UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Numerické metody určování imaginárních kořenů polynomů

Katedra algebry a geometrie
Vedoucí bakalářské práce: **Doc. RNDr. Petr Emanovský, Ph. D.**
Vypracoval(a): **Adéla Filipová**
Studijní program: IA18 Matematika pro vzdělávání
Studijní obor Matematika pro vzdělávání/Historické vědy
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2024

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Adéla Filipová

Název práce: Numerické metody určování imaginárních kořenů polynomů

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra algebry a geometrie

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Petr Emanovský, Ph. D.

Rok obhajoby práce: 2024

Abstrakt: Tato bakalářská práce se věnuje numerickým metodám určování imaginárních kořenů polynomů. Teoretická část se skládá ze tří částí. V první části jsou rozebrány základní pojmy z oblasti polynomů. Druhá část se věnuje reálným a imaginárním kořenům polynomů. Ve třetí části jsou představeny tři metody, pomocí nichž hledáme imaginární kořeny. Praktickou část tvoří sbírka šesti řešených příkladů, jejichž dílčí části jsou řešeny v programu MS Excel.

Klíčová slova: polynomy, numerické metody, imaginární kořeny

Počet stran: 49

Počet příloh: 1

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Adéla Filipová

Title: Numerical methods of polynomial imaginary roots finding

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Algebra and Geometry

Supervisor: Doc. RNDr. Petr Emanovský, Ph. D.

The year of presentation: 2024

Abstract: This bachelor thesis deals with numerical methods for determination imaginary roots of polynomials. The theoretical part consists of three parts. In the first part, the basic concepts of polynomials are discussed. The second part is devoted to real and imaginary roots of polynomials. In the third part, three methods are introduced to find imaginary roots. The practical part consists of a collection of six solved examples, parts of which are solved in MS Excel program.

Key words: polynomials, numerical methods, imaginary roots

Number of pages: 49

Number of appendices: 1

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana Doc. RNDr. Petra Emanovského, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne 13. srpna 2024 .....

Adéla Filipová

Poděkování

Na totmo místě bych ráda poděkovala vedoucímu mé bakalářské práce Doc. RNDr. Petru Emanovskému, Ph.D. za cenné rady a čas, který mi při psaní této práce věnoval. Dále bych chtěla poděkovat své rodině za jejich trpělivost a podporu.

Obsah

Úvod **7**

1 Základní pojmy **8**

2 Separace reálných a imaginárních kořenů polynomů **12**

3 Metody určování imaginárních kořenů polynomů **15**
3.1 Laguerrova metoda 15
3.2 Bairstowova metoda 18
3.3 Graeffova metoda 21

4 Příklady **28**

Závěr **48**

Literatura **49**

Úvod

Tématem této bakalářské práce jsou numerické metody určování imaginárních kořenů polynomů. Cílem této práce je nastínit studentům vybrané metody, kterých můžeme použít pro hlednání imaginárních kořenů polynomů. Zatímco teoretická část se zabývá nejdůležitějšími poznatky o polynomech a vybranými numerickými metodami, v praktické části se nachází sbírka ukázkových příkladů.

Teoretická část práce se skládá z několika kapitol. V první kapitole jsou zopakovány základní poznatky o polynomech. Druhá kapitola je zaměřena zejména na lokalizaci a metody určení počtu reálných a imaginárních kořenů polynomů.

Nejdůležitější kapitolou teoretické části je kapitola třetí. Seznámíme se v ní se třemi metodami, kterých můžeme použít pro určení imaginárních kořenů polynomů. Konkrétně se jedná o metody Laguerrovu, Bairstowovu a Graeffovu. Popis každé metody je ukončen ukázkovým příkladem, na kterém je předvedeno, jak s konkrétní metodou pracujeme v praxi.

V poslední kapitole se nachází řešené příklady, které vychází z metod popsaných v teoretické části. Jedná se o šest příkladů, které jsou postupně řešeny všemi třemi metodami. Tyto příklady jsou, spolu s ukázkovými příklady ze třetí kapitoly, řešeny v programu MS Excel.

Kapitola 1

Základní pojmy

V první kapitole uvedeme základní poznatky o polynomech. Zároveň zmíníme stěžejní věty a definice, na které se budeme později odkazovat. Více k této kapitole lze nalézt například zde [5].

Definice 1.1 Nechť T je těleso a $z \notin T$ prvek, který nazveme *neurčitá*. Výraz ve tvaru

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \tag{1.1}$$

$a_0, \ldots, a_n \in T$ a $n \in \mathbf{N}_0$, nazveme *polynom jedné neurčité z nad tělesem T*. Prvkům $a_0, \ldots, a_n$ říkáme *koeficienty polynomu* $f(z)$. Stupeň polynomu $f(x)$ budeme značit $\mathrm{st} f(x)$. Polynom je *stupně* n, jestliže $a_n \neq 0$. Množinu všech polynomů jedné neurčité z nad tělesem T označíme symbolem $T[z]$.

Definice 1.2 Nechť máme polynomy $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, $g(z) = b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0$ nad tělesem T.
(i) Součtem polynomů $f(z)$, $g(z)$ je polynom $f(z) + g(z) = v_k z^k + \ldots + +v_1 z + v_0$, kde $v_i = a_i + b_i$, pro $i = 0, 1, \ldots, k$. Zároveň $k = \mathrm{st}(f(z) + g(z)) = \max\{\mathrm{st} f(z),\ \mathrm{st} g(z)\}$.
(ii) Součinem polynomů $f(z)$, $g(z)$ je polynom $f(z) \cdot g(z) = w_p z^p + \ldots + w_1 z + +w_0$, kde $w_k = \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j$, pro $k = 0, 1, \ldots, p$. Zároveň $p = \mathrm{st} f(z) + \mathrm{st} g(z)$.

Věta 1.3 $(T[z], +, \cdot)$ tvoří obor integrity.

Věta 1.4 Nechť $f(z) \in T[z]$ je nenulový polynom a nechť $\xi \in T$. Potom existuje jediný polynom $g(z) \in T[z]$ takový, že

$$f(z) = (z - \xi) g(z) + f(\xi). \tag{1.2}$$

Výraz $(z - \xi)$ tedy dělí $f(z)$ v $T[z]$ právě tehdy, když $f(\xi) = 0$ v T. Tomuto výrazu potom říkáme *lineární činitel*.

Definice 1.5 Prvek $\xi \in T' \supseteq T$, kde T' je nadtěleso tělesa T, nazýváme *kořen polynomu* $f(z) \in T[z]$ právě tehdy, když platí $f(\xi) = 0$.

Věta 1.6 (Bezoutova věta) Nechť $f(z) \in T[z]$ je polynom stupně $n \geq 1$. Prvek $\xi \in T$ je *kořenem polynomu* $f(z)$ právě tehdy, když $(z - \xi)$ dělí $f(z)$ v $T[z]$.

Definice 1.7 Nechť $f(z) \in T[z]$ je polynom stupně $n \geq 1$. Nechť $k \in \mathbf{N}$ a $\xi \in T' \supseteq T$, kde T' je nadtěleso tělesa T. Řekneme, že prvek ξ je *k-násobným kořenem polynomu* $f(z)$, jestliže $(z - \xi)^k$ dělí $f(z)$, ale $(z - \xi)^{k+1}$ nedělí $f(z)$ v $T[z]$.

Věta 1.8 (Základní věta algebry) Těleso komplexních čísel je algebraicky uzavřené. Nebo-li každý polynom nad tělesem $\mathbf{C}$ stupně $n \geq 1$ má v $\mathbf{C}$ právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik činí jeho násobnost. Polynom tvaru (1.1) můžeme tedy také zapsat ve tvaru

$$f(z) = a_n(z - \xi_1)(z - \xi_2)\dots(z - \xi_n). \tag{1.3}$$

Je důležité uvědomit si také, že jsou-li všechny koeficienty a_i reálné, potom ke každému imaginárnímu kořenu $\xi_1 = a + b\mathrm{i}$ existuje také komplexně sdružený kořen $\xi_2 = a - b\mathrm{i}$.

Na konci této kapitoly uvedeme princip *Hornerova schématu*. Jedná se o efektivní způsob, jak můžeme nejen jednoduše dělit polynom $f(z) \in T[z]$ lineárním činitelem $(z - \xi)$, ale také zjistit hodnotu polynomu $f(z)$ v libovolném $\xi \in T$.

Věta 1.9 Nechť $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 \in T[z]$ je polynom stupně $n \in \mathbf{N}$. Dále nechť polynom $g(z) = b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0$ je podíl a $f(\xi)$ je zbytek po dělení polynomu $f(z)$ lineárním činitelem $(z - \xi)$, kde $\xi \in T$. Pro polynom $g(z)$ potom platí tyto rovnosti

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \\ b_{n-2} &= \xi b_{n-1} + a_{n-1}, \\ b_{n-3} &= \xi b_{n-2} + a_{n-2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$b_1 = \xi b_2 + a_2,$$
$$b_0 = \xi b_1 + a_1.$$

Zároveň platí $f(\xi) = \xi b_0 + a_0$.
Tyto vztahy můžeme schemtaicky zapsat následovně.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
ξ		ξb_{n-1}	ξb_{n-2}	$\dots$	ξb_1	ξb_0
	$\underbrace{a_n}_{b_{n-1}}$	$\underbrace{\xi b_{n-1} + a_{n-1}}_{b_{n-2}}$	$\underbrace{\xi b_{n-2} + a_{n-2}}_{b_{n-3}}$	$\dots$	$\underbrace{\xi b_1 + a_1}_{b_0}$	$\underbrace{\xi b_0 + a_0}_{f(\xi)}$

Ukázkový příklad 1 Hornerovým schématem vydělte polynom $f(z) = z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 40$ lineráním činitelem $(z + 3)$ a určete zbytek $f(-3)$.

Protože dělíme polynomem $(z + 3)$, hodnota $\xi = -3$. Podle výše popsaného postupu si vytvoříme tabulku a vypočítáme koeficienty polynomu $g(z)$.

	1	-2	4	0	-40
-3		-3	15	-57	171
	1	-5	19	-57	131

Koeficienty hledaného polynomu $g(z)$ vidíme v posledním řádku, tedy $g(z) = z^3 - 5z^2 + 19z - 57$, a zbytek $r = f(\xi) = 131$. Takže pro polynom $f(z)$ platí

$$f(z) = (z + 3)(z^3 - 5z^2 + 19z - 57) + 131.$$

Zvláštním případem Hornerova schématu je tzv. zobecněné Hornerovo schéma, kdy polynom $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ dělíme kvadratickým trojčlenem $d(z) = z^2 + pz + q$. Budeme provádět tzv. dvojí dělení, pro jehož potřeby si zhotovíme následující tabulku.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_3	a_2	a_1	a_0
$-p$		$-pb_n$	$-pb_{n-1}$	$\dots$	$-pb_4$	$-pb_3$	$-pb_2$	
$-q$			$-qb_n$	$\dots$	$-qb_5$	$-qb_4$	$-qb_3$	$-qb_2$
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_3	b_2	b_1	b_0
$-p$		$-pc_n$	$-pc_1$	$\dots$	$-pc_4$			
$-q$			$-qc_n$	$\dots$	$-qc_5$	$-qc_4$		
	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	$\dots$	c_3	c_2		

Po prvním dělení je polynom $g(z)$ ve tvaru $b_n z^{n-2} + \ldots + b_3 z + b_2$. Pro jeho koeficienty platí:

$$\begin{aligned} b_j &= a_j - pb_{j-1} - qb_{j-2}, \quad j = 1, \ldots, n-2, \\ b_n &= a_n, \\ b_{n-1} &= a_{n-1} - pb_n, \\ b_1 &= a_1 - pb_2 - qb_3. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Po druhém dělení má polynom $g(z)$ tvar $c_n z^{n-4} + \ldots + c_5 z + c_4$, kde koeficienty c_j jsou určeny podobně jako výše:

$$\begin{aligned} c_j &= b_j - pc_{j-1} - qc_{j-2}, \quad j = 3, \ldots, n-2, \\ c_n &= b_n, \\ c_{n-1} &= b_{n-1} - pc_n, \\ c_2 &= b_2 - qc_4. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ukázkový příklad 2 Pomocí zobecněného Hornerova schématu vydělte polynom $f(z) = 4z^5 + 2z^4 - z^3 + 8z^2 - 4z + 1$ kvadratickým trojčlenem $d(z) = z^2 - 3z + 2$.

