

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Veronika Kremlová

Konstrukční úlohy řešené s využitím shodnosti a podobnosti

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím pramenů uvedených v seznamu literatury.

V Olomouci dne 17. 4. 2023

.....

podpis

Poděkování

Děkuji paní Mgr. Jitce Hodaňové, Ph.D. a panu Mgr. Jiřímu Vaško za odborné vedení mé bakalářské práce, za cenné rady, nápady a čas, který mi věnovali.

Anotace

Jméno a příjmení:	Veronika Kremlová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Jiří Vaško
Rok obhajoby:	2023

Název práce:	Konstrukční úlohy řešené s využitím shodnosti a podobnosti
Název v angličtině:	Construction problems solved on the basis of identity and similarity
Anotace práce:	Bakalářská práce se zaměřuje na shodná a podobná zobrazení v rovině a využití těchto zobrazení v konstrukčních úlohách. V práci jsou definována jednotlivá shodná a podobná zobrazení v rovině a k nim řešené vybrané konstrukční úlohy. Konstrukce těchto úloh jsou zkonstruovány v programu GeoGebra kniha. Tato kniha může sloužit jako didaktická pomůcka učitelům matematiky středních škol nebo žákům či studentům, kteří si s řešením podobných úloh neví rady.
Klíčová slova:	shodná zobrazení v rovině, osová souměrnost, středová souměrnost, posunutí, otočení, posunutá souměrnost, podobná zobrazení v rovině, stejnolehlost, řešené příklady
Anotace v angličtině:	The bachelor thesis focuses on identical and similar transformations in the plane and the use of these transformations in constructional tasks. In the thesis, individual identical and similar transformations in the plane are defined and selected constructional tasks are solved for them. The constructions of these tasks are constructed in the GeoGebra Book program. This book can serve as a didactic aid for secondary school mathematics teachers or pupils or students who do not know how to solve similar problems.
Klíčová slova v angličtině:	identical transformations in the plane, axial symmetry, central symmetry, translation, rotation, displaced symmetry, similar transformations in the plane, homothetic transformations, solved examples
Přílohy vázané v práci:	
Rozsah práce:	50
Jazyk práce:	Český jazyk

Obsah

Úvod	5
1 Program GeoGebra	6
2 Geometrická zobrazení v rovině	7
3 Shodná zobrazení v rovině.....	8
3.1 Shodnost trojúhelníků	10
3.2 Osová souměrnost	12
3.2.1 Řešené konstrukční úlohy	12
3.3 Středová souměrnost	19
3.3.1 Řešené konstrukční úlohy	19
3.4 Posunutí.....	24
3.4.1 Řešené konstrukční úlohy	24
3.5 Otočení	28
3.5.1 Řešené konstrukční úlohy	28
3.6 Skládání shodných zobrazení	31
4 Podobná zobrazení v rovině	32
4.1 Stejnolehlost.....	32
4.1.1 Řešené konstrukční úlohy	34
4.2 Podobná zobrazení v rovině	40
4.2.1 Podobnost trojúhelníků	41
4.2.2 Řešené konstrukční úlohy	42
Závěr	45
Literatura	46
Seznam používaných matematických symbolů.....	47
Seznam obrázků.....	49
Seznam tabulek.....	50
Přílohy	50

Úvod

Jak jistě plyne z názvu, cílem práce je pomocí programu GeoGebra vyřešit vybrané konstrukční úlohy s využitím geometrických zobrazení v rovině.

S konstrukčními úlohami shodnosti a podobnosti jsme se setkali již na základní škole, kdy jsme využívali věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků. Na střední škole jsme se už setkali se složitějšími úlohami, kdy jsme pomocí shodných či podobných zobrazení měli sestavit nějaký útvar. To však bylo pro mnoho žáků velkým problémem. Na základě toho jsem se rozhodla zpracovat řešené příklady s využitím těchto zobrazení v rovině.

Celá práce je rozdělena do čtyř kapitol. První kapitola se zabývá programem GeoGebra a jeho možnostmi.

Druhá až čtvrtá kapitola je zaměřena na konkrétní zobrazení v rovině. Uvedeme si definice a vlastnosti shodného a podobného zobrazení. Podíváme se na věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků. A v neposlední řadě se postupně budeme zabývat jednotlivými shodnými a podobnými zobrazeními v rovině. Ukážeme si řešení vybraných konstrukčních úloh spojených s daným zobrazením.

Všechny konstrukční úlohy jsou v této práci stejně strukturovány, nejprve je napsané zadání úlohy a následně řešení úlohy, které obsahuje postup konstrukce zapsán symbolikou, konstrukci, důkaz a diskuzi. Při řešení konstrukčních úloh se dělá vždy náčrtek s rozбором. Rozbor je úvaha o řešení úlohy a je obvykle načrtnut rukou. Kdybychom jej rýsovali v počítačovém programu, jednalo by se o stejný obrázek jako samotná konstrukce. Z tohoto důvodu jej v řešených úlohách vynecháme a budeme uvádět pouze ostatní části.

K jednotlivým kapitolám této práce jsou vytvořeny v programu GeoGebra stručné obrázky, jež mají pomoci pochopit danou látku. Součástí je také GeoGebra kniha s názvem „*Geometrická zobrazení v rovině - konstrukční úlohy*“, kterou můžeme otevřít zde: <https://www.geogebra.org/m/aavjymj7>. Jak vyplývá z názvu knihy, jsou zde vyřešené vybrané konstrukční úlohy s využitím geometrických zobrazení v rovině, tedy hlavně postup konstrukce a samotná konstrukce. U konstrukcí lze zde měnit velikosti a polohy prvků a zobrazovat je postupně krok za krokem. V knize najdeme u některých příkladů také otázky, rozbor či nějakou poznámku. Tento materiál je veřejně dostupný a může sloužit jako didaktická pomůcka učitelům matematiky středních škol nebo žákům či studentům, kteří si s řešením podobných úloh neví rady.

Součástí práce je [Seznam matematických symbolů](#), které v té této práci používám.

1 Program GeoGebra

GeoGebra je matematický software spojující geometrii, algebru, tabulky, grafy, statistiku a počet v jednom programu. Nabízí on-line platformu s více než milionem bezplatných učebních zdrojů. Podporuje vzdělávání v oblasti vědy, techniky, inženýrství a matematiky a inovace ve výuce a učení. Aplikace GeoGebra, učební zdroje, GeoGebra Classroom a další funkce jsou každému dostupné zdarma jak ke stažení, tak on-line na webových stránkách [geogebra.org](https://www.geogebra.org). Výhodou programu je také, že je přeložen do několika světových jazyků, včetně češtiny.

Na webových stránkách [geogebra.org](https://www.geogebra.org) lze po přihlášení vytvořit dva druhy materiálů, kterými jsou Aktivita a Kniha. Aktivita má velkou škálu možností vložení různých prvků, tj. text, GeoGebra, poznámka, otázka (uzavřená/ otevřená), video, obrázek, PDF soubor a webový prvek. Z vytvořených Aktivit, je možné sestavit Knihu. Výhodou GeoGebry knihy je, že Aktivitu, které spolu souvisí, jsou v jednom souboru na jednom místě. Je možné je rozdělit do kapitol, lépe je najít, lépe s nimi pracovat, porovnávat je či prezentovat. Pro lepší vyhledávání je při vytváření Knihy možné vložit klíčová slova, která materiál vystihuje, a cílovou skupinu, pro kterou je materiál určen. Každou Aktivitu i Knihu lze uložit soukromě, sdílet odkazem či zveřejnit. (*GeoGebra*, © 2022)

2 Geometrická zobrazení v rovině

Než se dostaneme k jednotlivým zobrazením je potřeba si nejprve definovat pojem zobrazení v rovině.

Je-li každému bodu X roviny přiřazen (určitým předpisem) právě jeden bod X' téže roviny, pak mluvíme o zobrazení Z v rovině. Zapisujeme $Z: X \rightarrow X'$. Bod X nazýváme vzor bodu X' a bod X' nazýváme obraz bodu X . (*Molnár, 2001, str. 83*)

Body X , pro jejichž obrazy platí $X' = X$, se nazývají samodružné body zobrazení Z v rovině. Obrazem geometrického útvaru U v daném zobrazení je geometrický útvar U' . Je-li $U' = U$, nazýváme útvar U samodružným útvarem zobrazení Z v rovině. Zobrazení, ve kterém je každý bod samodružný, se nazývá identita. (*Pomykalová, 2006, s. 124*)

3 Shodná zobrazení v rovině

Zobrazení Z v rovině se nazývá shodné zobrazení (neboli shodnost či izometrie), právě když pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' v tomto zobrazení platí:

$$|XY| = |X'Y'|.$$

Shodnost zapisujeme symbolem $\cong$. Každé shodné zobrazení, které není identitou, můžeme názorně realizovat přemístěním, např. užitím průsvitného papíru, následovně: Na průsvitný papír nakreslíme rovinný útvar U . Průsvitku přemístíme (můžeme i obrátit „na rub“) a útvar obkreslíme. Dostaneme tak shodný útvar U' , který je obrazem útvaru U . Podle toho, zda průsvitku ponecháme „lícem“ či ji obrátíme „na rub“, rozlišujeme shodnost přímou a nepřímou. Jestliže při přemísťování necháme průsvitný papír „lícem“ (nebudeme obracet), bude se jednat o shodnost přímou a bude zachována orientace. Pokud však průsvitku při přemístění obrátíme „na rub“, budeme hovořit o shodnosti nepřímé, u které se orientace mění. (Polák, 2012, str. 464)

Druhy shodných zobrazení v rovině:

- a) přímá shodnost: středová souměrnost, otočení, posunutí,
- b) nepřímá shodnost: osová souměrnost, posunutá souměrnost.

V každém shodném zobrazení platí:

- a) obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B'$ s ní shodná,
- b) obrazem každé polopřímky $\mapsto AB$ je polopřímka $\mapsto A'B'$; obrazy navzájem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky,
- c) obrazem každé přímky $\leftrightarrow AB$ je přímka $\leftrightarrow A'B'$; obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky,
- d) obrazem každé poloroviny $\mapsto pA$ je polorovina $\mapsto p'A'$; obrazy navzájem opačných polorovin jsou opačné poloroviny,
- e) obrazem každého konvexního úhlu $\sphericalangle AVB$ je konvexní úhel $\sphericalangle A'V'B'$ s ním shodný,
- f) obrazem každého trojúhelníku $\triangle ABC$ je trojúhelník $\triangle A'B'C'$ s ním shodný.

(Polák, 2012, str. 464)

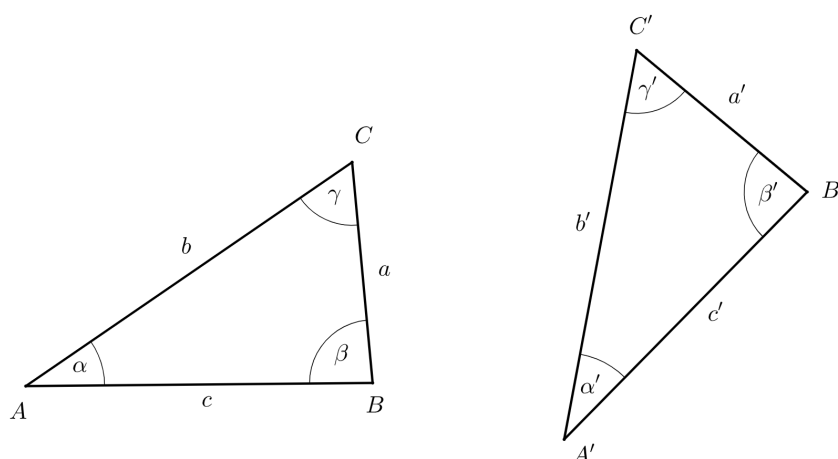
Věta o určenosti shodného zobrazení v rovině:

Jsou-li dány dva shodné trojúhelníky $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Existuje právě jedno shodné zobrazení v rovině, které přiřazuje $A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C'$. (Šedivý, 1980, s. 20)

Shodná zobrazení umožňují zpřesnit pojem shodnosti geometrických útvarů: Dva geometrické útvary U , U' jsou shodné útvary v rovině, právě když existuje shodné zobrazení této roviny na sebe, v němž jeden z útvarů je obrazem druhého. Píšeme pak $U \cong U'$. (Polák, 2012, str. 468)

Nyní se blíže podíváme na shodnost trojúhelníků a s tím související věty o shodnosti trojúhelníků. Následně pak na jednotlivá shodná zobrazení v rovině. Uvedeme si konkrétní konstrukční úlohy s využitím daného zobrazení a jejich řešení.

3.1 Shodnost trojúhelníků



Obr. 3.1-1 Shodné trojúhelníky

Trojúhelníky ABC , $A'B'C'$ jsou navzájem shodné trojúhelníky (obr. 3.1-1) právě tehdy, když mají stejné velikosti odpovídajících si stran a stejné velikosti příslušných úhlů, tj. když platí:

$$a = a', b = b', c = c',$$

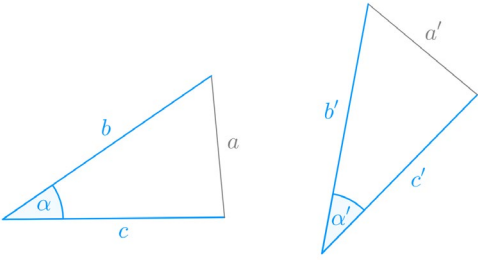
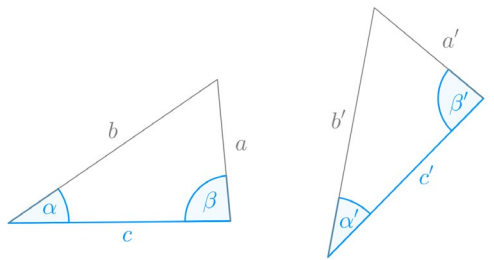
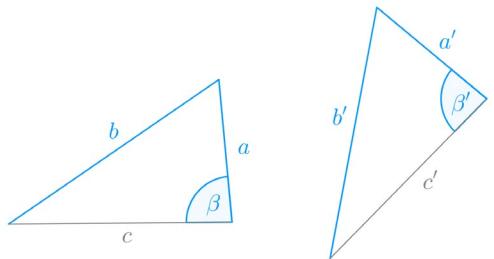
$$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'.$$

Shodnost trojúhelníku zapisujeme symbolicky $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$; pořadí písmen přitom volíme tak, aby vrcholy, které si odpovídají, byly zapsány v obou trojicích na týchž místech. (Kadleček, 1996, str. 15)

Máme-li zjistit, zda jsou dva trojúhelníky shodné, není nutné ověřovat shodnost všech tří dvojic stran a tří dvojic vnitřních úhlů. Stačí ověřit, je-li splněno některé z kritérií, postačujících podmínek, shodnosti trojúhelníků (tab. 3.1-1). (Polák, 2012, s. 436)

Tab. 3.1-1 Věty o shodnosti trojúhelníků

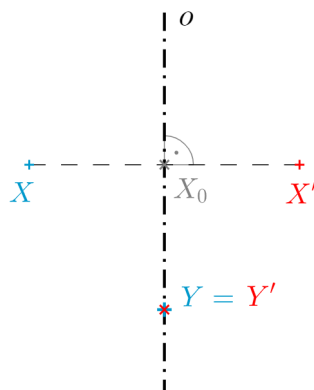
Typ věty	Definice	Náčrtek a symbolika
Věta sss	Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech stranách.	$a' = a, b' = b, c' = c$

Věta sus	Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném.	 $b' = b, c' = c, \alpha' = \alpha$
Věta usu	Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a ve dvou úhlech k ní přilehlých.	 $c' = c, \alpha' = \alpha, \beta' = \beta$
Věta Ssu	Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich.	 je-li $b > a$, pak $a' = a, b' = b, \beta' = \beta$

(Kadleček, 1996, str. 16)

3.2 Osová souměrnost

Nechť je v rovině dána přímka o . Osovou souměrností s osou o (obr. 3.2-1) rozumíme shodné zobrazení $\mathcal{O}(o)$ v rovině, v němž je každý bod přímky o samodružný a každému bodu $X \notin o$ roviny je přiřazen bod X' tak, že přímka o je osa úsečky XX' . Přímka o se nazývá osa souměrnosti. (Molnár, 2001, str. 86)



Obr. 3.2-1 Osová souměrnost

Osová souměrnost je shodnost s měnící se orientací, tzn. nepřímá. Z definice plyne, že osová souměrnost je jednoznačně určena osou souměrnosti o . Může však být určena dvojicí různých bodů X, X' , jestliže každý z nich je obrazem druhého v této souměrnosti. Osou souměrnosti je v tomto případě osa úsečky XX' .

