyb částice uvnitř D, uvažujeme všechny možné stavy (q, v), kde $q \in D$ je umístění částice a $v \in S^1$, kde S^1 představuje kruh v rovině, je rychlostní vektor částice.

Definice 3.6: Prostor tvořený všemi stavy je tedy třídimenzionální a vyjadřuje se takto $\Omega = D \times S^1$, kde Ω je takzvaný vyplněný torus (viz kapitola 6.1), a označuje se jako *fázový prostor*.

Speciální případ 3.1: Nyní budeme uvažovat častou modifikaci kulečníku na kruhu, a sice se omezíme pouze na horní polovinu jednotkového kruhu. Označíme horní polovinu jednotkového kruhu jako D_+ vyjádřenou rovnicemi $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$. Nechť se bodová částice pohybuje uvnitř D_+ a odráží se od hranice kruhu δD_+. Pomocí D_- je označena dolní polovina jednotkového kruhu a platí $D_- = D \backslash D_+$. D_- může být označeno jako zrcadlový obraz D_+ skrze osu x označenou zde jako $L = \{y = 0\}$. Toto omezení nám

umožňuje zredukovat model kulečníku na celém jednotkovém kruhu na model jednodušší.



Obrázek 3.5: kulečník na půl kruhu

3.2. Kulečník na elipse

Dále se dostávám ke stěžejnímu tématu této bakalářské práce a to ke kulečníku tentokrát na elipse.

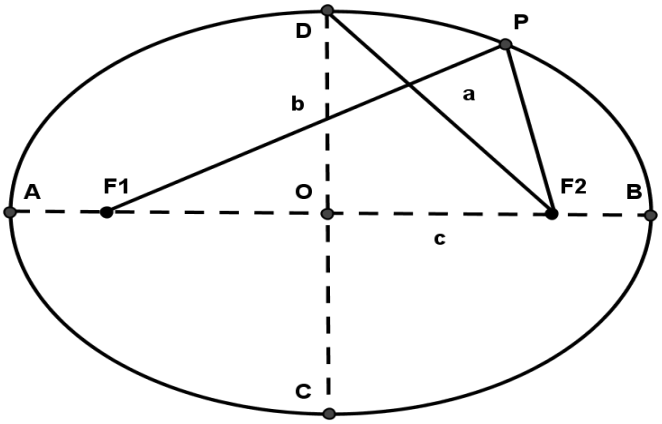
Pro připomenutí elipsa představuje množinu bodů v rovině, které mají od dvou daných bodů F_1 a F_2 konstantní součet vzdáleností $|P,F_1| + |P,F_2| = 2a$, kde a je hlavní poloosa elipsy a P je bod na elipse, kde se pohybující částice odráží.

Elipsa je charakterizována ohnisky, což jsou body F_1a F_2, hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b. Obě ohniska leží na poloose a elipsy. Bod O je střed elipsy a P představuje body střetu na elipse. Elipsa je těžištěm bodů $P \in \mathbb{R}^2$. Na obrázku 3.6 je znázorněno veškeré označení v elipse včetně os, které jsou vyznačeny čárkovaně, a platí:

$$|F_1F_2| = 2c \quad |OB| = a \quad |OD| = b$$

$$a^2 - b^2 = c^2 \qquad |DF_1| = |DF_2| = a$$

$$|P,F_1| + |P,F_2| = 2a. \tag{3.3}$$



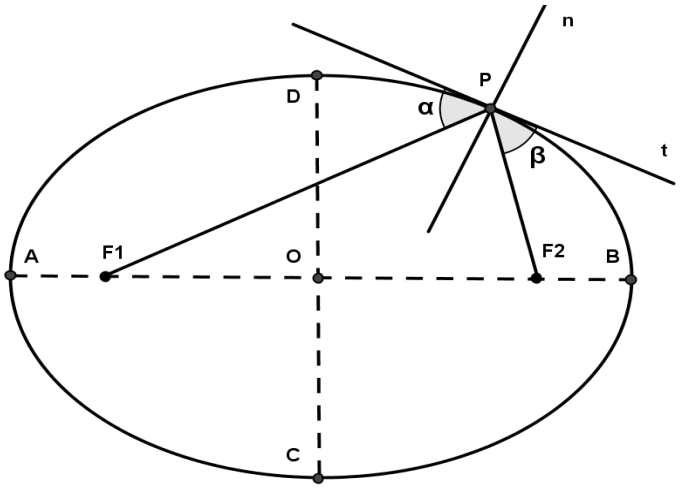
Obrázek 3.6

Definice 3.7: Středová rovnice elipsy, kdy střed elipsy O splývá s počátkem soustavy souřadnic a poloosy a, b splývají s osami x, y kartézské soustavy souřadnic, vypadá následně:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ kde } a > b > 0. \tag{3.4}$$

Tedy vnitřní oblast elipsy, v češtině neexistuje jednoslovný název tak jako pro kruh, lze definovat takto $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, kde $a > b > 0$.

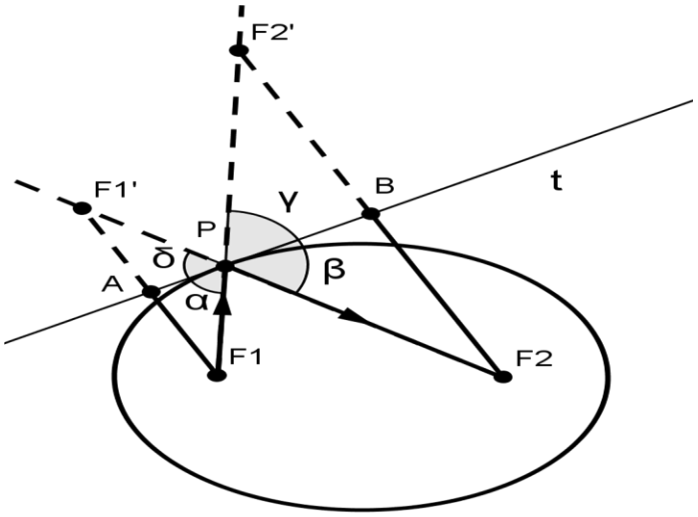
Dále přímka t je tečnou k elipse v bodě P a přímka n je kolmicí k přímce t v bodě P, tyto přímky jsou vyznačeny v obrázku 3.6. Úhly α a β jsou totožné a svírají je úsečky F_1P a F_2P s tečnou t.



Obrázek 3.7

Věta 3.1: Obrázek 3.7 znázorňuje úhly α, β, γ a δ, což jsou úhly dopadu, odrazu a jejich obrazy podle osy a zároveň tečny t, všechny tyto úhly jsou stejně velké.

Důkaz 3.1: Když sestrojíme obrazy bodů F_1 a F_2 podle tečny t v bodě P (bod odrazu), tak úsečky F_2P a F_1P prodloužené nad tečnu t v obrázku 3.8 prochází těmi obrazy $F_1{}'$ a $F_2{}'$. Také trojúhelníky PF_2B s $PF_2{}'B$ a PF_1A s $PF_1{}'A$ jsou shodné a to proto, že úsečky F_2B s $F_2{}'B$ a F_1A s $F_1{}'A$ a úhly $\sphericalangle F_2BP$ s $\sphericalangle F_2{}'BP$ a $\sphericalangle F_1AP$ s $\sphericalangle F_1{}'AP$ jsou shodné a úsečky PB a AP mají trojúhelníky společné.