Vytvoříme si tabulku, kde do prvního řádku vepíšeme koeficienty polynomu $f(z)$. Do prvního sloupce zaneseme hodnoty $p = -3$, $q = 2$ s opačným znaménkem. Zbývající hodnoty vypočítáme podle vztahů (1.4) a (1.5).

	4	2	−1	8	−4	1
3		12	42	99	237	
−2			−8	−28	−66	−158
	4	14	33	79	167	−157
3		12	78			
−2			−8	−52		
	4	26	103	27		

Z posledního řádku získáme koeficienty výsledného polynomu $g(z) = 4z^3 + 26z^2 + 103z + 27$.

Kapitola 2

Separace reálných a imaginárních kořenů polynomů

Jedním z prvních důležitých kroků při určování kořenů polynomu je jejich separace. Tím myslíme nalézt intervaly, ve kterých se nachází právě jeden kořen. V následující kapitole si tedy ukážeme, jak určit počet kořenů polynomu, které leží v daném intervalu. Zároveň se také podíváme, jak můžeme určit, kolik má polynom kladných a kolik záporných reálných kořenů, a zda má polynom kořeny imaginární.

Mějme polynom $f(z)$ nad tělesem $\mathbf{R}$, který budeme zapisovat ve tvaru

$$f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0. \tag{2.1}$$

Kořeny (reálné i imaginární) tohoto polynomu budeme značit písmeny $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Definice 2.1 [3] Nechť $\xi_1, \ldots, \xi_m$ je posloupnost nenulových reálných čísel. Pro libovlonou dvojici ξ_k, ξ_{k+1} platí:
(i) Jestliže $\xi_k \cdot \xi_{k+1} < 0$, řekneme, že pro ξ_k, ξ_{k+1} *nastává znaménková změna.*
(ii) Jestliže naopak $\xi_k \cdot \xi_{k+1} > 0$, řekneme, že dvojice ξ_k, ξ_{k+1} *znaménko zachovává.*

Věta 2.2 (Descartova věta) [3] Počet kladných reálných kořenů polynomu nad $\mathbf{R}$ (počítáno s násobností) je buď roven počtu znaménkových změn v poslosupnosti jeho koeficientů $a_0, \ldots, a_n$ nebo je o sudé číslo menší.

Nerovná-li se navíc žádný z koeficientů $a_0, \ldots, a_n$ nule, platí, že počet záporných reálných kořenů se rovná počtu zachování znamének v této posloupnosti nebo je o sudé číslo menší.

Věta 2.3 (Budan-Fourierova věta) [11] Nechť a, b jsou reálná čísla. Mějme polynom (2.1), pro který platí $a_0 > 0$. Dále nechť $a < b$ a zároveň $f(a)f(b) \neq 0$. Označme $\sigma(z)$ počet znaménkových změn v posloupnosti $f(z), f'(z), \ldots, f^{(n)}(z)$. Potom počet reálných kořenů polynomu (2.1), které leží v intervalu $<a, b>$, se rovná hodnotě $\sigma(a) - \sigma(b)$.

Symboly $f'(z), f''(z) \ldots, f^{(n)}(z)$ z věty (2.3) rozumíme postupně první až n-tou derivaci polynomu $f(z)$.

V následující části se budeme zabývat způsobem, jak můžeme určit počet reálných kořenů polynomu v daném intervalu.

Definice 2.4 [1] *Sturmovou posloupností* příslušnou polynomu $f(z)$ nazveme posloupnost reálných polynomů

$$f_0(z), f_1(z) \ldots, f_m(z),$$

kde $f_0(z) = f(z)$, $f_1(z) = f_0'(z)$ a polynomy $f_k(z)$, $k = 2, \ldots, m$, jsou rovny zbytku po dělení polynomu $f_{k-2}(z)$ polynomem $f_{k-1}(z)$ a vynásobenému číslem -1. V případě, že polynom $f(z)$ nemá násobné kořeny, je poslední polynom $f_m(z)$ nenulové reálné číslo.

Označme symbolem $\sigma(z)$ počet znaménkových změn ve Sturmově posloupnosti polynomů $f_0(z), \ldots, f_m(z)$.

Věta 2.5 Nechť polynom $f(z)$ nemá násobné kořeny a nechť $f(a) \cdot f(b) \neq 0$ pro $a, b \in \mathbf{R}$. Potom počet navzájem různých reálných kořenů polynomu $f(z)$ ležících v intervalu $<a, b>$ je roven číslu $\sigma(a) - \sigma(b)$.

Důsledek 2.6 Je-li $f(z) \neq 0$, pak pro počet kladných kořenů σ^+ a pro počet záporných kořenů σ^- polynomu $f(z)$ platí:

$$\sigma^+ = \sigma(0) - \sigma(+\infty),$$
$$\sigma^- = \sigma(-\infty) - \sigma(0).$$

Důsledek 2.7 Nechť polynom $f(z)$ stupně n nemá násobné kořeny. Aby měl polynom $f(z)$ všechny kořeny reálné, stačí, aby platilo

$$\sigma(-\infty) - \sigma(+\infty) = n.$$

Všechny kořeny polynomu $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, kde $a_n > 0$, jsou reálné tehdy a jen tehdy, platí-li:
(i) Sturmova posloupnost má $n + 1$ prvků, tedy $m = n$,

(ii) u všech polynomů Sturmovy posloupnosti jsou koeficienty u nejvyšších mocnin proměnné z kladné.

Ukázkový říklad 3 Určete pomocí Sturmovy posloupnosti intervaly, kde leží reálné kořeny polynomu $f(z) = z^4 + 2z^3 - 5z^2 + 4z + 1$. Zároveň určete počet imaginárních kořenů polynomu $f(z)$.

Nejdříve sestrojíme Sturmovu posloupnost příslušnou polynomu $f(z)$, která vypadá takto

$$\begin{aligned} f_0(z) &= z^4 + 2z^3 - 5z^2 + 4z + 1 \\ f_1(z) &= 4z^3 + 6z^2 - 10z + 4, \\ f_2(z) &= -4z^3 - 6z^2 + 10z - 4, \\ f_3(z) &= 13z^2 - 17z - 10, \\ f_4(z) &= 164z + 267, \\ f_5(z) &= -1402193. \end{aligned}$$

Pro určení počtu reálných kořenů si sestavíme tabulku

z	$f_0(z)$	$f_1(z)$	$f_2(z)$	$f_3(z)$	$f_4(z)$	$\sigma(z)$
$-\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	1
$+\infty$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	3
0	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	3
-1	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	2
-4	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	1
-3	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	2

Z tabulky plyne

$$\begin{aligned} \sigma(\infty) - \sigma(-\infty) = 2 \quad &\rightarrow \quad \text{2 reálné kořeny} \\ \sigma(\infty) - \sigma(0) = 0 \quad &\rightarrow \quad \text{žádný reálný kořen} \\ \sigma(0) - \sigma(-\infty) = 2 \quad &\rightarrow \quad \text{2 reálné kořeny} \\ \sigma(0) - \sigma(-1) = 1 \quad &\rightarrow \quad \text{1 reálný kořen v intervalu <0;-1>} \\ \sigma(-3) - \sigma(-4) = 1 \quad &\rightarrow \quad \text{1 reálný kořen v intervalu <-3;-4>} \end{aligned}$$

Jelikož je polynom $f(z)$ 4. stupně a má 2 reálné (záporné) kořeny, má také 2 imaginární komplexně sdružené kořeny.

Kapitola 3

Metody určování imaginárních kořenů polynomů

Pro výpočet imaginárních kořenů polynomu lze použít některých metod, pomocí kterých určujeme reálné kořeny. Nejznámější takovou metodou je Newtonova metoda, kde stačí použít komplexní počáteční aproximaci. Její popis lze najít například v [1] nebo [8]. V této práci bych se však ráda zaměřila na speciální metody určování imaginárních kořenů polynomů, z nichž některé si nyní popíšeme.

3.1. Laguerrova metoda

Nejdříve si ukážeme, jak tato metoda funguje pro polynomy s reálnými koeficienty $a_i, i = 1, \ldots, n$, a navzájem různými reálnými kořeny $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Postup je odvozen z [6], [7], podrobnější popis potom můžeme najít například v [8] nebo [10].

Laguerrova metoda je založena na myšlence opakovaného sestrojování parabol, jejichž průsečíky s osou x leží co nejblíže ke krajním bodům intervalu $I_i =< \xi_i, \xi_{i+1} >$. S každou další sestrojenou parabolou se budeme čím dál více přibližovat k jednomu z krajních bodů intervalu I_i, tedy ke kořenu samotného polynomu.

Nechť máme polynom

$$f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0, \tag{3.1}$$

jehož kořeny označíme ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Polynom $f(z)$ přepíšeme na rozklad lineárních činitelů

$$f(z) = a_n(z - \xi_1)(z - \xi_2)\ldots(z - \xi_n). \tag{3.2}$$

Polynom $f(z)$ zderivujeme:

$$\begin{aligned} f'(z) &= (z-\xi_2)\dots(z-\xi_n) + (z-\xi_1)(z-\xi_3)\dots(z-\xi_n) + \\ &\quad + \dots + \dots (z-\xi_{n-1}) = \\ &= f(z)\Big(\frac{1}{z-\xi_1} + \frac{1}{z-\xi_2} + \dots + \frac{1}{z-\xi_n}\Big). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Zlogaritmováním rovnice (3.2) získáme

$$\ln|f(z)| = \ln|z-\xi_1| + \ln|z-\xi_2| + \dots + \ln|z-\xi_n|. \tag{3.4}$$

Označme písmeny G, H první a druhou derivaci rovnice (3.4), pro které platí

$$\begin{aligned} G &= \frac{d\,\ln|f(x)|}{dx} = \frac{1}{z-\xi_1} + \dots + \frac{1}{z-\xi_n} = \frac{f'(z)}{f(z)}, \\ H &= \frac{d^2\ln|f(x)|}{dx^2} = \frac{1}{(z-\xi_1)^2} + \dots + \frac{1}{(z-\xi_n)^2} = \Big[\frac{f'(z)}{f(z)}\Big]^2 - \frac{f''(z)}{f(z)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Předpokládáme-li, že vzdálenost kořene ξ_1 od současné aproximace z je rovna $a = z - \xi_1$ a vzdálenost ostatních kořenů je rovna $b = z - \xi_i$, $i = 2, 3, \dots, n$, můžeme hodnoty G, H vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{a} + \frac{n-1}{b}, \\ H &= \frac{1}{a^2} + \frac{n-1}{b^2}. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy rovnic získáme

$$a = \frac{n}{G \pm \sqrt{(n-1)(nH - G^2)}}. \tag{3.6}$$

Po dosazení vztahů (3.5) do (3.6) a následných úpravách získáme

$$a = \frac{nf(z)}{f'(z) \pm \sqrt{(n-1)[(n-1)(f'(z))^2 - nf(z)f''(z)]}} \tag{3.7}$$

Následující kořen získáme pomocí vztahu

$$z_{k+1} = z_k - \frac{nf(z_k)}{f'(z_k) \pm \sqrt{H(z_k)}}, \tag{3.8}$$

kde n rozumíme stupeň polynomu a

$$H(z_k) = (n-1)[(n-1)(f'(z_k))^2 - nf(z_k)f''(z_k)].$$

Znaménko ve vztahu (3.8) vybereme stejné jako u $f(z_k)$. V případě imaginárních kořenů znaménko vybíráme tak, aby jmenovatel měl co největší absolutní hodnotu.

Jestliže vybereme za počáteční aproximaci z_0 a reálné kořeny jsou seřazeny tak, že $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n$, pak platí:
(i) Bude-li $z_0 \in (\xi_{i-1}, \xi_i),\ i = 2, 3, \ldots, n$, konverguje vzorec (3.44) k jednomu z kořenů ξ_{i-1}, ξ_i.
(ii) Jestliže bude $z_0 < \xi_1$, vzorec (3.44) konverguje k ξ_1.
(iii) Bude-li $z_0 > \xi_n$, konverguje vzorec (3.44) k ξ_n.

Je důležité si také uvědomit, že ačkoli zde předpokládáme existenci pouze reálných kořenů, může, v případě existence imaginárních kořenů, i reálná výchozí aproximace vést k imaginárnímu kořenu, neboť výraz $H(z)$ může být také záporný.