Silně samodružnými přímkami osově souměrnosti jsou v dané rovině osa souměrnosti o a slabě samodružnými přímkami všechny přímky k ní kolmé. (Pomykalová, 2006, s. 125, 126)

3.2.1 Řešené konstrukční úlohy

Dynamické konstrukce jednotlivých úloh, jejich postup, rozbor či otázky k úlohám se nachází v GeoGebře knize – kapitole Osová souměrnost. Odkaz zde: <https://www.geogebra.org/m/aavjymj7#chapter/916317>.

Příklad 1

Zadání: Je dána přímka p a body A, B ležící v opačných polorovinách s hraniční přímkou p (AB není kolmá k p). Sestrojte na přímce p bod V tak, aby osa úhlu AVB ležela v přímce p . (Pomykalová, 2006, s. 132)

Postup konstrukce:

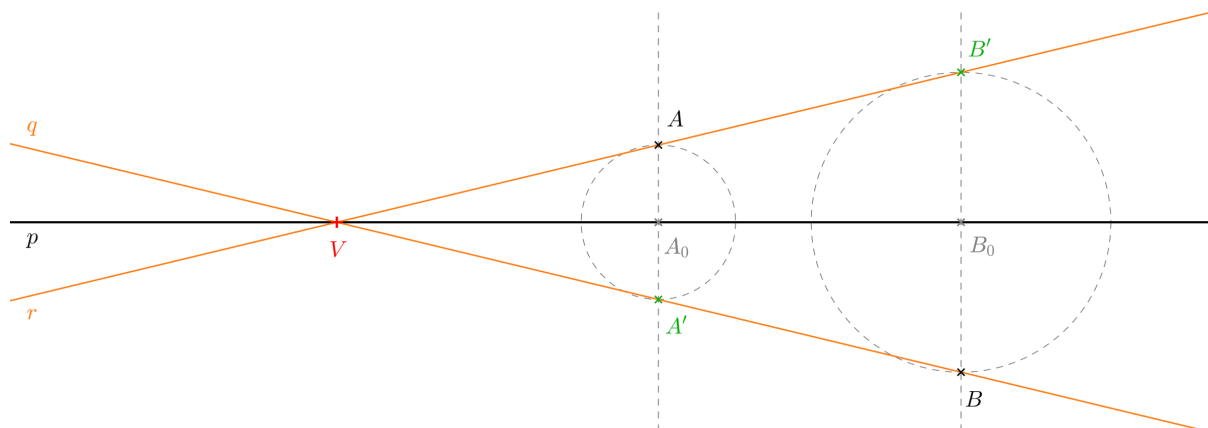
1. Dáno: p, A, B
2. A' ; $\mathcal{O}(p): A \rightarrow A'$
3. $\leftrightarrow A'B = q$

$$4. B'; \mathcal{O}(p): B \rightarrow B'$$

$$5. \leftrightarrow AB' = r$$

$$6. V; V \in q \cap r$$

Konstrukce:



Obr. 3.2.1-1 Konstrukce bodu V

Důkaz: Úloha je řešená s využitím osové souměrnosti s osou souměrnosti p . Z definice tohoto zobrazení plyne: $AA' \perp p$, $BB' \perp p$, přičemž $|Ap| = |A'p|$, $|Bp| = |B'p|$, přímky q , r jsou navzájem osově souměrné podle osy p a velikosti úhlů $|\sphericalangle qp|$, $|\sphericalangle rp|$ jsou shodné. Hledaný bod V splňuje podmínky úlohy.

Diskuse: Počet řešení závisí na poloze bodů A , B . Úloha má jedno řešení, je-li $|Ap| \neq |Bp|$ (obr. 3.2.1-1). Je-li $|Ap| = |Bp|$, úloha nemá žádné řešení ($p \parallel q \parallel r$).

Příklad 2

Zadání: Jsou dány dvě různoběžky p , q a kružnice k . Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo $X \in k$, $Y \in p$, úsečka XY je kolmá na přímku q a střed úsečky XY leží na přímce q . Zvolte postupně vzájemnou polohu kružnice a přímek tak, aby úloha měla 2 řešení, resp. 1, resp. 0 řešení. (Petáková, 2013, s. 79)

Postup konstrukce:

$$1. \text{ Dáno: } p, q, k(S, r)$$

$$2. p'; \mathcal{O}(q): p \rightarrow p'$$

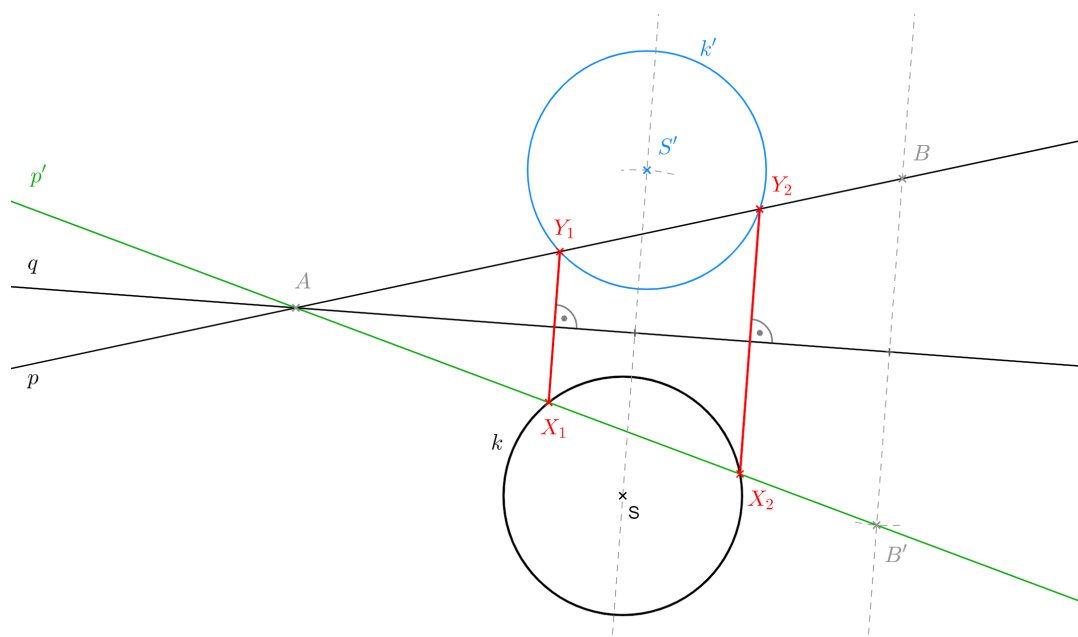
$$3. X; X \in p' \cap k$$

$$4. k'; \mathcal{O}(q): k(S, r) \rightarrow k'(S', r)$$

$$5. Y; Y \in k' \cap p$$

$$6. XY$$

Konstrukce:



Obr. 3.2.1-2 Konstrukce úsečky XY – 2 řešení

Důkaz: Řešení plyne z vlastností osové souměrnosti, kde přímka q je osou souměrnosti. Z definice tohoto zobrazení plyne, že $XY \perp q$, $|Xq| = |Yq|$, přičemž $X \in k$, $Y \in p$. Úsečka XY splňuje podmínky úlohy.

Diskuse: Počet řešení závisí na vzájemné poloze přímek p , q a kružnice k . Úloha má právě dvě řešení, je-li obraz přímky p v osové souměrnosti s osou q sečnou kružnice k (obr. 3.2.1-2). Je-li obraz přímky p v tomto zobrazení tečnou kružnice k , pak má úloha právě jedno řešení. Úloha nemá žádné řešení, jestliže je obraz přímky p v tomto zobrazení vnější přímkou kružnice k .

Příklad 3

Zadání: Kružnice $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$ leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou p . Sestrojte kosočtverec $ABCD$ tak, aby jeho vrcholy A , C ležely po řadě na kružnicích k_1 , k_2 a úhlopříčka BD ($|BD| = 5 \text{ cm}$) na přímce p . Volte vzájemnou polohu kružnic k_1 , k_2 a přímky p tak, aby úloha měla 2, resp. 1, resp. 0 řešení. (Pomykalová, 2006, s. 132)

Postup konstrukce:

1. Dáno: p , $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$
Hledáme bod A na kružnici k_1 .
2. k'_2 ; $\mathcal{O}(p): k_2 \rightarrow k'_2$
3. A ; $A \in k_1 \cap k'_2$

Hledáme bod C na kružnici k_2 .

4. $k'_1; \mathcal{O}(p): k_1 \rightarrow k'_1$

5. $C; A \in k_2 \cap k'_1$

Hledáme body B a D na přímce p .

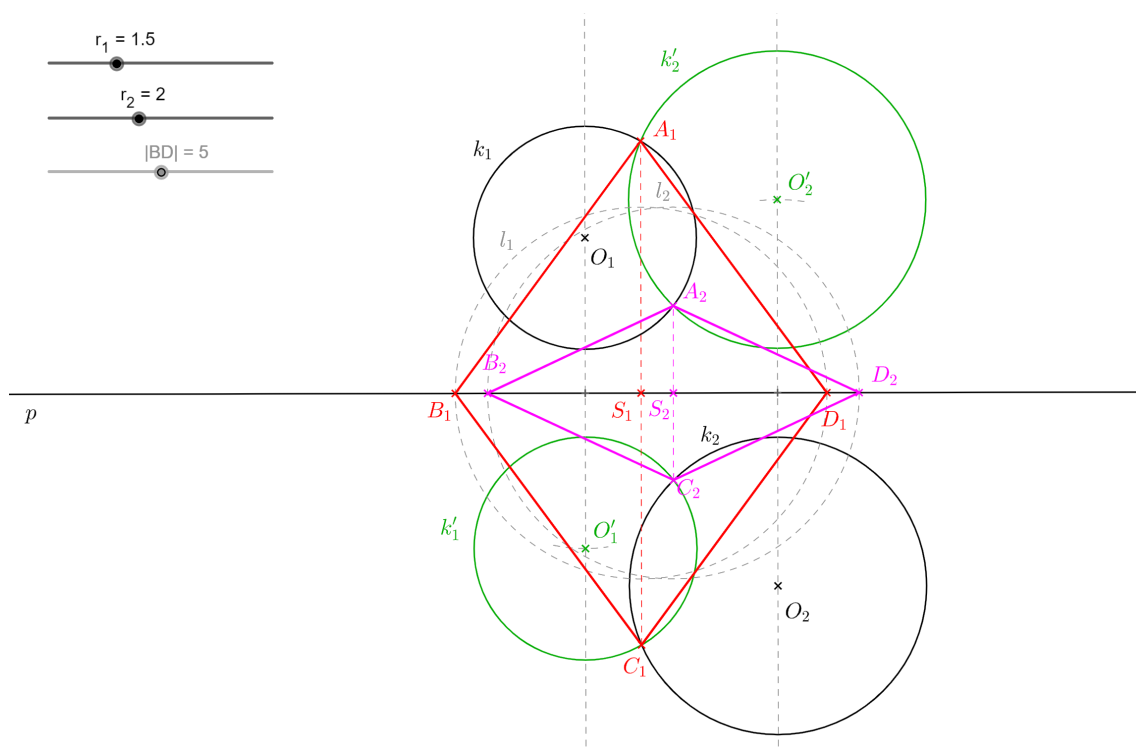
6. $S; S \in p \cap AC$

7. $l; l\left(S; \frac{1}{2}|BD| = 2,5 \text{ cm}\right)$

8. $B, D; \{B, D\} \in l \cap p$

9. kosoútvorec $ABCD$

Konstrukce:



Obr. 3.2.1-3 Konstrukce kosoútvorce $ABCD$ – 2 řešení

Důkaz: Úloha je řešena s využitím osové souměrnosti s osou souměrnosti p . Z vlastností tohoto zobrazení plyne, že $AC \perp p$, přičemž $|Ap| = |Cp|$. Bod A tedy leží na kružnici k_1 a obrazu kružnice k_2 . Úsečky AD, CD a úsečky AB, CB jsou navzájem souměrné podle osy p . Z vlastností kosoútvorce plyne: $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$, velikosti protějších úhlů jsou shodné, bod S je středem úhlopříček a úhlopříčky jsou na sebe kolmé. Kosoútvorec $ABCD$ splňuje podmínky zadání.

Diskuse: Počet řešení závisí na vzájemné poloze kružnic k_1, k_2 . Úloha má právě dvě řešení, má-li obraz kružnice k_2 v osové souměrnosti s osou p s kružnicí k_1 společně právě dva body

(obr. 3.2.1-3). Má-li obraz kružnice k_2 v tomto zobrazení s kružnicí k_1 společný právě jeden bod, pak úloha má jedno řešení. Je-li průnik obrazu kružnice k_2 v tomto zobrazení s kružnicí k_1 prázdná množina, pak úloha nemá řešení.

Příklad 4

Zadání: Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC (AB je základna), je-li $|AB| = 6\text{ cm}$, $\gamma = 105^\circ$. (Pomykalová, 2006, s. 131)

Postup konstrukce:

Způsob řešení 1

Sestrojíme daný úhel γ .

1. $\sphericalangle XCX'$; $|\sphericalangle XCX'| = 105^\circ$

Hledáme bod A.

2. o ; o je osa $\sphericalangle XCX'$

3. p ; $p \parallel o \wedge |po| = \frac{1}{2}|AB| = 3\text{ cm}$

4. A ; $A \in p \cap \leftrightarrow CX$

Hledáme bod B.

5. B ; $\mathcal{O}(o): A \rightarrow B$

6. $\triangle ABC$

Způsob řešení 2

1. Dáno: $|AB| = 6\text{ cm}$

Hledáme bod C.

2. o ; o je osa úsečky AB

3. $\sphericalangle ABA'$; $|\sphericalangle ABA'| = 105^\circ$

4. p ; $p \perp \leftrightarrow BA' \wedge B \in p$

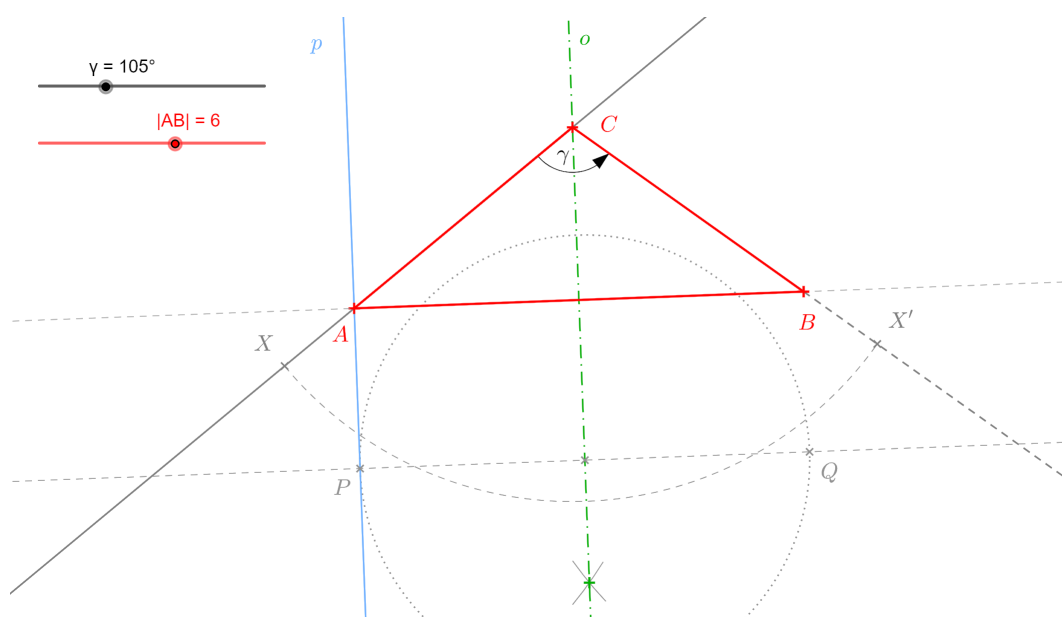
5. S ; $S \in p \cap o$

6. G_{105} ; $G_{105} = \neg BSA$

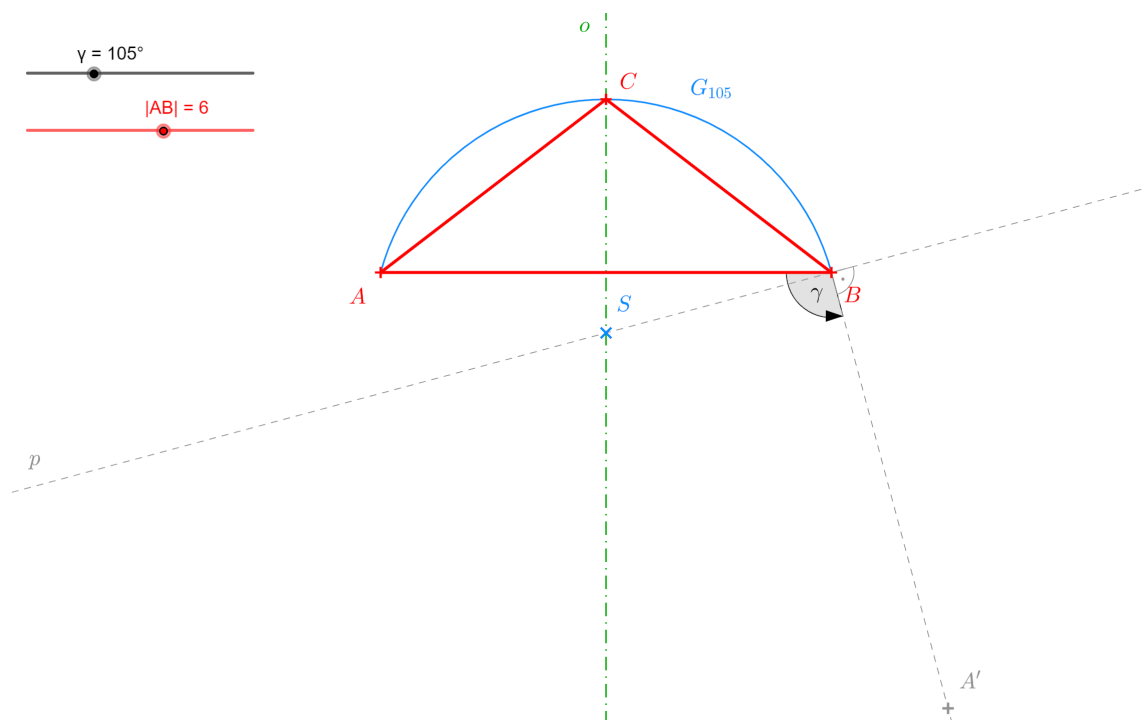
7. C ; $C \in o \cap G_{105}$

8. $\triangle ABC$

Konstrukce:



Obr. 3.2.1-4a Trojúhelník ABC – způsob řešení 1



Obr. 3.2.1-4b Trojúhelník ABC – způsob řešení 2

Důkaz: Úloha je řešena s využitím osové souměrnosti. Z vlastností rovnoramenných trojúhelníků plyne, že osa úsečky AB půlí úhel při vrcholu C . Tato osa o je osou souměrnosti v zobrazení $\mathcal{O}(o)$ a rozděluje rovnoramenný trojúhelník na dva shodné, osově souměrné, pravoúhlé trojúhelníky. Bod C se nachází na ose souměrnosti o a bod B je obrazem bodu A v tomto zobrazení. Trojúhelník ABC splňuje podmínky zadání.

Diskuse: Úloha má v dané polorovině jedno řešení (obr. 3.2.1-4a/b).

Příklad 5

Zadání: Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , je-li dán jejich obvod $o = 12\text{ cm}$ a úhly $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$. (Pomykalová, 2006, s. 130)

Postup konstrukce:

1. Dáno: $o = |C_1C_2| = 12\text{ cm}$

Hledáme bod C .

2. $C'_2; \mathcal{R}\left(C_1; \frac{1}{2}\alpha = 30^\circ\right): C_2 \rightarrow C'_2$

3. $\mapsto C_1C'_2 = q$

4. $C'_1; \mathcal{R}\left(C_2; -\frac{1}{2}\beta = -22,5^\circ\right): C_1 \rightarrow C'_1$

5. $\mapsto C_2C'_1 = p$

6. $C; C \in p \cap q$

Hledáme bod A.

7. o_1 ; o_1 je osa úsečky C_1C

8. A; $A \in o_1 \cap C_1C_2$

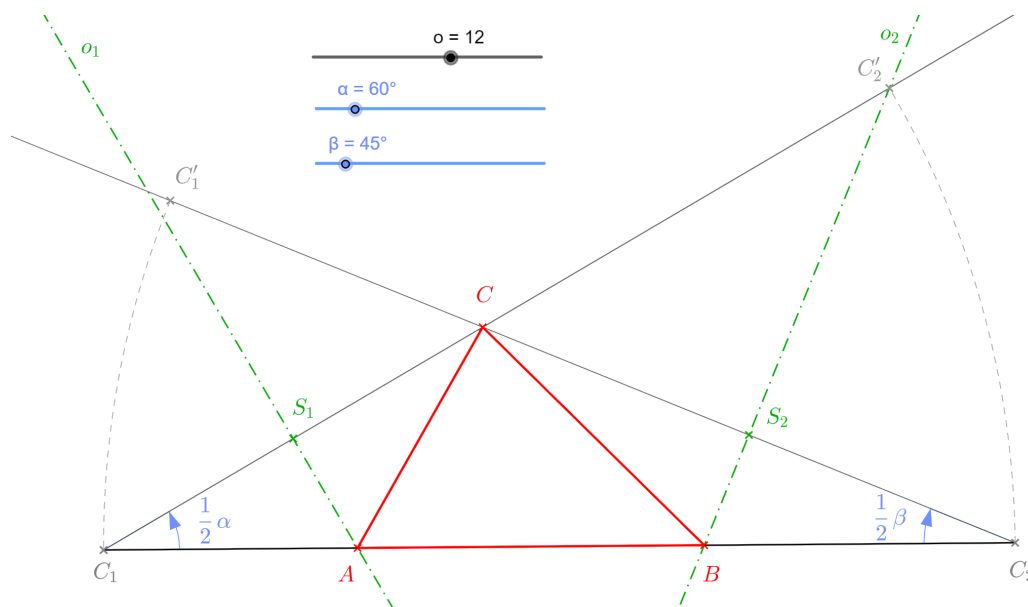
Hledáme bod B.

9. o_2 ; o_2 je osa úsečky CC_2

10. B; $B \in o_2 \cap C_1C_2$

11. $\triangle ABC$

Konstrukce:



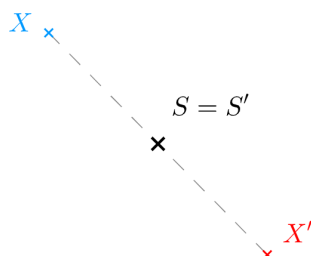
Obr. 3.2.1-5 Trojúhelník **ABC**

Důkaz: Řešení úlohy plyne z vlastnosti osové souměrnosti. Trojúhelníky C_1AC a C_2BC jsou rovnoramenné. Z definice plyne, že osa úsečky C_1C je osou souměrnosti v zobrazení $\mathcal{O}(o_1)$: $AC_1 \rightarrow AC$ a osa úsečky CC_2 je osou souměrnosti v zobrazení $\mathcal{O}(o_2)$: $BC_2 \rightarrow BC$.

Diskuse: Úloha má jedno řešení (obr. 3.2.1-5).

3.3 Středová souměrnost

Nechť je dán bod S . Středovou souměrností se středem S (obr. 3.3-1) nazýváme shodné zobrazení $\mathcal{S}(S)$ v rovině, v němž je bod S samodružný a každému bodu $X \neq S$ roviny je přiřazen bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX' . Bod S se nazývá střed souměrnosti. (Molnár, 2001, str. 95)



Obr. 3.3-1 Středová souměrnost

Středová souměrnost je shodnost přímá, zachovávající orientaci. Jednoznačně je určena středem souměrnosti S . Je však jednoznačně určena také dvojicí různých bodů X, X' , jestliže každý z nich je obrazem druhého v této středové souměrnosti. Středem souměrnosti je pak střed úsečky XX' .

Slabě samodružné přímky středové souměrnosti jsou všechny přímky, které procházejí středem souměrnosti S . (Pomykalová, 2006, s. 133)

3.3.1 Řešené konstrukční úlohy

V GeoGebře knize – kapitole Středová souměrnost se nacházejí dynamické konstrukce, postup či rozbor příkladů: <https://www.geogebra.org/m/aavjymj7#chapter/916318>.

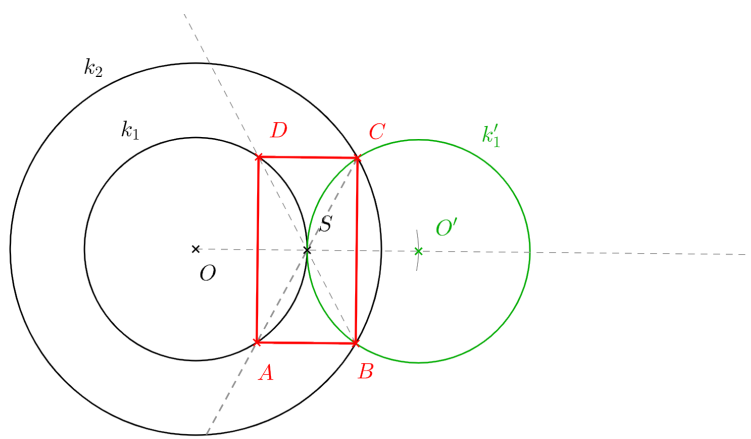
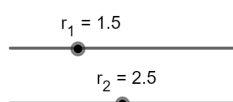
Příklad 1

Zadání: Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(O; r_1)$, $k_2(O; r_2)$, $r_2 > r_1$, a bod S ležící na menší z nich. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ se středem S , jehož vrcholy leží na daných kružnicích. (Pomykalová, 2006, s. 135)

Postup konstrukce:

1. Dáno: $k_1(O; r_1)$, $k_2(O; r_2)$, S
Hledáme body B a C na kružnici k_2 .
2. k'_1 ; $\mathcal{S}(S): k_1(O; r_1) \rightarrow k'_1(O'; r_1)$
3. C, B ; $\{C, B\} = k_2 \cap k'_1$
Hledáme body A a D na kružnici k_1 .
4. A, D ; $\mathcal{S}(S): C \rightarrow A, B \rightarrow D$
5. rovnoběžník $ABCD$

Konstrukce:



Obr. 3.3.1-1 Konstrukce rovnoběžníku $ABCD$

Důkaz: Úloha je řešena s využitím středové souměrnosti, kde středem souměrnosti je bod S . Z definice tohoto zobrazení plyne: $|AS| = |CS|$, $|BS| = |DS|$, tedy bod C leží na průniku kružnice k_2 a obrazu kružnice k_1 v zobrazení $\mathcal{S}(S): A \rightarrow C$ (obdobně bod B). Protější strany čtyřúhelníku jsou rovnoběžné a mají stejnou velikost. Čtyřúhelník $ABCD$ splňuje podmínky zadání.

Diskuse: Počet řešení závisí na poloměru kružnic k_1, k_2 . Je-li $r_1 > \frac{1}{3}r_2$, pak úloha má jedno řešení, kružnice k_2 se protne s obrazem kružnice k_1 ve dvou bodech (obr. 3.3.1-1). Je-li $r_1 = \frac{1}{3}r_2$, kružnice k_2 s obrazem kružnice k_1 má jeden společný bod a výsledkem je úsečka, což neodpovídá zadání. V případě, že by $r_1 < \frac{1}{3}r_2$, pak by kružnice k_2 s obrazem kružnice k_1 neměla žádný společný bod, tudíž by nevznikl žádný rovinný útvar, který by splňoval zadání.

Příklad 2

Zadání: Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod M ($M \notin p, M \notin q$). Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo: $X \in p, Y \in q$ a bod M je střed úsečky XY (Petáková, 2013, s. 79).

Postup konstrukce:

1. Dáno: p, q, M

Hledáme bod X na přímce p .

2. $q'; \mathcal{S}(M): q \rightarrow q'$

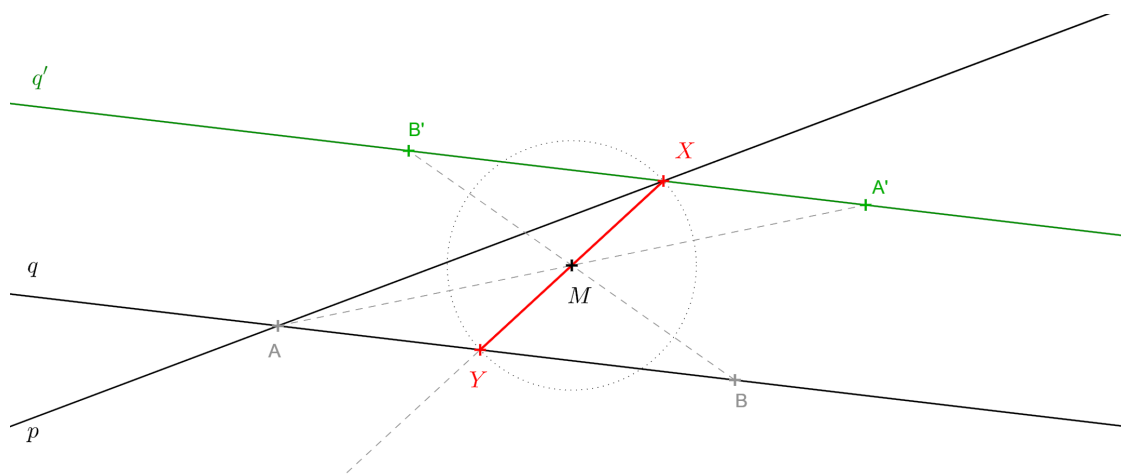
3. $X; X \in p \cap q'$

Hledáme bod Y na přímce q .

4. $Y; \mathcal{S}(M): X \rightarrow Y$

5. XY

Konstrukce:



Obr. 3.3.1-2 Konstrukce úsečky XY

Důkaz: Úloha je řešená s využitím středové souměrnosti se středem souměrnosti M . Dle vlastností středové souměrnosti jsou přímky p , q v tomto zobrazení rovnoběžné se svými obrazy p' , q' v tomto pořadí, tím je zajištěno: $|XM| = |YM|$. Bod X je obrazem bodu Y , který leží na přímce q , proto bod X je průnikem přímky p a obrazu přímky q v zobrazení $\mathcal{S}(M)$.

Diskuse: Úloha má jedno řešení, neboť obraz přímky q protne přímku p v jednom bodě (obr. 3.3.1-2).

Příklad 3

Zadání: Je dána úsečka CS_1 , $|CS_1| = 3 \text{ cm}$. Sestroj trojúhelník ABC , pro který je úsečka CS_1 těžnicí t_c a pro který platí: $a = 3,5 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$. (Petáková, 2013, s. 80)

Postup konstrukce:

1. Dáno: CS_1 ; $|CS_1| = 3 \text{ cm}$

Hledáme bod A.

2. k_1 ; $k_1(C; b = 5 \text{ cm})$

3. C' ; $\mathcal{S}(S_1): C \rightarrow C'$

4. k_2 ; $k_2(C'; a = 3,5 \text{ cm})$

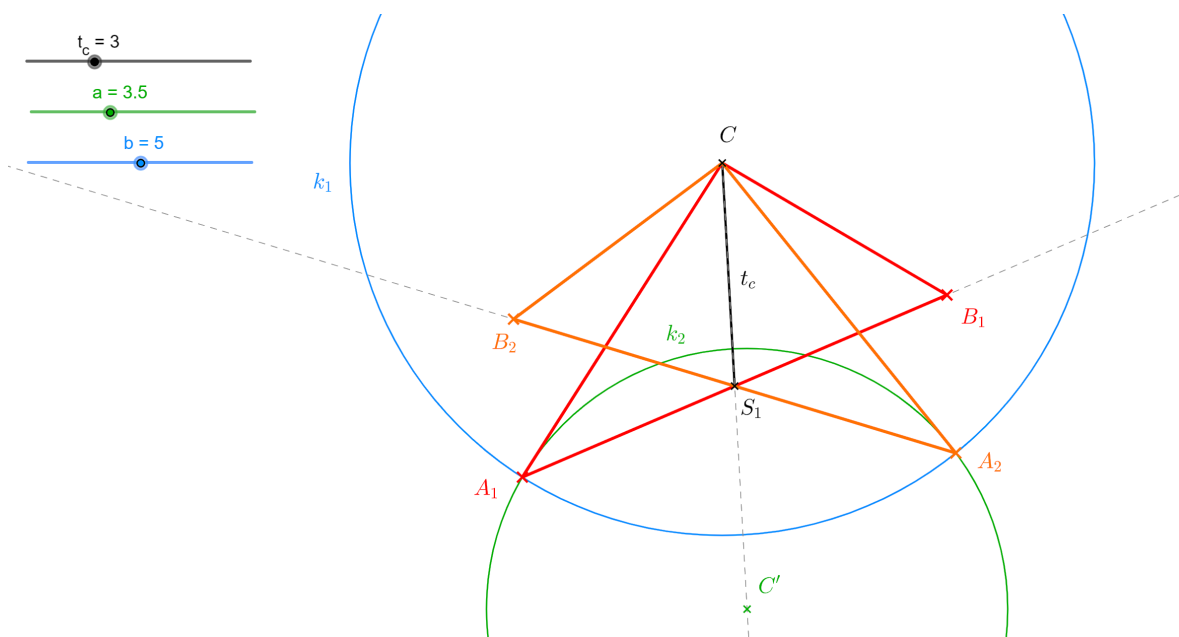
5. A ; $A \in k_1 \cap k_2$

Hledáme bod B.

