

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

O křivce, která vyplní čtverec



Vedoucí diplomové práce:
Doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.
Rok odevzdání: 2014

Vypracoval:
Zdeňka Káňová
Aplikace matematiky v ekonomii

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením pana Doc. Mgr. Karla Pastora, Ph.D., a uvedla jsem všechny použité zdroje.

V Olomouci dne 19. 3. 2014

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat svému vedoucímu diplomové práce Doc. Mgr. Karlu Pastorovi, Ph.D., že mi pomohl zpracovat tuto práci. Dále chci poděkovat své rodině a přátelům za podporu během studia.

Obsah

Úvod	5
1 Historický vývoj	7
1.1 George Cantor	8
1.2 Eugen Netto	8
1.3 Giuseppe Peano	9
1.4 David Hilbert	10
1.5 Waclaw Sierpiński	11
2 Topologické prostory	13
2.1 Souvislé topologické prostory	18
3 Metrické prostory	20
3.1 Úplné metrické prostory	22
3.2 Topologicky úplné metrické prostory	25
3.3 Součin metrických prostorů	27
3.4 Kompaktní metrické prostory	29
3.5 Stejnoměrná spojitost	31
3.6 Ekvivalence metrických prostorů	34
3.7 Uniformní metrika	37
4 Křivka vyplňující čtverec	39
Závěr	46
Literatura	48

Značení

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{R}^n$	n -dimenzionální kartézský součin
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval od a do b
(a, b)	otevřený interval od a do b
$\mathcal{I} = \langle 0, 1 \rangle$	uzavřený jednotkový interval
$\mathcal{Q} = \langle 0, 1 \rangle^2$	uzavřený jednotkový čtverec
$\mathcal{W} = \langle 0, 1 \rangle^3$	uzavřená jednotková krychle
$X \setminus A$	doplňěk množiny A na množině X
$\bar{A}$	uzávěr množiny A
$\text{int}A$	vnitřek množiny A
$\text{ext}A$	vnějšek množiny A
$\text{fr}A$	hranice množiny A
$\text{diam}A$	průměr množiny A
pr_i	i -tá kanonická projekce součinu množin

Úvod

Toto téma jsem si vybrala, protože jsem v něm viděla šanci nahlédnout do něčeho nového. Mám ráda cokoli, co se dá graficky ztvárnit. A čím více jsem se tématu věnovala, tím více mě zajímalo. Cílem mé práce je samozřejmě plně porozumět látce a zpracovat téma tak, aby bylo i pro čtenáře pochopitelné a zajímavé. Dále mám za cíl zpracovat vhodné doplňující příklady a sestavit vlastní prostor vyplňující křivku. Ale také chci teorii podpořit řadou obrázků.

Když se zamyslíme nad samotným názvem práce, O křivce, která vyplní čtverec, je zřejmé, že pod křivkou si můžeme představit jednorozměrný objekt. Avšak čtverec je objekt dvourozměrný. To nám říká, že budeme uvažovat nějaké spojitě zobrazení typu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Uvažovaná křivka vyplní čtverec tak, že protne každý bod tohoto čtverce. Z této úvahy je zřejmé, že nás čekají pojmy jako spojitě zobrazení, metrický prostor a další. Ale než se k těmto pojmům dostaneme, musíme zavést pojmy jako topologický prostor a mnoho dalších.

Tuto práci jsem rozčlenila na čtyři kapitoly. Nejdůležitější je třetí a čtvrtá kapitola, protože v těchto kapitolách je řada doplňujících příkladů a také má vlastní křivka vyplňující prostor.

První kapitola se zabývá historickým vývojem těchto křivek a především zmiňuje nejvýznamější osobnosti, které k objevení těchto křivek přispěly. U těchto osobností jsem uvedla, jaký byl jejich matematický přínos a také jak jejich křivka vypadala.

Kapitola druhá čtenáře seznámí se základními topologickými pojmy. A také se zde čtenář dozví, co se myslí souvislým topologickým prostorem. Tento pojem je v souvislosti s křivkami vyplňujícími prostor často zmiňován.

V kapitole třetí se věnuji metrickým prostorům a vlastnostem těchto prostorů. K těmto vlastnostem jsou uvedeny řešené příklady, které umožňují čtenáři téma hlouběji pochopit.