V případě násobného reálného kořene bude sice tato metoda také konvergovat, avšak její konvergence bude jen lineární v okolí násobného kořene. Pokud metoda konverguje k jednoduchému imaginárnímu kořenu, je její konvergence kubická.

Pro komplexní polynomy s komplexními kořeny (tedy reálnými i imaginárními) je metoda odvozená jiným způsobem (viz například [7]), avšak výsledný iterační proces zůstává stejný.

Ukázkový příklad 4 Užitím Laguerrovy metody nalezněte všechny kořeny polynomu $f(z) = z^3 - 9z^2 + 5z - 6$.

Nejdříve určíme první a druhou derivaci tohoto polynomu:

$$f'(z) = 3z^2 - 18z + 5,$$
$$f''(z) = 6z - 18.$$

Nyní zvolíme počáteční aproximaci a použijeme vztahu (3.44). Jednotlivé aproximace jsou uvedeny v tabulce níže.

k	z_{1k}	z_{2k}
0	100	0
1	8,434	0,15707+0,73537i
2	8,49454	$0,025265 + 0,80168$i
3	8,49454	0,25273+0,80154i
4	8,49454	0,25273+0,80154i

Ačkoli jsme první aproximaci $z_{1,0} = 100$ zvolili hodně vzdálenou od skutečné hodnoty kořene, začíná tato metoda již po druhé aproximaci konvergovat ke kořeu $\xi_1 = 8,49454$.

Druhá počátečné aproximace $z_{2,0} = 0$ konverguje k imaginárnímu kořenu $\xi_2 = 0,25273 + 0,80154\mathrm{i}$. Současně s tímto kořenem jsme nalezli také kořen k němu komplexně sdružený $\xi_3 = 0,25273 - 0,80154\mathrm{i}$.

3.2. Bairstowova metoda

Hlavní myšlenka této meotdy je založena na nalezení kvadratického trojčlenu, který je dělitelem zadaného polynomu. Popis tohoto algoritmu pochází z [3].

Máme polynom

$$f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 \tag{3.9}$$

s reálnými koeficienty $a_i, i = 0, \ldots, n$.

Jestliže kvadratický trojčlen

$$d(z) = z^2 + pz + q \tag{3.10}$$

dělí $f(z)$, jsou kořeny kvadratického trojčelnu (3.10) zároveň kořeny zadaného polynomu (3.9). Tuto myšlenku můžeme zapsat takto:

$$f(z) = d(z)r(z) + Az + B, \tag{3.11}$$

kde $r(z) = c_{n-2}z^{n-2} + \ldots + c_1 z + c_0$ a $Az + B$ je zbytek po dělení, který je závislý na parametrech $p,\ q$. Tedy platí:

$$A = A(p, q),\ B = B(p, q). \tag{3.12}$$

Protože má kvadratický trojčlen $d(z)$ dělit polynom $f(z)$, musíme najít taková čísla $p,\ q$, aby koeficienty $A,\ B$ byly nulové, tedy

$$A(p, q) = 0, \quad B(p, q) = 0. \tag{3.13}$$

Tuto soustavu můžeme řešit Newtonovou metodou pro systémy nelineárních rovnic, která je blíže pospána například v [3].

Je-li kvadratický trojčlen $d_0(z) = z^2 + p_0 z + q_0$ první aproximací dělitele, budeme dále hledat druhou aproximaci ve tvaru $d_1(z) = z^2 + p_1 z + q_1$, kde pro parametry $p_1,\ q_1$ platí:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + h, \\ q_1 &= q_0 + k. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Hodnoty $h,\ k$ získáme ze soustavy rovnic:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial p} & \dfrac{\partial A}{\partial q} \\ \dfrac{\partial B}{\partial p} & \dfrac{\partial B}{\partial q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A(p, q) \\ B(p, q) \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

kde $\frac{\partial A}{\partial p}$ (resp. $\frac{\partial A}{\partial q}$) rozumíme parciální derivaci koeficientu A podle proměnné p (resp. proměnné q) a $\frac{\partial B}{\partial p}$ (resp. $\frac{\partial B}{\partial q}$) rozumíme parciální derivaci koeficientu B podle proměnné p (resp. proměnné q).

Soustavu rovnic (3.15) můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} A(p,q) + A'_p(p,q)h + A'_q(p,q)k = 0, \\ B(p,q) + B'_p(p,q)h + B'_q(p,q)k = 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

kde $\frac{\partial A}{\partial p} = A'_p$, $\frac{\partial A}{\partial q} = A'_q$, $\frac{\partial B}{\partial p} = B'_p$, $\frac{\partial B}{\partial q} = B'_q$.

K získání hodnot $A(p,q), B(p,q)$ použijeme zobecněného Hornerova schématu při dělení polynomu $f(z)$ polynomem $d(z)$, kde $A = b_1,\ B = b_0$.

Parciální derivací vztahu (3.11) podle p, q a následné úpravě získáme rovnice:

$$zr(z) = -q'_p(z)d(z) - A'_p z - B'_p, \tag{3.17}$$

$$r(z) = -r'_q(z)d(z) - A'_q z - B'_q. \tag{3.18}$$

Hodnoty $-A'_p, -B'_p$ jsou koeficienty lineárních zbytků při dělení polynomu $zr(z)$ polynomem $d(z)$ a hodnoty $-A'_q, -B'_q$ jsou koeficienty lineárních zbytků při dělení polynomu $r(z)$ polynomem $d(z)$. Koeficienty $-A'_q$, $-B'_q$, které budeme nadále značit takto:

$$-A'_q = a, \quad -B'_q = b, \tag{3.19}$$

získáme aplikací zobecněného Hornerova schématu při dělení polynomu $r(z)$ polynomem $d(z)$, kde $a = c_3,\ b = c_2$.

Po vynásobení rovnice (3.18) činitelem z a následných úpravách získáme

$$zr(z) = (a - zr'_q(z))d(z) + (b - ap)z - aq. \tag{3.20}$$

Porovnáním této rovnice s rovnicí (3.17) získáme vztahy

$$A'_p = ap - b, \quad B'_p = aq. \tag{3.21}$$

Dosadíme-li získané hodnoty do soustavy rovnic (3.16), můžeme ji přepsat takto:

$$\begin{aligned} (ap - b)h - ak + A = 0, \\ (aq)h - bk + B = 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Jak již bylo zmíněno výše, řešením této soustavy rovnic jsou hodnoty h, k, pomocí nichž získáme novou aproximaci kvadratického trojčlenu $d_1(z) = z^2 + {} + (p + h)z + (q + k)$.

Ukázkový příklad 5 Pomocí Bairstowovy metody nalezněte imaginární kořeny polynomu $f(z) = z^4 + z^3 - 10z^2 - 34z - 26$.

Díky Sturmově větě víme, že polynom $f(z)$ má 2 reálné a 2 imaginární komplexně sdružené kořeny.

Jako počáteční hodnoty zvolíme $p_0 = 1,\ q_0 = 1$. Počáteční aproximační kvadratický trojčlen je tedy ve tvaru $d_0(z) = z^2 + z + 1$. Aplikujeme-li Hornerovo zobecněné schéma, získáme tabulku:

	1	1	−10	−34	−26
−1		−1	0	11	
−1			−1	0	11
	1	0	−11	−23	−15
−1		−1			
−1			−1		
	1	−1	−12		

V tabulce vycházejí hodnoty $A = -23,\ B = -15,\ a = -1,\ b = -12$. Po dosazení těchto hodnot do soustavy rovnic (3.13) získáme:

$$\begin{aligned} 11h + k &= 23 \\ -h + 12k &= 15. \end{aligned}$$

Řešením této sousravy je $h = 1,9624,\ k = 1,41353$. Za použití vztahů (3.14) získáme hodnoty $p_1 = 2,9624,\ q_1 = 2,41353$. Upravili jsme tak kvadratický trojčlen $d_0(z)$ na polynom $d_1(z) = z^2 + 2,9624z + 2,41353$. Opět aplikujeme zobecněné Hornerovo schéma k nalezení kvadratického trojčlenu $d_2(z)$ za použití hodnot $p_1,\ q_1$. Tento postup opakujeme tak dlouho, dokud absolutní hodnota rozdílu dvou po sobě jdoucích aproximací bude zanedbatelná. V tabulce jsou uvedeny další aproxiamce parametrů $p_k,\ q_k$.

k	p_k	q_k
0	1	1
1	2,9624	2,41353
2	7,54422	9,57276
3	5,67097	6,67463
4	4,42636	4,89323
5	3,62969	4,1842
6	3,94654	5,87141
7	3,87156	5,67905
8	3,8683	5,67608
9	3,86831	5,6761

Z posledního řádku získáme aproximační trojčlen ve tvaru $d_9(z) = z^2 + +3,86831z + 5,6761$.

K nalezení imaginárních kořenů zadaného polynomu stačí již jen najít kořeny kvadratického trojčlenu $d_9(z)$. Jsou to

$$\xi_{1,2} = -1,93415 \pm 1,3911\mathrm{i}.$$

3.3. Graeffova metoda

Hlavní myšlenka této metody spočívá v nahrazení polynomu $f(z)$ stupně n polynomem, který je také stupně n a jehož kořeny jsou druhé mocniny kořenů výchozího polynomu. Provádíme-li tento postup dostatečně dlouho, dojde k separaci kořenů s různou absolutní hodnotou. Reálné kořeny pak můžeme vypočítat pomocí koeficientů. Ve chvíli, kdy mají některé kořeny stejnou absolutní hodnotu, povede nás tato metoda na výpočet kořenů imaginárních. Celý postup vychází z [8] a [9].

Nechť je dán polynom

$$f(z) = f_0(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0, \tag{3.23}$$

jehož kořeny označíme $\xi_i,\ i = 1, \ldots, n$. Dále nechť pro tyto kořeny platí

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \ldots > \varrho_n, \tag{3.24}$$

kde ϱ_i značí absolutní hodnotu kořene ξ_i. Také budeme předpokládat, že polynom $f(z)$ je v normovaném tvaru, tedy $a_n = 1$.

Polynom $f(z)$ upravíme na rozklad kořenových činitelů:

$$f_0(z) = (z - \xi_1)(z - \xi_2) \ldots (z - \xi_n). \tag{3.25}$$

Vynásobením polynomu $f_0(z)$ polynomem $f_0(-z) = (-1)^n(z+\xi_1) \ldots (z+ +\xi_n)$, získáme $f_0(z)f_0(-z) = (-1)^n(z^2 - \xi_1^2) \ldots (z^2 - \xi_n^2)$. Po provedení substituce $w = z^2$ dostaneme polynom

$$f_1(w) = (-1)^n f_0(z)f_0(-z) = (w - \xi_1^2)(w - \xi_2^2) \ldots (w - \xi_n^2), \tag{3.26}$$

přičemž platí, že kořeny tohoto polynomu jsou druhými mocninami kořenů polynomu (3.25).

Koeficienty polynomu (3.26) již lze odvodit jednoduše. Po vynásobení polynomů $f(z), f(-z)$ dostaneme

$$f(z)f(-z) = (-1)^n \left[a_n^2 z^{2n} - (a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2})z^{2n-2} + \ldots + (-1)^n a_0^2\right]. \tag{3.27}$$

Koeficienty $a_n^{(1)}, \ldots, a_0^{(1)}$ polynomu $f_1(w)$ jsou tedy určeny vztahy

$$\begin{aligned}
a_n^{(1)} &= (a_n^{(0)})^2, \\
a_{n-1}^{(1)} &= -\Big[(a_{n-1}^{(0)})^2 - 2a_n^{(0)}a_{n-2}^{(0)}\Big], \\
a_{n-2}^{(1)} &= (a_{n-2}^{(0)})^2 - 2a_{n-1}^{(0)}a_{n-3}^{(0)} + 2a_n^{(0)}a_{n-4}^{(0)}, \\
&\vdots \\
a_1^{(1)} &= (-1)^{n-1}\Big[(a_1^{(0)})^2 - 2a_2^{(0)}a_0^{(0)}\Big], \\
a_0^{(1)} &= (-1)^n\Big[(a_0^{(0)})^2\Big].
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Obecně jsou koeficienty polynomu $f_{r+1}(z) = a_n^{(r+1)}z^n + \ldots + a_1^{(r+1)} + a_0^{(r+1)}$ určeny vztahy:

$$a_j^{(r+1)} = (-1)^{n-j}\Big[(a_j^{(r)})^2 + 2\sum_{k=1}^{min(n-j,j)}(-1)^k\, a_{j-k}^{(r)}\, a_{j+k}^{(r)}\Big], \tag{3.29}$$

přičemž kořeny polynomu $f_{r+1}(z)$ jsou ve tvaru $\xi_k^{2^{r+1}}$.

