

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO
V OLOMOUCI
KATEDRA OPTIKY



Bezšumové zesílení světla pomocí přidávání a odebírání jednotlivých fotonů

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
Ondřej Klímek

Vedoucí práce
Mgr. Petr Marek, Ph.D.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem vytvořil tuto bakalářskou práci samostatně pod vedením Mgr. Petra Marka, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje použité při zpracování práce. V Olomouci dne 10. května 2012

Abstrakt:

Problémem přenosů kvantových signálů jsou ztráty a šum, jež snižují kvalitu komunikace. Práce se zabývá tím, jak je možné kvantové stavy zesilovat tak, aby do nich šum nebyl přidáván. Konkrétně se zabýváme metodou přidávání a odebírání jednotlivých fotonů, ve snaze najít co nejlepší konfiguraci vedoucí k bezšumovému zesílení.

Obsah

1	Teoretický základ	1
1.1	Úvod	1
1.2	Kreační a anihilační operátor	1
1.3	Koherentní stavy	3
1.4	Přenos signálu	4
1.5	Zesilovače	4
2	Zesilovač založený na $a, a^\dagger$	7
2.1	Úvod	7
2.2	Analýza 3 operátorů	7
2.2.1	a, a, a	8
2.2.2	$a, a, a^\dagger$	8
2.2.3	$a, a^\dagger, a$	9
2.2.4	$a, a^\dagger, a^\dagger$	10
2.2.5	$a^\dagger, a, a$	10
2.2.6	$a^\dagger, a, a^\dagger$	11
2.2.7	$a^\dagger, a^\dagger, a$	12
2.2.8	$a^\dagger, a^\dagger, a^\dagger$	12
2.3	Závěr - 3 operátory	13
2.4	Použití více operátorů	16
2.4.1	4 operátory	16
2.4.2	Závěr pozorování 4 operátorů	18
2.5	Analýza stavů do 8 operátorů	19
2.5.1	$(1^M, 0^M)$	19
2.5.2	$((1, 0)^M)$	19
2.5.3	$((1, 0, 0)^M)$	20
2.5.4	(1^M)	21
2.5.5	$(1, 0^{M-2}, 1)$	21
2.5.6	$(1, 0^M)$	22
2.6	Závěr	22
2.6.1	Zvláštní modelace s více než 8 operátorů	23
2.6.2	Závěr zvláštní modelace nad 8 operátorů	24
3	Závěr	25

1 Teoretický základ

1.1 Úvod

Světlo od pradávna fascinovalo a vybízelo k bádání spousty učenců, alchymistů i vědců. Už ve starém Řecku vznikaly první teorie o tom, že oko je zdrojem světla kolem nás. Tyto i mnohé další teorie tak procházeli staletími až Isaac Newton první ucelenější teorií charakterizoval světlo jako proud mechanických částic. Tato teorie ačkoliv mnohé vysvětlovala, mnohé vysvětlit nedokázala. Jevy jako interference a disperze napovídaly, že za světlem bude něco dalšího. S novým konceptem světla přišel Ch. Huygens a jeho pojetí světla jako vlnění potvrdzovaly i experimenty prováděné T. Youngem. Bohužel ani zde se nepodařilo vysvětlit vše. Dalším velkým posunem bylo elektromagnetické vnímání světla popsáno J.C. Maxwellem, ale až moderní fyzika reprezentovaná M. Planckem a A. Einsteinem přinesla novou teorii - kvantovou teorii, kterou se podařilo vysvětlit dosud nepopsané záhady jako byl fotoelektrický jev. Světlo začalo být chápáno duálně - jako vlna i jako proud částic.

Upřímně řečeno, světlo nás zcela klidnými nenechává dodnes. Nicméně, na rozdíl od dávnych badatelů jsme schopni mnohem lépe vlastnostem světla porozumět právě díky výše popsaným teoriím světla.

V naší práci se budeme zabývat popisem světla na kvantové úrovni. Objektem našeho zájmu bude jeden mód světla, který budeme reprezentovat pomocí kvantového harmonického oscilátoru. Jeden mód je definován jako uspořádaný koherentní stav, který má stále stejnou frekvenci a stálý fázový rozdíl [1].

V úvodních kapitolách věnovaných základní teorii se seznámíme s matematicko-fyzikálním aparátém potřebným pro naši práci. Vysvětlíme si význam kreačního a anihilačního operátoru(1.2), následně charakterizujeme koherentní stavy(1.3) a nakousneme problematiku šíření kvantového signálu(1.4). Kapitola (1.5) nás seznámí s vlastnostmi a slabínami zesilovačů. Nastínění jejich principů pro nás bude důležitým stavebním kamenem při úvahách nad bezšumovým zesilováním pomocí manipulace s jednotlivými fotony. Konkrétní modelování nabízí 2. oddíl, ve kterém si zanalyzujeme zajímavé kombinace anihilačního a kreačního operátoru. Na závěr se podíváme na dva speciální případy kombinace operátorů(2.6.1) a veškerou práci zhodnotíme (oddíl 3).

K modelování využíváme program Matlab(6.5).

1.2 Kreační a anihilační operátor

Jak jsme pověděli v úvodu, v naší práci budeme vycházet z konceptu popisujícího klasické vlnové chování vycházející z popisu elektromagnetického oscilátoru. Energie harmonického oscilátoru je popsána rovnicí

$$H = \hbar\omega(x^2 + p^2), \quad (1)$$

kde operátory hybnosti (p) a polohy (x) jsou hermiteovské [2]. Při řešení této rovnice můžeme užít substituci:

$$a = \left(x + \frac{ip}{\sqrt{2}}\right), \quad a^\dagger = \left(x - \frac{ip}{\sqrt{2}}\right) \quad (2)$$

Tyto operátory pojmenujeme anihilační (a) a kreační ($a^\dagger$) kvůli důvodům, jež ukážeme za chvíli.

Z komutačních relací pro x a p obdržíme

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (3)$$

Rovněž definujeme operátor počtu částic jako

$$N = a^\dagger a. \quad (4)$$

Je snadné dokázat, že

$$a^\dagger a = \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}, \quad (5)$$

z tohoto vztahu získáváme velmi důležitý vztah mezi počtem operátorů a Hamiltoniánem:

$$H = \hbar\omega(N + \frac{1}{2}) \quad (6)$$

Označme nyní energii vlastního stavu N jeho vlastním číslem n .

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad (7)$$

Vlastní stavy $|n\rangle$ tvoří bázi stavů známou jako Fockovy stavy. [1]

Ze vztahu (6) vidíme, že

$$H|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle \quad (8)$$

což znamená, že vlastní stavy energie harmonického oscilátoru jsou dány jako

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}). \quad (9)$$

K lepšímu pochopení fyzikálních vlastností a , $a^\dagger$ a N zmiňme, že

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger[a, a] + [a^\dagger, a]a = -a, \quad (10)$$

kde jsme užili (3).

Dále můžeme dokázat, že

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger \quad (11)$$

Pokud se nyní podíváme, jak kombinace operátorů a , $a^\dagger$ transformují libovolný Fockův vztah, zajišťujeme, že:

$$\begin{aligned} Na^\dagger|n\rangle &= ([N, a^\dagger] + a^\dagger N)|n\rangle \\ &= (n+1)a^\dagger|n\rangle \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Na|n\rangle &= ([N, a] + aN)|n\rangle \\ &= (n-1)a|n\rangle \end{aligned} \quad (13)$$

Tyto vztahy ukazují, že $a^\dagger|n\rangle$ ($a|n\rangle$) je taky vlastním stavem N s vlastním číslem zvýšeným (sníženým) o 1. Protože zvýšení (snížení) n o 1 způsobuje nárůst - křeci (pokles - anihilaci) jedné kvantové jednotky energie $\hbar\omega$, vidíme, že název křecí operátor (anhilační operátor) pro $a^\dagger$ (a) jsou užívány oprávněně.

Rovnice (12) a (13) nám rovněž ukazují, že $a|n\rangle$ a $|n-1\rangle$ jsou stejné až na konstantu. Můžeme tedy psát

$$a|n\rangle = c|n-1\rangle, \quad (14)$$

kde c je číselná konstanta určená z podmínky, že oba $|n\rangle$ a $|n-1\rangle$ jsou normované. Dále platí, že

$$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = |c|^2. \quad (15)$$

Nyní můžeme vyjádřit levou stranu rovnice (15) jako n , protože $a^\dagger a$ je číselný operátor. Dostáváme tedy vztah

$$n = |c|^2. \quad (16)$$

Za předpokladu, že c je reálné a pak konečně dostáváme:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (17)$$

a stejným způsobem

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (18)$$

Čímž jsme získali vyjádření křecího a anihilačního operátoru. Tento operátor zvyšuje nebo snižuje počet fotonů v systému. Naše práce je založena právě na zesilování a zeslabování světla přidáváním a odebráním jednotlivých fotonů, jež se dá matematicky popsat právě pomocí kombinace těchto dvou operátorů.

1.3 Koherentní stavy

Koherentní stavy jsou vlastní stavy anihilačního operátoru a

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (19)$$

Vysoce kvalitní lasery generují právě takovéto pole a proto jsou ideálními zdroji koherentního světla.

Jako vlastní stav anihilačního operátoru a mají koherentní stavy dobře definovanou amplitudu $|\alpha|$ a fázi $\arg \alpha$ a jsou tedy vhodným prostředkem pro kvantovou komunikaci.

Ve Fockově bázi je možno koherentní stav zapsat jako:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (20)$$

Jeho fotonová statistika je tedy Poissonovská.

1.4 Přenos signálu

Díky svým vlastnostem jsou koherentní stavy velmi často využívány jako médium pro kvantovou komunikaci.

Informace je do koherentních stavů ukládána buď ve formě modulace fáze, amplitudy, nebo obojího. V další práci se budeme zabývat modulováním do fáze a amplitudu budeme považovat za známou. Obecně můžeme říct, že čím větší amplituda, tím více informací můžeme do takového světla vložit [5].