Obrázek 3.8

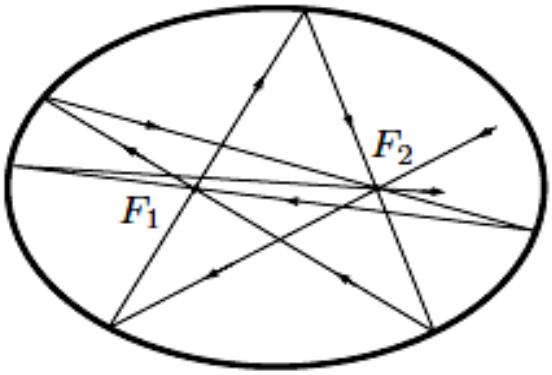
Stejně jako u kruhu označíme pomocí D ohraničený vnitřek elipsy, který bude představovat kulečníkový stůl. Bezrozměrná bodová částice se volně pohybuje uvnitř elipsy, dokud nenarazí do hranice elipsy v bodě P a odrazí se od tečny t na základě základního zákonu optiky a také na základě Důkazu 3.1, že úhel dopadu se rovná úhlu odrazu (α a β se rovnají).

Bodová částice uvnitř D se pohybuje, může a nemusí projít jedním z ohnisek, záleží na úhlu, pod kterým je částice uvedena do pohybu.

Věta 3.2: Když trajektorie pohybující se částice projde jedním z ohnisek, musí se samozřejmě odrazit od hranice elipsy ∂D v bodě $P \in \partial D$, pak však vždy pokračuje do druhého ohniska a znovu se vše opakuje stejně.

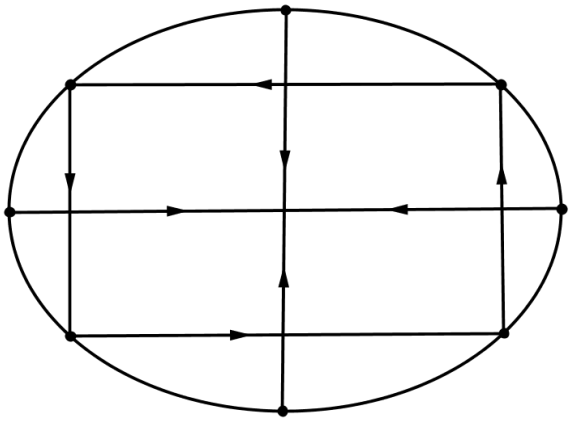
Důkaz 3.2: Toto tvrzení vyplývá ze samotné definice elipsy.

Po mnoha odrazech od hranice elipsy se bodová částice začíná pohybovat podél hlavní poloosy a viz obrázek 3.9.



Obrázek 3.9

I u elipsy existují speciální případy jako například, když trajektorie pohybující se částice opisuje buď hlavní, nebo vedlejší osu elipsy. Potom se částice pohybuje stále po jedné z těchto os, tam a zpět. Trajektorie může také opisovat i některý z mnohoúhelníků, vše je vykresleno v obrázku 3.10.



Obrázek 3.10: speciální případy pohybu částice na eliptickém kulečníku

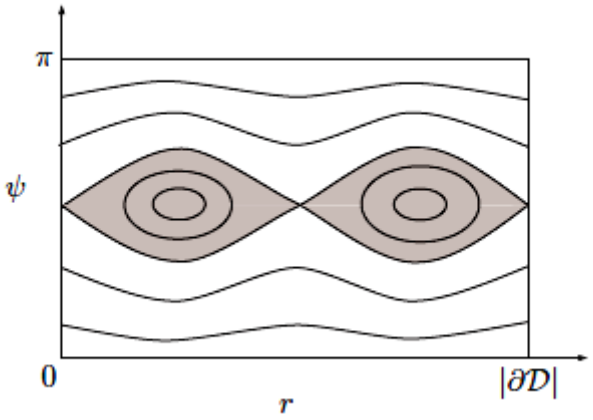
Abychom mohli popsat střety pohybující se částice s hranicí elipsy, budeme stejně jako u kulečníku na kruhu zavádět souřadnice popisující zmíněné střety.

Předpoklad 3.2: U elipsy se používají souřadnice ψ a r, kde ψ je stejně jako u kulečníku na kruhu úhel odrazu od hranice elipsy a r představuje parametr délky oblouku na elipse, pozor zde to není poloměr.

Jako $r = 0$ vybereme bod $(a, 0)$, který se nachází na elipse nejvíce vpravo. Parametr r je orientován protichůdně (proti směru hodinových ručiček). Pro ψ a r platí následující $0 \leq \psi \leq \pi$ a $0 \leq r \leq |\partial D|$.

Definice 3.8: Kolizní prostor M je opět válec, jehož základna je tvaru elipsy a výška je π. Přípustná množina všech kolizí je vyjádřena pomocí obdélníku $[0, |\partial D|] \times [0, \pi]$, přičemž pravé i levé strany obdélníku musí být identifikované.

Definice 3.9: Pohyb částice uvnitř elipsy od střetu ke střetu odpovídá *koliznímu zobrazení* $\mathcal{F}: M \to M$.



Obrázek 3.11: kolizní prostor eliptického kulečníku

Trajektorie pohybující se částice, které procházejí skrz ohniska, jsou vykresleny v obrázku 3.11 jako tvar ležaté osmičky, která odděluje bílou a šedou část v přípustné množině všech kolizí. Tím pádem trajektorie, které procházejí skrz ohniska, vytvářejí speciální jedno-dimenzionální „rodinu“ v M.

Definice 3.10: Trajektorie pohybující se částice uvnitř elipsy lze rozdělit na dva typy: za prvé ty, které protínají vnitřní část úsečky F_1F_2 na hlavní ose elipsy po každém odrazu takzvané *vnitřní trajektorie*, a za druhé ty, které tuto část neprotínají takzvané *vnější trajektorie*.

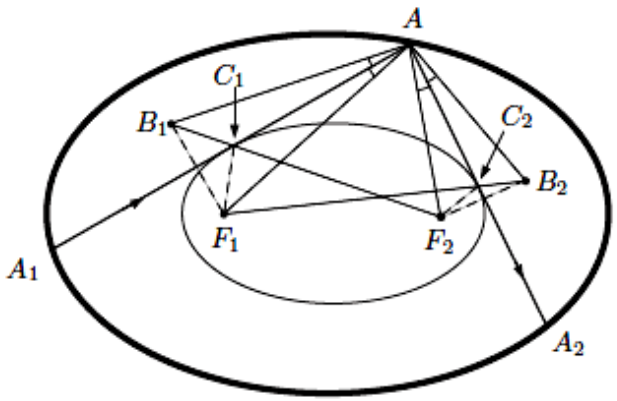
Věta 3.3: Pro všechny vnější trajektorie existuje elipsa s ohnisky F_1 a F_2, která je tečná k těmto vnějším trajektoriím. Dále pro všechny vnitřní trajektorie existuje hyperbola s ohnisky F_1 a F_2, která je tečná k těmto vnitřním trajektoriím.

Tato věta je nejdůležitější vlastností kulečníků na elipse.