Tato metoda využívá vztahů mezi kořeny a koeficienty polynomu známých pod názvem *Viétovy vzorce*. Ty můžeme zapsat tímto způsobem:

$$\frac{a_{n-1}^{(r)}}{a_n^{(r)}} = -(\xi_1^{2^r} + \xi_2^{2^r} + \ldots + \xi_n^{2^r}) = -\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{2^r}, \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n-2}^{(r)}}{a_n^{(r)}} &= (-1)^2(\xi_1^{2^r}\xi_2^{2^r} + \ldots + \xi_2^{2^r}\xi_3^{2^r} + \ldots + \xi_2^{2^r}\xi_n^{2^r} + \ldots + \xi_{n-1}^{2^r}\xi_n^{2^r}) = \\
&= (-1)^2\sum_{1}^{n}\xi_{k_1}^{2^r}\xi_{k_2}^{2^r},
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
&\vdots \\
\frac{a_0^{(r)}}{a_n^{(r)}} &= (-1)^n(\xi_1^{2^r}\xi_2^{2^r}\ldots\xi_n^{2^r}).
\end{aligned}$$

Nejdříve budeme předpokládat, že všechny kořeny mají různou absolutní hodnotu a jsou očíslovány tak, aby pro ně platil vztah (3.24).

Rovnici (3.30) přepíšeme vytknutím $\xi_1^{2^r}$ na tvar

$$a_{n-1}^{(r)} = -\xi_1^{2^r}\left[1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\xi_k}{\xi_1}\right)^{2^r}\right]. \tag{3.32}$$

Protože předpokládáme, že polynom $f(z)$ je normovaný, můžeme na levé straně rovnice (3.30) dělitele nahradit jedničkou.

Díky nerovnosti (3.24) můžeme zanedbat podíly $(\frac{\xi_k}{\xi_1})^{2^r}$. Po několika úpravách pro dostatečně velké r tedy platí

$$\varrho_1 \approx \left|-a_{n-1}^{(r)}\right|^{1/2^r}. \tag{3.33}$$

Pro $a_{n-2}^{(r)}$ postupujeme podobně. Z rovnice (3.31) vytkneme $(\xi_1^{2^r}\xi_2^{2^r})$ a dostaneme

$$a_{n-2}^{(r)} = \xi_1^{2^r}\xi_2^{2^r}\left[1 + \sum_{k_1,k_2=1}^{n}\left(\frac{\xi_{k_1}\xi_{k_2}}{\xi_1\xi_2}\right)^{2^r}\right], \quad (k_1,k_2) \neq (1,2). \tag{3.34}$$

Opět díky nerovnosti (3.24) můžeme zanedbat podíly $\left(\frac{\xi_{k_1}\xi_{k_2}}{\xi_1\xi_2}\right)^{2^r}$. Po úpravách nám pro dostatečně velké r vychází

$$\varrho_2 \approx \frac{1}{\varrho_1}\left|a_{n-2}^{(r)}\right|^{1/2^r} \approx \left|\frac{a_{n-2}^{(r)}}{a_{n-1}^{(r)}}\right|^{1/2^r}. \tag{3.35}$$

Obecně tedy dostáváme vztah

$$\varrho_k \approx \left|\frac{a_{n-k}^{(r)}}{a_{n-k+1}^{(r)}}\right|^{1/2^r}, \quad k = 3,\ldots,n. \tag{3.36}$$

Slovním spojením „dostatečně velké r“ myslíme, že proces umocňování kořenů budeme provádět tak dlouho, dokud nedojde k ustálení aproximací absolutních hodnot kořenů na požadovaném počtu cifer.

Po separaci všech kořenů a určení jejich absolutních hodnot stačí dosadit tyto hodnoty do rovnice $f(z) = 0$, čímž zjistíme znaménka kořenů.

Ukázkový příklad 6 Pomocí Graeffovy metody určete všechny kořeny polynomu $f(z) = z^3 + z^2 - 10z + 8$.

Nejdříve vytvoříme podle vztahu (3.20) posloupnost polynomů $f_r(z)$, jejichž koeficienty zaneseme do tabulky:

r	$a_3^{(r)}$	$a_2^{(r)}$	$a_1^{(r)}$	$a_0^{(r)}$
0	1	1	-10	8
1	1	-21	84	-64
2	1	-273	4368	-4096
3	1	-65793	16843008	$-1,7\cdot 10^7$
4	1	$-4,3\cdot 10^9$	$2,8\cdot 10^{14}$	$-2,8\cdot 10^{14}$

Nyní podle vztahu (3.27) určíme absolutní hodnoty kořenů.

r	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3
1	4,58258	2	0,87287
2	4,06481	2	0,98405
3	4,00198	2	0,99951
4	4	2	1

Po dosazení těchto tří hodnot do rovnice $z^3 + z^2 - 10z + 8 = 0$ získáme kořeny $\xi_1 = -4$, $\xi_2 = 2$ a $\xi_3 = 1$.

Jak již bylo řečeno výše, jestliže mají některé kořeny stejnou absolutní hodnotu, má výchozí polynom imaginární kořeny. To se projeví například také v tabulce s koeficienty polynomů $f_r(z)$, kde v některých sloupcích dojde ke střídání znamének. Nyní si ukážeme, jak postupovat dále pro nalezení imaginárních kořenů.

Nechť má polynom (3.23) ν_i kořenů, jejichž absolutní hodnota je ϱ_i, kde $i = 1, \ldots, N$, a pro něž platí

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_N = n, \quad \varrho_1 > \varrho_2 > \ldots > \varrho_N. \tag{3.37}$$

Dále nechť platí $\mu_j = \nu_1 + \ldots + \nu_j$ pro $j = 1, \ldots, N-1$. Z Viétových vztahů plyne, že ve vyjádření koeficientů $a^{(r)}_{n-\mu_j}$ převládající člen v absolutní hodnotě je

$$(-1)^{\mu_j} \left(\varrho_1^{\nu_1} \varrho_2^{\nu_2} \ldots \varrho_j^{\nu_j}\right)^{2^r}. \tag{3.38}$$

Tedy platí

$$\left|a^{(r)}_{n-\nu_j}\right| = \left(\varrho_1^{\nu_1} \varrho_2^{\nu_2} \ldots \varrho_j^{\nu_j}\right)^{2^r} (1 + \delta_j^{(r)}), \tag{3.39}$$

kde symbolem $\delta_j^{(r)}$ značíme zbytek na pravé straně rovnice (3.29), který je oproti ostatím sčítancům zanedbatelně malý. Dostáváme tedy podobný vztah jako (3.36):

$$\lim_{r\to\infty} \left|\frac{a^{(r)}_{n-\mu_{j+i}}}{a^{(r)}_{n-\mu_j}}\right|^{1/2^r} = \varrho_{j+1}^{\nu_{j+1}} \tag{3.40}$$

Koeficientům $a^{(r)}_{n-\mu_j}$ říkáme *hlavní koeficienty*. Právě těch použijeme k určení $\varrho_1, \ldots, \varrho_N$.

Předpokládejme nyní, že známe absolutní hodnoty $\varrho_1, \ldots, \varrho_N$ a počet kořenů příslušných jedné absolutní hodnotě. Rovnají-li se čísla ν_k jedné, všechny kořeny polynomu (3.23) jsou reálné, jejich absolutní hodnoty známe a znaménka jednoduše určíme dosazením do rovnice $f(z) = 0$, jako jsme to udělali výše.

V případě, že je některé ν_k liché, existuje alespoň jeden reálný kořen o této absolutní hodnotě. Jeho znaménko určíme jako v předchozím výkladu.

Je-li ν_k sudé, existují polynomy tvaru $g(z) = z^2 + pz + q$, kde $q = \pm\varrho_k^2$, přičemž tyto polynomy dělí výchozí polynom. Kořeny tohoto kvadratického polynomu jsou tedy zároveň kořeny polynomu (3.23). Nadále budeme předpokládat, že $q = \varrho_k^2$.

Nyní si ukážeme, jak nalezneme polynom $g(z)$ a jak zjistíme jeho kořeny. Polynom (3.23) lze přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \\ = (z^2 + pz + q)(z^{n-2} + b_{n-3} z^{n-3} + \ldots + b_1 z + b_0), \end{aligned} \tag{3.41}$$

kde budeme předpokládat, že $a_n = 1$. Porovnáme-li koeficienty u stejných mocnin, dostaneme po dalších úpravách vztahy

$$\begin{aligned} b_k &= a_{k+2} - p b_{k+1} - q b_{k+2}, \quad k = n-3, \ldots, 0, \\ b_{n-2} &= 1, \\ b_{n-1} &= 0. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Zde si můžeme si všimnout, že b_{n-k} je polynom stupně $k-2$ v neurčité p. Porovnáme-li ve vztahu (3.41) absolutní členy, dostaneme

$$a_0 = q b_0. \tag{3.43}$$

Jedná se o algebraickou rovnici stupně $n-2$ o neznámé p, jejíž všechny koeficienty můžeme určit pomocí vztahu (3.42). Některý reálný kořen této rovnice je zároveň hodnotou čísla p v rovnici (3.41). Platí-li rovnost $q = \varrho_k^2$, je $p = -2\varrho_k \cos\varphi_k$, kde φ_k značí hlavní hodnotu argumentu komplexního čísla s absolutní hodnotou ϱ_k, tedy platí

$$p^2 \leq 4q. \tag{3.44}$$

K řešení rovnice (3.43) lze opět užít Graeffovu metodu, a protože se zajímáme pouze o reálné kořeny, jejichž absolutní hodnota je omezena vztahem (3.44), nedostaneme se již touto metodou k rovnicím typu (3.43).

Ukázkový příklad 7 Pomocí Graeffovy metody nalezněte kořeny polynomu $f(z) = z^4 - 5z^3 - 2z^2 + 6z + 20$.

Postupujeme stejně jako u minulého ukázkového příkladu. Podle vztahu (3.20) vytvoříme posloupnost polynomů $f_r(z)$ a jejich koeficienty zaneseme do tabulky:

r	$a_4^{(r)}$	$a_3^{(r)}$	$a_2^{(r)}$	$a_1^{(r)}$	$a_0^{(r)}$
0	1	-5	-2	6	20
1	1	-29	104	-116	400
2	1	-633	4888	69744	160000
3	1	-390913	$1,1 \cdot 10^8$	$-3,3 \cdot 10^9$	$2,6 \cdot 10^{10}$
4	1	$-1,5 \cdot 10^{11}$	$1 \cdot 10^{16}$	$-5,1 \cdot 10^{18}$	$6,6 \cdot 10^{20}$
5	1	$-2,3 \cdot 10^{22}$	$1 \cdot 10^{32}$	$-1,3 \cdot 10^{37}$	$4,3 \cdot 10^{41}$
6	1	$-5,4 \cdot 10^{44}$	$1 \cdot 10^{64}$	$-8,6 \cdot 10^{73}$	$1,8 \cdot 10^{83}$

V tabulce můžeme vidět, že koeficienty $a_1^{(r)}$ mění znaménko, tedy zadaný polynom má imaginární kořeny. Nyní vytvoříme tabulku pro absolutní hodnoty kořenů, které získáme pomocí vztahu (3.27).

r	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3	ϱ_4
1	5,38516	1,89373	1,05612	1,85695
2	5,015924	1,66699	1,94354	1,2307
3	5,00046	2,0295	1,52552	1,29186
4	5	2,00097	1,47629	1,3541
5	5	2	1,44518	1,3839
6	5	2	1,42961	1,39899

Z tabulky vidíme, že pouze hodnoty ϱ_1, ϱ_2 vykazují dobrou konvergenci. Po dosazení těchto hodnot do rovnice $f(z) = 0$ získáváme dva reálné kořeny $\xi_1 = 5$ a $\xi_2 = 2$.