6. B ; $\mathcal{S}(S_1): A \rightarrow B$

7. $\triangle ABC$

Konstrukce:



Obr. 3.3.1-3 Konstrukce trojúhelníku ABC

Důkaz: Řešení úlohy plyne z vlastností středové souměrnosti se středem souměrnosti S_1 . V tomto shodném zobrazení platí, že $|AS_1| = |BS_1|$, tedy bod B je obrazem bodu A v zobrazení $\mathcal{S}(S_1)$.

Diskuse: Úloha má dvě řešení, neboť kružnice $k_1(C; |CB|)$ a $k_2(C'; |CA|)$ mají společné právě dva body B_1 a B_2 (obr. 3.3.1-3).

Příklad 4

Zadání: Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5 \text{ cm}$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí $b = 6 \text{ cm}$, $\beta = 45^\circ$. (Pomykalová, 2006, s. 135)

Postup konstrukce:

1. Dáno: $t_a = |AA_1| = 5 \text{ cm}$

Hledáme bod B .

2. A' ; $\mathcal{S}(A_1): A \rightarrow A'$

3. k ; $k(A'; b = 6 \text{ cm})$

4. $\sphericalangle AA_1X$; $|\sphericalangle AA_1X| = 45^\circ$

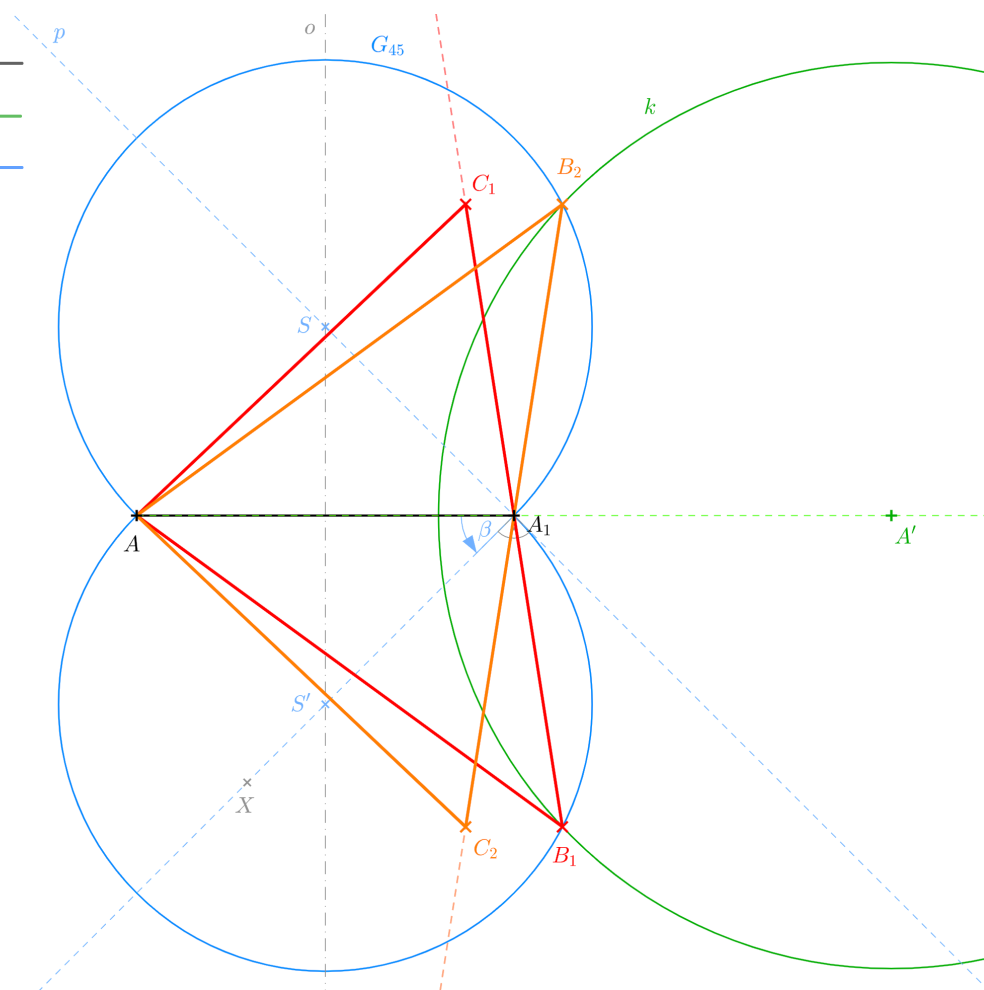
5. p ; $p \perp \mapsto A_1X \wedge A_1 \in p$

6. o ; o je osa AA_1

7. S ; $S \in p \cap o$

8. S' ; $\mathcal{O}(AA_1): S \rightarrow S'$

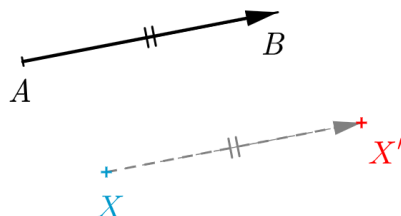
13. $\triangle ABC$



Diskuse: Kružnice $k(A'; b)$ má s množinou G_{45} právě dva společné body (bod B trojúhelníku ABC), tudíž úloha má dvě řešení (obr. 3.3.1-4).

3.4 Posunutí

Je dána nenulová orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$. Posunutí neboli translace (obr. 3.4-1) je shodné zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$ v rovině, které každému bodu X přiřazuje bod X' tak, že orientované úsečky $\overrightarrow{XX'}$ a $\overrightarrow{AB}$ mají stejnou délku a stejný směr.



Obr. 3.4-1 Posunutí

Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ se nazývá vektor posunutí a udává velikost a směr posunutí. Translace je shodnost přímá a zachovává orientaci.

Posunutí určené nulovou orientovanou úsečkou nazýváme identitou. Posunutí určené nenulovou orientovanou úsečkou nemá žádné samodružné body. Slabě samodružné přímky posunutí jsou všechny přímky rovnoběžné s orientovanou úsečkou určující posunutí. (Pomykalová, 2006, s. 139, 140)

3.4.1 Řešené konstrukční úlohy

Dynamické konstrukce jednotlivých úloh, jejich postup či otázky k příkladu 2 můžeme nalézt v GeoGebře knize – kapitole Posunutí. Odkaz zde: <https://www.geogebra.org/m/aavjymj7#chapter/916319>.

Příklad 1

Zadání: Jsou dány přímky $a \parallel b$ a bod M , který leží v rovinném pásu (a, b) . Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek a, b a prochází bodem M . (Pomykalová, 2006, s. 142)

Postup konstrukce:

1. Dáno: a, b, M

Sestrojíme si pomocnou kružnici k' , která bude vzorem kružnice, jež máme sestrojit.

2. $p; p \perp a$
3. $T'; T' \in p \cap a$
4. $T''; T'' \in p \cap b$
5. $S'; S' \in p \wedge |S'T'| = |S'T''|$
6. $k'; k'(S'; |S'T'|)$

Zobrazíme si bod M do této pomocné kružnice k' .

$$7. m; m \parallel a \wedge M \in m$$

$$8. M'_1, M'_2; \{M'_1, M'_2\} = m \cap k'$$

S využitím posunutí zkonstruujeme kružnice, které procházejí bodem M .

$$9. o; o \parallel a \wedge S' \in o$$

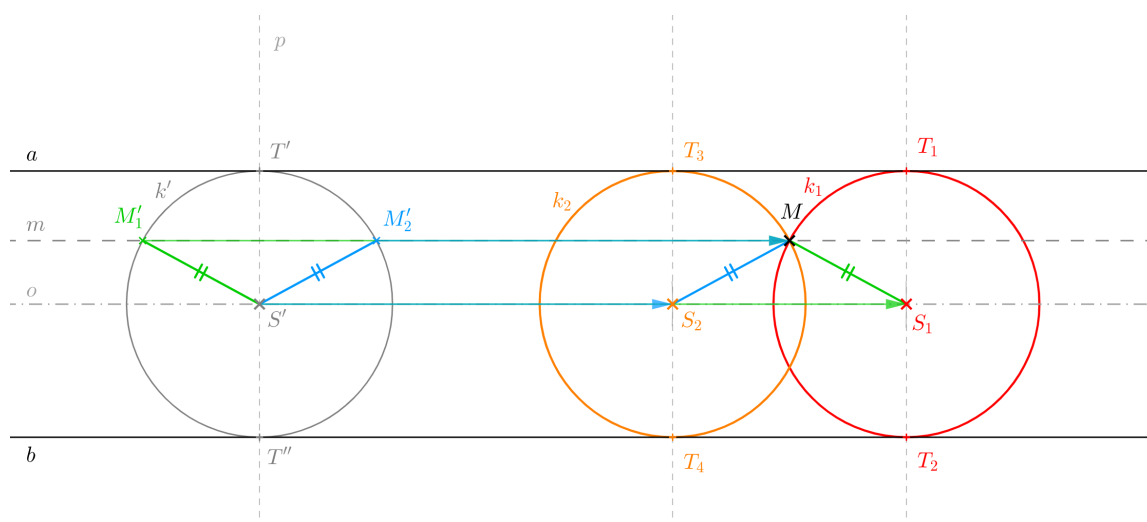
$$10. S_1; \mathcal{T}(\overrightarrow{M'_1 M}): S' \rightarrow S_1$$

$$11. k_1; k_1(S_1; |S_1 M|)$$

$$12. S_2; \mathcal{T}(\overrightarrow{M'_2 M}): S' \rightarrow S_2$$

$$13. k_2; k_2(S_2; |S_2 M|)$$

Konstrukce:



Obr. 3.4.1-1 Konstrukce kružnic

Důkaz: Úloha je řešena s využitím shodného zobrazení v rovině, kterým je posunutí. Kružnice k' je vzorem v zobrazení s vektory posunutí $\overrightarrow{M'_1 M}$ a $\overrightarrow{M'_2 M}$, tedy $\mathcal{T}(\overrightarrow{M'_1 M}): k' \rightarrow k_1$, $\mathcal{T}(\overrightarrow{M'_2 M}): k' \rightarrow k_2$. Úsečky $S'M'_1 \parallel S_1 M$, $S'M'_2 \parallel S_2 M$. Body dotyku T', T_1, T_3 se nacházejí na průsečíku přímky a a přímky kolmé na a procházející středem určité kružnice (obdobně body dotyku T'', T_2, T_4). Kružnice k_1 a k_2 splňují podmínky zadání.

Diskuse: Úloha má dvě řešení, jestliže se bod M nachází uvnitř rovinného pásu (a, b) (obr. 3.4.1-1). Leží-li bod M na jedné ze zadaných rovnoběžných přímek a, b , úloha má právě jedno řešení, bod M je bodem dotyku hledané kružnice.

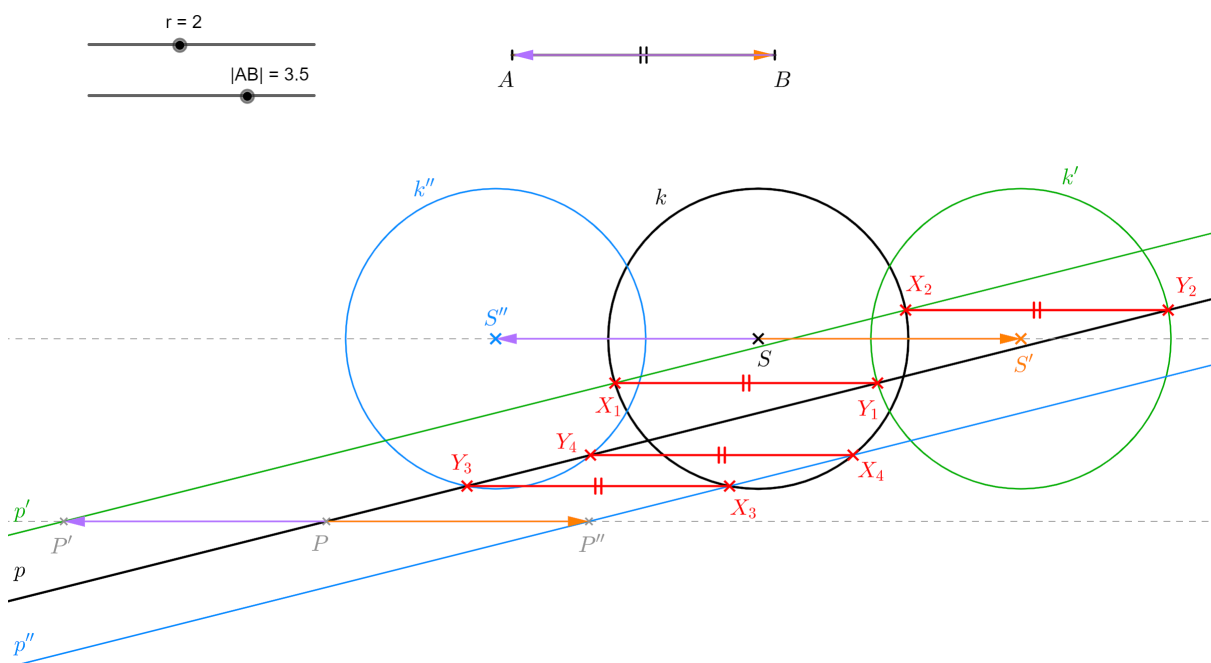
Příklad 2

Zadání: Je dána kružnice k , přímka p a úsečka AB . Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo $X \in k$, $Y \in p$, úsečka XY je rovnoběžná s úsečkou AB . Zvolte postupně vzájemnou polohu kružnice a přímky tak, aby úloha měla 4, resp. 3, resp. 2, resp. 1, resp. 0 řešení. (Petáková, 2013, s. 79)

Postup konstrukce:

1. Dáno: $p, k(S, r), AB$
Hledáme bod Y na přímce p .
2. k' ; $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB}): k \rightarrow k'$ nebo k'' ; $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA}): k \rightarrow k''$
3. Y_1 ; $Y_1 \in p \cap k'$ nebo Y_2 ; $Y_2 \in p \cap k''$
Hledáme bod X na kružnici k .
4. p' ; $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA}): p \rightarrow p'$ nebo p'' ; $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB}): p \rightarrow p''$
5. X_1 ; $X_1 \in k \cap p'$ nebo Y_2 ; $Y_2 \in k \cap p''$
6. XY

Konstrukce:



Obr. 3.4.1-2 Konstrukce úsečky XY – 4 řešení

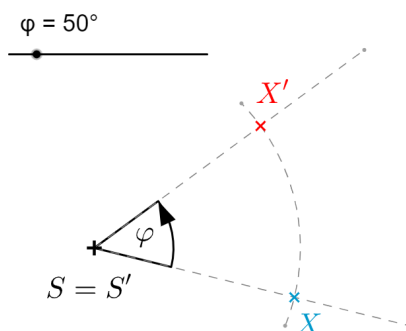
Důkaz: Úloha je řešena s využitím vlastností zobrazení posunutí. Z těchto vlastností plyne, že úsečka AB je orientovanou úsečkou zobrazení, která udává velikost a směr posunutí. Úsečky AB, X_iY_i ($i = 1, 2, 3, 4$) jsou navzájem rovnoběžné a mají stejnou velikost. Body X_1, X_2

se nacházejí na kružnici k a obrazu přímky p v zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$ a body Y_1, Y_2 se nacházejí na přímce p a obrazu kružnice k v zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$. Úsečky $X_i Y_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) splňují podmínky zadání.

Diskuse: Počet řešení závisí na poloze přímky p a kružnice k . Úloha má čtyři řešení, mají-li kružnice k s přímkou p právě dva společné a zároveň obrazy přímky p s vektory posunutí $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$ jsou sečnami kružnice k (obr. 3.4.1-2). Úloha má tři řešení, jestliže má kružnice k s přímkou p právě dva společné body a zároveň obraz přímky p s vektorem posunutí $\overrightarrow{BA}$ je tečnou kružnice k a obraz přímky p s vektorem posunutí $\overrightarrow{AB}$ je sečnou kružnice k , nebo i naopak. Má-li obraz přímky p v zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$ právě dva společné body s kružnicí k a obraz přímky p v zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$ nemá s kružnicí k žádný společný bod, pak má úloha dvě řešení. Úloha má také dvě řešení právě tehdy, je-li $k \cap p = 2$ a $p \parallel AB$. Je-li přímka p tečnou obrazu kružnice k v zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$ a průnikem kružnice k s obrazem přímky p v zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$ je prázdná množina, pak má úloha jedno řešení. Jestliže kružnice k nemá s obrazem přímky p jak v zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$ tak v zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$ společný žádný bod, úloha nemá řešení.