Důkaz 3.3: Na obrázku 3.12 lze vidět, že A_1A a A_2A jsou dvě po sobě jdoucí úsečky vnějších trajektorií. Body B_1 a B_2 dostaneme jako obrazy ohnisek F_1 a F_2 podle úseček A_1A a A_2A. Tyto úhly $\sphericalangle B_1AA_1$, $\sphericalangle A_1AF_1$, $\sphericalangle F_2AA_2$ a $\sphericalangle A_2AB_2$ jsou stejné, a proto trojúhelníky AB_1F_2 a AB_2F_1 jsou shodné a platí $|B_1F_2| = |B_2F_1|$. Z toho důvodu platí také

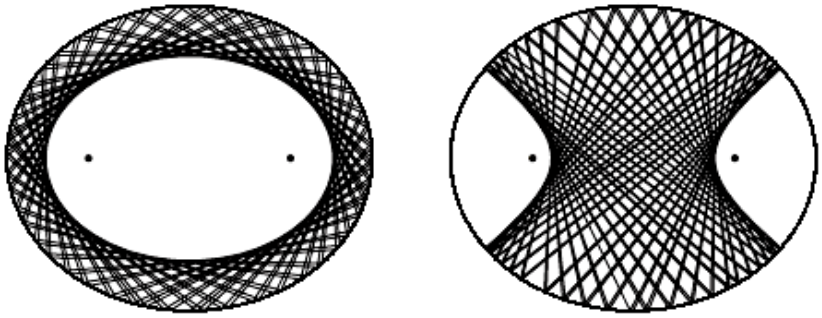
$$|F_1C_1| + |F_2C_1| = |F_1C_2| + |F_2C_2|, \tag{3.5}$$

kde C_1 a C_2 jsou průsečíky úseček A_1A, B_1F_2 a A_2A, B_2F_1. Tudíž body C_1 a C_2 jsou body nově vzniklé elipsy se stejnými ohnisky F_1 a F_2 a úsečky A_1A a A_2A jsou tečny k této elipse. Obdobně by se postupovalo při důkazu pro vnitřní trajektorie.



Obrázek 3.12

Definice 3.11: Jestliže každá úsečka představující trajektorii pohybující se částice uvnitř D, jejíž krajní body jsou body odrazu od hranice elipsy, je tečnou k určitému danému oblouku, pak tento oblouk nazýváme *caustický* (viz kapitola 3.1, poznámka 3.1). Na obrázku 3.13 jsou vykresleny dvě elipsy, vlevo pro vnější trajektorie lze vidět *eliptický caustický oblouk* a vpravo pro vnitřní trajektorie lze vidět *hyperbolický caustický oblouk*.

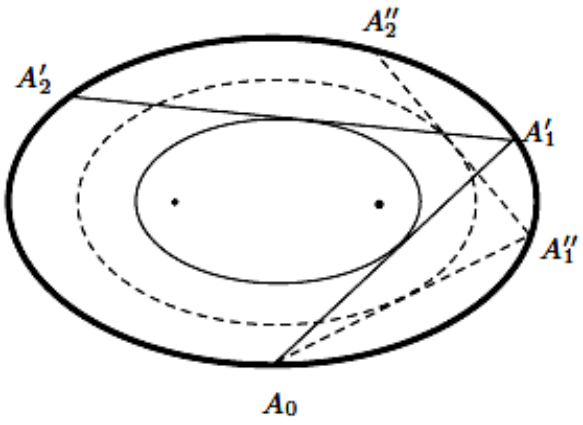


Obrázek 3.13

Všechny trajektorie tečné ke caustické elipse leží na uzavřeném oblouku v kolizním prostoru M. Takovéto oblouky lze nalézt v obrázku 3.11, jsou to horizontální vlny v bílé oblasti grafu (pravé i levé strany obdélníku musí být identifikované). Každý takový oblouk zůstává neměnný na základě zobrazení $\mathcal{F}$. Na každém neměnném oblouku zobrazení $\mathcal{F}$ je odvozená pevná kruhová rotace přes nějaký úhel, který nazýváme rotační číslo.

Věta 3.4: Rotační číslo se mění neustále a monotónně s každým neměnným obloukem.

Důkaz 3.4: Uvažujme dvě vnější trajektorie začínající ve stejném bodě $A_0 \in \partial D$, ale s různými eliptickými caustickými oblouky. Označíme A'_n odrazové body trajektorie, u níž je eliptický caustický oblouk menší, a A''_n odrazové body druhé trajektorie. Z obrázku 3.14 lze vypozorovat, že se posloupnost $\{A'_n\}$ bude pohybovat uvnitř elipsy rychleji než $\{A''_n\}$.



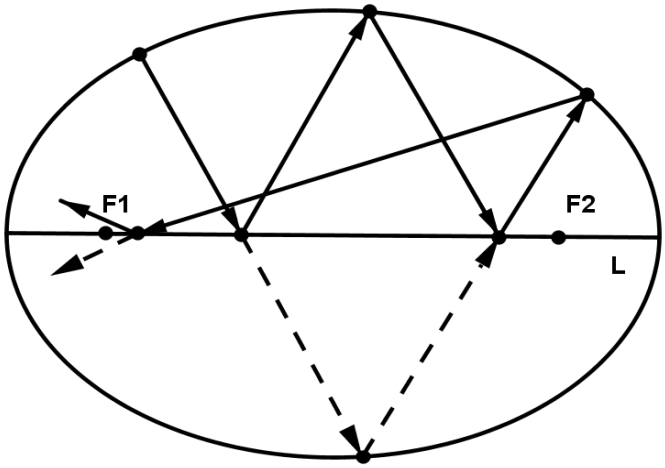
Obrázek 3.14

Dění v zobrazení $\mathcal{F}$ na každém neměnném oblouku se dá analyzovat explicitně a rotační číslo lze vypočítat analyticky.

Dále všechny trajektorie tečné ke caustické hyperbole ležící na dvou uzavřených obloucích v M, každý oblouk nalezneme jako ovál v jedné polovině šedé oblasti grafu, který má tvar ležaté osmičky (obrázek 3.11). Zobrazení $\mathcal{F}$ transformuje každý ovál v identický ovál, ale uvnitř druhé půlky ležaté osmičky šedé oblasti grafu. Tudíž sjednocení těchto dvou identických oválů je neměnné na základě zobrazení $\mathcal{F}$ a každý ovál jednotlivě je neměnný na základě zobrazení $\mathcal{F}^2$.

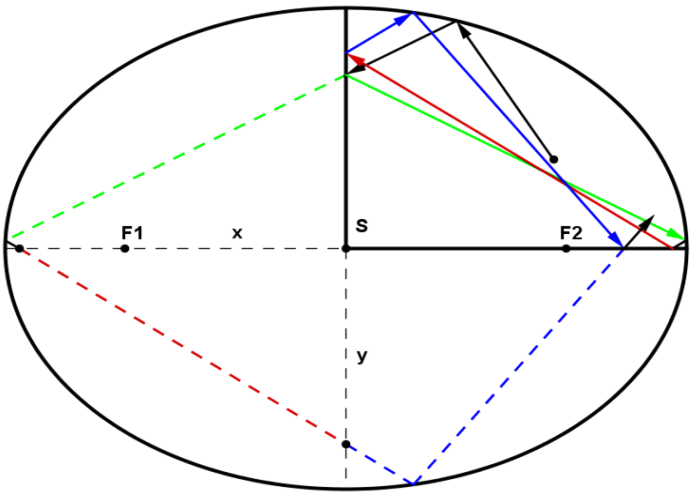
Z tohoto důvodu vypadá kolizní prostor M kulečníku na elipse „listovitě“ díky neměnným obloukům. V tomto smyslu je kulečník na elipse podobný kulečníku na kruhu. Ve fyzice takovéto modely patří do speciální třídy modelů, které jsou charakteristické tím, že dynamika v takovémto systému je kompletně pravidelná. Tento systém je nazýván jako integrační a tím pádem kulečník na elipse i na kruhu je pravidelný.