Hodnoty ϱ_3, ϱ_4 nevykazují dostatečnou konvergenci. Užijeme tedy vztahu (3.31), kde $\varrho_5 = \left(\frac{a_0^{(r)}}{a_2^{(r)}}\right)^{2^r}$. Příslušné hodnoty jsou uvedeny v tabulce:

r	ϱ_5
1	1,96116
2	2,39192
3	1,97075
4	1,99903
5	1,99999
6	2

Z tabulky vyplývá, že $\varrho_5 = \sqrt{2}$, tedy $q = 2$. Rovnice (3.32) je ve tvaru

$$z^4 - 5z^3 - 2z^2 + 6z + 20 = (z^2 + pz + 2)(z^2 + b_1 z + b_0).$$

Použitím vztahů (3.33) získáme b_0 a rovnice (3.34) bude vypadat následovně:

$$20 = 2(p^2 + 5p - 4).$$

Snadno spočítáme kořeny této kvadratické rovnice, které jsou $p_1 = 2$ a $p_2 = 7$. Pouze $p_1 = 2$ však vyhovuje nerovnosti (3.35).

Imaginární kořeny zadaného polynomu tedy hledáme jako kořeny polynomu $z^2 + 2z + 2$. Vychází nám $\xi_{3,4} = -1 \pm \mathrm{i}$.

Kapitola 4

Příklady

Příklad 1 Metodami popsanými výše nalezeněte všechny kořeny polynomu $f(z) = z^4 + 2z^3 - 5z^2 + 4z + 1$.

Pomocí Sturmovy posloupnosti zjistíme, že polynom má dva reálné kořeny a jednu dvojici imaginárních komplexně sdružených kořenů.

i) Nejdříve vypočítáme kořeny Laguerrovou metodou.
Vytvoříme si tabulku pro jednotlivé aproximace kořenů.

k	z_{1k}	z_{2k}	z_{3k}
0	1	-1	$-4+\mathrm{i}$
1	0,8723-0,6055i	$-0,294-8,7407\cdot 10^{-17}\mathrm{i}$	$-3,6492+0,0002\mathrm{i}$
2	0,9236-0,7302i	$-0,1978+4,3312\cdot 10^{-17}\mathrm{i}$	$-3,6497+1,6\cdot 10^{-13}\mathrm{i}$
3	0,9237-0,72999i	$-0,1977+6,7345\cdot 10^{-18}\mathrm{i}$	$-3,6497-4,7\cdot 10^{-16}\mathrm{i}$
4	0,9237-0,72999i	$-0,1977-6,1679\cdot 10^{-18}\mathrm{i}$	$-3,6497-2,8\cdot 10^{-17}\mathrm{i}$

Z tabulky vidíme, že při počáteční aproximaci $z_{1,0} = 1$ jsme dostali imaginární dvojici komplexně sdružených kořenů $\xi_{1,2} = 0,9237 \pm 0,72999\mathrm{i}$.

Dalšími kořeny jsou $\xi_3 = -0,1977$ při počáteční aproximaci $z_{2,0} = -1$ a $\xi_4 = -3,6497$ při počáteční aproximaci $z_{3,0} = -4 + \mathrm{i}$. Na tomto příkladu dobře vidíme, že i imaginární počáteční aproximace nás může dovést k reálnému kořenu.

ii) Dále určíme hodnoty kořenů Bairstowovou metodou s počátečním aproximačním trojčlenem $d_0(z) = z^2 + z - 1$.

k	p_k	q_k
0	1	-1
1	$-1{,}5$	0
2	$-3{,}5161$	4
3	$-2{,}6661$	2,4563
4	$-2{,}1489$	1,6937
5	$-1{,}9033$	1,4228
6	$-1{,}8492$	1,386
7	$-1{,}8516$	1,3907
8	$-1{,}8563$	1,4016
9	$-1{,}8475$	1,3862
10	$-1{,}8474$	1,3861

Z poslední iterace dostáváme přibližný kvadratický trojčlen $d_{10}(z) = z^2 - -1,8474z + 1,3861$, jehož kořeny jsou $\xi_{1,2} = 0,9238 \pm 0,7299\mathrm{i}$.

Po vydělení zadaného polynomu lineárními činiteli $(z - \xi_1)$ a $(z - \xi_2)$ dostáváme kvadratický polynom, jehož kořeny jsou $\xi_3 = -0,198$ a $\xi_4 = -3,65$.

iii) Nakonec nalezneme kořeny Graeffovou metodou.

Vytvoříme tabulku pro koeficienty posloupnosti polynomů $f_r(z)$ a určíme absolutní hodnoty kořenů.

r	$a_4^{(r)}$	$a_3^{(r)}$	$a_2^{(r)}$	$a_1^{(r)}$	$a_0^{(r)}$
0	1	2	-5	4	1
1	1	-14	11	-26	1
2	1	-174	-605	-654	1
3	1	-31486	138435	-428926	1
4	1	$-9,9 \cdot 10^8$	$-7,8 \cdot 10^9$	$-1,84 \cdot 10^{11}$	1

r	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3	ϱ_4
1	3,741657	0,886405	1,537412	0,196116
2	3,631929	1,365531	1,01966	0,197745
3	3,649763	1,203347	1,15184	0,197675
4	3,649699	1,138043	1,217957	0,197675

Z tabulky vidíme, že ϱ_1, ϱ_4 konvergují k hodnotám 3,6497 a 0,19768. Po dosazení těchto hodnot do původního polynomu nalezneme dva reálné kořeny $\xi_1 = -3,6497$ a $\xi_2 = -0,1977$.

Pro výpočet imaginárních kořenů použijeme $\varrho_5 = \left(\frac{a_1^{(r)}}{a_3^{(r)}}\right)^{2^r}$.

r	ϱ_5
1	1,36277
2	1,392378
3	1,386063
4	1,386088

Z této tabulky získáme $q = 1,3861$ pro rovnici

$$z^4 + 2z^3 - 5z^2 + 4z + 1 = (z^2 + pz + 1,3861)(z^2 + b_1 z + b_0).$$

Hodnotu p vypočítáme z rovnice

$$1 = 1,3861(p^2 - 2p - 6,3861).$$

Vychází nám čísla $p_1 = 3,84747$ a $p_2 = -1,8474$. Z nich pouze p_2 vyhovuje podmínce $p^2 \leq 4q$. Imaginární kořeny zadaného polynomu hledáme jako kořeny kvadratického trojčlenu $z^2 - 1,8474z + 1,3861$. Tyto kořeny vycházejí $\xi_{3,4} = 0,9237 \pm 0,729997$i.

Všechny metody nás dovedly ke stejným výsledkům. Nejrychlejší byla Laguerrova metoda, která pro první dva kořeny konvergovala při 4. iteraci a pro třetí kořen již při 3. iteraci, zatímco Bairstowovou metodou jsme se k výsledku dostali až při 10. iteraci. Graeffovou metodou jsme reálné kořeny našli rychle při 4. iteraci. Ačkoli nalezení imaginárních kořenů touto metodou je složitější než u předchozích metod, v jejich výpočtu se nevyskytl vážnější problém a metoda konvergovala velice rychle.

Příklad 2 Nalezněte všechny kořeny polynomu $f(z) = z^4 + 4z^2 - 3z - 1$.

Díky Sturmově posloupnosti zjistíme, že polynom má dva reálné kořeny a jednu dvojici imaginárních komplexně sdružených kořenů.

i) Laguerrova metoda

k	z_{1k}	z_{2k}	z_{3k}
0	−1+3i	0	1+i
1	−0,7641+2,4799i	$-0{,}24534-1{,}1 \cdot 10^{-17}$i	0,1845+0,7637i
2	−0,5523+2,1733i	$-0{,}24923+7{,}9 \cdot 10^{-18}$i	0,86799+0,42807i
3	−0,3635+2,0684i	$-0{,}24923-9{,}2 \cdot 10^{-18}$i	0,90867-0,07472i
4	−0,3012+2,124i	$-0{,}24923+8{,}7 \cdot 10^{-18}$i	0,87142+0,00066i
5	−0,31105+2,12297i	$-0{,}24923-8{,}9 \cdot 10^{-18}$i	$0{,}87144+2{,}8 \cdot 10^{-9}$i
6	−0,31111+2,1231i	$-0{,}24923+8{,}8 \cdot 10^{-18}$i	$0{,}87144-2{,}5 \cdot 10^{-17}$i
7	−0,31111+2,1231i	$-0{,}24923-8{,}8 \cdot 10^{-18}$i	0,87144

Hledanými kořeny jsou $\xi_{1,2} = -0,31111 \pm 2,1231\text{i}$, $\xi_3 = -0,24923$ a $\xi_4 = 0,87144$.

ii) Bairtstowova metoda

Za počáteční aproximační trojčlen zvolíme $d_0(z) = z^2 - z + 1$.

k	p_k	q_k
0	−1	1
1	−0,4737	−0,3158
2	−0,6232	−0,2137
3	−0,6223	−0,2172
4	−0,6222	−0,2172

Získali jsme aproximační trojčlen $d_4(z) = z^2 - 0,6222z - 0,2172$, jehož kořeny jsou $\xi_1 = 0,8714$ a $\xi_2 = -0,2492$.

Po vydělení zadaného polynomu lineárními činiteli $(z - \xi_1)$ a $(z - \xi_2)$ získáme kvadratický polynom $z^2 + 0,622z + 4,6039$. Odtud již jednoduše dopočítáme zbývající dva kořeny $\xi_{3,4} = -0,311 \pm 2,1231\text{i}$.

Na tomto příkladu lze vidět, že Bairstowovu metodu můžeme použít také při hledání reálných kořenů.

iii) Graeffova metoda

Vytvoříme tabulku pro koeficienty posloupnosti polynomů $f_r(z)$ a určíme absolutní hodnoty kořenů.

r	$a_4^{(r)}$	$a_3^{(r)}$	$a_2^{(r)}$	$a_1^{(r)}$	$a_0^{(r)}$
0	1	0	4	-3	-1
1	1	8	14	-17	1
2	1	-36	470	-261	1
3	1	-356	202110	-67181	1
4	1	277484	$4,08 \cdot 10^{10}$	$-4,5 \cdot 10^9$	1
5	1	$4,6 \cdot 10^9$	$1,66 \cdot 10^{21}$	$-2 \cdot 10^{19}$	1

r	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3	ϱ_4
1	2,82843	1,32288	1,10195	0,24254
2	2,44949	1,90085	0,86325	0,24879
3	2,08416	2,20936	0,87138	0,24923
4	2,18878	2,10361	0,87144	0,24923
5	2,00435	2,29718	0,87144	0,24923

Po dosazení hodnot ϱ_3, ϱ_4 do původního polynomu získáme hodnoty prvních dvou kořenů $\xi_1 = 0,87144$, $\xi_2 = -0,24923$. Pro nalezení imaginárních kořenů použijeme hodnotu $\varrho_5 = \left(\frac{a_2^{(r)}}{a_4^{(r)}}\right)^{2^r}$.

r	ϱ_5
1	3,74166
2	4,65612
3	4,60467
4	4,60433
5	4,60433

Získali jsme $q = 4,60433$ pro rovnici

$$z^4 + 4z^2 - 3z - 1 = (z^2 + pz + 4,60433)(z^2 + b_1 z + b_0).$$

Hodnotu p hledáme jako kořen rovnice

$$-1 = 4,60433(p^2 - 0,60433).$$

Získáme $p_1 = 0,62221$, $p_2 = -0,62221$, z nichž použijeme hodnotu p_1. Hledané kořeny zadaného polynomu hledáme jako kořeny polynomu $z^2 + +0,6222z + 4,60433$, které jsou $\xi_{3,4} = -0,3111 \pm 2,1231\mathrm{i}$.

Nejrychlejší se v tomto příkladě jevila Bairstowova metoda, která začala konvergovat již při 4. iteraci. Graeffova metoda také konvergovala celkem rychle a v případě imaginárních kořenů se nevyskytl vážnější problém. Laguerrova metoda v případě reálných kořenů konvergovala také rychle, avšak u imaginárních kořenů začala konvergovat až při 7. iteraci.

Příklad 3 Nalezněte všechny kořeny polynomu $f(z) = z^5 - z^4 + 2z^3 - 3z^2 + +z - 4$.