3.5 Otočení

Je dán bod S a orientovaný úhel, jehož velikost je φ . Otočení neboli rotace kolem středu S (obr. 3.5-2) je shodné zobrazení $\mathcal{R}(S, \varphi)$ v rovině, v němž je bod S samodružný. Toto zobrazení přiřazuje každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel $\widehat{XSX'}$ má velikost φ . Bod S se nazývá střed otočení a orientovaný úhel o velikost φ se nazývá úhel otočení. (Pomykalová, 2006, s. 147, 148)



Obr. 3.5-2 Otočení

Otočení je shodné zobrazení zachovávající orientaci, tzn. shodnost přímá. Z definice tohoto shodného zobrazení v rovině plyne, že je jednoznačně určeno středem otočení S , velikostí úhlu otočení φ a daným smyslem otočení. (Polák, 2012, str. 466)

Speciálním případem otočení je středová souměrnost se středem S , tj. $\varphi = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$. V případě, že $\varphi = k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, je zobrazení identitou. Otočení, které není středová souměrnost, nemá samodružné přímky. (Pomykalová, 2006, s. 148)

3.5.1 Řešené konstrukční úlohy

Odkazem <https://www.geogebra.org/m/aavjymj7#chapter/916320> se dostaneme do GeoGebry knihy – kapitoly Otočení, kde se nachází dynamické konstrukce úloh a jejich postup nebo otázky k příkladu 2.

Příklad 1

Zadání: Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a , b a mimo ně bod C . Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A , B ležely po řadě na přímkách a , b . (Pomykalová, 2006, s. 149)

Postup konstrukce:

1. Dáno: a , b , C

Hledáme bod B na přímce b .

2. a' ; $\mathcal{R}(C; 60^\circ): a \rightarrow a'$ nebo a'' ; $\mathcal{R}(C; -60^\circ): a \rightarrow a''$

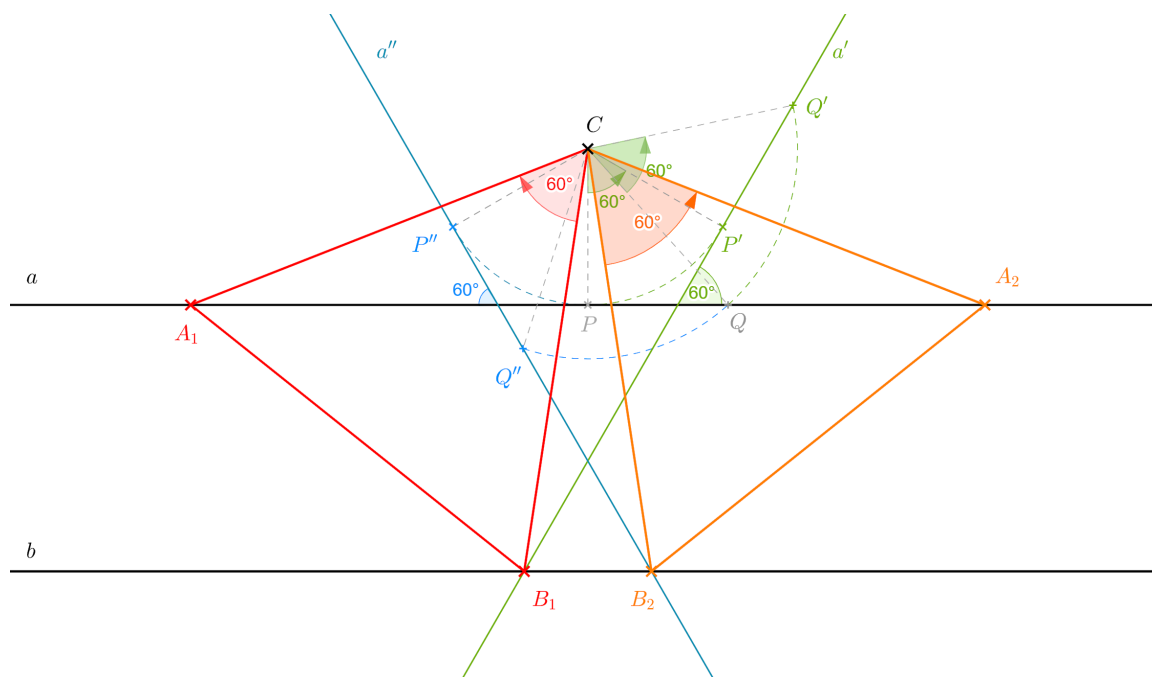
3. $B_1; B_1 \in b \cap a'$ nebo $B_2; B_2 \in b \cap a''$

Hledáme bod A na přímce a .

4. $A_1; \mathcal{R}(C; -60^\circ): B_1 \rightarrow A_1$ nebo $A_2; \mathcal{R}(C; 60^\circ): B_2 \rightarrow A_2$

5. $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$

Konstrukce:



Obr. 3.5.1-1 Konstrukce trojúhelníku ABC

Důkaz: Úloha je řešena s využitím vlastností otočení, kde středem otočení je bod C a úhel otočení má velikost 60° (úhel každého vnitřního úhlu v rovnostranném trojúhelníku je 60°). V tomto zobrazení je obrazem bodu A_1 bod B_1 a obrazem přímky a přímka a' , proto bod $B_1 \in a' \cap b$. Podmínky zadání jsou splněny.

Diskuse: Úloha má dvě řešení (obr. 3.5.1-1), neboť přímku a můžeme otočit v kladném i záporném smyslu. V případě, že by přímky a, b byly totožné, úloha by měla jedno řešení (základna AB by ležela na přímce a , resp. b).

Příklad 2

Zadání: Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod M ($M \notin p, M \notin q$). Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo $X \in p, Y \in q, |\sphericalangle XMY| = 60^\circ, |MX| = |MY|$. Zvolte postupně vzájemnou polohu přímek p, q tak, aby úloha měla 2, resp. 1, resp. 0 řešení. Při jaké vzájemné poloze p, q, M má úloha nekonečně mnoho řešení? (Petáková, 2013, s. 79)

Postup konstrukce:

1. Dáno: p, q, M

Hledáme bod X na přímce p .

2. q' ; $\mathcal{R}(M, +60^\circ): q \rightarrow q'$ nebo q'' ; $\mathcal{R}(M, -60^\circ): q \rightarrow q''$

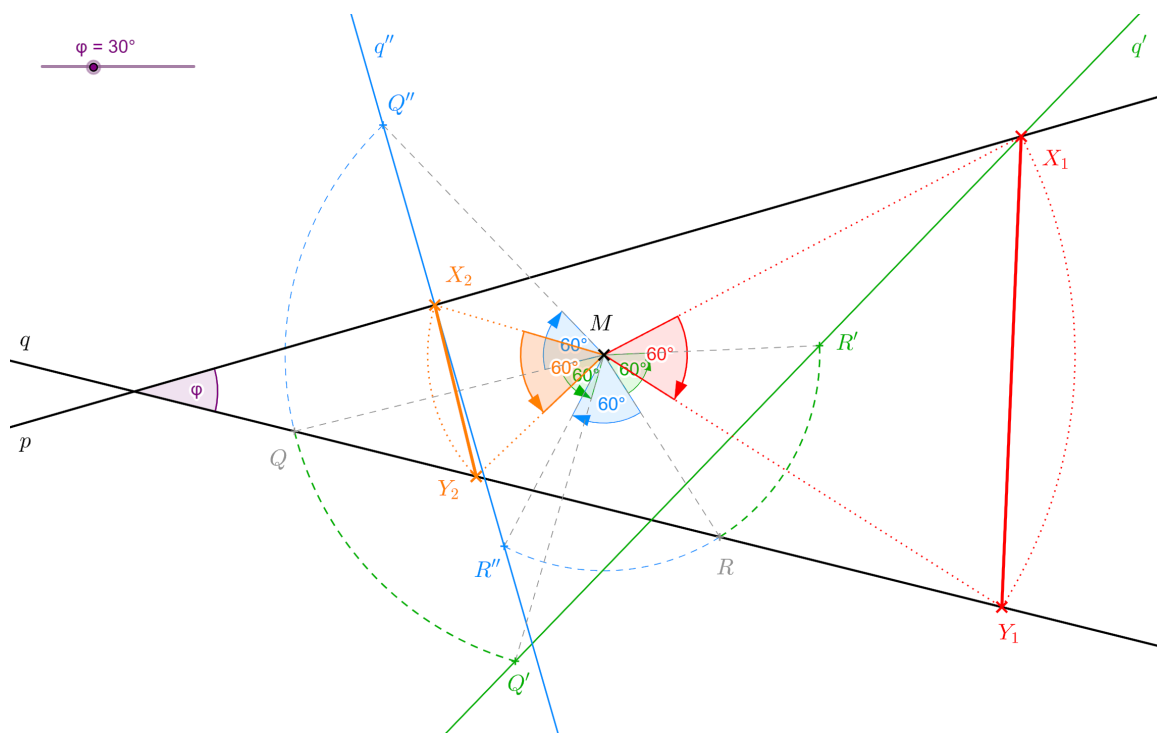
3. X_1 ; $X_1 \in p \cap q'$ nebo X_2 ; $X_2 \in p \cap q''$

Hledáme bod Y na přímce q .

4. Y_1 ; $\mathcal{R}(M, -60^\circ): X_1 \rightarrow Y_1$ nebo Y_2 ; $\mathcal{R}(M, +60^\circ): X_2 \rightarrow Y_2$

5. X_1Y_1 nebo X_2Y_2

Konstrukce:



Obr. 3.5.1-2 Konstrukce úsečky XY – 2 řešení

Důkaz: Řešení plyne z vlastností rotace. V této úloze je středem otočení bod M a úhlem otočení $\pm 60^\circ$. Vobrazení $\mathcal{R}(M, 60^\circ)$ je bod X obrazem bodu Y . Proto přímce p , na níž má ležet bod A , v tomtoobrazení otočíme. Bod Y je pak průsečíkem obrazu přímky p v tomtoobrazení a přímky q , na níž má dle zadání ležet. Úsečka XY splňuje podmínky zadání.

Diskuse: Počet řešení úlohy závisí na velikosti konvexního úhlu svírající různoběžky p, q a na poloze bodu M . Úloha má dvě řešení, právě když velikost konvexního úhlu přímek p, q se ne rovná 60° , tj. $|\sphericalangle pq| \neq 60^\circ$ (obr. 3.5.1-2). Má-li konvexní úhel přímek p, q velikost právě 60° , tj. $|\sphericalangle pq| = 60^\circ$, úloha má jedno řešení. Pokud by bod M byl průsečíkem přímek p, q a zároveň $|\sphericalangle pq| = 60^\circ$, pak by úloha měla nekonečně mnoho řešení.

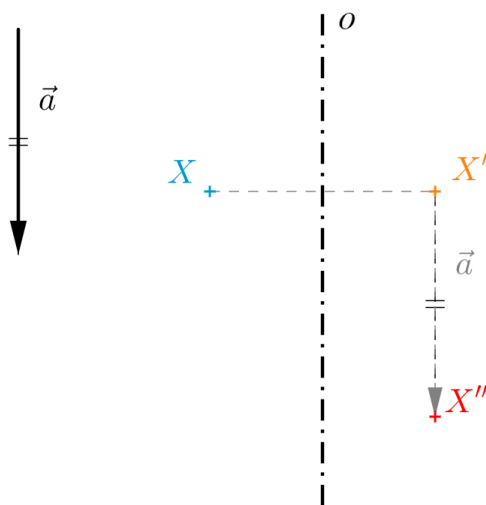
3.6 Skládání shodných zobrazení

Jsou dána dvě shodná zobrazení Z_1, Z_2 a libovolný bod X roviny; $Z_1: X \rightarrow X', Z_2: X' \rightarrow X''$. Zobrazení $Z: X \rightarrow X''$ se nazývá složené zobrazení Z ze zobrazení Z_1, Z_2 v tomto pořadí. Symbolicky zapíšeme $Z = Z_2 \circ Z_1$. (Pomykalová, 2006, s. 153)

Pro skládání shodností platí tyto věty:

1. Složením dvou přímých shodností nebo dvou nepřímých shodností vznikne shodnost přímá. Složením přímé a nepřímé shodnosti dostaneme shodnost nepřímou.
2. Každou přímou shodnost lze složit ze dvou osových souměrností. Každá nepřímá shodnost je buď osová souměrnost, anebo zobrazení složené ze tří osových souměrností (resp. z osové souměrnosti a posunutí podél její osy).

Shodné zobrazení v rovině vzniklé složením osové souměrnosti a posunutím podél této osy se nazývá posunutá souměrnost **Ps**, resp. posunuté zrcadlení (obr. 3.6-1). Lze ji získat také složením středové souměrnosti a osové souměrnosti, jejíž osa neprochází středem souměrnosti. Posunutá souměrnost nemá žádné samodružné body. (Polák, 2012, s. 467)



Obr. 3.6-1 Posunutá souměrnost

4 Podobná zobrazení v rovině

Než si nadefinujeme samotné podobné zobrazení v rovině, zaměříme se nejprve na kapitolu stejnohlé zobrazení. To s podobným zobrazením úzce souvisí. Uvedeme si příklady související se stejnohlostí a jejich řešení.

4.1 Stejnohlost

V geometrických zobrazeních v rovině neexistují pouze shodná zobrazení, ve kterých je obrazem úsečky úsečka s ní shodná. Ale existují také zobrazení, která přiřazují k sobě jako vzor a obraz úsečky o nestejné velikosti. Přitom poměr délek úseček, obrazu a vzoru je konstantní.

Je dán bod S a reálné číslo λ ($\lambda \neq 0$). Stejnohlost neboli homotetie se středem S a koeficientem stejnohlosti λ je zobrazení $\mathcal{H}(S, \lambda)$, které přiřazuje:

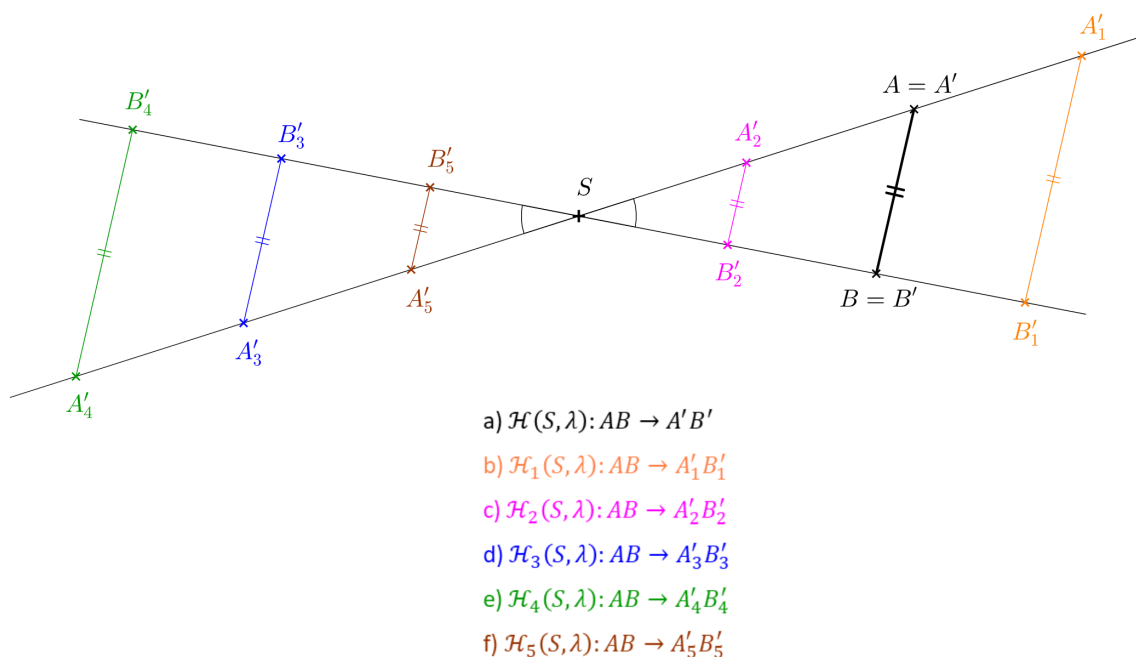
- každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že platí $|SX'| = |\lambda| \cdot |SX|$; přitom pro $\lambda > 0$ leží bod X' na polopřímce $\mapsto SX$, pro $\lambda < 0$ je bod X' bodem opačné polopřímky,
- bodu S bod $S' = S$.