Speciální případ 3.2: Stejně jako u kulečníku na kruhu je možno se omezit pouze na horní nebo dolní polovinu elipsy. Označíme horní polovinu elipsy jako D_+ , která je vyjádřena rovnicemi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1$, $y \geq 0$. Bodová částice se opět pohybuje uvnitř D_+ a odráží se od hranice elipsy δD_+. Platí $D_- = D \backslash D_+$, kde D_- označuje dolní polovinu elipsy. D_- je tím pádem zrcadlový obraz D_+ skrze osu x označenou zde jako $L = \{y = 0\}$. Jestliže pohybující se částice narazí do L, její trajektorie se odrazí od L a také můžeme vykreslit zrcadlový obraz v D_- pod L. Další odraz se vyvine v D_- symetricky jako reálná trajektorie v D_+ až dokud se neodrazí znovu. Pak se tyto dvě trajektorie částic spojí a pohybují se společně v D_+ nějakou chvíli až do další kolize s L, kdy se znovu rozdělí, a tak znovu a znovu. Je důležité si uvědomit, že se zrcadlová trajektorie nikdy vlastně neodrazí od L, vždy jen L protíná. Toto omezení umožňuje zjednodušení modelu kulečníku na celé elipse. Stejně bychom mohli vyjádřit pohyb bodové částice na půl elipse, která by byla rozdělena vedlejší poloosou b (tedy celou osou v tomto případě).



Obrázek 3.15: kulečník na půl elipse

Speciální případ 3.3: Dalším speciálním případem je kulečník na čtvrt elipse o rovnici $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1, y\geq 0, x\geq 0$, který je vykreslen na obrázku 3.16. Všechny odrazy se uskutečňují na základě zákonu optiky, kdy úhel dopadu se rovná úhlu odrazu, v případě křivky si samozřejmě musíme ještě pomoci sestrojením tečny v bodě odrazu. Všechny trajektorie se dají zobrazit ve zbývající části elipsy a vždy se spojí s trajektoriemi ve čtvrt elipse tak jako v půl elipse. Trajektorie se zobrazují osově podle osy x a y a středo podle středu S, v obrázku jsou vyznačeny vzory a obrazy vždy stejnou barvou.



Obrázek 3.16: kulečník na čtvrt elipse

4. Praktické příklady

4.1. Základní myšlenka pohybu částice uvnitř elipsy z pohledu analytické geometrie

Budeme vycházet z analytické geometrie kuželoseček, tedy v mém případě elipsa, a konkrétně budeme potřebovat kapitolu o vzájemné poloze elipsy a přímky a také odchylce přímek. Přímka může mít žádný, jeden nebo dva společné body s elipsou, v případě žádného bodu se jedná o vnější přímku, v případě jednoho bodu o tečnu a v případě dvou bodů o sečnu. U kulečníků bude zapotřebí pouze sečna a tečna.

Budeme popisovat pohyb bodové částice uvnitř elipsy a její odrazy od hranice elipsy krok za krokem.

I. Máme bodovou částici, která se pohybuje uvnitř elipsy o základní středové rovnici

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4.1}$$

kde $a > b > 0$, v případě, že střed elipsy splývá počátkem soustavy souřadnic.

Jestliže střed s počátkem nesplývá, rovnice elipsy vypadá následně:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1, \tag{4.2}$$

kde $S[m,n]$.

Konečně ještě uvedeme obecnou rovnici elipsy tedy

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0, \tag{4.3}$$

kde $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$.

II. Uvedeme bodovou částici do pohybu pod určitým úhlem α a určitým směrem.

Trajektorie bodové částice představuje přímku (sečnu) t o směrnicové rovnici

$$y=kx+q, \tag{4.4}$$

která protne elipsu ve dvou bodech, ale nás bude zajímat pouze ten průsečík nacházející se ve směru, ve kterém jsme uvedli bodovou částici do pohybu. Úhel α, pod kterým jsme uvedli částici do pohybu, svírá hlavní poloosa a s přímkou t. Průsečík přímky t a elipsy nalezneme tak, že do jakékoli rovnice elipsy dosadíme za y rovnici přímky t: $y = kx + q$. Rovnici upravíme a vyjádříme x_1 a x_2 pomocí diskriminantu D a dopočítáme y_1 a y_2 dosazením x_1 a x_2 do rovnice přímky t. Získáme 2 průsečíky, potřebujeme však jen jeden a to bod $T = [t_1, t_2]$, který je průsečíkem ve směru trajektorie pohybující se částice.

III. Bodová částice se odráží právě v bodě $T = [t_1, t_2]$, ve kterém sestrojíme tečnu k elipse. Rovnice tečny l k elipse v bodě T vypadá následně:

$$\frac{(x-m)(t_1-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(t_2-n)}{b^2} = 1. \tag{4.5}$$

Tato tečna l je potřebná, proto aby bylo možné nalézt trajektorii, označíme ji přímku k, po odrazu v bodě T.

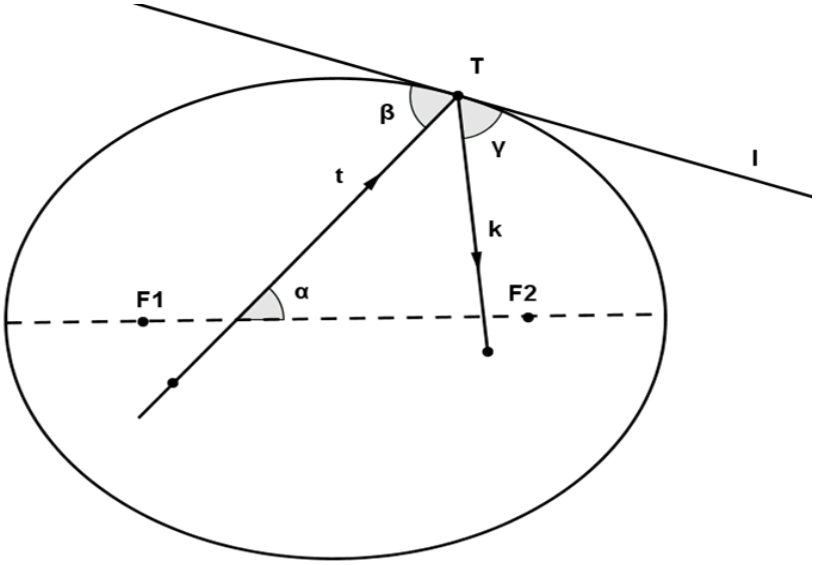
IV. Zjistíme odchylku ω, což je úhel β, přímek t a l pomocí vzorce

$$cos\omega = \frac{|u_1v_1+u_2v_2|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}}, \tag{4.6}$$

kde potřebujeme směrové nebo normálové vektory přímek t a l $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Ty lze získat z obecných rovnic přímek t a l.

V. Úhel β, který svírá přímka t a tečna l, takzvaný úhel dopadu, musí být stejný jako úhel γ, který svírá tečna l a přímka k, takzvaný úhel odrazu. Pomocí tohoto tvrzení a pomocí vzorce pro odchylku přímek je možné zkonstruovat přímku k a zjistit rovnici této přímky.

VI. Dále se bodová částice bude pohybovat po přímce k až do dalšího střetu s hranicí elipsy, kdy budeme znovu hledat průsečík elipsy a přímky k.