Pomocí Sturmovy posloupnosti zjistíme, že polynom má jeden reálný kořen a dvě dvojice imaginárních komplexně sdružených kořenů.

i) Laguerrova metoda

k	z_{1k}	z_{2k}	z_{3k}
0	1+i	−1+i	3+i
1	0,4197+1,2883i	−0,5361+1,1136i	1,3628-0,2827i
2	0,2665+1,3273i	−0,5136+1,09156i	1,4921-0,0039i
3	0,2645+1,3284i	−0,5136+1,0916i	$1{,}4982+7{,}72 \cdot 10^{-8}$i
4	0,2645+1,3284i	−0,5136+1,0916i	$1{,}4982-7{,}01 \cdot 10^{-22}$i

Hledanými kořeny jsou $\xi_{1,2} = 0,2645 \pm 1,3284$i, $\xi_{3,4} = -0,5136 \pm 1,0916$i a $\xi_5 = 1,4982$.

ii) Bairstowova metoda

Za počáteční aproximační trojčlen zvolíme $d_0(z) = z^2 + z + 1$.

k	p_k	q_k
0	1	1
1	0,9355	1,3226
2	1,0307	1,4637
3	1,0149	1,4479
4	1,0274	1,4553
5	1,0274	1,4552

Získáváme polynom $d_5(z) = z^2 + 1,0274z + 1,4552$, z něhož vypočítáme první dva kořeny zadaného polynomu $\xi_{1,2} = -0,5137 \pm 1,0915$i.

Polynom $f(z)$ vydělíme lineárními činiteli $(z - \xi_1)$ a $(z - \xi_2)$. Získáme tak polynom $f^*(z) = z^3 - 2,0274z^2 + 2,6278z - 2,7495$. Opakujeme Bairstowovův algoritmus pro tento polynom s počátečním aproximačním trojčlenem $d_0^*(z) = z^2 + z + 1$.

k	p_k	q_k
0	1	1
1	0,1045	1,1533
2	−0,3255	1,3928
3	−0,499	1,5934
4	−0,5536	1,7219
5	−0,5611	1,7922
6	−0,5535	1,8254
7	−0,544	1,838
8	−0,5368	1,84409
9	−0,5323	1,8401
10	−0,53001	1,8383
11	−0,5290	1,8368
12	−0,5288	1,8359
13	−0,5288	1,8353

Získáváme polynom $d^*_{13}(z) = z^2 - 0,5288z + 1,8353$. Jeho kořeny jsou $\xi_{3,4} = 0,2644 \pm 1,3287\mathrm{i}$.

Po vydělení polynomu $f^*(z)$ lineárními činiteli $(z-\xi_3)$ a $(z-\xi_4)$ získáme lineární polynom, z kterého snadno dopočítáme zbývající kořen $\xi_5 = 1,4982$.

iii) Graeffova metoda

Vytvoříme tabulku pro koeficienty posloupnosti polynomů $f_r(z)$ a zjistíme absolutní hodnoty kořenů.

r	$a_5^{(r)}$	$a_4^{(r)}$	$a_3^{(r)}$	$a_2^{(r)}$	$a_1^{(r)}$	$a_0^{(r)}$
0	1	−1	2	−3	1	−4
1	1	3	0	−13	−23	−16
2	1	−9	−32	−73	113	−256
3	1	−17	−64	−2705	−24607	−65536
4	1	−417	−137088	−6395553	$2,5 \cdot 10^8$	$-4,3 \cdot 10^9$
5	1	−448065	$1,4 \cdot 10^{10}$	$-1,1 \cdot 10^{14}$	$8,04 \cdot 10^{15}$	$-1,8 \cdot 10^{19}$
6	1	$-1,7 \cdot 10^{11}$	$9,3 \cdot 10^{19}$	$-1,3 \cdot 10^{28}$	$-4,1 \cdot 10^{33}$	$-3,4 \cdot 10^{38}$
7	1	$-3 \cdot 10^{22}$	$4,4 \cdot 10^{39}$	$-1,6 \cdot 10^{56}$	$8,3 \cdot 10^{66}$	$-1,2 \cdot 10^{77}$
8	1	$-8,8 \cdot 10^{44}$	$9,5 \cdot 10^{78}$	$-2,6 \cdot 10^{112}$	$3,2 \cdot 10^{133}$	$-1 \cdot 10^{154}$

r	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3	ϱ_4	ϱ_5
1	1,73205	0	dělení nulou	1,33012	0,83406
2	1,73205	1,37318	1,22898	1,11542	1,22685
3	1,42497	1,18023	1,59679	1,31784	1,13026
4	1,458	1,43649	1,271467	1,25779	1,19422
5	1,50177	1,38173	1,32484	1,14284	1,27356
6	1,49826	1,36914	1,33982	1,21939	1,19354
7	1,49819	1,36181	1,34715	1,21261	1,20037
8	1,49819	0,35812	1,35081	1,20901	1,20374

Po dosazení ϱ_1 do zadaného polynomu získáme reálný kořen $\xi_1 = 1,4982$.

Pro nalezení imaginárních kořenů použijeme hodnoty $\varrho_6 = \left(\frac{a_2^{(r)}}{a_4^{(r)}}\right)^{2^r}$ a $\varrho_7 = \left(\frac{a_1^{(r)}}{a_3^{(r)}}\right)^{2^r}$.

r	ϱ_6	ϱ_7
1	2,08167	1,1094
2	1,6876	1,36845
3	1,88458	1,4895
4	7,82646	1,50208
5	1,83058	1,455
6	1,8344	1,45538
7	1,8346	1,45533
8	1,8346	1,45533

Pro $\varrho_6 = \sqrt{0,8346}$ získáme rovnici

$$z^5 - z^4 + 2z^3 - 3z^2 + z - 4 = (z^2 - pz + 0,8346)(z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0).$$

Hodnotu p vypočítáme jako jeden z kořenů rovnice

$$-4 = 1,8346(-p^3 - p^2 + 1,66912p - 1,16544). \tag{4.1}$$

Kořeny této rovnice spočítáme opět Graeffovou metodou.

r	$a_3^{(r)}$	$a_2^{(r)}$	$a_1^{(r)}$	$a_0^{(r)}$
0	1	1	−1,66912	−1,01492
1	1	−4,33824	4,8158	−1,03006
2	1	−9,18872	14,2546	−1,06103
3	1	−55,9234	183,6954	−1,1258
4	1	−2760,03	33618,08	−1,2674
5	1	−7550549	$1,13 \cdot 10^9$	−1,60627
6	1	$-5,7 \cdot 10^{13}$	$1,28 \cdot 10^{18}$	−2,5801

r	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3
1	2,08284	1,0536	0,4625
2	1,74106	1,11603	0,52233
3	1,65367	1,16028	0,52896
4	1,64081	1,16911	0,52908
5	1,64035	1,16943	0,52908
6	1,64035	1,16943	0,52908

Po dosazení těchto čísel do rovnice (4.1) získáme hodnoty $p_1 = -1,6404$, $p_2 = 1,1694$ a $p_3 = -0,5291$, z nichž vyhovuje p_3. Kořeny výchozího polynomu získáme jako kořeny polynomu $z^2 - 0,5291z + 1,8346$. Je to dvojice imaginárních komplexně sdružených kořenů $\xi_{2,3} = 0,26455 \pm 1,32837\mathrm{i}$.

Stejný postup opakujeme pro $\varrho_7 = \sqrt{1,6331}$, kde získáváme rovnici

$$z^5 - z^4 + 2z^3 - 3z^2 + z - 4 = (z^2 + pz + 1,6331)(z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0).$$

Hodnotu p vypočítáme jako kořen rovnice

$$-4 = 1,6331(-p^3 - p^2 + 1,2662p - 1,3669). \tag{4.2}$$

Pro výpočet kořenů této rovnice použijeme opět Graeffovu metodu.

r	$a_3^{(r)}$	$a_2^{(r)}$	$a_1^{(r)}$	$a_0^{(r)}$
0	1	1	−0,91066	−1,20385
1	1	−2,82132	3,237	−1,44925
2	1	−1,48584	2,30056	−2,10034
3	1	2,39338	−0,94899	−4,41143
4	1	−7,62626	22,01704	−19,46068
5	1	−14,1258	187,926	−378,7181
6	1	176,3137	24616,71	−143427,4
7	1	18146,89	$6,6 \cdot 10^8$	$-2,1 \cdot 10^{10}$
8	1	$9,8 \cdot 10^8$	$4,3 \cdot 10^{17}$	$-4,2 \cdot 10^{20}$

r	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3
1	1,67968	1,07114	0,66912
2	1,10406	1,11549	0,9775
3	1,11526	0,8908	1,21175
4	1,13539	1,06851	0,99232
5	1,08627	1,08424	1,02214
6	1,08417	1,08023	1,02792
7	1,07962	1,08546	1,02728
8	1,08425	1,08084	1,02727

V tabulce vidíme, že rovnice (4.2) má jeden reálný a dva imaginární kořeny. Nás bude zajímat pouze reálný kořen, který, po dosazení jeho absolutní hodnoty do rovnice (4.2), vychází $p = 1,02727$. Kořeny výchozího polynomu tedy hledáme jako kořeny polynomu $z^2 + 1,02727z + 1,45533$, které jsou $\xi_{4,5} = -0,51365 \pm 1,09156\mathrm{i}$.

Nejefektivnější se v tomto příkladě ukázala být opět Laguerrova metoda. Bairstowova metoda v případě prvních dvou kořenů konvergovala také rychle, avšak při hledání dalších kořenů touto metodou došlo ke konvergenci až při 13. iteraci. Graeffova metoda oproti minulým příkladům konvergovala výrazně pomaleji. Navíc hledání imaginárních kořenů ztížilo, že rovnice (4.1) a (4.2) byly kubické, tedy pro jejich vyřešení jsme museli opět použít některé metody pro výpočet reálných kořenů.

Příklad 4 Nalezněte všechny kořeny polynomu $f(z) = z^6 - 2z^5 + 5z^4 - -6z^3 + 2z^2 + 8z - 8$.

Díky Sturmově posloupnosti zjistíme, že polynom má dva reálné kořeny a dvě dvojice imaginárních komplexně sdružených kořenů.

i) Laguerrova metoda

k	z_{1k}	z_{2k}	z_{3k}	z_{4k}
0	2	0	−1+i	−1+3i
1	0,8539−1,0552i	0,8192	−1,0625+0,1571i	0,0473+2,0376i
2	0,99898−0,9975i	1,0057	−1,0007+0,0003i	−0,00002+2,00001i
3	0,9999−i	0,9999	$-0{,}9999-7{,}1\cdot 10^{-11}$i	$-2{,}8\cdot 10^{-15}+2$i
4	1−i	0,9999999	$-1+9{,}5\cdot 10^{-17}$i	$-8{,}02\cdot 10^{-16}$+2i

Hledanými kořeny jsou hodnoty $\xi_{1,2} = 1 \pm$ i, $\xi_3 = 1$, $\xi_4 = -1$, a $\xi_{5,6} = \pm 2$i.

ii) Bairstowova metoda

Za počáteční aproximaci zvolíme kvadratický trojčlen $d_0(z) = z^2 + z + 1$.

k	p_k	q_k
0	1	1
1	−0,3582	−0,7463
2	0,20624	−1,15007
3	0,04105	−1,02449
4	0,00185	−1,00083
5	$-2{,}34\cdot 10^{-17}$	−1

Získali jsme kvadratický polynom $d_5(z) = z^2 - 1$. Kořeny tohoto polynomu jsou $\xi_{1,2} = \pm 1$. Po vydělení zadaného polynomu lineárními činiteli $(z - \xi_1)$ a $(z - \xi_2)$ získáme polynom $f^*(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$. Kořeny tohoto polynomu opět budeme hledat Bairstowovou metodou s počátečním aproximačním trojčlenem $d_0^*(z) = z^2 - z - 1$.

k	p_k	q_k
0	−1	−1
1	−1,42857	1
2	−1,96304	2,05482
3	−2,00054	1,99659
4	−2,00201	1,99599

Kvadratický trojčlen je ve tvaru $d_4^*(z) = z^2 - 2z + 2$. Jeho kořeny jsou $\xi_{3,4} = 1 \pm$ i. Po vydělení polynomu $f^*(z)$ lineárními činiteli $(z - \xi_3)$ a $(z - \xi_4)$ získáme polynom $f^{**}(z) = z^2 + 4$. Kořeny tohoto polynomu již spočítáme jednoduše pomocí diskriminantu a získáme tak poslední dvojici imaginárních kořenů $\xi_{5,6} = \pm 2$i.