Přenášením signálu prostředím však signál slábne. S tím, jak signál slábne, se snižuje i množství informace, které jsme schopni ze signálu úspěšně získat.

Demonstrujme si to na názorném příkladu:

Mějme případ, v kterém je nějaká kvantová informace zakódovaná do komplexní amplitudy α koherentního stavu $|\alpha\rangle$. Pokud je již amplituda stavu moc malá (nejčastěji díky ztrátám), pak silné překrytí mezi rozdílnými stavy způsobí, že je prakticky nemožné je od sebe správně odlišit.[6] Pro větší názornost si představme dva koherentní stavy $|\alpha_1\rangle = 1$ a $|\alpha_2\rangle = -1$. Z pravděpodobnostních zákonitostí je jasné, že ačkoliv, jsme detekovali stav $|\alpha_1\rangle$ existuje nenulová pravděpodobnost, že jsme místo toho měli stav $|\alpha_2\rangle$. Pravděpodobnost chyby bude záviset na překryvu $|\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle|^2$. Vidíme, že pro amplitudu 1 je pravděpodobnost chyby zhruba úměrná $\exp^{-4}$.

Pokud ale v důsledku ztrát klesne amplituda na 0,5, překryv se zvýší zhruba na $\exp^{-1}$. Pokud bude rozdíl signálů menší např. $|\alpha_1\rangle = 0,25$ a $|\alpha_2\rangle = -0,25$ bude k chybám docházet častěji a hodnota signálu klesá. Pokud signál zesílíme, nutně do něj vnášíme šum [5]. Přidání šumu bohužel může způsobit, že přínos zesílení bude znehodnocen.

Řešení tohoto problému by bylo dáno ideálním bezšumovým zesilovačem koherentních stavů světla, který můžeme matematicky vyjádřit jako

$$|\alpha\rangle \rightarrow |g\alpha\rangle,$$

kde $g > 1$ je zisk zesílení. Navíc by nám vhodný bezšumový zesilovač dal možnost částečně překryté stavy jednoznačně rozlišit.

1.5 Zesilovače

K zesílení můžeme zkusit využít několik metod. Jednou z nich je užití laseru, který patří mezi takzvané klasické zesilovače. Princip laseru je založen na třech vzájemně neodmyslitelných jevech:

Prvním z nich je **Absorbce světla**. Při absorpci světla pohlcuje látka dopadající fotony a ty excitují elektrony v atomech látky na vyšší energetickou hladinu.

Druhou je **Spontánní emise světla**. Jde o vyzáření fotonu při přechodu excitovaného elektronu na nižší hladinu. Tento přechod není vyvolán vnějším polem, ale vzniká samovolně. Samovolně vyzářený foton má náhodnou fázi a směr.

Třetím jevem je **Stimulovaná emise světla**. K tomuto jevu je potřebné vnější pole (nejčastěji fotony), které způsobí, že excitované elektrony začnou opouštět vyšší energetické hladiny a při přechodu začnou vyzařovat další fotony stejných vlastností, jako byly původní - stimulující. Aby došlo k jevu stimulované emise, je potřeba aby v aktivní látce vzniklo tzv. inverzní obsazení hladin, tedy dostatečné množství excitovaných elektronů "čekajících" na foton.

Pakliže taková situace nastane, jeden foton s sebou dovede strhnout velkou část elektronů, které společně vyzáří množství fotonů.

Pakliže chceme laserový výboj ještě zesílit vytvoříme kolem aktivní látky soustavu dvou zrcadel. Od jednoho - odrazného - se fotony budou odrážet a po cestě budou srážet další elektrony z vyšších energetických hladin. Na druhém - polopropustném - zrcadle část fotonů projde a vytvoří laserový paprsek. Druhá část fotonů se vrací zpět a potkává další excitované "čekající" elektrony.

Nejběžněji užívaným laserem je helium-neonový laser vyzařující červené světlo o vlnové délce 632,8nm.

Problémem laserového zesilovače je fakt, že nikdy od sebe nemůžeme oddělit spontánní a stimulovanou emisi fotonu. To znamená, že kromě námi přesně určených fotonů ze stimulované emise ve výsledném paprsku budou zastoupeny i fotony blíže neurčené - fotony s neznámou fází a polarizací. Jejich zastoupení bude tím větší, čím nižší má laserový paprsek intenzitu.

Jinou možností může být použití takzvaného "Zesilovače $a, a^\dagger$ " Jak bylo uvedeno výše, naším cílem je získat ideální zesilovač poskytující bezšumové zesílení. Jak jsme již řekli, tohoto není možné dosáhnout obvyklými metodami. Naštěstí kvantová fyzika nabízí několik metod neobvyklých - aproximativních.

Tou, kterou se budeme zabývat ve zbývajících částech práce, je snaha zesílit světlo pomocí manipulace s jednotlivým fotony. Konkrétně nám půjde o různé přidávání a odebírání fotonů pomocí kreačního a anihilačního operátoru. Jak je něco takového možné? No, ne úplně snadno a jen za určitých podmínek. Uvažujme koherentní stav popsán pomocí

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Pomocí kreačního a anihilačního operátoru můžeme tento stav upravovat ve smyslu:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

a

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Protože nám jde o zesilovač, pomocí kreačního operátoru, stav $|\alpha\rangle$ zesílíme. Pro prvních několik členů, dostáváme:

$$a^\dagger|\alpha\rangle = |1\rangle + \sqrt{2}\alpha|2\rangle + \frac{\sqrt{3}\alpha^2}{\sqrt{2}}|3\rangle + \frac{2\alpha^3}{\sqrt{6}}|4\rangle + \dots$$

Mohlo by se zdát, že máme vyhráno, neboť přidáním fotonu do původního signálu jsme skutečně docílili zesílení... Problémem je, že jsme poměrně výrazně změnili původní koherentní stav (20). Zatímco na počátku jste ve stavu α mohli najít fotony, ale i nemuseli, nyní víte, že nějaký foton najdete vždy. Stav tedy nemůže být koherentní. [3]

Zdálo by se, že se cesta uzavírá, ale zkusme přeci jen vrátit stav zase na začátek aplikací anihilačního operátoru. S překvapením zjišťujeme, že původní stav $|\alpha\rangle$ se od "stejného" stavu $aa^\dagger|\alpha\rangle$ liší.

Numericky:

$$aa^\dagger|\alpha\rangle = |0\rangle + 2\alpha|1\rangle + \frac{3\alpha^2}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{4\alpha^3}{\sqrt{6}}|3\rangle + \dots$$

Vidíme, že ačkoliv nově získaný stav není koherentní stav, je mu velmi podobný a navíc u prvních členů vidíme několikanásobně zvětšenou amplitudou. Skutečně z tohoto stavu vhodnou aproximací můžeme získat zesílený koherentní stav $|g\alpha\rangle$, intuitivně však očekáváme nějaká “ale”. Prvním “ale” je, že toto zesílení je možné dosáhnout jen pro malá α (aproximativně potom pracujeme pouze se stavy s několika málo fotony, z důvodu exponentu u $|\alpha|$ v rozvoji koherentního stavu) [4]; druhé “ale”, toto zesilování nebude nastávat vždy. Toto zesílení bude pravděpodobnostní. S určitou pravděpodobností nastane, ale nevíme kdy.

2 Zesilovač založený na $a, a^\dagger$

2.1 Úvod

Dle poznatků získaných z aplikace kreačního a anihilačního operátoru se nyní pokusíme analyzovat 3 operátory. Půjde nám o to, zkoumat kdy a k jakému zesílení může dojít, a také o to, jak je nově získaný stav podobný s původním koherentním. Je mnoho hledisek, které při porovnávání zesíleného stavu mohou být zohledněny a podle kterých se dá nový stav vyhodnocovat (například změna fáze, fano faktory atd.). My se však zaměříme na hodnocení pomocí fidelity a zisku stavů.

Fidelitu F definujeme jako překryv stavů ψ s námi zesilovaným koherentním stavem α :

$$F = |\langle \psi | g\alpha \rangle|^2 = F(g)$$

Zisk pak můžeme definovat jako:

$$g = \frac{\alpha}{\alpha_{in}}$$

Kde index in značí, že je to vstupní parametr. V našem případě projíždíme všechna α na intervalu 0,1 - 2,0. a hledáme pro ně maximální zisk a fidelitu při dané kombinaci operátorů.

V úvodních sekcích jsme zachovávali značení koherentního stavu jako $|\alpha\rangle$ toto značení zachováme a označení $|\alpha\rangle$ bude patřit výhradně koherentnímu stavu.

2.2 Analýza 3 operátorů

Nejprve, než se pustíme do nějakého vyhodnocování, provedeme krátkou úvahu nad tím, co vlastně jaké kombinace operátorů $a, a^\dagger$ mohou s koherentním stavem $|\alpha\rangle$ udělat.

Celkem máme 8 možností (2^3): (a, a, a) ; $(a, a, a^\dagger)$; $(a, a^\dagger, a)$; $(a, a^\dagger, a^\dagger)$; $(a^\dagger, a, a)$; $(a^\dagger, a, a^\dagger)$; $(a^\dagger, a^\dagger, a)$; $(a^\dagger, a^\dagger, a^\dagger)$. Zkusme si je trochu roztřídit.

První skupinou budou kombinace operátorů začínající anihilací. Je důležité opět zdůraznit, že zatímco v zápise stavem využíváme Diracovy notace operátorů - první aplikovaný operátor stojí v zápise nejbližší stavu, tady děláme pouze výčet operátorů a tedy operátory vypisujeme naopak - zleva.