Obrázek 4.1: popis elipsy a přímek z příkladu 4.1

Komplexní příklad 4.1:

I. Máme danou středovou rovnici elipsy e: $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$, počáteční bod startu pohybující se částice $A[-1,0]$ a směrový vektor $\vec{v}=(1,1)$. Vypočteme průběh dráhy bodové částice uvnitř elipsy a to následně:

II. $ax+by+c=0$ - obecná rovnice přímky

směrový vektor $\vec{w}=(1,1)$ → normálový vektor $\vec{n}=(1,-1)$, kde $\vec{n}=(a,b)$

$1x-1y+c=0$ → zjišťuji c

$1\cdot(-1)-1\cdot 0+c=0$ → dosadíme bod A

$c=1$ → výsledná rovnice přímky t: $x-y+1=0$

Vzájemná poloha přímky t a elipsy e:

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$$

$$x-y+1=0\rightarrow y=x+1$$

$$\frac{x^2}{6}+\frac{(x+1)^2}{3}=1 \quad /\cdot 6$$

$$x^2+2x^2+4x+2=6$$

$$3x^2+4x-4=0$$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} \Rightarrow -2 \qquad \Rightarrow \frac{2}{3}$

$x_1 = -2 \rightarrow y_1 = -1$

$x_2 = \frac{2}{3} \rightarrow y_2 = \frac{5}{3}$ → dostali jsme dva body, průsečíky přímky t a elipsy e, bude nás zajímat pouze druhý bod, který se nachází ve směru, ve kterém jsme poslali bodovou části do pohybu, označíme jej $T\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right]$

III. Vypočítáme tečnu l v bodě T:

$\frac{x \cdot \frac{2}{3}}{6} + \frac{y \cdot \frac{5}{3}}{3} = 1$

$\frac{x}{9} + \frac{5y}{9} = 1 \quad / \cdot 9$

$x + 5y - 9 = 0$ → normálový vektor $\vec{u} = (1, 5)$ z rovnice tečny l a normálový vektor $\vec{n} = (1, -1)$ z rovnice přímky t použijeme k výpočtu odchylky ω přímek t a l:

IV. $cos\omega = \frac{|1 \cdot 1 + 5 \cdot (-1)|}{\sqrt{1+25} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{52}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \cong 0{,}5547$

$\omega \cong 56°19'$ → úhel dopadu

V. Úhel dopadu se rovná úhlu odrazu a na základě toho zjistíme rovnici přímky k:

$\cos 56°19' = \frac{|1 \cdot m_1 + 5 \cdot m_2|}{\sqrt{1+25} \cdot \sqrt{m_1^2 + m_1^2}}$ → dosadili jsme do vzorce pro odchylku přímek

normálový vektor tečny a na druhý normálový vektor $\vec{m}$ musíme dojít:

zaměníme jen znaménko ve vektoru $\vec{n}$ a dostávám vektor $\vec{m} = (-1{,}1)$, který dosadíme do rovnice

$\cos 56°19' = \frac{|1 \cdot m_1 + 5 \cdot m_2|}{\sqrt{1+25} \cdot \sqrt{m_1^2 + m_1^2}}$

$\cos 56°19' = \frac{|1 \cdot (-1) + 5 \cdot 1|}{\sqrt{1+25} \cdot \sqrt{1+1}}$

$0{,}5547 = 0{,}5547$

$ax + by + c = 0$ → dosadíme normálový vektor $\vec{m}$ za a, b a dále dosadíme za x, y bod dotyku T

$-1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{5}{3} + c = 0$

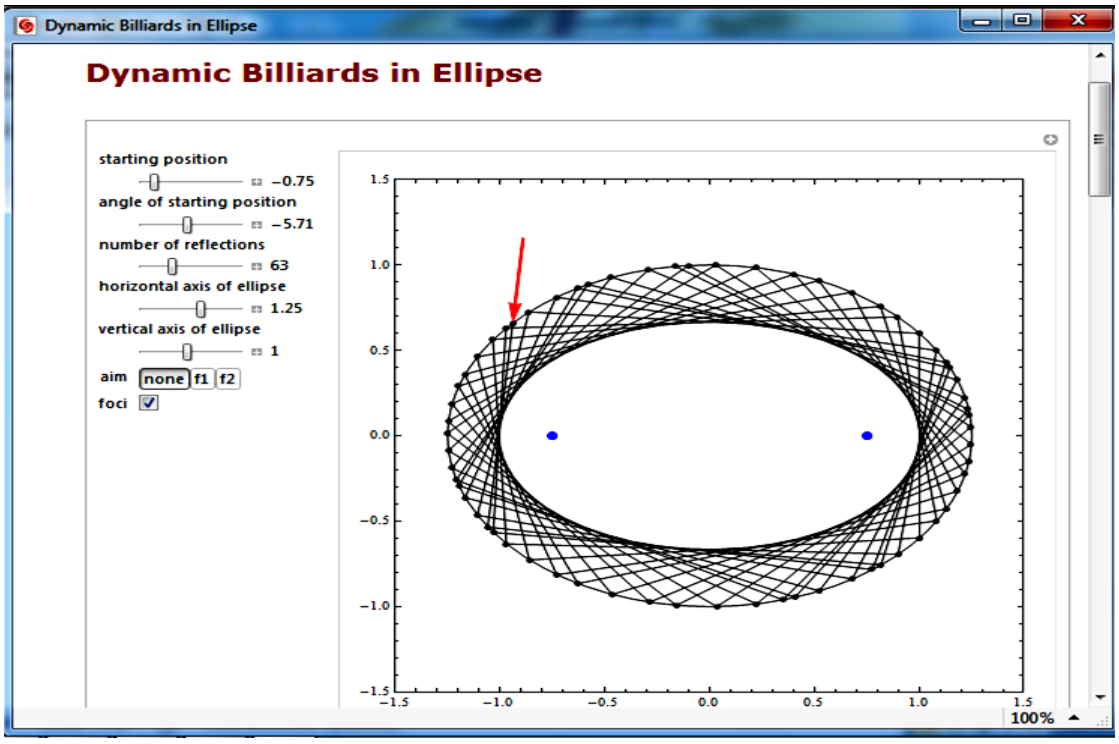
VI. $c = -1 \rightarrow$ přímka k: $x - y - 1 = 0$

Pomocí analytické geometrie jsme získali průběh pohybu částice uvnitř elipsy při zanedbání rychlosti částice, dostáváme pouze dráhu pohybu částice.

4.2. Počítačová výpomoc při vykreslovaní drah pohybující částice

Na následujícím odkazu http://demonstrations.wolfram.com/DynamicBilliardsInEllipse/ je možno stáhnout program Wolfram CDF Player 9, ve kterém lze spustit všelijaké interaktivní demonstrace různých situací a také, což je podstatné, simulace kulečníku na elipse.

Prostředí programu můžete vidět v obrázku 4.2.