Je-li X vzor a X' jeho obraz ve stejnohlosti $\mathcal{H}(S, \lambda)$, píšeme $\mathcal{H}(S, \lambda): X \rightarrow X'$. O útvarcích U, U' , pro něž platí $\mathcal{H}(S, \lambda): U \rightarrow U'$ říkáme, že jsou stejnohlé. (*Pomykalová, 2006, s. 160, 161*)

Ukažme si stejnohlost $\mathcal{H}(S, \lambda)$ na příkladu úsečky AB (obr. 4.1-1): Jestliže je dána úsečka AB a bod S jako střed stejnohlosti, pak pro obrazy této úsečky platí:

- a) je-li $\lambda = 1$, pak každý bod úsečky AB je samodružný; zobrazení je identita,
- b) je-li $\lambda > 1$, pak obraz A'_1 bodu A úsečky AB leží na polopřímce $\mapsto SA$ a zároveň platí $|SA'_1| > |SA|$; obdobně pro bod B ,
- c) je-li $\lambda \in (0, 1)$, pak obraz A'_2 bodu A úsečky AB leží na polopřímce $\mapsto SA$ a zároveň platí $|SA'_2| < |SA|$; obdobně pro bod B ,
- d) je-li $\lambda = -1$, pak je zobrazení středovou souměrností se středem S ,
- e) je-li $\lambda < -1$, pak obraz A'_4 bodu A úsečky AB leží na polopřímce opačné k $\mapsto SA$ a zároveň platí $|SA'_4| > |SA|$; obdobně pro bod B ,
- f) je-li $\lambda \in (-1, 0)$, pak obraz A'_5 bodu A úsečky AB leží na polopřímce opačné k $\mapsto SA$ a zároveň platí $|SA'_5| < |SA|$; obdobně pro bod B ,
- g) jsou rovnoběžné s úsečkou AB ,

- h) jsou souhlasně orientovány ve stejnolehlosti s kladným koeficientem ($\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$) a opačně orientovány se záporným koeficientem shodnosti ($\mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_4$, $\mathcal{H}_5$).

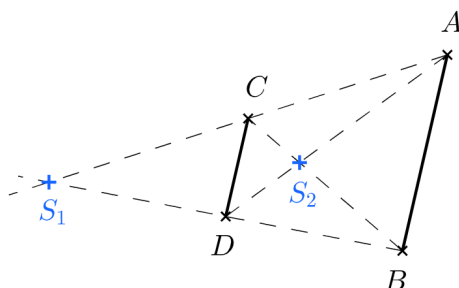


Obr. 4.1-1 Stejnolehle zobrazení úsečky AB

Stejnolehlost zachovává velikost úhlů. Jediným samodružným bodem ve stejnolehlosti, která není identitou, je střed stejnolehlosti. Slabě samodružné přímky jsou všechny přímky, které procházejí středem stejnolehlosti.

Z definice plyne, že stejnolehlost je jednoznačně určena svým středem S a koeficientem stejnolehlosti λ . Může však být také dána středem S a dvojicí bodů: vzoru $A \neq S$ a jeho obrazu $A' \neq S$. Snadno pak sestojíme ke každému bodu $X \neq S$ jeho obraz X' , který musí ležet na přímce $\leftrightarrow SX$ a na přímce vedené bodem A' rovnoběžné s přímkou $\leftrightarrow AX$. (Pomykalová, 2006, s. 162, 163)

Nechť jsou dány dvě rovnoběžné úsečky různých délek, pak existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí jednu úsečku na druhou.



Obr. 4.1-2 Stejnolehlost dána dvěma rovnoběžnými úsečkami

Je-li úsečka CD obrazem úsečky AB (obr. 4.1-2), pak pro stejnoolehlost se středem S_1 je koeficient $\lambda_1 = \frac{|CD|}{|AB|}$ a pro stejnoolehlost se středem S_2 je koeficient $\lambda_2 = -\frac{|CD|}{|AB|}$. Bod S_1 se nazývá vnější střed stejnoolehlosti a bod S_2 se nazývá vnitřní střed stejnoolehlosti. (Pomykalová, 2006, s. 165)

Ke každé stejnoolehlosti $\mathcal{H}(S, \lambda)$ existuje stejnoolehlost $\mathcal{H}\left(S, \frac{1}{\lambda}\right)$, která zobrazuje obrazy v původní stejnoolehlosti zpět na jejich vzory. Obě stejnoolehlosti nazýváme navzájem inverzní. (Kadleček, 1996, s. 101)

4.1.1 Řešené konstrukční úlohy

Dynamické konstrukce příkladů a jejich postup nalezneme v GeoGebře knize – kapitole Stejnoolehlost: <https://www.geogebra.org/m/aavjymj7#chapter/916321>.

Příklad 1

Zadání: Narýsujte středy stejnoolehlosti dvou úseček KL , MN , které leží na jedné přímce. Úsečky KL a MN nemají žádný společný bod. (Petáková, 2013, s. 82)

Postup konstrukce:

1. Dáno: p , $KL \in p$, $MN \in p$

Sestrojíme si pomocný trojúhelník nad úsečkou KL .

2. $\mapsto k$; $|\sphericalangle kp| = \alpha$

3. $\mapsto l$; $|\sphericalangle pl| = \beta$

4. X ; $X \in k \cap l$

5. $\triangle K LX$

K tomuto trojúhelníku sestrojíme podobný trojúhelník nad úsečkou MN .

6. $\mapsto m$; $|\sphericalangle mp| = \alpha$

7. $\mapsto n$; $|\sphericalangle pn| = \beta$

8. Y_1 ; $Y_1 \in m \cap n$

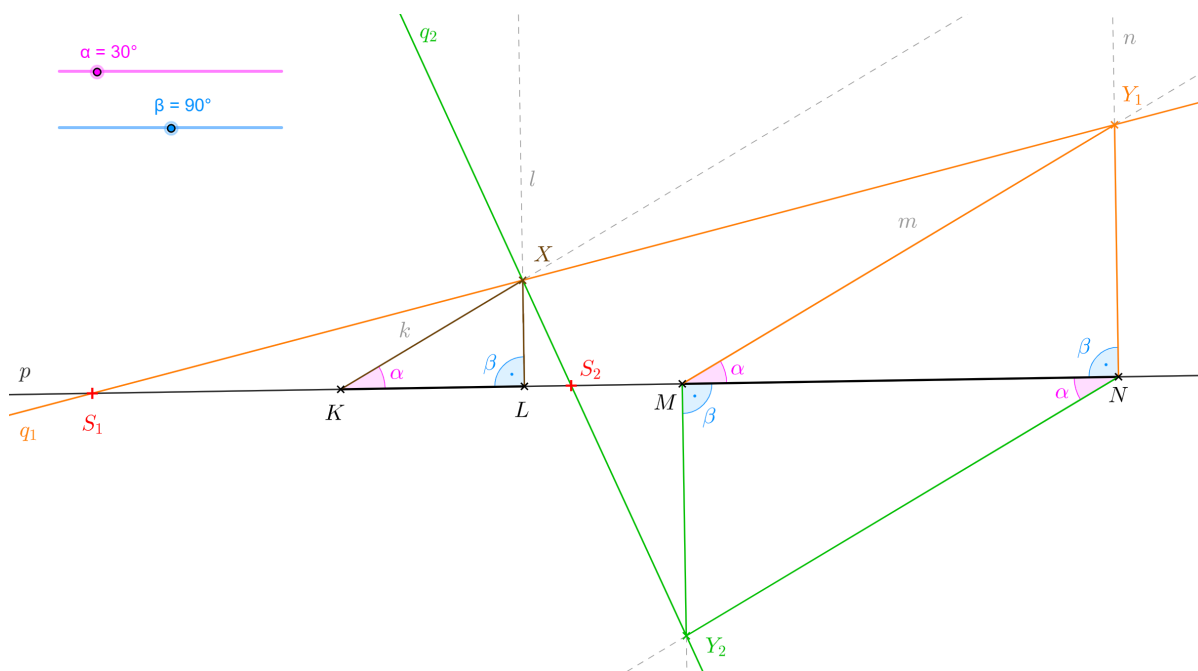
9. $\triangle M N Y_1$; $\triangle M N Y_1 \sim \triangle K LX$

Nyní můžeme najít střed stejnoolehlosti.

10. $\leftrightarrow XY_1 = q_1$

11. S_1 ; $S_1 \in p \cap q_1$

Druhý střed stejnoolehlosti nalezneme obdobně. Pouze $\triangle M N Y_2$ podobný s $\triangle K LX$ sestrojíme pod úsečkou MN . Střed stejnoolehlosti pak leží na průniku přímky p a $\leftrightarrow XY_2$.



Důkaz: Úloha je řešena s využitím stejnohlédého zobrazení. Z vlastností tohoto zobrazení plyne, že $\triangle MNY_1 \sim \triangle K LX$ a $\triangle NMY_2 \sim \triangle K LX$, tedy $KX \parallel MY_1 \parallel NY_2$, $LX \parallel NY_1 \parallel MY_2$, $\frac{|KL|}{|MN|} = \frac{|KX|}{|MY_1|} = \frac{|LX|}{|NY_1|} = \frac{|KX|}{|NY_2|} = \frac{|LX|}{|MY_2|}$. Střed y stejnohlédosti se nacházejí mimo zadané úsečky KL a MN .

Příklad 2

Postup konstrukce:

1. Dáno: $k_1(O_1; 3,5 \text{ cm})$, $k_2(O_2; 1,5 \text{ cm})$, $|O_1O_2| = 6 \text{ cm}$
 Nejprve hledáme střed stejnolehlosti daných kružnic.
2. $\leftrightarrow O_1O_2 = o$
3. X_1Y_1 ; $O_1 \in X_1Y_1 \wedge \{X_1, Y_1\} \in k_1 \wedge \{X_1, Y_1\} \notin o$
4. X_2Y_2 ; $X_2Y_2 \parallel X_1Y_1 \wedge O_2 \in X_2Y_2 \wedge \{X_2, Y_2\} \in k_2$
5. $\leftrightarrow X_1X_2$
6. S_1 ; $S_1 \in o \cap \leftrightarrow X_1X_2$

Pomocí Thaletovy kružnice sestrojíme body dotyku tečen kružnic.

7. $A; |AS_1| = |AO_1|$

8. $\tau_A; \tau_A(A; |AO_1|)$

9. $T_1, T_2; \{T_1, T_2\} = \tau_A \cap k_1$

10. $B; |BS_1| = |BO_2|$

11. $\tau_B; \tau_B(B; |BO_2|)$

12. $T_3, T_4; \{T_3, T_4\} = \tau_B \cap k_2$

Nyní již sestrojíme tečny kružnic.

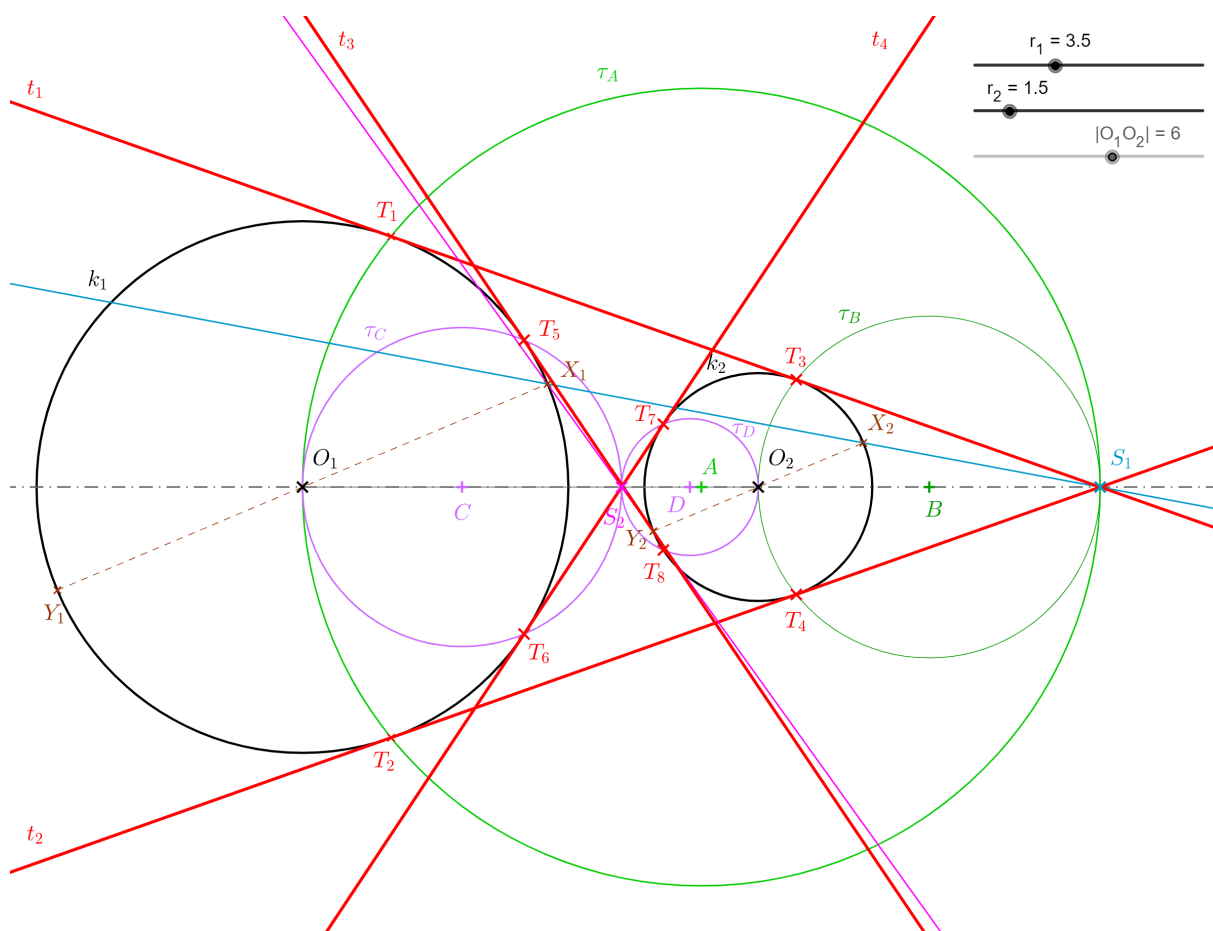
13. $\leftrightarrow T_1T_3 = t_1$

14. $\leftrightarrow T_2T_4 = t_2$

Další dvě tečny sestrojíme obdobným postupem, ale se středem stejnolehlosti S_2 .

$S_1 \in o \cap \leftrightarrow X_1Y_2$

Konstrukce:



Obr. 4.1.1-2 Konstrukce tečen kružnic k_1, k_2

Důkaz: Úloha je řešena s využitím stejnolehlosti dvou kružnic. Body S_1, S_2 jsou středy stejnolehlosti a kružnice k_1 je obrazem kružnice k_2 s koeficientem $\lambda = \frac{3,5}{1,5} = \frac{7}{3}$. Pro tečny kružnic platí: $t_1 \perp \{O_1T_1; O_2T_3\}, t_2 \perp \{O_1T_2; O_2T_4\}, t_3 \perp \{O_1T_5; O_2T_8\}, t_4 \perp \{O_1T_6; O_2T_7\}$.

Diskuse: Úloha má čtyři řešení (obr. 4.1.1-2). V případě, že by kružnice k_1 a k_2 měly společný jeden bod (vnější dotyk), tj. $|O_1O_2| = 5$ cm, úloha by měla tři řešení, neboť tento společný bod by byl bodem dotyku obou kružnic a tečna by byla kolmá na osu o . Pokud by kružnice k_1 a k_2 měly jeden společný bod (vnitřní dotyk), tj. $|O_1O_2| = 2$ cm, úloha by měla právě jedno řešení. Tento bod je jediný bod dotyku, kterým je vedena společná tečna kružnic. Tečna pak prochází tímto bodem a je kolmá na osu o . V případě, že by kružnice k_2 ležela uvnitř kružnice k_1 a tyto kružnice neměly žádný společný bod ($|O_1O_2| < 2$ cm), pak by úloha neměla řešení.

Příklad 3

Zadání: Je dán čtverec $ABCD$ ($|AB| = 4$ cm). Uvnitř čtverce zvolte bod M , pro který platí: $|CM| = 3$ cm, $|BM| = 1,5$ cm. Sestrojte všechny úsečky XY tak, aby body X, Y ležely na obvodu čtverce a aby platilo: $|MX| : |MY| = 3 : 2$. (Petáková, 2013, s. 83)

Postup konstrukce:

1. Dáno: $\square ABCD, M$

Hledáme bod X .