Provedme nyní anihilaci koherentního stavu:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|0\rangle + \alpha^2|1\rangle + \frac{\alpha^3}{\sqrt{2!}}|2\rangle + \frac{\alpha^4}{\sqrt{3!}}|3\rangle + \frac{\alpha^5}{\sqrt{4!}}|4\rangle \dots \dots$$

pakliže z každého stavu vytkneme α dostáváme přesně koherentní stav $|\alpha\rangle$, který jsme měli na začátku. Uvažovat toto vytknutí není problémem a nijak neubírá na obecnosti v dalších úvahách, neboť při normování se právě α krátí. Toto je přirozený důsledek toho, že $|\alpha\rangle$ je vlastním stavem operátoru a

Nyní vidíme, že problematika tří operátorů začínajících od a se nám redukuje zpět na problematiku dvou operátorů, ze které vychází nejlépe kombinace $a^\dagger, a$

Rovněž už v našich úvahách můžeme zapřemýšlet nad stavy s větším počtem operátorů $a^\dagger$. Je zřejmé, že pokud uvažujeme systémy, ve kterých máme typicky do 3 fotonů a najednou

pomocí adice 3 fotony přidáme, stav se od původního bude výrazně lišit a ačkoliv zesílení bude vyšší, fidelita, kterou rovněž sledujeme, bude velmi malá. Sami si můžeme zvolit hodnotu fidelity, kterou budeme sledovat. Tedy mez, kdy rozdíl mezi stavem $|\alpha\rangle$ a operátory změněným stavem je pro nás ještě přijatelný. V této práci jsme si zvolili touto mezí fidelitu rovnou 90%

Jak z předešlých úvah vyplývá, nejvíce nás budou pravděpodobně zajímat ty kombinace, ve kterých bude buď stejný počet operátorů a a $a^\dagger$ nebo budou operátory a převažovat.

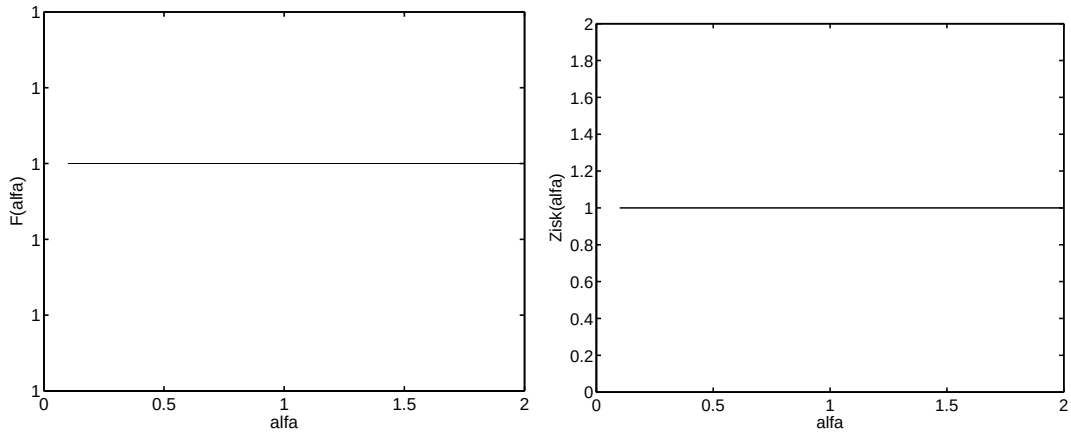
Podívejme se nyní na konkrétní výsledky:

2.2.1 a, a, a

Nový stav

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}aaa|\alpha\rangle, \quad (21)$$

kde $\mathcal{N}$ je norma tohoto stavu,



Obrázek 1: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci operátorů a, a, a v závislosti na změně α .

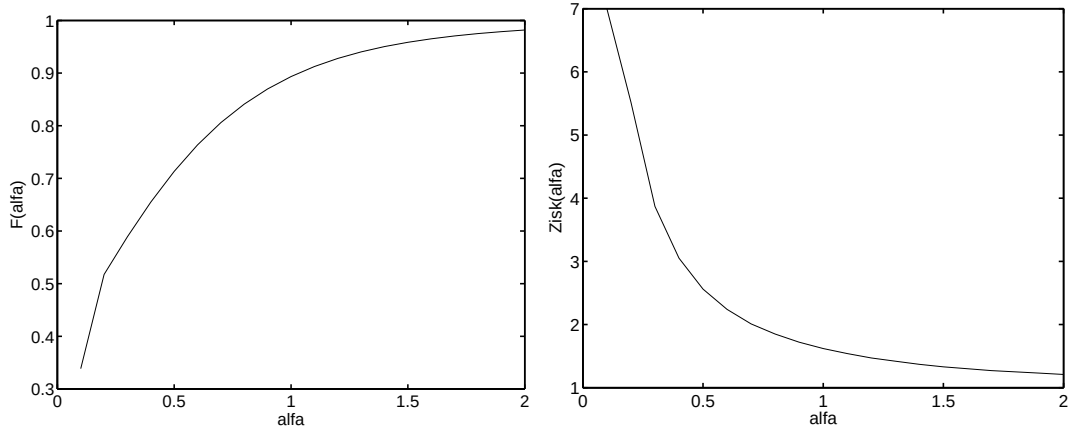
je podle očekávání totožný s koherentním stavem $|\alpha\rangle$. Grafy (obr. 1) můžeme zároveň považovat za potvrzení známého kvantového pravidla, říkájícího, že anihilační operátor a je vlastním stavem koherentního stavu $|\alpha\rangle$.

2.2.2 $a, a, a^\dagger$

Stav

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}a^\dagger aa|\alpha\rangle, \quad (22)$$

už patří mezi ty stavy, na které má smysl podívat se důkladněji. Jak jsme řekli v úvodu, první dvě substrakce nám sice stav nezmění, nicméně závěrečné přidání fotonu se již do výsledného stavu promítne výrazněji. Na grafech (obr. 2) můžeme opět sledovat průběh fidelity a zisku v závislosti na změně parametru α .



Obrázek 2: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci operátorů $a, a, a^\dagger$ v závislosti na změně α .

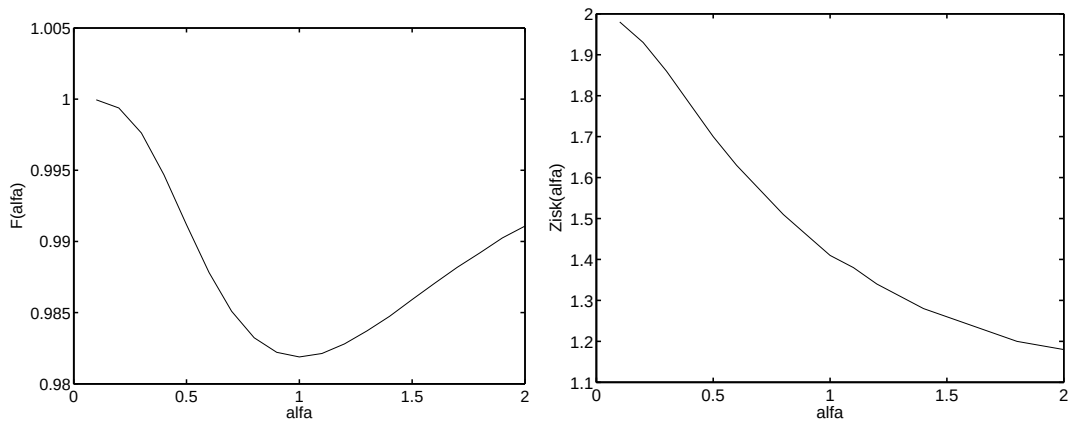
Z grafů jasně vidíme, co udělá přidání jednoho fotonu ke koherentnímu stavu $|\alpha\rangle$. Zisk se sice pro nízká α výrazně zvýšil, na druhé straně fidelity takto zesíleného stavu je tak špatná, že je pro malá α nepoužitelný. Hodnoty fidelity přeskočí hranici 90% až pro hodnoty α větší než 1,04, což odpovídá zisku přibližně 1,58.

2.2.3 $a, a^\dagger, a$

Stav

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} a a^\dagger a |\alpha\rangle, \quad (23)$$

by měl přesně odpovídat předpokladům, které byly použity v kapitole 1.5 při popisu zesilovače založeného na přidání fotonu a jeho následném odebrání. Měli bychom pro nízká dostat zesílený stav s vysokou mírou fidelity.



Obrázek 3: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci operátorů $a, a^\dagger, a$ v závislosti na změně α .

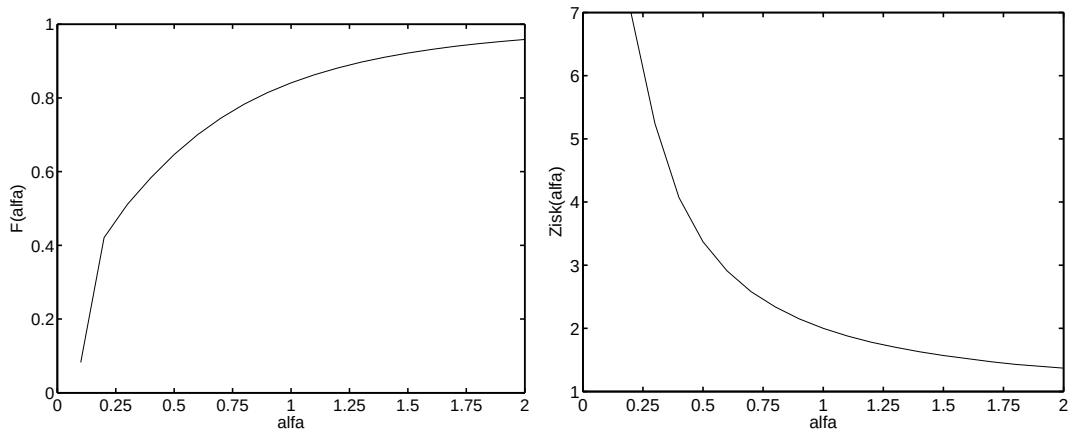
Naši domněnku grafy (3) potvrzují. Fidelita neklesne pod hodnoty přibližně 98,19%, nicméně zisk při zvyšujících se hodnotách α stále klesá od počátečních dvojnásobných hodnot.