Obrázek 4.2

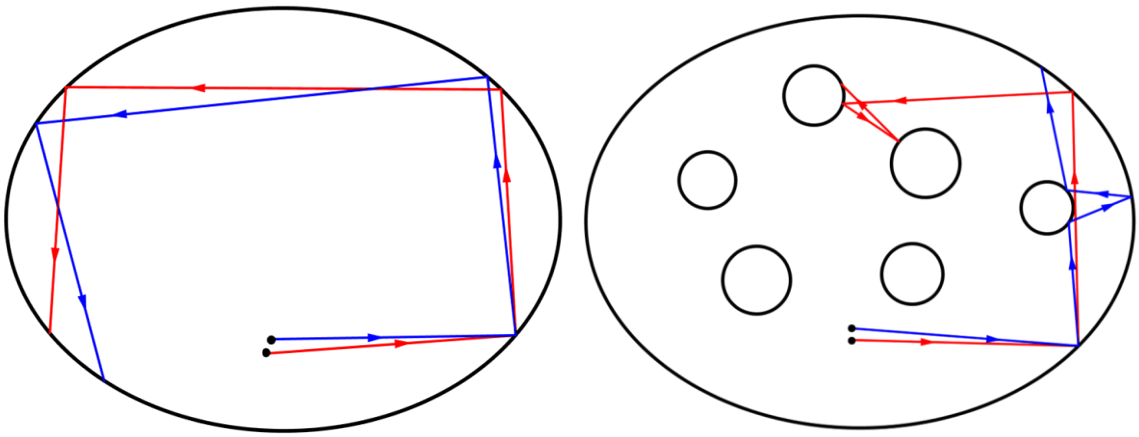
V tomto programu jde jednoduše namodelovat různé situace, kdy se bezrozměrná částice pohybuje uvnitř elipsy. Modelujeme zde trajektorie pohybu částice. Elipsa je

zasazena do kartézské soustavy souřadnic se středem elipsy v počátku. Startovní pozice jsou na horní hranici půl elipsy a můžeme si je nastavit pomocí tlačítka vlevo s názvem *starting position*. Dále lze nastavit úhel při startovní pozici tlačítkem *angle of starting position*, počet odrazů od hranice pomocí tlačítka *number of reflections*, horizontální poloosu a tlačítkem *horizontal axis of ellipse*, vertikální poloosu b tlačítkem *vertical axis of ellipse*, tlačítkem *foci* nastavujeme, jestli chceme zobrazit ohniska nebo ne a tlačítkem *aim* nastavujeme, jestli chceme, aby trajektorie procházela jedním z ohnisek nebo ne. Všechny nastavitelné funkce jsou v určitých daných mezích. Díky těmto funkcím je možné nastavit i kruh místo elipsy a simulovat tak kulečník na kruhu.

5. Teorie deterministického chaosu

Chaos je část matematiky, která je jako systém velmi citlivá zejména na počáteční podmínky. Velmi malá změna ve startovní pozici chaotického systému vyvolá velkou změnu za krátkou chvíli. Chaotický systém můžeme přirovnat k předpovědi o počasí, i když je počasí pečlivě měřeno, tak malá změna může předpověď zcela změnit. Některé systémy jako třeba právě počasí mohou vypadat jako náhodné, ale jsou ve skutečnosti předvídatelné pomocí deterministických rovnic, ne vždy jdou však tyto rovnice jednoduše zjistit.

Chaotické kulečníky jsou velice citlivé na úhel, pod kterým pohybující částici uvedeme do pohybu. Musí se však jednat o složitý nepravidelný kulečníkový stůl s překážkami, protože chování takovéhoto systému v budoucnu je velice složité popsat. V tomto případě je někdy lepší považovat systém za náhodný a popisovat ho pomocí termínů teorie pravděpodobnosti. V obrázku 5.17 lze vidět trajektorie pohybující se částice při změně počátečního úhlu o 3 stupně částice u kulečníku na elipse bez překážek (vlevo) a s překážkami (vpravo). Z obrázku 5.17 lze usuzovat, že čistě kulečník na elipse se chaoticky nechová a je vlastně pravidelný ve svém chování.

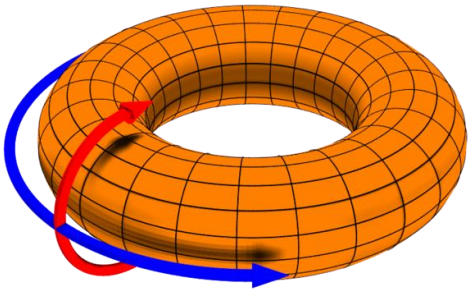


Obrázek 5.17

6. Dodatky

6.1. Torus

V geometrii torus představuje rotační plochu, která se vytvoří otáčením kružnice kolem osy, která však musí ležet ve stejné rovině a nesmí mít s ní společné body. Tvar, který se vytvoří, připomíná obruč nebo donut (kobliha bez vnitřku).



Obrázek 6.1: tvar toru

Definice 6.1: Parametricky můžeme *torus*, který je středově souměrný podle počátku a osově podle osy z v kartézských souřadnicích, vyjádřit následně:

$$x(u,v) = (R + r\cos v)\cos u$$

$$y(u,v) = (R + r\cos v)\sin u$$

$$z(u,v) = r\sin v. \tag{6.1}$$

Obecná rovnice:

$$\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right) + z^2 = r^2, \tag{6.2}$$

kde $u, v \in \langle 0, 2\pi)$, R je vzdálenost středu „trubice“ ke středu toru, r je poloměr „trubice“.

Topologicky je torus uzavřená plocha definována v kartézském systému dvou kruhů $S^1 \times S^1$.

Poznámka 6.1: Topologie je část geometrie, které se zabývá velmi obecným popisem prostoru. Nezáleží zde na vlastnostech, jako jsou vzdálenosti nebo křivost. Například

čtverec a kruh jsou z hlediska topologie v rovině stejné, protože jsou to jednodimenzionální objekty a rozdělují rovinu na dvě plochy. Topologie zkoumá některé vlastnosti prostorů a to souvislost, kompaktnost a spojitost. Důležitý je pojem topologický ekvivalentní, takto můžeme označit dva prostory, pokud můžeme jeden v druhý deformovat bez toho, aby se roztrhl nebo spojil.

6.2. Vnější součin diferenciální p-forem

Lineární zobrazení $\eta: E \longrightarrow \mathbb{R}$ nazýváme lineární forma (nebo také 1-forma) na E, kde E je m-rozměrný reálný vektorový prostor. Tedy pro $p \geq 0$ označíme $E^p = E \times E \times \ldots \times E$ p-tou kartézskou mocninu vektorového prostoru E.

Definice 6.2: Zobrazení $\eta: E^p \longrightarrow \mathbb{R}$ definujeme jako takzvanou *antisymetrickou p-formu*, jestliže je splněno následující:

- Pro každé i, kde $1 \leq i \leq m$, a pro každé $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^{i-1}, \varepsilon^{i+1}, \ldots, \varepsilon^m \in E$ zobrazení $E \ni \varepsilon \to \eta\left(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^{i-1}, \varepsilon, \varepsilon^{i+1}, \ldots, \varepsilon^m\right) \in \mathbb{R}$ je lineární.
- Pro libovolné indexy i, j, kde $1 \leq i < j \leq m$, a libovolné vektory $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in E$ platí následující:

$$\eta\left(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_j, \ldots, \varepsilon_p\right) = -\eta\left(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j, \ldots, \varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_p\right), \qquad (6.3)$$

kde na levé straně rovnice je vektor ε_i na druhém místě a vektor ε_j na třetím místě v závorce a na pravé straně rovnice jsou tyto vektory v opačném pořadí.

Pro zjednodušení budeme dále mluvit jen o p-formách místo o antisymetrických p-formách na E.

Dále označíme $\wedge^p E^\star$ množinou p-forem na E a položíme $\wedge^1 E^\star = E^\star$, kde $E^\star$ je množina lineárních forem na E. Uvedená množina má samozřejmě strukturu reálného vektorového prostoru, kde jsou definované operace jako sčítání a násobení skalárem, které jsou definované vztahy:

$$(\eta + \rho)(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) = \eta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) + \rho(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p),$$

$$(a \cdot \eta)(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) = a \cdot \eta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p), \tag{6.4}$$

kde $\eta, \rho \in \wedge^p E^\star$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p \in E$ a $a \in \mathbb{R}$.