iii) Graeffova metoda

Vytvoříme posloupnost polynomů $f_r(z)$ a určíme absolutní hodnoty kořenů.

r	$a_6^{(r)}$	$a_5^{(r)}$	$a_4^{(r)}$	$a_3^{(r)}$	$a_2^{(r)}$	$a_1^{(r)}$	$a_0^{(r)}$
0	1	-2	5	-6	2	8	-8
1	1	6	5	0	20	-96	64
2	1	-26	65	1480	1040	-6656	4096
3	1	-546	83265	$-2,4 \cdot 10^6$	$2,1 \cdot 10^7$	$-3,6 \cdot 10^7$	$1,7 \cdot 10^7$
4	1	-131586	$4,4 \cdot 10^9$	$-2,2 \cdot 10^{12}$	$2,9 \cdot 10^{14}$	$-5,7 \cdot 10^{14}$	$2,8 \cdot 10^{14}$
5	1	$-8,6 \cdot 10^9$	$1,8 \cdot 10^{19}$	$-2,4 \cdot 10^{24}$	$7,9 \cdot 10^{28}$	$-1,6 \cdot 10^{29}$	$7,9 \cdot 10^{28}$
6	1	$-3,7 \cdot 10^{19}$	$3,4 \cdot 10^{38}$	$-2,9 \cdot 10^{48}$	$6,3 \cdot 10^{57}$	$-1,3 \cdot 10^{58}$	$6,3 \cdot 10^{57}$
7	1	$-6,8 \cdot 10^{38}$	$1,2 \cdot 10^{77}$	$-4,3 \cdot 10^{96}$	$3,9 \cdot 10^{115}$	$-8 \cdot 10^{115}$	$3,9 \cdot 10^{115}$
8	1	$-2,3 \cdot 10^{77}$	$1,3 \cdot 10^{154}$	$-9,1 \cdot 10^{192}$	$1,6 \cdot 10^{231}$	$-3 \cdot 10^{231}$	$1,6 \cdot 10^{231}$

r	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3	ϱ_4	ϱ_5	ϱ_6
1	2,44949	0,91287	0	dělení nulou	2,19089	0,8165
2	2,258101	1,25743	2,18443	0,91557	1,59054	0,8857
3	2,19861	1,874601	1,52164	1,31437	1,06689	0,90966
4	2,08906	1,916603	1,47611	1,35491	1,04351	0,95737
5	2,0438	1,95715	1,44518	1,38391	1,0219	0,97857
6	2,02178	1,97846	1,42961	1,39898	1,01089	0,98923
7	2,01086	1,9892	1,42189	1,40658	1,00543	0,9946
8	2,0054	1,99459	1,41805	1,41039	1,00271	0,9973

Dosadíme-li hodnoty ϱ_5, ϱ_6 do zadaného polynomu, získáme první dva hledané kořeny $\xi_{1,2} = \pm 1$.

Hodnoty ϱ_1, ϱ_2 sice také vykazují dobrou konvergenci, avšak po jejich dosazení do zadaného polynomu zjistíme, že tato čísla rovnici $f(z) = 0$ nevyhovují. Imaginární kořeny zjistíme pomocí hodnot $\varrho_7 = \left(\frac{a_4^{(r)}}{a_6^{(r)}}\right)^{2^r}$ a $\varrho_8 = \left(\frac{a_2^{(r)}}{a_4^{(r)}}\right)^{2^r}$.

r	ϱ_7	ϱ_8
1	2,23607	2
2	2,83941	2
3	4,12152	2
4	4,0039	2
5	4,000008	2
6	4	2

Pro $\varrho_7 = 2$ získáváme rovnici

$$z^6 - 2z^5 + 5z^4 - 6z^3 + 2z^2 + 8z - 8 =$$
$$= (z^2 + pz + 4)(z^4 + b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0).$$

Hodnotu p získáme jako řešení rovnice

$$-8 = 4(p^4 + 2p^3 - 7p^2 - 10p - 2). \tag{4.3}$$

Tyto hodnoty vypočítáme opět pomocí Graeffovy metody.

r	$a_4^{(r)}$	$a_3^{(r)}$	$a_2^{(r)}$	$a_1^{(r)}$	$a_0^{(r)}$
0	1	2	-7	-10	0
1	1	-18	89	-100	0
2	1	-146	4321	-10000	0
3	1	-12674	15751041	$-1 \cdot 10^8$	0
4	1	$-1,3 \cdot 10^8$	$2,5 \cdot 10^{14}$	$-1 \cdot 10^{16}$	0
5	1	$-1,6 \cdot 10^{16}$	$6 \cdot 10^{28}$	$-1 \cdot 10^{32}$	0
6	1	$-2,6 \cdot 10^{32}$	$3,6 \cdot 10^{57}$	$-1 \cdot 10^{64}$	0

r	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3	ϱ_4
1	4,24264	2,22361	1,059998	0
2	3,476068	2,332426	1,2334	0
3	3,25735	2,43669	1,2599	0
4	3,21321	2,46857	1,26071	0
5	3,21021	2,47088	1,26071	0
6	3,21018	2,4709	1,26071	0

Po dosazení absolutních hodnot do rovnice (4.3) získáme $p_1 = -3,21018$, $p_2 = 2,4709$, $p_3 = 1,26071$ a $p_4 = 0$, z nichž použijeme právě p_4. Kořeny zadaného polynomu určíme jako kořeny polynomu $z^2 + 4$, které jsou rovny $\xi_{3,4} = \pm 2\mathrm{i}$.

Pro $\varrho_8 = \sqrt{2}$ dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} z^6 - 2z^5 + 5z^4 - 6z^3 + 2z^2 + 8z - 8 = \\ = (z^2 + pz + 2)(z^4 + b_3z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0). \end{aligned}$$

Hodnotu p hledáme jako kořen rovnice

$$-8 = 2(p^4 + 2p^3 - p^2 - 2p - 4). \tag{4.4}$$

Kořeny této rovnice zjistíme Graeffovou metodou.

r	$a_4^{(r)}$	$a_3^{(r)}$	$a_2^{(r)}$	$a_1^{(r)}$	$a_0^{(r)}$
0	1	2	-1	-2	0
1	1	-6	9	-4	0
2	1	-18	33	-16	0
3	1	-258	513	-256	0
4	1	-65538	131073	-65536	0
5	1	$-4,3 \cdot 10^9$	$8,6 \cdot 10^9$	$-4,3 \cdot 10^9$	0

r	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3	ϱ_4
1	2,44949	1,22475	0,66667	0
2	2,05977	1,16362	0,83445	0
3	2,00195	1,08971	0,91678	0
4	2,000004	1,04427	0,9576	0
5	2	1,0219	0,97857	0

Po dosazení absolutních hodnot do rovnice (4.4) nalezneme $p_1 = -2$, $p_2 = 1$, $p_3 = -1$ a $p_4 = 0$, z nichž pouze p_1 vyhovuje zadaným podmínkám. Kořeny výchozího polynomu hledáme jako kořeny polynomu $z^2 - 2z + 2$, které jsou $\xi_{5,6} = 1 \pm \mathrm{i}$.

Zatímco metody Bairstowova a Laguerrova konvergovaly rychle, u metody Graeffovy jsme v některých případech museli dojít až k 8. iteraci. Navíc se řešení imaginárních kořenů prodloužilo, protože jsme v mezivýpočtech museli řešit rovnice 4. řádu.

Příklad 5 Nalezněte všechny kořeny polynomu $z^5 - 4z + 2$.

Díky Stumově posloupnosti zjistíme, že polynom má tři reálné kořeny a jednu dvojici imaginárních komplexně sdružených kořenů.

i) Laguerrova metoda

k	z_{1k}	z_{2k}	z_{3k}	z_{4k}
0	−1+i	0	−2+i	2+i
1	−0,286+1,344i	$0{,}5+4,9 \cdot 10^{-17}$i	−1,599-0,059i	1,311-0,03i
2	−0,117+1,437i	$0{,}509+6,2 \cdot 10^{-19}$i	−1,519+0,0001i	1,244-0,0001i
3	−0,117+1,438i	$0{,}509+4,4 \cdot 10^{-23}$i	$-1{,}519+1,2 \cdot 10^{-13}$i	$1{,}243+2,9 \cdot 10^{-14}$i
4	−0,117+1,438i	$0{,}509-2,7 \cdot 10^{-31}$i	$-1,519 - 4,6 \cdot 10^{-16}$i	$1{,}244-2 \cdot 10^{-28}$i

Hledanými kořeny jsou $\xi_{1,2} = -0,1168 \pm 1,4384$i, $\xi_3 = 0,5085$, $\xi_4 = -1,5185$ a $\xi_5 = 1,2436$

ii) Bairstowova metoda

Jako počáteční aproximační trojčlen použijeme $d_0(z) = z^2 + z - 1$.

k	p_k	q_k
0	1	−1
1	1	−0,8
2	1,00999	−0,7722
3	1,010003	−0,77218
4	1,010009	−0,77217
5	1,01092	−0,77148

Přibližný aproximační trojčlen je ve tvaru $d_5(z) = z^2+1,01092z-0,77148$. Kořeny tohoto trojčlenu jsou $\xi_1 = 0,5082$ a $\xi_2 = -1,5192$. Po vydělení zadaného polynomu lineárními činiteli $(z-\xi_1)$ a $(z-\xi_2)$ dostaneme polynom $f^*(z) = z^3 - 1,011z^2 + 1,794z - 2,595$. Kořeny tohoto polynomu opět řešíme Bairstowovou metodou. Jako počáteční aproximaci použijeme $d_0^*(z) = z^2 + z - 1$.

k	p_k	q_k
0	1	-1
1	0,75552	3,31354
2	0,68511	2,71794
3	0,56352	2,33621
4	0,44082	2,13241
5	0,34522	2,04939
6	0,28381	2,03203
7	0,2505	2,04137
8	0,2354	2,05654
9	0,23021	2,18329
10	0,24641	2,13919
11	0,24806	2,11007
12	0,24455	2,0938
13	0,24036	2,08615
14	0,23712	2,08336
15	0,23509	2,08288
16	0,23401	2,08326
17	0,23353	2,0838
18	0,23337	2,08423
19	0,23335	2,08452

Aproximační trojčlen je ve tvaru $d^*_{19}(z) = z^2 + 2,3335z + 2,08452$. Kořeny tohto trojčlenu jsou $\xi_{3,4} = -0,1165 \pm 1,4392\mathrm{i}$. Po vydělení polynomu $f^*(z)$ lineárními činiteli $(z - \xi_3)$ a $(z - \xi_4)$ získáme polynom $f^{**}(z) = z - 1,244$. Posledním kořenem zadaného polynomu je $\xi_5 = 1,244$.

iii) Graeffova metoda

Vytvoříme posloupnost polynomů $f_r(z)$ a určíme absolutní hodnoty kořenů.

r	$a_5^{(r)}$	$a_4^{(r)}$	$a_3^{(r)}$	$a_2^{(r)}$	$a_1^{(r)}$	$a_0^{(r)}$
0	1	0	0	0	-4	2
1	1	0	-8	0	16	-4
2	1	-16	96	-256	256	-16
3	1	-64	1536	-16896	57344	-256
4	1	-1024	311296	$-1,1 \cdot 10^8$	$3,3 \cdot 10^9$	-65536
5	1	-425984	$-1,2 \cdot 10^{11}$	$-9,9 \cdot 10^{15}$	$1,1 \cdot 10^{19}$	$-4,3 \cdot 10^9$
6	1	$-4,2 \cdot 10^{11}$	$6,1 \cdot 10^{21}$	$-1 \cdot 10^{32}$	$1,2 \cdot 10^{38}$	$-1,8 \cdot 10^{19}$
7	1	$-1,7 \cdot 10^{23}$	$-4,8 \cdot 10^{43}$	$-1 \cdot 10^{64}$	$1,3 \cdot 10^{76}$	$-3,4 \cdot 10^{38}$
8	1	$-2,8 \cdot 10^{46}$	$-1,1 \cdot 10^{87}$	$-1 \cdot 10^{128}$	$1,8 \cdot 10^{152}$	$-1,2 \cdot 10^{77}$

r	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3	ϱ_4	ϱ_5
1	0	dělení nulou	0	dělení nulou	0,5
2	2	1,56509	1,27789	1	0,5
3	1,68179	1,48774	1,3495	1,16503	0,50842
4	1,54221	1,42949	1,44245	1,23684	0,5085
5	1,4994	1,48033	1,42431	1,2441	0,5085
6	1,51933	1,44122	1,44436	1,2436	0,5085
7	1,51849	1,44497	1,44142	1,2436	0,5085
8	1,51851	1,44056	1,4458	1,2436	0,5085

Dosazením ϱ_1, ϱ_4 a ϱ_5 do zadaného polynomu zjistíme hodnoty reálných kořenů $\xi_1 = -1,51851$, $\xi_2 = 1,2436$ a $\xi_3 = 0,5085$.