2.2.4 $a, a^\dagger, a^\dagger$

Stav

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}a^\dagger a^\dagger a|\alpha\rangle, \quad (24)$$

odpovídá přidání dvěma fotonům do původního koherentního stavu $|\alpha\rangle$. Očekáváme tedy vyšší zisky, ale podstatně snížené hodnoty fidelity.



Obrázek 4: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci operátorů $a, a^\dagger, a^\dagger$ v závislosti na změně α .

Na obrázku 4 vidíme, že zejména pro α menší než 1 pozorujeme krásný, více jak dvojnásobný zisk. Fidelita tohoto stavu pro α menší jak 1 je však opět tak malá, že i zde, bohužel, musíme pohled stočit k ziskům nižším. Zaměříme-li se na fidelitu vidíme že neustále roste. Pro α větší 1,4 se dostáváme nad 90 % při zisku pozvolna klesajícího z krásných 1,63.

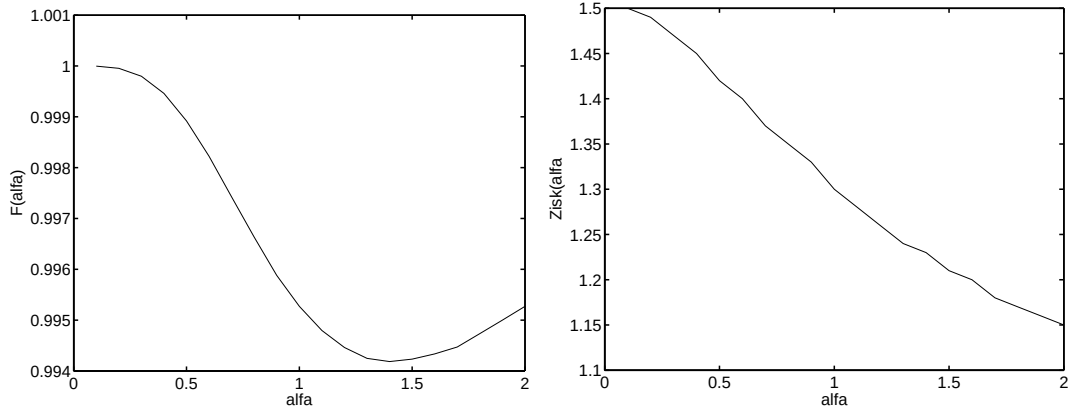
2.2.5 $a^\dagger, a, a$

Stav

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}aaa^\dagger|\alpha\rangle \quad (25)$$

Zde očekáváme vysokou fidelitu, ale ziskem by na tom tato kombinace neměla být nijak oslnivě.

Přesně podle očekávání pozorujeme (obr. 5) velmi vysokou hodnotu fidelity, kterou můžeme nazvat skoro 100%. Oproti tomu zisk na daném intervalu téměř lineárně klesá až k hodnotám 1,15 pro α rovno dvěma.



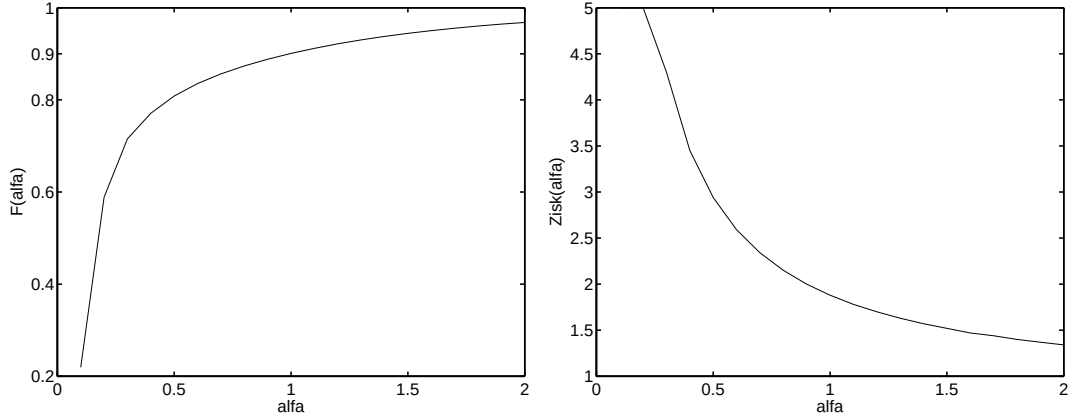
Obrázek 5: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci operátorů $a^\dagger, a, a$ v závislosti na změně α .

2.2.6 $a^\dagger, a, a^\dagger$

Stav

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} a^\dagger a a^\dagger |\alpha\rangle. \quad (26)$$

Ačkoliv bychom očekávali menší míru fidelity, tato kombinace 'přidání, odebrání a přidání'



Obrázek 6: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci operátorů $a^\dagger, a, a^\dagger$ v závislosti na změně α .

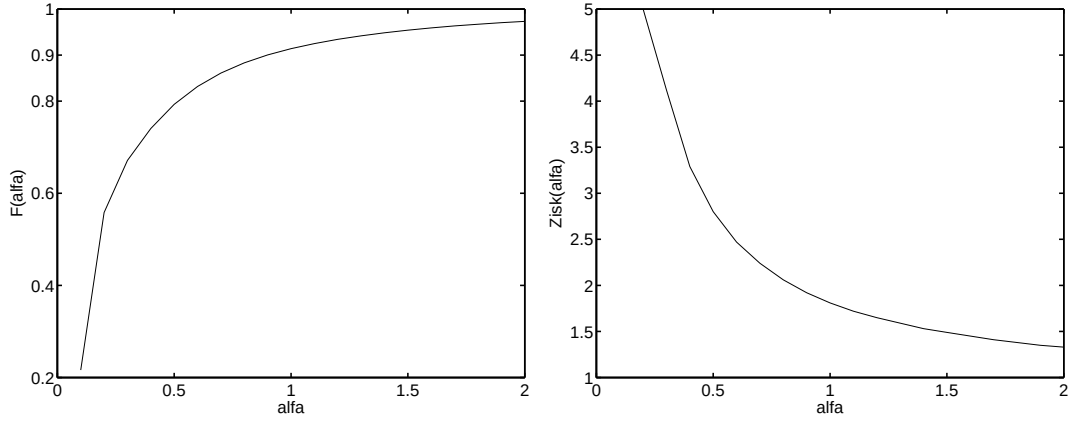
překvapuje a při položení α rovno 1, dosahuje devadesáti procentní fidelity při zisku plných 1,88 (obr. 6). Tímto dává vysoký potenciál pro užití v dalších, víceoperátorových kombinacích.

2.2.7 $a^\dagger, a^\dagger, a$

Stav

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} a^\dagger a^\dagger a |\alpha\rangle, \quad (27)$$

Pozorováním posledních dvou stavů teprve doopravdy můžeme docenit kombinace operátorů



Obrázek 7: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci operátorů $a^\dagger, a^\dagger, a$ v závislosti na změně α .

začínající adicí. Zatímco s výjimkou kombinace $a, a^\dagger, a$ popsané v (1.1.3) se při podmínce fidelity větší než 90% stěží podařilo překonat zisk o hodnotě “pouhých” 1.6, zde se již podruhé za stejné podmínky dostáváme vysoko nad. Konkrétně se při kombinaci $a^\dagger, a^\dagger, a$ můžeme těšit zisku 1,92 při hodnotě α rovno 0,9. Rovněž tato kombinace nás přímo vyzývá k dalšímu studiu.

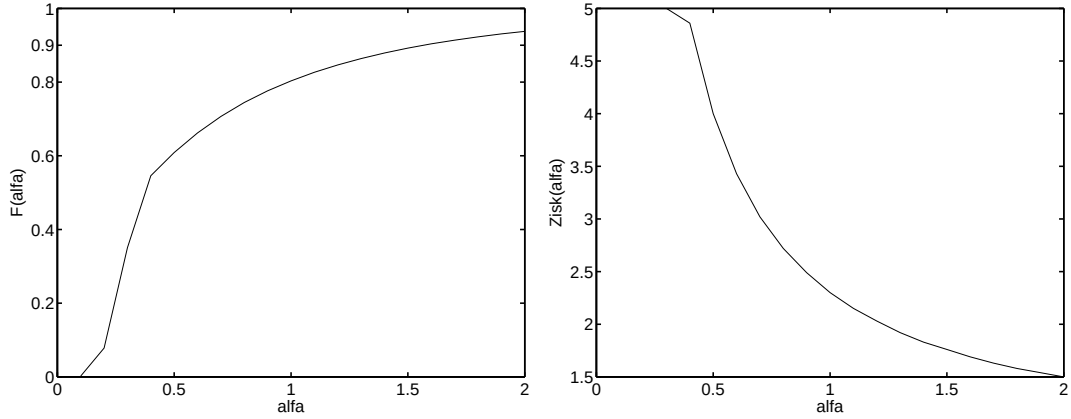
2.2.8 $a^\dagger, a^\dagger, a^\dagger$

Na závěr poslední stav

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} a^\dagger a^\dagger a^\dagger |\alpha\rangle \quad (28)$$

Stav by měl nabízet největší zesílení v důsledku přidání trojice fotonů. Bohužel však za toto přidání musíme zaplatit snížením fidelity, která pravděpodobně z možnosti mít maximálně zesílený signál udělá průměrnou variantu.

Podle předpokladu vidíme (obr. 8), že maximální zisky jsou pro nás díky nízké fidelitě prakticky nepoužitelné. Nicméně pro α vyšší 1,57 fidelita neklesá pod 90% a stále nabízí zisk 1,71.



Obrázek 8: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci operátorů $a^\dagger, a^\dagger, a^\dagger$ v závislosti na změně α .