Lemma 6.1: Vektorový prostor $\wedge^p E^\star$, pro $p \geq 1$, se označuje jako prostor p-forem na E. Také platí toto: $\wedge^p E^\star = \{0\}$ pro $p > m$, což znamená, že každá p-forma pro $p > m$ je nulová.

Definice 6.3: Máme p-formu η a q-formu ρ na E. Pro libovolné vektory $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+q} \in E$ položíme

$$(\eta \wedge \rho)(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_\sigma sgn\, \sigma \cdot \eta(\varepsilon_{\sigma(1)}, \dots, \varepsilon_{\sigma(p)}) \rho(\varepsilon_{\sigma(p+1)}, \dots, \varepsilon_{\sigma(p+q)}), \tag{6.5}$$

kde $\sigma: \{1,2, \dots, p+q\} \to \{1,2, \dots, p+q\}$ je permutace množiny $\{1,2, \dots, p+q\}$ a znaménko této množiny $sgn\, \sigma = 1$, pokud je permutace sudá, a $sgn\, \sigma = -1$, pokud je permutace lichá.

Rovnice (6.5) definuje takzvaný *vnější součin p-formy η a q-formy ρ*, který se označuje jako $(p+q)$-forma $\eta \wedge \rho$ na E.

Lemma 6.2: Zobrazení $\wedge^p E^\star \times \wedge^q E^\star \ni (\eta, \rho) \longrightarrow \eta \wedge \rho \in \wedge^{p+q} E^\star$ je bilineární. Také pro libovolné formy $\eta \in \wedge^p E^\star$, $\rho \in \wedge^q E^\star$, $\omega \in \wedge^r E^\star$ platí:

$$\eta \wedge \rho = (-1)^{pq} \cdot \rho \wedge \eta,$$
$$(\eta \wedge \rho) \wedge \omega = \eta \wedge (\rho \wedge \omega). \tag{6.6}$$

Důkaz 6.2: [4], str. 56

6.3.Lebesgueova míra

Pomocí Lebesgueovy míry lze přidělit míru podmnožinám n-dimenzionálního Euklidovského prostoru.

Definice 6.4: Nechť J je libovolný interval z $\mathbb{R}^n$ s krajními body $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ pro $a_i \leq b_i$, $i = 1,2, \dots, n$, pak nezáporné číslo

$$m_n(J) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n), \tag{6.7}$$

nazýváme *n-rozměrný objem intervalu J*.

Z toho plyne, že $m_n(J) = 0$ právě, když je $a_i = b_i$ pro aspoň jeden index i. Dále pak v případě $n = 1$ je $m_1(J)$ délka intervalu J s krajními body a, b, pro $n = 2$ je $m_2(J)$ plocha obdélníka J s délkami stran $b_1 - a_1$ a $b_2 - a_2$ a pro $n = 3$ je $m_3(J)$ objem kvádru J s délkami hran $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$ a $b_3 - a_3$.

Definice 6.5: Dále nechť $J_1, J_2, \dots, J_k$ jsou po dvou disjunktní intervaly a nechť Z je libovolná elementární množina z E_n a platí:

$$Z = \bigcup_{j=1}^{k} J_j,$$

pak nezáporné číslo

$$m_n(A) = \sum_{j=1}^{k} m_n(J_j) \tag{6.8}$$

nazýváme *n-rozměrným objemem elementární množiny Z*.

Definice 6.6: Vztah (6.8) lze chápat jako předpis, který každé množině $Z \in \mathrm{E}_n$ přiřazuje reálné číslo $m_n(Z) \in \langle 0, \infty)$, a tím pádem tento vztah definuje jistou funkci

$$m_n: \mathrm{E}_n \to \langle 0, \infty). \tag{6.9}$$

Definičním oborem této funkce jsou množiny v $\mathbb{R}^n$, proto říkáme takovým funkcím také *množinové funkce*.

Předpoklad 6.1: Nechť δ je množinová funkce, která každé množině $Z \in \Delta$ přiřazuje číslo $\delta(Z) \in \mathbb{R}^\star = (-\infty, +\infty)$, kde Δ je libovolný systém množin, a přepokládáme, že systém Δ obsahuje prázdnou množinu $\emptyset$.

Definice 6.7: Podle definice množinové funkce $\delta: \Delta \to \mathbb{R}^\star$, tedy každá množinová funkce může nabývat hodnot z $\mathbb{R}^1$, pak říkáme, že funkce δ je *konečná*, ale také hodnot $-\infty, +\infty$.

Definice 6.8: Množinou funkci $\delta: \Delta \to \mathbb{R}^\star$ lze nazvat jako *aditivní*, respektive *subaditivní*, jestliže $\delta(\emptyset) = 0$ a pro každý systém po dvou disjunktních množin $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ z Δ takových, že $\bigcup_{i=1}^{k} Z_i \in \Delta$ platí

$$\delta\left(\bigcup_{i=1}^{k} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \delta(Z_i),$$

respektive

$$\delta\left(\bigcup_{i=1}^{k} Z_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \delta(Z_i). \tag{6.10}$$

Definice 6.9: Množinou funkci $\delta: \Delta \to \mathbb{R}^{\star}$ lze nazvat jako *σ-aditivní*, respektive *σ-subaditivní*, jestliže $\delta(\emptyset) = 0$ a pro každý systém po dvou disjunktních množin $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ z Δ takových, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i \in \Delta$ platí

$$\delta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(Z_i),$$

respektive

$$\delta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta(Z_i). \tag{6.11}$$

Lemma 6.3: Jestliže systém množin Δ je okruh, respektive *σ*-okruh, pak podmínky $\emptyset \in \Delta$ a $\bigcup_{i=1}^{k} Z_i \in \Delta$, respektive $\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i \in \Delta$, jsou splněny.

Poznámka 6.2: Okruh Δ je neprázdný systém množin a musí pro něj platit následující: pro každé $A, B \in \Delta$: $A \cup B \in \Delta$ a $A, B \in \Delta$: $A \setminus B \in \Delta$. *σ*-okruh je okruh, pro který navíc platí toto: pro každé $C_1, C_2 \ldots \in \Delta$: $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in \Delta$.

Definice 6.10: Množinová funkce δ se nazývá *nezáporná*, pokud nabývá pouze nezáporných hodnot, tedy $\delta(Z) \in \langle 0, +\infty \rangle$. Nezáporná *σ*-aditivní množinová funkce se označuje jako *míra* a nezáporná aditivní množinová funkce jako *objem*.

Definice 6.11: Nechť množinová funkce δ je objem definovaný na okruhu $\mathcal{H}$ podmnožin v prostoru $\mathbb{R}^n$, pak říkáme, že δ objem je *regulární* právě tehdy, když ke každé množině $Z \in \mathcal{H}$ a ke každému $\vartheta > 0$ existují množiny $P, R \in \mathcal{H}$ takové, že P je uzavřená a R je otevřená a $P \subset Z \subset R$ a platí

$$\delta(R) - \vartheta \leq \delta(Z) \leq \delta(P) + \vartheta. \tag{6.12}$$

Definice 6.12: Množinovou funkci $\lambda^*: exp\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\star}$, kde λ je regulární objem na okruhu E_n v $\mathbb{R}^n$, definovanou předpisem

$$\lambda^*(Z) = inf_{(G_i)\in \mathrm{P}_Z} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(G_i) \text{ pro}$$

každé $Z \in \mathbb{R}^n$, (6.13)

kde P_Z označuje systém všech spočetných pokrytí množiny $Z \in \mathrm{E}_n$ otevřenými množinami z E_n, kdy prvky systému P_Z jsou takové posloupnosti (G_i) otevřených množin z E_n, pro

které platí, že $Z \subset \bigcup G_i$ (exp a inf označují exponenciální funkci a infimum). Potom předpis (6.13) nazýváme *vnější mírou indukovanou objemem* λ.