Dvojici imaginárních komplexně sdružených kořenů nalezneme pomocí hodnoty $\varrho_6 = \left(\frac{a_2^{(r)}}{a_4^{(r)}}\right)^{2^r}$.

r	ϱ_6
1	dělení nulou
2	2
3	2,00771
4	2,06197
5	2,10846
6	2,08165
7	2,0828
8	2,08277

Získáváme $q = 2,083$ pro rovnici

$$z^5 - 4z + 2 = (z^2 + pz + 2,083)(z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0).$$

Hodnotu p hledáme jako kořen rovnice

$$2 = 2,083(-p^3 + 4,166p). \tag{4.5}$$

Rovnici můžeme opět vyřešit Graeffovou metodou.

r	$a_3^{(r)}$	$a_2^{(r)}$	$a_1^{(r)}$	$a_0^{(r)}$
0	1	0	−4,116	0,96
1	1	−8,232	16,94	−0,9216
2	1	−33,883	271,84	−0,8494
3	1	−604,372	73839,27	−0,7214
4	1	−217587	$5,5 \cdot 10^9$	−0,5204
5	1	$-3,6 \cdot 10^{10}$	$2,97 \cdot 10^{19}$	−0,271
6	1	$-1,3 \cdot 10^{21}$	$8,8 \cdot 10^{38}$	−0,0733
7	1	$-1,6 \cdot 10^{42}$	$7,8 \cdot 10^{77}$	−0,0054

r	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3
1	2,8691	1,4346	0,2332
2	2,4127	1,683	0,2364
3	2,2267	1,8234	0,2364
4	2,1558	1,8834	0,2364
5	2,1382	1,8988	0,2364
6	2,1367	1,9002	0,2364
7	2,1367	1,9002	0,2364

Dosazením absolutních hodnot do rovnice (4.5) dostáváme $p_1 = -2,1367$, $p_2 = 1,9002$ a $p_3 = 0,2364$, z nichž použijeme právě p_3. Kořeny výchozího polynomu hledáme jako kořeny polynomu $z^2 + 0,2364z + 2,0828$. Zjistíme tak poslední dva kořeny výchozího polynomu $\xi_{4,5} = -0,118 \pm 1,4384\mathrm{i}$.

Nejefektivnější byla v tomto příkladě Laguerrova metoda, která konvergovala rychle pro všechny hledané kořeny. Bairstowova metoda konvergovala pro první dva kořeny také rychle, avšak pro druhé dva kořeny jsme získali hodnoty s dostatečnou přesností až při 19. iteraci. Graeffova metoda konvergovala v některých případech až při 8. iteraci. Navíc jsme u hledání imaginárních kořenů museli řešit kubickou rovnici, tedy se výpočet více prodloužil.

Příklad 6 Nalezněte všechny kořeny polynomu $f(z) = 16z^4+88z^3+159z^2+76z-240$.

Díky Sturmově posloupnosti zjistíme, že polynom má dva reálné kořeny a dvojici imaginárních komplexně sdružených kořenů.

i) Laguerrova metoda

k	z_{1k}	z_{2k}	z_{3k}
0	2i	1+i	-2
1	$-1{,}4159+1{,}932$i	$0{,}8794+0{,}0105$	$-4{,}802-7{,}174\cdot 10^{-15}$i
2	$-1{,}4949+1{,}7441$i	$0{,}846-1{,}3\cdot 10^{-6}$i	$-3{,}289+2{,}2\cdot 10^{-14}$i
3	$-1{,}4943+1{,}7442$i	$0{,}8467+6\cdot 10^{-20}$i	$-3{,}3581-3{,}8\cdot 10^{-15}$i
4	$-1{,}49435+1{,}7442$i	$0{,}8467+9{,}6\cdot 10^{-15}$i	$-3{,}3581+4{,}7\cdot 10^{-15}$i

Hledané kořeny zadaného polynomu jsou $\xi_{1,2} = -1,49435 \pm 1,74422$i, $\xi_3 = 0,8467$ a $\xi_4 = -3,358$.

ii) Bairtstowova metoda

Za aproximační trojčlen zvolíme $d_0^*(z) = z^2 + z - 1$.

k	p_k	q_k
0	1	-1
1	3,98716	$-3{,}55698$
2	3,08647	$-3{,}22874$
3	2,64061	$-2{,}94948$
4	2,52004	$-2{,}85081$
5	2,51135	$-2{,}84344$
6	2,5113	$-2{,}843399$

Získali jsme aproximační trojčlen $d_6(z) = z^2 + 2,5113z - 2,8434$, jehož kořeny jsou $\xi_1 = 0,84674$ a $\xi_2 = -3,358$.

Po vydělení zadaného polynomu lineárními činiteli $(z - \xi_1)$ a $(z - \xi_2)$ získáme kvadratický polynom $d^*(z) = 16z^2 + 47,8198z + 84,4056$, z nějž již snadno dopočítáme zbývající dva kořeny $\xi_{3,4} = -1,49437 \pm 1,74422$i.

iii) Graeffova metoda

Abychom mohli použít tuto metodu, musíme nejdříve polynom převést na normovaný tvar: $f(z) = z^4 + \frac{11}{2}z^3 + \frac{159}{16}z^2 + \frac{19}{4}z - 15$.

Nyní můžeme vytvořit posloupnost polynomů $f_r(z)$ a určit absolutní hodnoty kořenů.

r	$a_4^{(r)}$	$a_3^{(r)}$	$a_2^{(r)}$	$a_1^{(r)}$	$a_0^{(r)}$
0	1	$\frac{11}{2}$	$\frac{159}{16}$	$\frac{19}{4}$	-15
1	1	$-10{,}375$	$16{,}5039$	$-\ 320{,}688$	225
2	1	$-74{,}6328$	$-5931{,}89$	$-95413{,}71$	50625
3	1	$-17433{,}8$	21046542	$-9,7 \cdot 10^9$	$2,6 \cdot 10^9$
4	1	$-2,6 \cdot 10^8$	$1,1 \cdot 10^{14}$	$-9,4 \cdot 10^{19}$	$6,8 \cdot 10^{18}$
5	1	$-6,8 \cdot 10^{16}$	$-3,8 \cdot 10^{28}$	$-8,9 \cdot 10^{39}$	$4,3 \cdot 10^{37}$

r	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3	ϱ_4
1	3,22103	1,26125	4,40806	0,83762
2	2,93922	2,98583	2,00265	0,85347
3	3,3898	2,42786	2,15265	0,84668
4	3,35836	2,23919	2,35571	0,84674
5	3,35804	2,32888	2,2652	0,84674

Po dosazení hodnot ϱ_1, ϱ_4 do zadaného polynomu získáme první dva kořeny $\xi_1 = -3,3581$, $\xi_2 = 0,8467$. Pro nalezení imaginárních kořenů poslouží hodnota $\varrho_5 = \left(\frac{a_1^{(r)}}{a_3^{(r)}}\right)^{2^r}$.

r	ϱ_5
1	5,55964
2	5,97957
3	5,22633
4	5,27487
5	5,27538

Získáváme $q = 5,27538$ pro rovnici

$$z^4 + \frac{11}{2}z^3 + \frac{159}{16}z^2 + \frac{19}{4}z - 15 = (z^2 + pz + 5,27538)(z^2 + b_1 z + b_0).$$

Číslo p hledáme jako kořen rovnice

$$-15 = 5,27538(p^2 - 5,5p + 4,66212). \tag{4.6}$$

Čísla p vycházejí $p_1 = 2,9887$ a $p_2 = 2,5113$. Z těchto hodnot vyhovuje pouze $p_1 = 2,9887$. Hledáme tedy kořeny polynomu $z^2 + 2,9887z + 5,27538$, které jsou $\xi_{3,4} = -1,4944 \pm 1,7442\mathrm{i}$.

Ačkoli nejefektivnější byla opět Laguerrova metoda, která kovergovala již při 4. iteraci, všechny tři metody konvergovaly poměrně rychle.

Závěr

Cílem této práce bylo pojednat o numerických metodách určování imaginárních kořenů polynomů a vypracovat k teorii sbírku řešených příkladů. Text má sloužit zejména jako studijní opora pro studenty vysokých škol, popřípadě pro zájemce ze středních škol.

Z metod popsaných v práci se nejefektivnější zdála Laguerrova metoda, která, jak jsme viděli, je vhodná zejména pro výpočet jednoduchých reálných kořenů. V případě polynomů s imaginárními kořeny o této metodě není moc známo, avšak případy, kdy metoda nekonverguje, nejsou příliš obvyklé. K velké východě této metody patří, že je její konvergence zaručena při jakékoli počáteční aproximaci. Nevýhodou je, že při každé iteraci musíme počítat první a druhou derivaci polynomu.

U Bairstowovy metody jsme viděli, že ve většině případů a při vhodně zvolené počáteční aproximaci metoda také konverguje docela rychle. Tato metoda má hned dvě výhody. Nemusíme zde při hledání imaginárních kořenů použít komplexní aritmetiku a vyhledá nám hned dva kořeny najednou. Nevýhodou je, že při nevhodně zvolené počáteční aproximaci konverguje pomalu nebo nezačne konvergovat vůbec.

Graeffova metoda má oproti předchozím metodám výhodu, že nemusíme volit počáteční aproximaci, protože metoda pracuje přímo s koeficienty zadaného polynomu. Musíme si však dát pozor, aby polynom, s nímž pracujeme, byl v normovaném tvaru. Na příkladech jsme viděli, že metoda je velice vhodná pro hledání reálných kořenů polynomů. V případě imaginárních kořenů se postup v mnoha případech značně prodlouží, zejména hledáme-li kořeny polynomů stupně $n \geq 5$.

Ačkoli jsou v práci popsány jen tři metody, existuje ještě spousta dalších metod, které můžeme mezi sebou různě kombinovat, což nám mnohdy usnadní práci. Metody popsané v textu patří mezi nejužívanější a snadno pochopitelné. Také jsem se snažila vybrat metody tak, aby na nich byly vidět jejich výhody i nevýhody oproti ostatním metodám.

Literatura

[1] DĚMIDOVIČ, B. P. - MARON, I. A.: *Základy numerické matematiky.* SNTL, Praha, 1966.

[2] EMANOVSKÝ, P. - KÜHR, J.: *Cvičení z algebry pro 1. ročník II: Polynomy a algebraické rovnice.* VUP, Olomouc, 2020.

[3] HOROVÁ, I. - ZELINKA, J.: *Numerické metody.* 2. vydání, Masarykova univerzita, Brno, 2004.

[4] JAGOŠ. L.: *Numerické metody řešení nelineárních rovnic.* Brno, 2011 (nepublikovaná bakalářská diplomová práce).

[5] KRUTSKÝ, Fr.: *Algebra I.* VUP, Olomouc, 1992.

[6] MIKULÍK, J.: *Numerické metody řešení algebraických rovnic.* Olomouc, 2023 (nepublikovaná bakalářská diplomová práce).

[7] PARLETT, B.: *Laguerre's Method Applied to the Matrix Eigenvalue Problem.* Mathematics of Computation, 18, 1964, s. 464-485.

[8] RALSTON, A.: *Základy numerické matematiky.* Academia, Praha, 1978.

[9] SKOTÁK, J.: *Numerické metody pro nalezení kořenů polynomů.* Brno, 2017 (nepublikovaná bakalářská diplomová práce).

[10] ŠÍPEK, J. - ZÍTKO, J.: *Algoritmy na výpočet kořenů polynomu.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, sv. 46, 2001, č. 1, s. 33-42.

[11] VITÁSEK, E.: *Numerické metody.* SNTL, Praha, 1987.

[12] VRÁNOVÁ, Z.: *Metody pro výpočet kořenů polynomu.* Olomouc, 2013 (nepublikovaná bakalářská diplomová práce).