2. $\square A'B'C'D'; \mathcal{H}\left(M; -\frac{3}{2}\right): ABCD \rightarrow A'B'C'D'$

3. $X; X \in ABCD \cap A'B'C'D'$

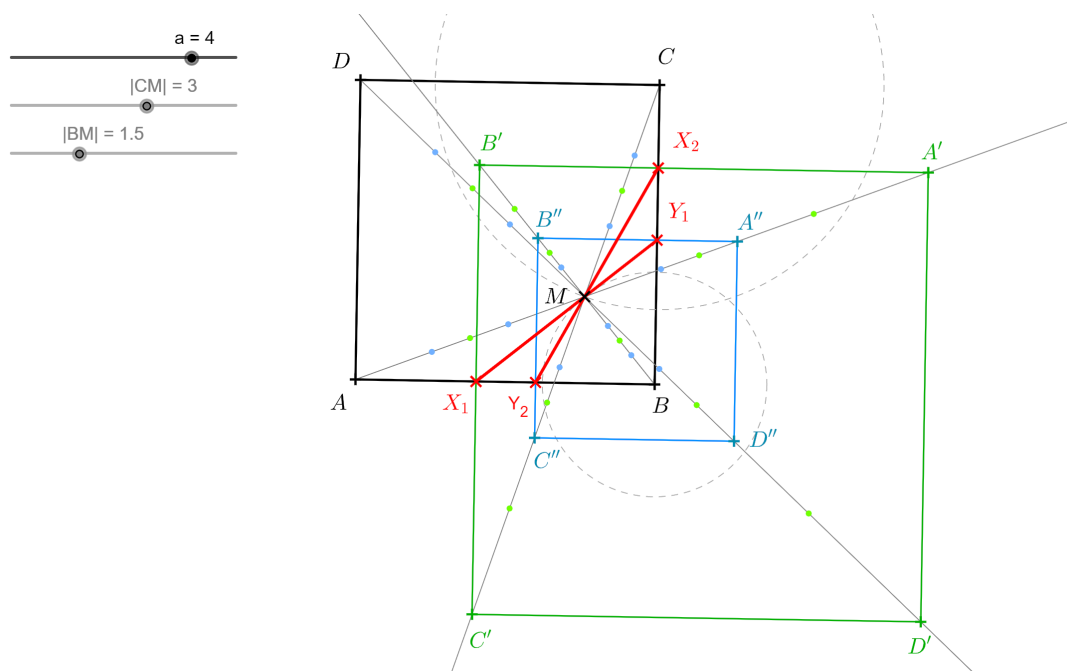
Hledáme bod Y .

4. $\square A''B''C''D''; \mathcal{H}\left(M; -\frac{2}{3}\right): ABCD \rightarrow A''B''C''D''$

5. $Y; Y \in ABCD \cap A''B''C''D''$

6. XY

Konstrukce:



Obr. 4.1.1-3 Konstrukce úsečky XY

Důkaz: Řešení úlohy plyne z vlastností stejnohlédého zobrazení, kde bod M je středem stejnolehlosti. Má-li bod X ležet na obvodu čtverce $ABCD$ a $|MX| : |MY| = 3 : 2$, pak tento bod leží na obrazu tohoto čtverce v tomto stejnohlédém zobrazení s koeficientem $-\frac{3}{2}$ (obdobně bod Y). Úsečky X_1Y_1 a X_2Y_2 splňují podmínky zadání.

Diskuse: Úloha má dvě řešení, neboť obraz čtverce $ABCD$ s jeho vzorem mají právě dva body X_1, X_2 společné (obr. 4.1.1-3).

Příklad 4

Zadání: Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , znáte-li: $a : b = 4 : 5$, $\gamma = 60^\circ$, $v_c = 3$ cm. (Petáková, 2013, s. 83)

Postup konstrukce:

Nejprve sestrojíme pomocný trojúhelník $A'B'C'$ s výškou v'_c , kde $a' = 4$ cm, $b' = 5$ cm, $\gamma = 60^\circ$.

1. a' ; $a' = |B'C'| = 4$ cm
2. $\sphericalangle B'C'X$; $|\sphericalangle B'C'X| = 60^\circ$
3. k ; $k(C'; 5$ cm)
4. A' ; $A' \in k \cap \mapsto C'X$
5. $\triangle A'B'C'$

$$6. p; p \perp A'B' \wedge C' \in p$$

$$7. P'_c; P'_c \in p \cap \leftrightarrow A'B'$$

$$8. v'_c; v'_c = C'P'_c$$

Z vlastností stejnohlého zobrazení sestrojíme podobný trojúhelník ABC s výškou $v_c = 3$ cm.

$$9. l; l(C; 3 \text{ cm})$$

$$10. P_c; P_c \in l \cap p$$

$$11. v_c; v_c = CP_c$$

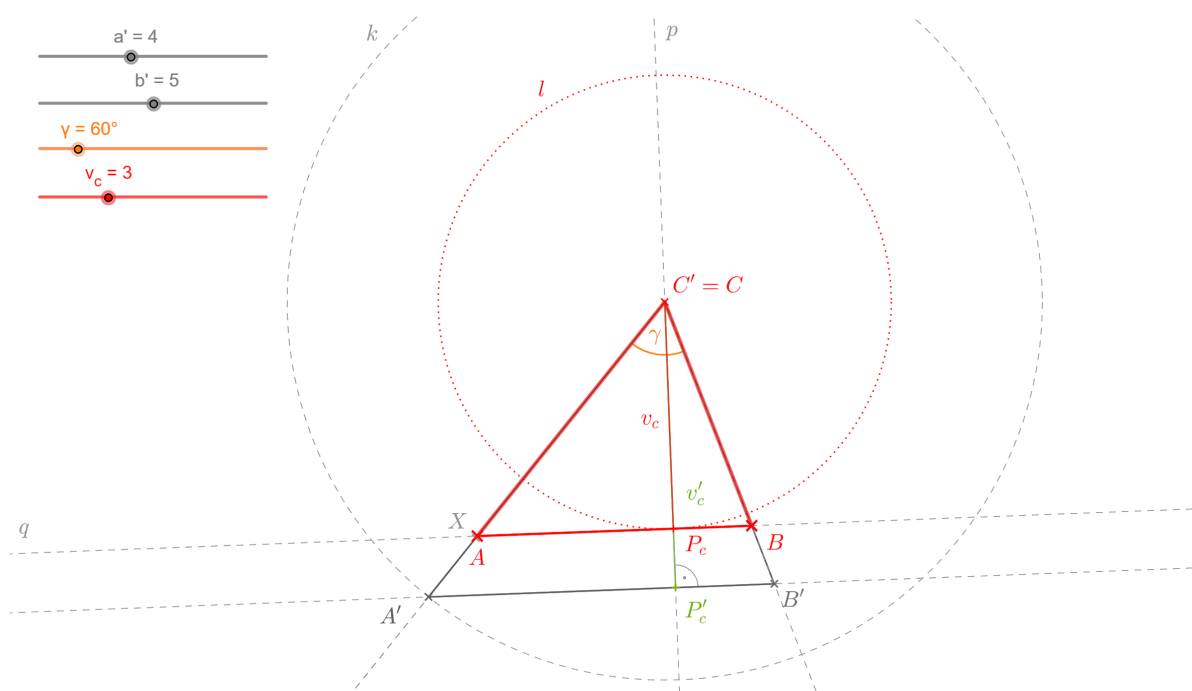
$$12. q; q \parallel \leftrightarrow A'B' \wedge P_c \in q$$

$$13. A; A \in q \cap \rightarrow CA'$$

$$14. B; B \in q \cap \rightarrow CB'$$

$$15. \triangle ABC$$

Konstrukce:



Obr. 4.1.1-4 Konstrukce trojúhelníku ABC

Důkaz: Úloha je řešena s využitím stejnohlého zobrazení se středem stejnolehlosti $C' = C$. Z vlastností tohoto zobrazení plyne, že $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Odpovídající si strany $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ a jejich výšky v_c, v'_c jsou v určitém poměru λ . Velikost úhlu při vrcholu C' trojúhelníka $A'B'C'$ je shodná s velikostí úhlu při vrcholu C trojúhelníka ABC . Trojúhelník ABC splňuje podmínky zadání.

Diskuse: Úloha má v dané polorovině jedno řešení (obr. 4.1.1-4).

4.2 Podobná zobrazení v rovině

Zobrazení Z v rovině nazýváme podobným zobrazením (neboli podobností), právě když každé dvojici bodů X, Y roviny přiřazuje jako obrazy takové body X', Y' , že platí:

$$|X'Y'| = k \cdot |XY|,$$

kde $k > 0$ je daná konstanta zvaná koeficient podobnosti. Symbolem $\sim$ zapisujeme podobnost. (Polák, 2012, str. 468)

Stejnolehlost s koeficientem stejnolehlosti λ je podobnost s koeficientem podobnosti $|\lambda|$. Shodnost je zvláštní případ podobnosti pro $k = 1$. Je-li $k > 1$ představuje podobnost zvětšení, je-li $k \in (0,1)$ představuje zmenšení. (Pomykalová, 2006, s. 180)

V každém podobném zobrazení platí:

- a) obrazem každé úsečky AB v podobnosti s koeficientem k je úsečka $A'B'$ délky $|A'B'| = k \cdot |AB|$,
- b) obrazem každé polopřímky $\mapsto AB$ je polopřímka $\mapsto A'B'$; obrazy navzájem opačných polopřímek jsou navzájem opačné polopřímky,
- c) obrazem každé přímky $\leftrightarrow AB$ je přímka $\leftrightarrow A'B'$; obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky,
- d) obrazem každé poloroviny $\mapsto pA$ je polorovina $\mapsto p'A'$; obrazy navzájem opačných polorovin jsou navzájem opačné poloroviny,
- e) obrazem každého konvexního úhlu $\sphericalangle AVB$ je úhel $\sphericalangle A'V'B'$ s ním shodný,
- f) obrazem každého trojúhelníku $\triangle ABC$ je podobný trojúhelník $\triangle A'B'C'$.

Analogicky jako u shodnosti lze definovat přímou a nepřímou podobnost. Podobné zobrazení zachovávající orientaci (nemění smysl obíhání) se nazývá přímá podobnost. Naopak podobné zobrazení s měnící se orientací (mění smysl obíhání) se nazývá nepřímá podobnost.

Věta o určenosti podobného zobrazení v rovině:

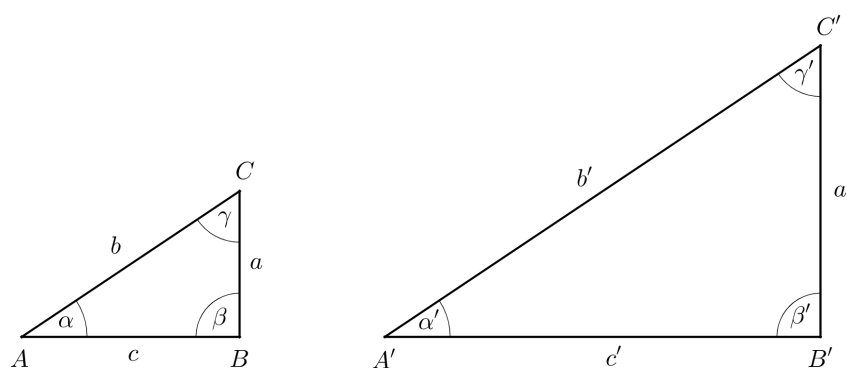
Jsou-li dány dva podobné trojúhelníky $ABC, A'B'C'$, existuje právě jedno podobné zobrazení v rovině, které zobrazuje $A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C'$. (Šedivý, 1963, s. 64)

Podobná zobrazení umožňují definovat pojem podobnosti geometrických útvarů: Dva geometrické útvary U, U' jsou podobné útvary v rovině, právě když existuje podobné zobrazení této roviny na sebe, ve kterém jeden z útvarů je obrazem druhého. Píšeme pak $U \sim U'$. (Polák, 2012, str. 468)

Složením stejnolehlosti a libovolné shodnosti vzniká podobnost, a naopak každou podobnost lze rozložit ve stejnolehlost a shodnost. (Pomykalová, 2006, s. 183)

Nyní se podívejme blíže na podobnost trojúhelníků a s tím související věty o podobnosti trojúhelníků. Následně pak na řešení příkladu s využitím znalostí podobného zobrazení.

4.2.1 Podobnost trojúhelníků



Obr. 4.2.1-1 Podobné trojúhelníky

Dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ (obr. 4.2.1-1) se nazývají podobné trojúhelníky, právě když existuje takové kladné číslo k , že platí: $a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$, $c' = k \cdot c$ čili

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k.$$

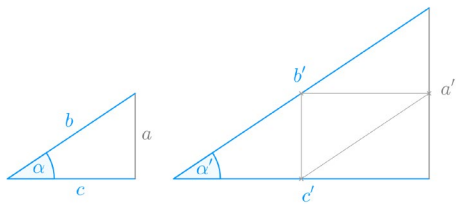
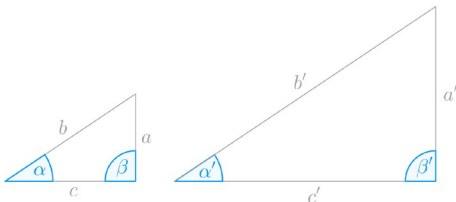
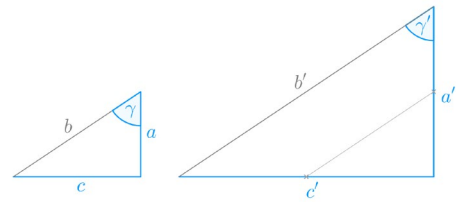
Symbolicky pak píšeme $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Pro podobné trojúhelníky lze na základě definice dokázat větu: V podobných trojúhelnících ABC , $A'B'C'$ jsou odpovídající si úhly shodné a tedy platí: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. (Polák, 2012, str. 436, 137)

Pro ověřování shodnosti trojúhelníku jsme používali věty o shodnosti. Podobně tomu tak bude také pro ověřování podobnosti trojúhelníků (tab. 4.2.1-1).

Tab. 4.2.1-1 Věty o podobnosti trojúhelníků

Typ věty	Definice	Náčrtek a symbolika
Věta sss	Dva trojúhelníky jsou si navzájem podobné, shodují-li se všechny tři poměry velikostí sobě odpovídajících stran.	$a':a = b':b = c':c$

Věta sus	Dva trojúhelníky jsou si navzájem podobné, shodují-li se v jednom úhlu a v poměrech velikostí sobě dvou odpovídajících stran tomuto úhlu přilehlých.	 $\alpha' = \alpha, b':b = c':c$
Věta uu	Dva trojúhelníky si jsou navzájem podobné, shodují-li se ve dvou úhlech.	 $\alpha' = \alpha, \beta' = \beta$
Věta Ssu	Dva trojúhelníky jsou navzájem podobné, shodují-li se poměry velikostí dvou dvojic sobě odpovídajících stran a mají-li oba trojúhelníky stejně velký úhel proti větší z těchto stran.	 je-li $c \geq a$, pak $a':a = c':c, \gamma' = \gamma$

(Kadleček, 1996, str. 77)

4.2.2 Řešené konstrukční úlohy

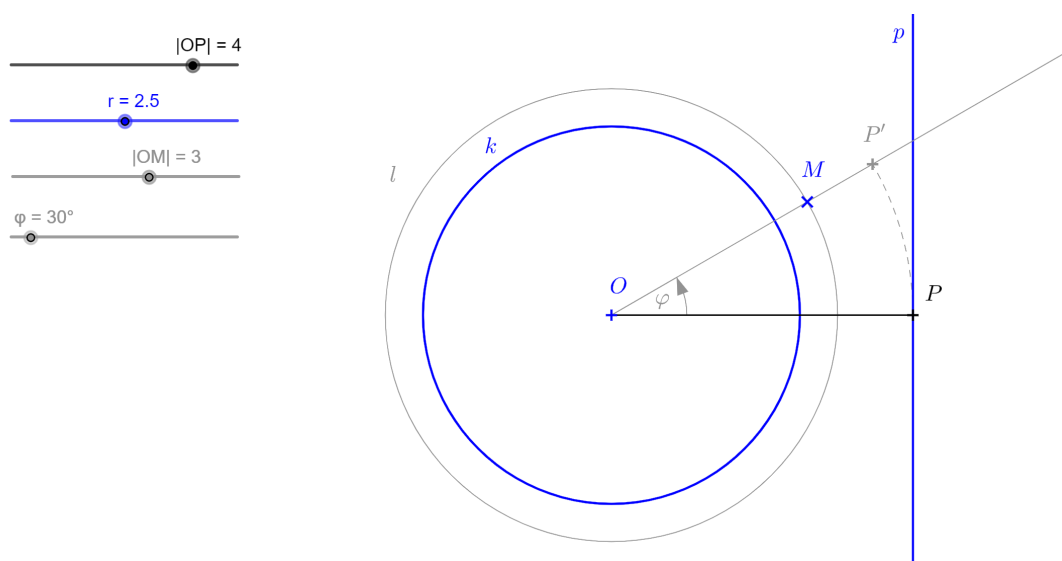
V GeoGebře knize – kapitole Složená zobrazení se nachází dynamické konstrukce příkladů a jejich postup. Odkaz zde: <https://www.geogebra.org/m/aavjymj7#material/jb3umbxg>.