2.3 Závěr - 3 operátory

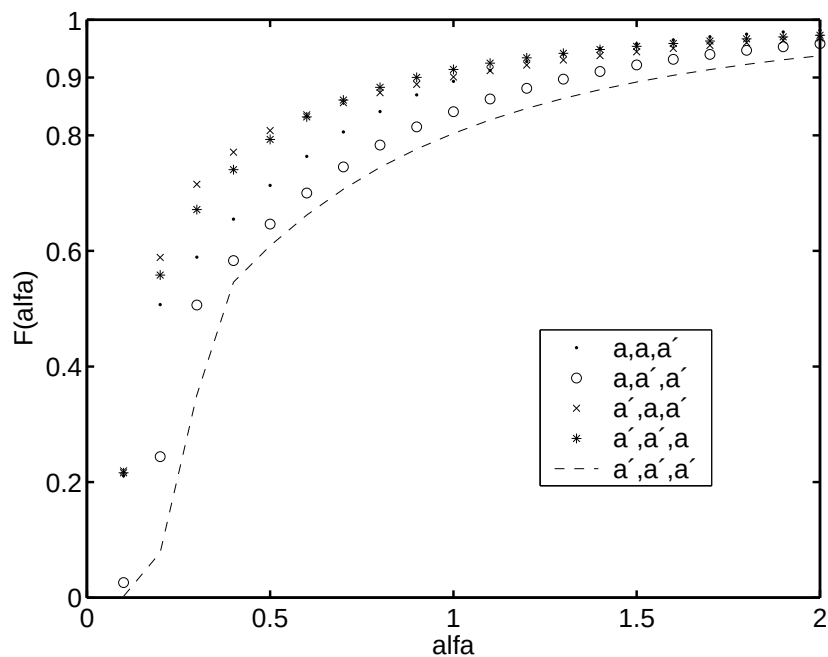
Provedli jsme analýzu použití kombinací tří operátorů $a^\dagger, a$ a vidíme, že existují 2 skupiny, do kterých můžeme užité kombinace rozdělit.

První skupinu tvoří stavy s vakuem. To znamená stavy kde po aplikaci všech operátorů nezůstane námi přidaný foton. Do této skupiny patří kombinace $(a^\dagger, a, a)$ $(a, a^\dagger, a)$ Tato skupina má výborné hodnoty zesílení a fidelity pro malá α , tedy pro slabé koherentní stavy.

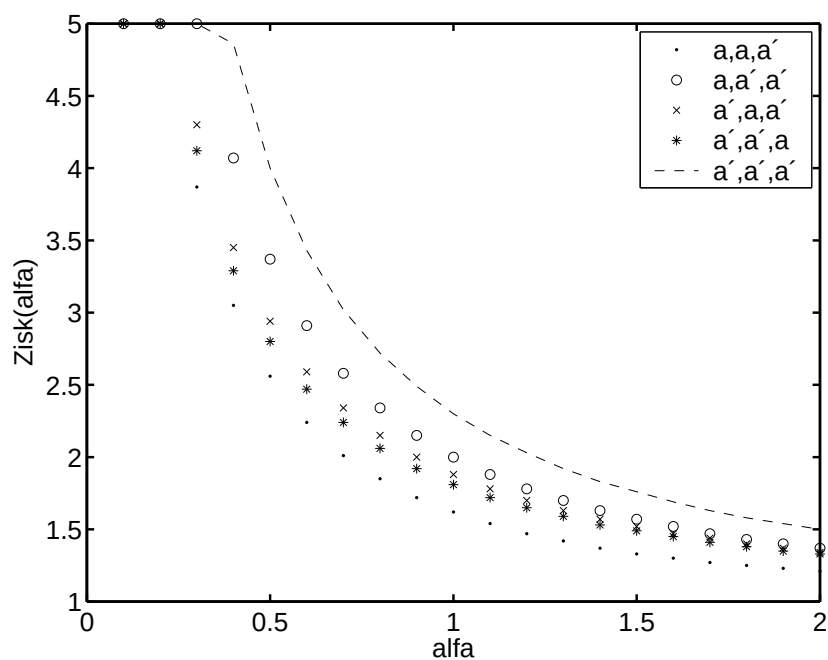
Druhou skupinou jsou stavy bez vakua. Stavy, ve kterých alespoň jeden přidaný foton zůstane. Do této skupiny patří ty ostatní. Tyto kombinace operátorů jsou naopak vhodné pro vysoká α , tedy pro silné koherentní stavy. U těchto kombinací sledujeme nárůst fidelity prakticky od nuly k hodnotám pohodlně nad 90% při ziscích > 1 .

Na závěr srovnání stavů s podobným průběhem. (obr. 9, 10, 11, 12)

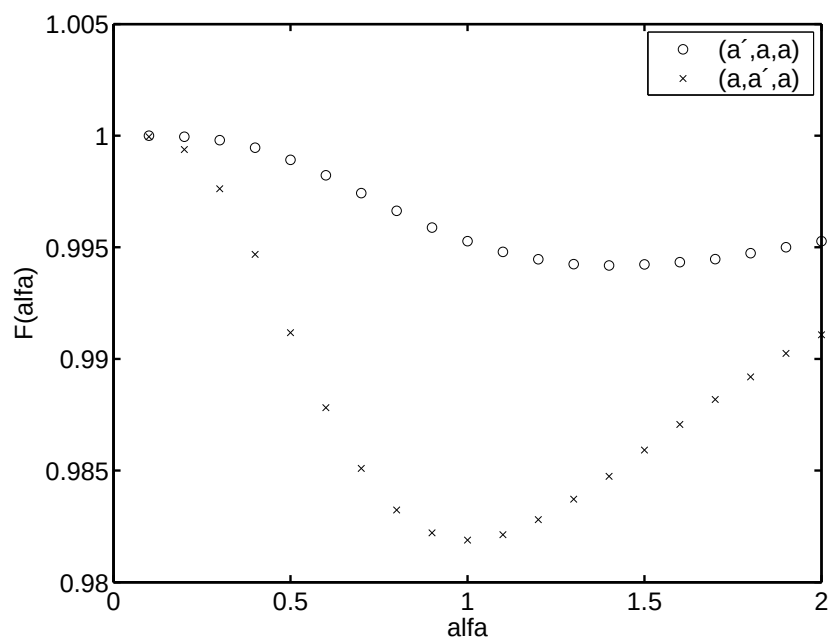
Mějme při pohledu na graf na paměti, že anihilační operátor nezmění výchozí stav $|\alpha\rangle$, a tedy je to jako bychom se dívali na aplikaci né tří, ale jednoho resp. dvou operátorů.



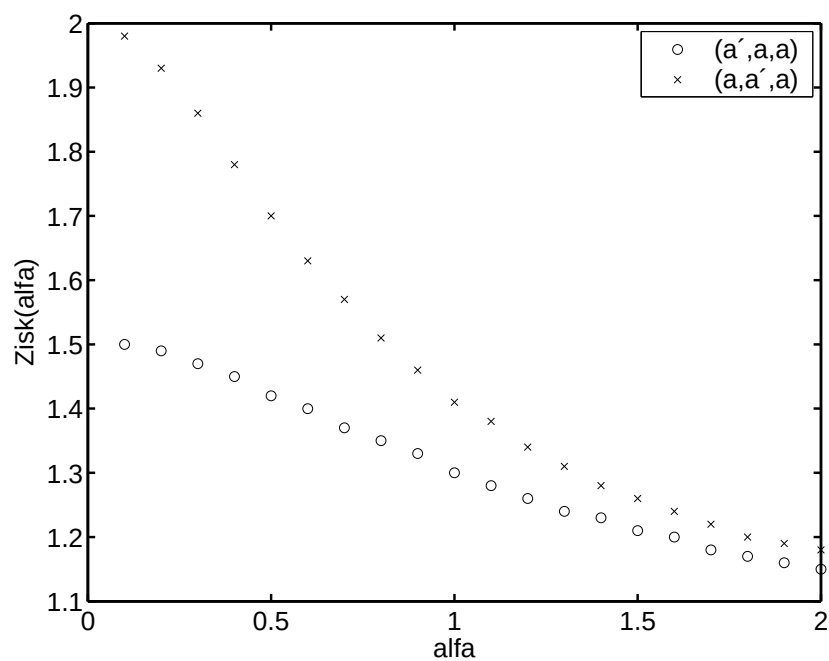
Obrázek 9: Porovnání fidelit pro aplikaci 3 operátorů v závislosti na změně α pro stavy bez vakua.



Obrázek 10: Porovnání zisků pro aplikaci operátorů v závislosti na změně α pro stavy bez vakua.



Obrázek 11: Porovnání fidelit pro aplikaci 3 operátorů v závislosti na změně α pro vakuové stavy.



Obrázek 12: Porovnání fidelit pro aplikaci 3 operátorů v závislosti na změně α pro vakuové stavy.

2.4 Použití více operátorů

V této kapitole se již nenecháme omezovat počtem tří operátorů a na základě předešlé analýzy zkusíme aplikaci tolika operátorů, kolik nám výsledky a výpočetní schopnosti počítače (zejména časová náročnost výpočtů) dovolí.

Analýza výsledků bude probíhat obdobným způsobem jako při práci jen se třemi operátory - rovněž budeme zkoumat zisk pro různá α s přihlédnutím k hodnotám fidelity. Dva rozdíly však čtenář přesto zaznamená. Zatímco u analýzy 3 operátorů jsme věnovali každé kombinaci vlastní komentář, nyní si dovolíme kombinace s podobnými průběhy sloučit a okomentovat je dohromady. Druhou změnou pak bude popisování stavů. Čtenář nyní spíše než na číslo odkazu stavu narazí na zjednodušující vyjádření podle následujících pravidel: Kreační operátor $a^\dagger = 1$, anihilační operátor $a = 0$. Například stav $(a^\dagger, a^\dagger, a, a^\dagger)$ může být v textu zmíněn jako (1101). Věříme, že toto sloučení a přeznačení pomůže čtenáři v lepší orientaci v množství popsaných kombinací.