Předpoklad 6.2: Dále označíme $\mathcal{M}_O$ jako systém všech podmnožin $Z \subset \mathbb{R}^n$, pro které existuje posloupnost (Z_k) množin z E_n taková, že $Z_k \to Z$ pro $k \to \infty$ a označíme $\mathcal{M}$ jako systém všech podmnožin $Z \subset \mathbb{R}^n$, pro které existuje posloupnost (Z_k) množin z $\mathcal{M}_O$ taková, že $Z = \bigcup Z_k$.

Definice 6.13: Vycházíme z regulární množinové funkce λ na E_n, množinu E_n rozšíříme na σ-okruh $\mathcal{M}$ a funkci λ rozšíříme na míru λ^* na $\mathcal{M}$, protože $\mathrm{E}_n \subset \mathcal{M}_O \subset \mathcal{M}$, můžeme místo symbolu λ^* pro míru na $\mathcal{M}$ použít symbol λ. Takzvanými λ*-měřitelnými množinami* budeme nazývat prvky σ-okruhu $\mathcal{M}$. Za množinovou funkci λ na E_n můžeme ve speciálním případě dosadit n-rozměrný objem m_n a takto získanou míru λ budeme nazývat *Lebesgueovou mírou* v $\mathbb{R}^n$, označuje se jako m_n, a prvky σ-okruhu $\mathcal{M}$ budeme nazývat *lebesgueovsky měřitelnými množinami.*

Závěr

V této práci jsem se pokusila nastínit problematiku matematického kulečníku na elipse, se kterým se však v reálném životě příliš nesetkáváme. Tyto matematické kulečníky byly vytvořeny hlavně proto, aby se mohla lépe zkoumat teorie deterministického chaosu, zde mají tedy matematické kulečníky veliké uplatnění. V mé práci jsem došla na to, že chování v eliptickém kulečníku je pravidelné a řídí se určitými zákonitostmi a to znamená, že zde nenastává chaos. Musí se však jednat o jednolitý kulečníkový stůl bez jakýchkoliv překážek nebo otvorů. Tedy u klasického kulečníku, který je známý jako hra, k chaosu nejsme daleko, protože zde máme překážky, ostatní koule, a také otvory na koule. Je to proto velmi těžké předvídat pohyb koule a hráči kulečníku musí být mistři ve svém oboru a také musí trochu spoléhat na náhodu.

Při psaní této práce jsem často narážela na mnoho nových pojmů, které jsem se snažila samostatně dohledávat a jednoduše vysvětlovat. Práce má spíše kompilační charakter a měla by být určena pro matematicky znalé čtenáře. Naučila jsem se zejména pracovat s anglicky psanou matematickou literaturou a vytvořila jsem si znalosti v programu Geogebra 4.2, který se využívá na vytváření geometrických obrazců.

Přes veškerá úskalí, se kterými jsem se musela vypořádat, si myslím, že mi tato práce pomohla v tom být nejenom lepším hráčem kulečníku, ale také lepším matematikem obohaceným o velice neobvyklé téma, o kterém jsem předtím nikdy v životě neslyšela.

Seznam příloh

Příloha A

CD s programem Wolfram CDF Player 9 na vykreslování trajektorií uvnitř kulečníku na elipse.

Seznam literatury

[1] CHERNOV, N., MARKARIAN, R.: *Chaotic Billiards*. Providence, Rhode Island: American Mathematic Society. 2006.

[2] NAKAMURA, K., NARAYAMA, T.: *Quantum chaos and quantum dots.* In: *Mesoscopic Physics and Nanotechnology.* Oxford: Oxford University Press. 2004.

[3] FUKA, J., HAVELKA, B.: *Optika a atomová fyzika – I. Optika.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství. 1961.

[4] KRUPKA, D.: *Úvod do analýzy na varietách.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n.p. 1986.

[5] NAGY, J., NOVÁKOVÁ, E., VACEK, M.: *Lebesgueova míra a integráll.* In: *Matematika pro vysoké školy technické.* Praha: SNTL. 1985.

[6] ČERMÁK P., ČERVINKOVÁ P.: *Odmaturuj z matematiky.* Brno: Didaktis. 2002.

[7] A short history of billiards [online], dostupné z http://www.alcocks.com.au/billi1.html [citováno 15. 2. 2013]

[8] History of billiards (or pool) [online], dostupné z http://www.thebilliardshop.com/history-of-pool-and-billiards [citováno 15. 2. 2013]

[9] Nelineární dynamické systémy [online], dostupné z http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/fract/clanky/2.htm [citováno 17. 2. 2013]

[10] Nelineární dynamické systémy [online], dostupné z http://www.elektrorevue.cz/clanky/01022/02.htm [citováno 17. 2. 2013]

[11] Dynamické systémy [online], dostupné z http://www.fce.vutbr.cz/studium/materialy/Dynsys/kap1/kap1.htm [citováno 17. 2. 2013]

[12] Dynamical billiards [online], dostupné z http://www.scholarpedia.org/article/Dynamical_billiards [citováno 17. 2. 2013]

[13] Chaotic dynamics [online], dostupné z http://biocircuits.ucsd.edu/rabin/ChaoticDynamics.pdf [citováno 25. 2. 2013]

[14] A short history of dynamical systems theory [online], dostupné z http://www.eolss.net/Sample-Chapters/C02/E6-132-21.pdf [citováno 25. 2. 2013]

[15] Dynamical billiards [online], dostupné z http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_billiards [citováno 25. 2. 2013]

[16] Norma (matematika) [online], dostupné z http://cs.wikipedia.org/wiki/Norma_(matematika) dostupné z [citováno 5. 3. 2013]

[17] Varieta (matematika)[online], dostupné z http://referaty-seminarky.cz/varieta-matematika/ [citováno 5. 3. 2013]

[18] Grupa [online], dostupné z http://cs.wikipedia.org/wiki/Grupa [citováno 6. 3. 2013]

[19] Grupa [online], dostupné z http://cs.wikibooks.org/wiki/Line%C3%A1rn%C3%AD_algebra/Grupa [citováno 6. 3. 2013]

[20] Pravděpodobnost a statistika [online], dostupné z http://vychodil.inf.upol.cz/kmi/pras/pr03.pdf [citováno 25. 3. 2013]

[21] Elliptical billiard tables [online], dostupné z http://cage.ugent.be/~hs/billiards/billiards.html [citováno 26. 3. 2013]

[22] Chaos theory [online], dostupné z http://whatis.techtarget.com/definition/chaos-theory [citováno 10. 4. 2013]

[23] Torus [online], dostupné z http://en.wikipedia.org/wiki/Torus [citováno 12. 4. 2013]

Demonstrativní program na vykreslování chování částice uvnitř eliptického kulečníku:

[24] Dynamic Billiards in ellipse [online], dostupné z http://demonstrations.wolfram.com/DynamicBilliardsInEllipse/ [citováno 15. 3. 2013]