Zadání k příkladu 1: Je dána úsečka OP , $|OP| = 4 \text{ cm}$. Sestrojte kružnici $k(O; 2,5 \text{ cm})$ a přímku p , $p \perp OP \wedge P \in p$. Dále sestrojte jeden bod M , pro který platí $|OM| = 3 \text{ cm}$ a $|\sphericalangle POM| = 30^\circ$. (Petáková, 2013, s. 84)

Postup konstrukce:

1. Dáno: $|OP| = 4 \text{ cm}$
 2. k ; $k(O; 2,5 \text{ cm})$
 3. p ; $p \perp OP \wedge P \in p$
- Hledáme bod M .
4. l ; $l(O; 3 \text{ cm})$
 5. P' ; $\mathcal{R}(O; 30^\circ): P \rightarrow P'$
 6. $\mapsto OP'$
 7. M ; $M \in l \cap \mapsto OP'$

Konstrukce



Obr. 4.2.2-1a Zadání k příkladu 1

Příklad 1

Zadání: Je dána přímka p , kružnice k a bod M . Sestrojte všechny obdélníky $ABCD$ tak, aby platilo $A = M \wedge B \in p \wedge D \in k \wedge |AB| : |BC| = 2 : 1$.

Postup konstrukce:

1. Dáno: p, k, M

Hledáme bod B na přímce p .

2. k' ; $\mathcal{R}(M; -90^\circ): k \rightarrow k'$

3. k'' ; $\mathcal{H}(M; 2): k' \rightarrow k''$

4. $B; B \in p \cap k''$

Hledáme bod D na kružnici k .

5. p' ; $\mathcal{R}(M; 90^\circ): p \rightarrow p'$

6. p'' ; $\mathcal{H}\left(M; \frac{1}{2}\right): p' \rightarrow p''$

7. $D; D \in k \cap p''$

Hledáme bod C .

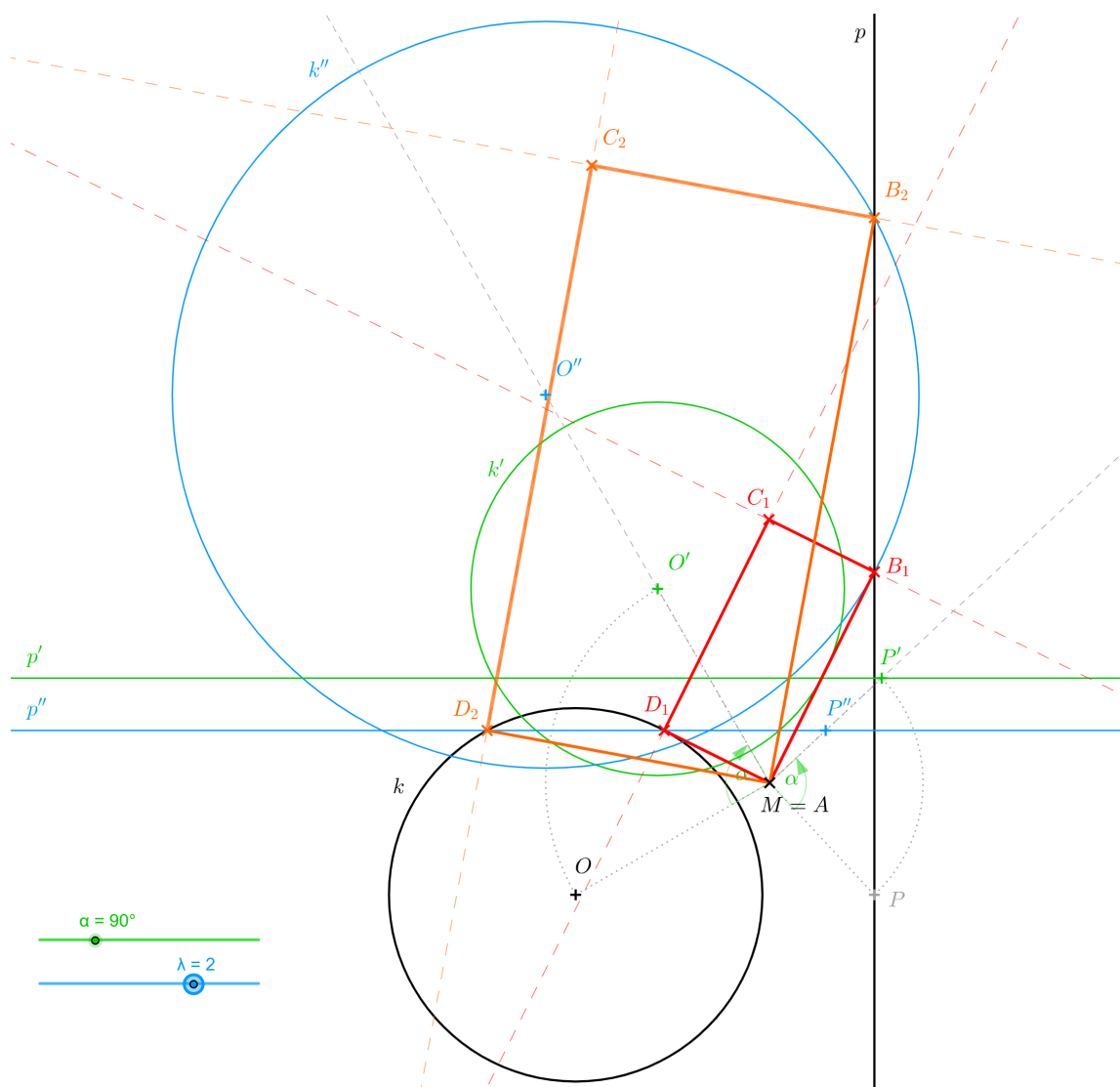
8. $\leftrightarrow BX; \leftrightarrow BX \parallel AD \wedge B \in \leftrightarrow BX$

9. $\leftrightarrow DY; \leftrightarrow DY \parallel AB \wedge D \in \leftrightarrow DY$

10. $C; C \in \leftrightarrow BX \cap \leftrightarrow DY$

11. obdélník $ABCD$

Konstrukce:



Obr. 4.2.2-1b Konstrukce obdélníka $ABCD$

Důkaz: Úloha je řešena s využitím skládání dvou zobrazení, jež jsou otočení a stejnoolehlost. Středem otočení i středem stejnoolehlosti je bod M . Bod B obdélníku $ABCD$ má dle zadání ležet na přímce p a bod D na kružnici k . Proto, že $\sphericalangle DAB$ je pravým úhlem a velikost stran AD a AB mají být v poměru $1 : 2$, bod B musí ležet na obraze k'' kružnice k v zobrazení $\mathcal{R}(M; -90^\circ) \circ \mathcal{H}(M; 2)$, kde $k \rightarrow k''$. Bod B tedy leží na průniku přímky p a obrazu k'' kružnice k v tomto složeném zobrazení. Obdobně bod D , který musí ležet na obraze p'' přímky p v zobrazení $\mathcal{R}(M; 90^\circ) \circ \mathcal{H}(M; \frac{1}{2})$, kde $p \rightarrow p''$. Bod D tedy leží na průniku kružnice k a obrazu p'' přímky p v tomto složeném zobrazení. Obdélník $ABCD$ splňuje podmínky zadání.

Diskuse: Úloha má dvě řešení, neboť obraz kružnice k v zobrazení $\mathcal{R}(M; -90^\circ) \circ \mathcal{H}(M; 2)$ má s přímkou p dva společné body (obr. 4.2.2-1).

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo vyřešit vybrané konstrukční úlohy na základě shodných nebo podobných zobrazení. Pomocť žákům či studentům lépe pochopit řešení těchto typu úloh a pomocť učitelům středních škol při vysvětlování tohoto učiva.

V této práci jsou vypracovány úlohy jak polohové, tj. je dána poloha zadaných prvků, tak nepolohové, kde není určena poloha zadaných prvků. Polohové úlohy začínají zpravidla slovy „*Je dán prvek...*“, tímto prvkem pak musíme při konstrukci začít. Nepolohové úlohy zpravidla začínají slovy „*Sestrojte ... je-li ...*“, „*Narýsujte ... platí-li*“. Tyto úlohy lze sestrojít kdekolí v rovině a je na nás, jakým prvkem při konstrukci začneme. Umístíme-li tento prvek nepolohové úlohy na rovinu, úloha se změní na polohovou.

Osové souměrnosti využíváme v úlohách, v nichž jsou dány dva útvary v rovině a přímka p a hledáme úsečku, jejíž body leží na daných útvarech a mají od přímky p stejnou vzdálenost. Takovou úlohu řešíme tak, že útvary zobrazíme v této souměrnosti s osou souměrnosti p . Body hledané úsečky jsou pak průnikem vzoru jednoho útvaru a obrazu druhého útvaru. Obdobně postupujeme u jiných shodných zobrazení v rovině s tím, že namísto přímky p máme zadaný jiný prvek. U úloh s využitím středové souměrnosti máme dán střed, který je středem souměrnosti. U posunutí máme danou orientovanou úsečku, která je vektorem posunutí tohoto zobrazení. U úloh s využitím otočení máme dán střed a úhel otočení.

Úlohy, kde se využívá poměru, např. hledání úsečky v daném poměru, jsou konstruovány s využitím stejnoolehého zobrazení. Stejnolehlosti se využívá také u úloh, kde hledáme tečny dvou daných kružnic s různým poloměrem.

Počet řešení daných úloh není vždy na první pohled viditelný. Avšak v počítačových programech, jako například GeoGebra, můžeme zřetelněji určit za jakých podmínek má úloha *..(počet)..* řešení. V tomto programu lze díky posunování a zvětšování různých geometrických prvků, které jsou dány v zadání, názorně vidět, co se s nimi děje.

Dospěli jsme tedy k závěru, že řadu konstrukčních úloh, můžeme vyřešit s využitím shodností nebo podobností. Počítačový program GeoGebra nám lépe pomůže zjistit všechna řešení dané úlohy.

Literatura

JANČOVIČOVÁ, Eva at al. *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií: Trojúhelníky a čtyřúhelníky*. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-85849-86-0.

KADLEČEK, Jiří. *Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy*. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-017-9.

MOLNÁR, Josef. *Planimetrie*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001. ISBN 80-244-0370-6.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na VŠ*. Praha: Prometheus, 2013. ISBN 978-80-7196-099-7.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2012. ISBN 978-80-7196-356-1.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2006. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-174-4.

ŠEDIVÝ, Jaroslav. *O podobnosti v geometrii*. Praha: Mladá fronta, 1963. Škola mladých matematiků.

ŠEDIVÝ, Jaroslav. *Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách*. Praha: Mladá fronta, 1980. Škola mladých matematiků.

Internetové zdroje:

O programu GeoGebra. *GeoGebra* [online]. © 2022 [cit. 2022-04-18]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/about>

Seznam používaných matematických symbolů

A	bod A
$\leftrightarrow AB$	přímka AB
p	přímka p
$\mapsto AB$	polopřímka AB
AB	úsečka AB
$\overrightarrow{AB}$	orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ s počátečním bodem A a koncovým bodem B
$\mapsto pA$	polorovina pA (polorovina s hraniční přímkou p a vnitřním bodem A)
$\sphericalangle AVB$	konvexní úhel AVB (konvexní úhel s vrcholem V a rameny v polopřímkách VA, VB)
$\widehat{AVB}$	orientovaný úhel $\widehat{AVB}$ s počátečním ramenem VA a koncovým ramenem VB
(a, b)	rovinný pás a, b (pás ohraničený rovnoběžkami a, b)
$\triangle ABC$	trojúhelník ABC
$\square ABCD$	čtverec $ABCD$
t_a	těžnice vedená vrcholem A trojúhelníku
v_a	výška na stranu a trojúhelníku
r	poloměr kružnice
$k(S; r)$	kružnice k se středem S a poloměrem r
τ_{AB}	Thaletova kružnice nad úsečkou AB
$\frown ASB$	kružnicový oblouk (kružnicový oblouk se středem S a krajními body A, B)
G_φ	množina bodů, ze kterých je vidět úsečky pod úhlem φ
$\wedge$	a zároveň
$a > b$ ($a < b$)	a je větší než b (a je menší než b)
$A \in p$ ($A \notin p$)	bod A leží (neleží) na přímce p
$A \in p \cap q$	bod A leží na průniku přímky p a přímky q
$\{A, B\} = p \cap q$	body A, B jsou průsečíky přímky p a přímky q
$A = B$ ($A \neq B$)	bod A splývá, resp. je totožný s bodem B (různý od bodu B)
$p = q$ ($p \neq q$)	přímka p splývá, resp. je totožná s přímkou q (různá od přímky q)

$p \parallel q$ ($p \nparallel q$)	přímka p je (není) rovnoběžná s přímkou q
$p \perp q$	přímka p je kolmá k přímce q
$\triangle ABC \cong \triangle KLM$	trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem KLM
$\triangle ABC \sim \triangle KLM$	trojúhelník ABC je podobný s trojúhelníkem KLM
$ AB $	délka úsečky AB
$ pA $	vzdálenost bodu A od přímky p
$ pq $	vzdálenost rovnoběžných přímek p, q
$ \sphericalangle AVB $	velikost konvexního úhlu AVB
30°	30 stupňů
$\mathbf{Z}$	zobrazení $\mathbf{Z}$
$\mathbf{Z}: A \rightarrow A'$	bod A' je obrazem bodu A v zobrazení $\mathbf{Z}$
$\mathcal{O}(o)$	osová souměrnost s osou souměrnosti o
$\mathcal{S}(S)$	středová souměrnost se středem souměrnosti S
$\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$	posunutí (translace) určené orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$
$\mathcal{R}(S, \varphi)$	otočení (rotace) se středem S a úhlem otočení φ
$\mathcal{H}(S, \lambda)$	stejnolehlost se středem S a koeficientem λ
$\mathbf{Z}_2 \circ \mathbf{Z}_1$	zobrazení složené ze zobrazení $\mathbf{Z}_1$ a $\mathbf{Z}_2$ v tomto pořadí

Seznam obrázků

- Obr. 3.1-1 Shodné trojúhelníky*
- Obr. 3.2-1 Osová souměrnost*
- Obr. 3.2.1-1 Konstrukce bodu V*
- Obr. 3.2.1-2 Konstrukce úsečky XY – 2 řešení*
- Obr. 3.2.1-3 Konstrukce kosočtverce $ABCD$ – 2 řešení*
- Obr. 3.2.1-4a Trojúhelník ABC – způsob řešení 1*
- Obr. 3.2.1-4b Trojúhelník ABC – způsob řešení 2*
- Obr. 3.2.1-5 Trojúhelník ABC*
- Obr. 3.3-1 Středová souměrnost*
- Obr. 3.3.1-1 Konstrukce rovnoběžníku $ABCD$*
- Obr. 3.3.1-2 Konstrukce úsečky XY*
- Obr. 3.3.1-3 Konstrukce trojúhelníku ABC*
- Obr. 3.3.1-4 Konstrukce trojúhelníku ABC*
- Obr. 3.4-1 Posunutí*
- Obr. 3.4.1-1 Konstrukce kružnic*
- Obr. 3.4.1-2 Konstrukce úsečky XY – 4 řešení*
- Obr. 3.5-2 Otočení*
- Obr. 3.5.1-1 Konstrukce trojúhelníku ABC*
- Obr. 3.5.1-2 Konstrukce úsečky XY – 2 řešení*
- Obr. 3.6-1 Posunutá souměrnost*
- Obr. 4.1-1 Stejnolehlé zobrazení úsečky AB*
- Obr. 4.1-2 Stejnolehlost dána dvěma rovnoběžnými úsečkami*
- Obr. 4.1.1-1 Středy stejnoolehlosti úseček KL , MN*
- Obr. 4.1.1-2 Konstrukce tečen kružnic k_1 , k_2*
- Obr. 4.1.1-3 Konstrukce úsečky XY*
- Obr. 4.1.1-4 Konstrukce trojúhelníku ABC*
- Obr. 4.2.1-1 Podobné trojúhelníky*
- Obr. 4.2.2-1a Zadání k příkladu 1*
- Obr. 4.2.2-1b Konstrukce obdélníka $ABCD$*

Seznam tabulek

Tab. 3.1-1 Věty o shodnosti trojúhelníků

Tab. 4.2.1-1 Věty o podobnosti trojúhelníků

Přílohy

V rámci řešených úloh bakalářské práce vznikly dynamické konstrukce v programu GeoGebra. Tyto konstrukce, otázky k úlohám či rozborů naleznete v GeoGebře knize pod názvem „Geometrická zobrazení v rovině – konstrukční úlohy“: <https://www.geogebra.org/m/aavjymj7>.