2.4.1 4 operátory

Ze závěrů analýzy tří operátorů vyplynulo, že nejlépe bude dále rozvíjet kombinace (101), (110), (111), (100).

Máme tedy tyto možnosti: (1010), (1011), (1100), (1101), (1110), (1111), (1000), (1001).

- (1010), (1100), (1000)

Stavy

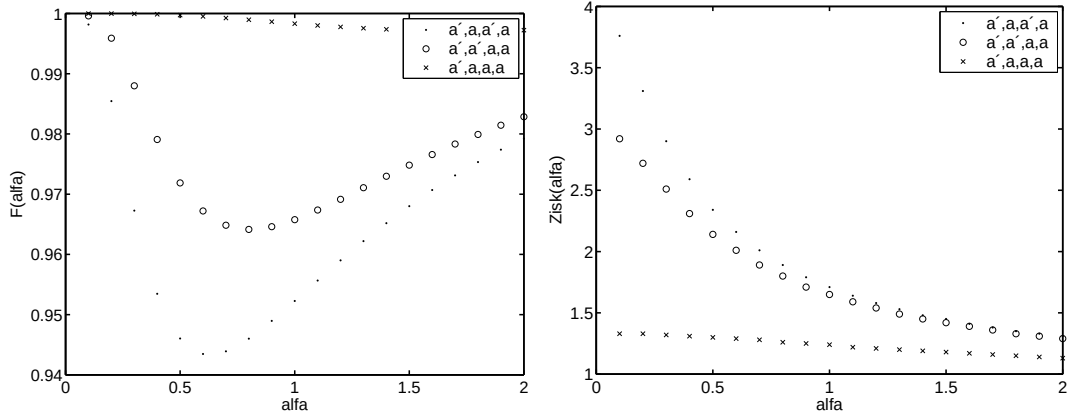
$$|\psi\rangle = \mathcal{N}aa^\dagger aa^\dagger|\alpha\rangle, \quad (29)$$

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}aaa^\dagger a^\dagger|\alpha\rangle, \quad (30)$$

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}aaaa^\dagger|\alpha\rangle, \quad (31)$$

patří všechny mezi vakuové a z toho vyplývá i jejich podobnost. Průběhy kombinací vidíme na obrázku 13.

U těchto tří vakuových kombinací si můžeme povšimnout, že fidelita neklesne ani pro jednu kombinaci pod 94% pro libovolná α . To je velmi dobrá vlastnost, a proto se na ně zaměříme i při aplikaci dalších operátorů. Za zmínku rovněž stojí kombinace (100), která téměř odpovídá stavu $|\alpha\rangle$. Strmost křivky popisující kombinaci (1010) a její rozdíl oproti kombinaci (10) naznačuje, že se bude propadat i pro větší počet operátorů. Na druhou stranu hodnoty zisku to výrazně kompenzují.



Obrázek 13: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci vakuových operátorů v závislosti na změně α .

- (1101),(1011),(1110),(1111) a (1001)

Zbývající nevakuové stavy

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} a^\dagger a a^\dagger a^\dagger |\alpha\rangle, \quad (32)$$

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} a^\dagger a^\dagger a a^\dagger |\alpha\rangle, \quad (33)$$

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} a a^\dagger a^\dagger a^\dagger |\alpha\rangle, \quad (34)$$

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} a^\dagger a^\dagger a^\dagger a^\dagger |\alpha\rangle, \quad (35)$$

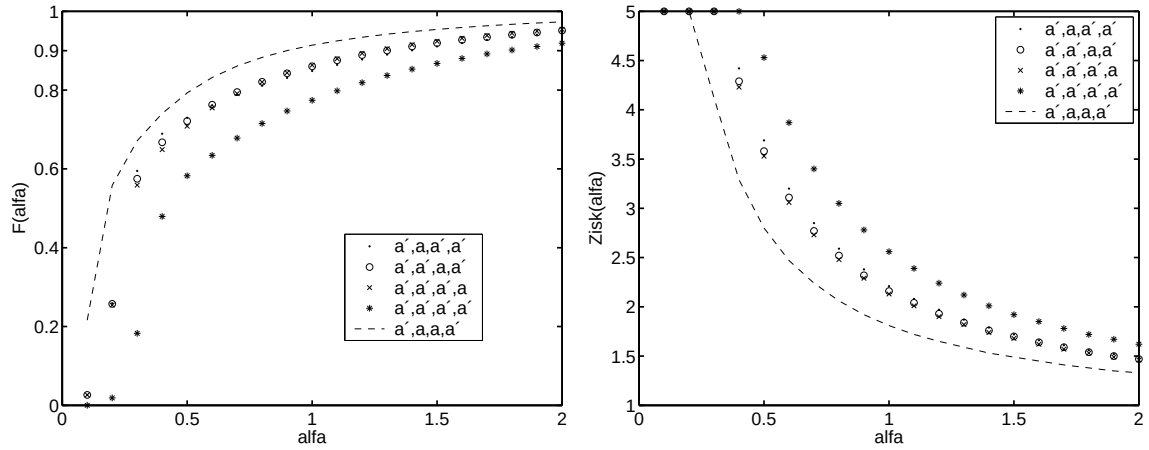
$$|\psi\rangle = \mathcal{N} a^\dagger a a a^\dagger |\alpha\rangle, \quad (36)$$

také okomentujeme dohromady.

Při pohledu na obrázek 14 nás upoutá podobnost křivek. Skutečnost, že jsou si tak podobné můžeme využít v tom, že se zaměříme na kombinace, jež tvoří vnější a vnitřní křivku. Všechny ostatní jsou mezi nimi a z našeho pohledu v podstatě nejsou zajímavé.

Vnější křivka fidelity je dána popisem stavu (1001). Tento výsledek není nijak oslnivý, ale my se v analýze 6ti operátorů zkusíme podívat, co s tímto stavem udělá další aplikace dvou anihilací a porovnáme, zda poskytne tak zajímavé výsledky jako samotná jedna kombinace (100)

Vnitřní křivka fidelity dána stavem (1111) popisuje neustálou kreaci. Toto neustálé zesilování posunuje 90% hranici čím dál více k větším hodnotám α .



Obrázek 14: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci několika kombinací operátorů v závislosti na změně α .

2.4.2 Závěr pozorování 4 operátorů

V analýze 4 operátorů se nám potvrdily závěry z analýzy tří operátorů ohledně slabých a silných koherentních stavů. Slabé stavy si drží vysoký zisk a fidelitu pro malá α . S růstem α postupně zisk ztrácí, ale jejich fidelita neklesá pod 94%.

U silných stavů je průběh opačný - fidelita opět roste se zvyšujícím se α .

Z každé z těchto skupiny vybereme kombinace, které můžeme považovat zvláštní nebo extrémní (ve smyslu, že zbytek kombinací leží mezi nimi) a budeme je analyzovat při dalším zvyšování operátorů. Budou to kombinace vycházející z (1010), (1010), (1000), (1111) a (1001).

2.5 Analýza stavů do 8 operátorů

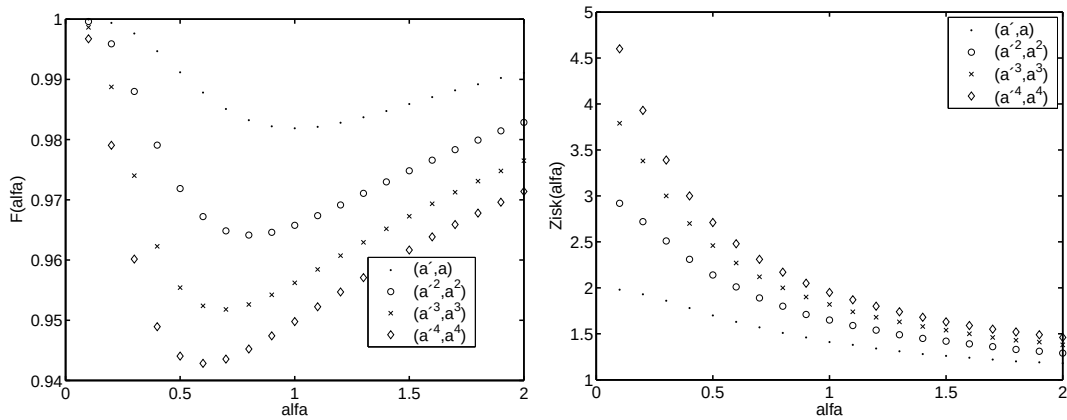
Na základě analýzy tří a čtyř operátorů si dovolíme rozhodnout o kombinacích, s nimiž budeme nadále pracovat. Při pohledu na výsledky není pochyb, že se budeme nadále zabývat stavy popsanými: $(1^M, 0^M)$, $((1, 0)^M)$, $(1, 0, 0)^M$. Jako extrémní se v analýze jeví i kombinace (1^M) a $(1, 0^{M-2}, 1)$. Absolutně největší fidelitu vykazuje stav $(1, 0^M)$, takže i ten se v analýze objeví. V popisu těchto kombinací figuruje písmeno M jako index počtu opakování dané skupiny. (například kombinace $(1, 0^M)$ pro $M = 5$ by vypadala $(1, 0, 0, 0, 0)$). Hodnoty M volíme tak abychom se počty operátorů vešli do 8.

2.5.1 $(1^M, 0^M)$

Stavy

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} a^M (a^\dagger)^M |\alpha\rangle, \quad (37)$$

Už podle analýzy menšího počtu operátorů očekáváme, že tato kombinace bude velmi výhodná a obrázek 15 nás v tom jen utvrzuje. Přidáváním operátorů $a^\dagger$ a a dosahujeme postupného, ale stálého zesilování při hodnotách fidelity neklesajících pod 94%. Pro užití osmi operátorů dostáváme zesílení v rozmezí od 4,6 pro $\alpha = 0,1$ do 1,46 pro $\alpha = 2$



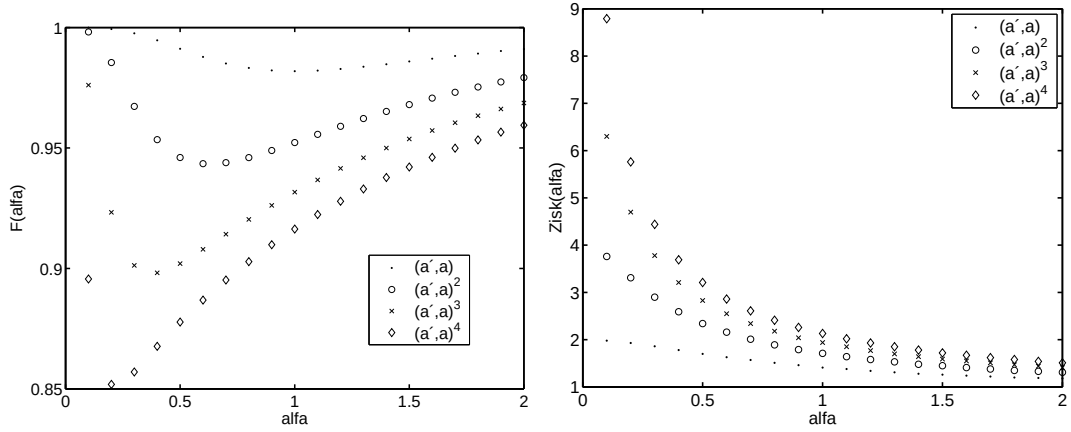
Obrázek 15: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci operátorů $(1^M, 0^M)$ v závislosti na změně α .

2.5.2 $((1, 0)^M)$

Stavy

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} (aa^\dagger)^M |\alpha\rangle, \quad (38)$$

Další kombinací je neustálé střídání kreačního a anihilačního operátoru. Jak je z obrázku 16 patrné, tato kombinace je nejužitečnější pro hodně malá α kdy je schopna poskytovat výrazných zesílení při zachování použitelné fidelity. Jako nejvýhodnější se přitom jeví kombinace $((1, 0)^3)$, která celá leží nad hranicí fidelity a přitom je schopna poskytnout zesílení až 6,3.



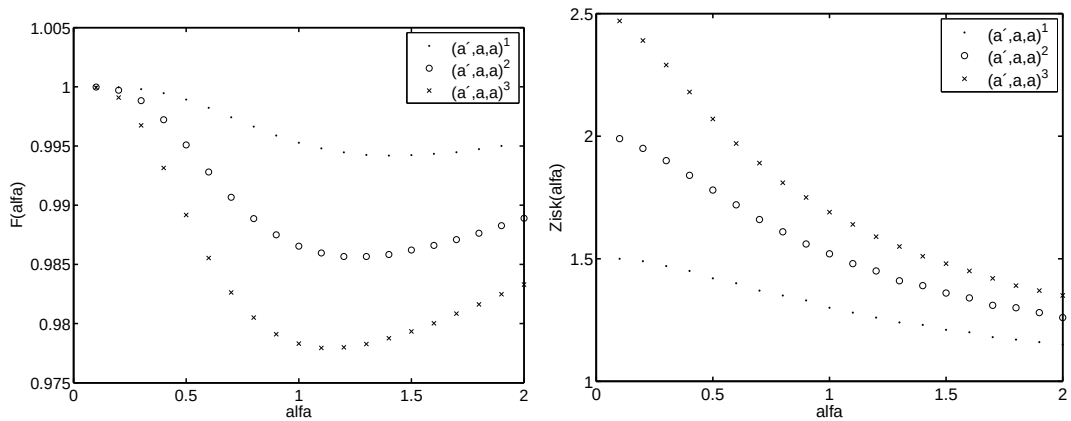
Obrázek 16: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci operátorů $((1,0)^M)$ v závislosti na změně α .

2.5.3 $((1,0,0)^M)$

Stavy

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}(aaa^\dagger)^M |\alpha\rangle, \quad (39)$$

Kombinace daná $((1,0,0)^M)$ se dost podobá kombinaci $(1^M, 0^M)$, kdy dostáváme se zvyšujícím se M pozvolně, ale stále vyšší hodnoty zisku. Fidelity neklesne při užití 9ti operátorů pod 97% a zisk je se v takovém případě pohybuje v rozmezí od 2,47 do 1,35 na námi zvoleném intervalu α . Těmto vlastnostem přibližně odpovídá kombinace $(1^2, 0^2)$, kdy máme fidelity stále nad 96% a zisk od 2,92 do 1,29. Troufám si tedy tvrdit, že vzhledem k rozdílu v náročnosti fyzikálně aplikovat buď 4 nebo 9 operátorů, můžeme i tuto kombinaci vyhodnotit jako méně použitelnou. Grafy na obrázku 17.



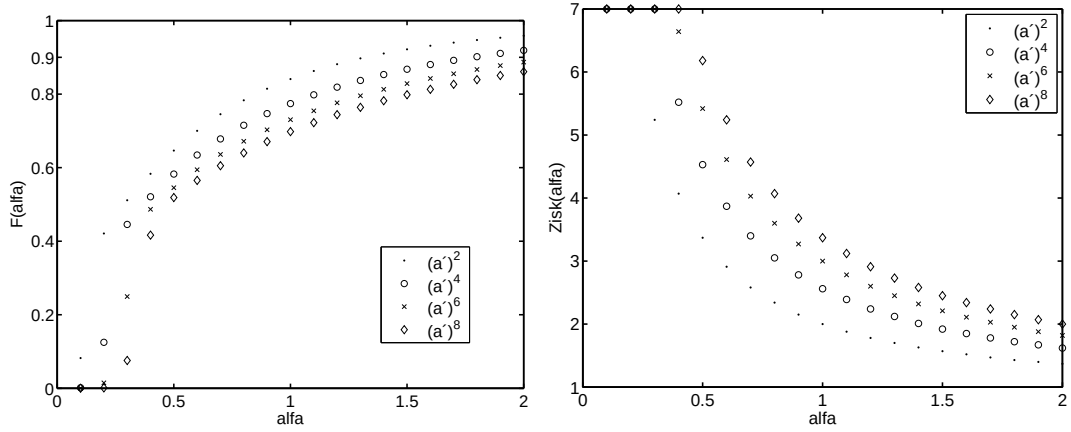
Obrázek 17: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci operátorů $((1,0,0)^M)$ v závislosti na změně α .

2.5.4 (1^M)

Stavy

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}(a^\dagger)^M |\alpha\rangle, \quad (40)$$

Jsou zde uvedeny jako extrémní případ. Jak je z obrázku 18 zřejmé, zesilování touto formou je sice účinné, neboť stále zaznamenáváme přibývajících zisk. Znovu se však posunujeme k větším a větším hodnotám α .



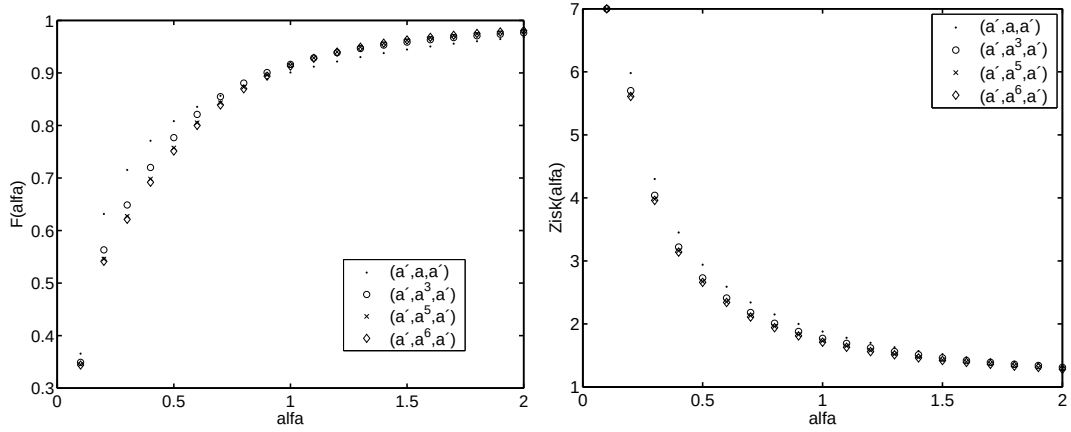
Obrázek 18: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci operátorů (1^M) v závislosti na změně α .

2.5.5 $(1, 0^{M-2}, 1)$

Stavy

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} a^\dagger a^{(M-2)} a^\dagger |\alpha\rangle, \quad (41)$$

jsou druhým extrémem, který nám nabídla 4-operátorová analýza. Podle grafiky na obrázku 19 vidíme, že změny M stav prakticky nemění. Dokonce můžeme prohlásit, že nejlépe na tom tato kombinace byla při prostém užití tří operátorů (101). Zisky pod hodnotou 2 při fidelitě 90% a fakt, že kombinaci (101) jsme již studovali, nedávají důvod k tomu dále se této kombinaci věnovat.



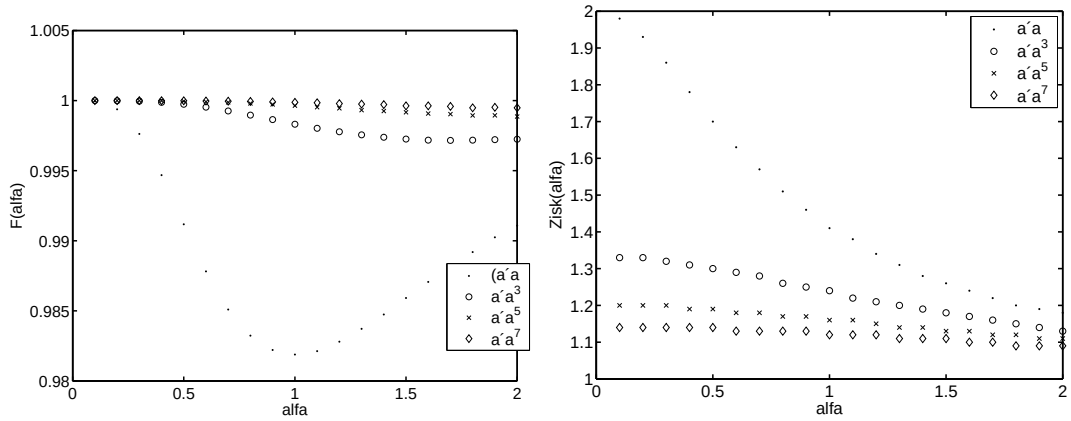
Obrázek 19: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci operátorů $(1, 0^{M-2}, 1)$ v závislosti na změně α .

2.5.6 $(1, 0^M)$

Stavy

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} a^M a^\dagger |\alpha\rangle, \quad (42)$$

popsané na obrázku 20 vykazují téměř absolutní fidelitu. Zároveň si všímáme, že při této její téměř 100% hodnotě je zisk pořád větší než jedna. Máme tedy zesílený téměř dokonalý koherentní stav.



Obrázek 20: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci operátorů $(1, 0^M)$ v závislosti na změně α .

2.6 Závěr

Vidíme, že nejlepších výsledků dosahují vakuové kombinace $(1^M, 0^M)$, $(1, 0^M)$ a $((1, 0)^M)$. Za nevakuové tu máme kombinaci (1^M) .

2.6.1 Zvláštní modelace s více než 8 operátorů

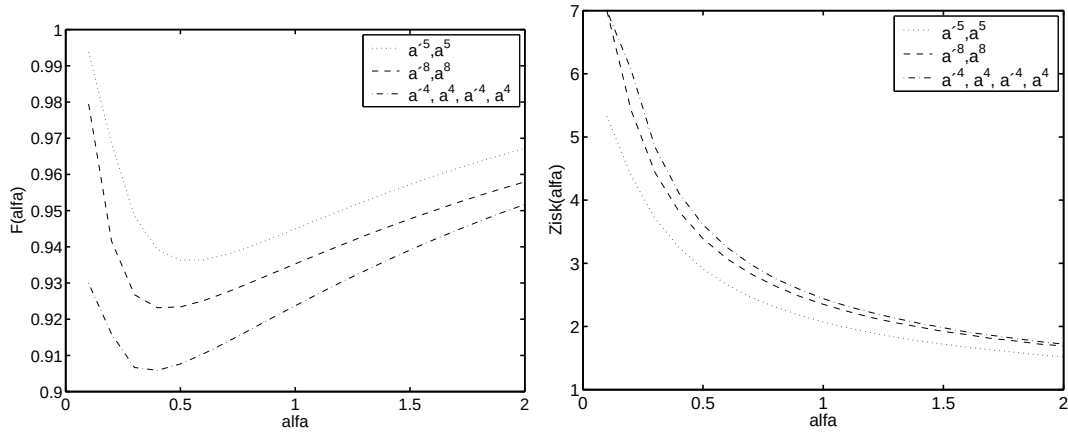
V této poslední sekci se zaměříme na modelování malinko jinak než v předchozích způsobech. Půjde nám o dvě věci. Tou první bude ještě klasický popis $(1^M, 0^M)$ tak jak jsme ho dělali doposud, ale nyní srovnaný s kombinací $(1^M, 0^K, 1^K, 0^M)$.

Druhou věcí, na kterou se podíváme je chování kombinace 1^M za hranicí $\alpha = 2$. Vyjdeme z předchozí kapitoly, kde byly extrémní případy popsány kombinacemi $(1)^2$ a $(1)^8$.

- $((a^\dagger)^M, a^M), (1^M, 0^K, 1^K, 0^M)$

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} a^M (a^\dagger)^M |\alpha\rangle, \quad (43)$$

Stavy $1^M, 0^M$ se dlouhodobě jeví jako nejvíce zesilující. Potvrzuje se to i tentokrát. S poklesy fidelity (pro 16 operátorů stále nad 92%) stále roste zisk. Popis dané kombinace je na obrázku 21. Co je však zajímavější, tak, že pro daný počet 18 operátorů může kombinací vymykající se předchozím pravidlům, totiž $(1^4, 0^4, 1^4, 0^4)$, získat zesílení malinko větší při zachování fidelity nad 90%.



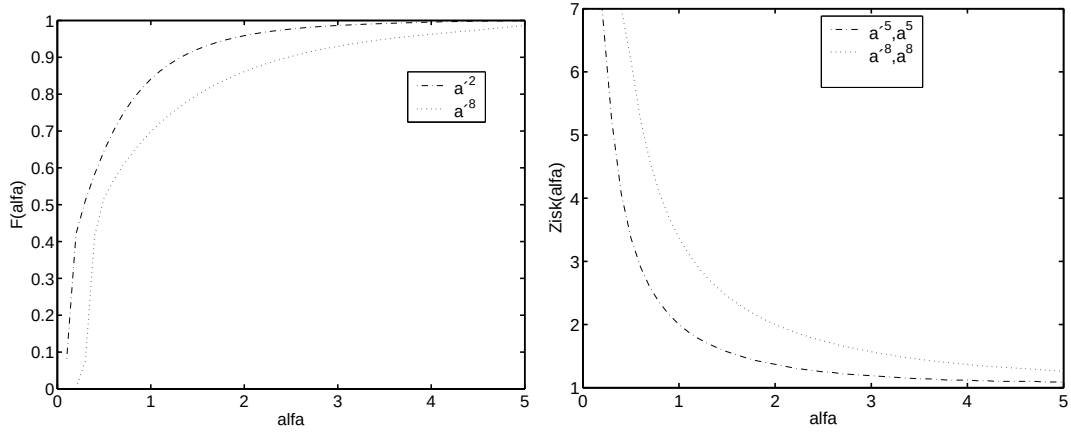
Obrázek 21: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci speciální kombinace operátorů v závislosti na změně α .

- (1^M)

Tyto stavy

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} (a^M |\alpha\rangle), \quad (44)$$

nám v této kapitole mají pomoci ukázat, jak se nevakuové kombinace chovají za hranicí $\alpha = 2$. Podle obrázku 22 vidíme, že jejich fidelity roste ke 100% a zisk stejně rychle klesá k 1. Při detailnějším pohledu vidíme, že ačkoli už kombinace dosáhly 100% zisk si drží ještě malinko nad 1. I tu máme tedy potvrzeno zesílení.



Obrázek 22: Porovnání fidelity a zisku pro aplikaci většího počtu operátorů ($((a^\dagger)^M)$) v závislosti na změně α .

2.6.2 Závěr zvláštní modelace nad 8 operátorů

Studium vyšších počtů operátorů nám ukázalo, že ačkoliv se snažíme budovat kombinace logickou postupnou cestou, nakonec zjišťujeme, že nejvyšších výsledků dosáhneme ne zcela přirozenou analýzou, jako je tomu v případě $(1^4, 0^4, 1^4, 0^4)$.

Stav $((a^\dagger)^M)$ nám pro změnu ukázal chování za pomyslnou bariérou $\alpha = 2$. Vidíme, že stavy mají i nadále tendenci zvyšovat fidelity a snižovat zisk.

3 Závěr

Cílem naší práce bylo pokusit se modelovat bezšumový zesilovač koherentních stavů za pomoci přidávání a odebrání jednotlivých fotonů.

Na úvod jsme se seznámili s problematikou přenosu kvantových signálů. Uvědomili jsme si, že při šíření signálu dochází k jeho ztrátám, které je nutné kompenzovat. Tato kompenzace však není snadná, protože zesilováním signálu do něj vnášíme šum.

Za pomoci aparátu kvantové fyziky jsme začali uvažovat o bezšumovém zesilovači, který by dokázal signál zesilovat.

Vysvětlili jsme si význam anihilačního a kreačního operátoru a ukázali si, jak umí maniplovat s fotony. Následně jsme postupnou analýzou prošli možnosti kombinací od tří do osmi operátorů, kterými můžeme stavy upravovat.

Hlavním zjištěním naší práce je, že existují dva druhy kvantových stavů. Kvantové stavy silné-bezvakuové, mající velkou amplitudu α a kvantové stavy slabé-vakuové s malou amplitudou. Každý z těchto druhů má svá specifika a uplatní se u něj jiné kombinace operátorů. Pro slabé stavy se jeví jako neoptimálnější zesilovat pomocí kombinací $(a^\dagger, a^M)$ a $((a^\dagger)^M, a^M)$. Pro silné stavy je pak nejvhodnější kombinace $((a^\dagger)^M)$.

Vyvrátili jsme také původní myšlenku, že takovýto zesilovač by byl vhodný pouze pro slabé stavy. Dokázali jsme, že lze úspěšně dosáhnout zesílení při zachování hodnoty koherence i pro silné koherentní stavy.

Literatura

- [1] *Ulf Leonhardt: Measuring the quantum state of light*
Cambridge University Press 1997, ISBN 0-521-49730-2
- [2] *J.J. Sakurai: Modern Quantum Mechanics*
Addison-Wesley Publishing Company, Inc 1994, ISMN 0-201-53929-2
- [3] *Petr Marek, Radim Filip: Nelaserový zesilovač světla?*
Československý časopis pro fyziku (ročník 2010, svazek 60, číslo 4)
- [4] *Petr Marek, Radim Filip: Coherent-state phase concentration by quantum probabilistic amplification*
Physical Review A 81, 022302 (2010)
- [5] *T.C. Ralph, A.P. Lund: Nondeterministic noiseless linear amplification of quantum systems*
Journal-ref: Quantum Communication Measurement and Computing Proceedings of 9th International Conference, Ed. A.Lvovsky, 155-160 (AIP, New York 2009).
- [6] *A. Zavatta, J. Fiurášek, M. Bellini: A hight-fidelity noiseless amplifier for quantum light states*
Nature Photonics 5, 52 (2011)