Poslední kapitola už popisuje geometrický postup vytvoření základního tvaru mé vlastní prostor vyplňující křivky, dále popisuje jednotlivé části konstrukce,

které budou využity ke generování posloupnosti. A výsledná křivka vznikne jako limita této posloupnosti. Nedílnou součástí této kapitoly je i důkaz, že křivka skutečně vyplní čtverec a vhodné doplňující obrázky, které umožní čtenáři vše lépe pochopit. Všechny obrázky uvedené v práci jsem vytvořila samostatně v programu InkScape a v programu Graph.

1 Historický vývoj

Abychom si dokázali představit, co předcházelo objevu prostor-vyplňující křivky, zastavíme se nejprve u historického vývoje v oblasti matematiky. Počátkem všeho byl samozřejmě pojem křivka. Ačkoliv se nám tento pojem zdá jasný a každý ví, co si pod tímto pojmem představit, definovat křivku nebylo vůbec jednoduché. Samozřejmě nelze určit, kdy přesně historie tohoto pojmu započala. Avšak k největšímu rozvoji v této oblasti došlo v období 1649 - 1748, což si lze spojit se jmény Pascal, Huygens, Newton, Leibniz a Bernoulli. Za pomoci Newtona se změnil pohled na rovinné křivky, které začly být vnímány jako souhrn bodů vyhovujících rovnici

$$F(x, y) = 0,$$

kde $F(x, y)$ udává vztah dvou proměnných, nikoliv nutně polynom. Objevuje se také reprezentace křivky mocninnou řadou a vznikají první pojmy diferenciální geometrie. [9, str. 9]

Pojetí pojmu křivka se v té době vyvíjí v úzké souvislosti se zaváděním pojmu funkce. Parametrická vyjádření již známých křivek vedla k dalšímu zobecnění pojmu křivka. Souřadnice bodů $X = [x, y]$ rovinné křivky byly dány jako funkce proměnné veličiny, tj. např. $x = \theta(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in I$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval, a přitom se na funkce θ , ψ kladly podmínky, které se stávaly čím obecnější, čím obecnější byl pojem funkce. Současně s vývojem pojmu funkce přináší diferenciální geometrie v 18. století nové metody do studia křivek a stává se pak samostatným odvětvím matematiky. V první polovině 19. století vznikla samostatná vědní disciplína, algebraická geometrie. Rozvoj geometrie v 19. století již nedovoluje sledovat vývoj teorie křivek v celé jeho šíři, proto se dále specializujeme na definici pojmu křivka. Nejpřesněji tuto definici zformuloval C. Jordan, ovšem brzy se ukázalo, že tato definice je příliš obecná. Roku 1890 G. Peano ukázal, že můžeme zvolit funkce θ , ψ spojitě na jednotkovém intervalu tak, že množina bodů $x = \theta(t)$, $y = \psi(t)$ vyplňuje plochu čtverce včetně jeho hranice. Souběžně proniká na konci 19. století do matematiky stále hlouběji tzv. množinové pojetí

a postupně vzniká nový obor matematiky - teorie množin. Tento přístup je úzce spjat se jménem G. Cantora. [9, str. 13]

1.1 George Cantor

George Cantor (1845-1918) se narodil v St. Petersburgu (což bylo dlouhá léta známo pod názvem Leningrad) a zemřel v Halle v Německu. Své studie zahájil na Univerzitě v Curychu roku 1862, a pokračoval na Univerzitě v Berlíně od 1863 do 1869, kde byl velmi ovlivňován Karlem Weierstrassem. Svou disertační práci napsal pod vedením E. E. Kummera a doktorandský diplom získal roku 1867. Učil na Univerzitě v Halle od 1869 do 1905, kde byl po deseti letech působení jmenován profesorem. Učinil převrat v matematice a matematickém myšlení, a to v rozvoji teorie množin a v teorii nekonečna. Avšak jeho naděje na dosažení profesury na Univerzitě v Berlíně byla zmařena L. Kroneckerem, který s jeho názory nesouhlasil. [4, str. 5]

Roku 1878 George Cantor učinil objev, který částečně naznačuje, že interval $\langle 0, 1 \rangle$ může být bijektivně zobrazen do čtverce $\langle 0, 1 \rangle^2$. Téměř okamžitě vznikla otázka, zda je či není možné, aby takové zobrazení bylo spojitě. [4, str. 1]

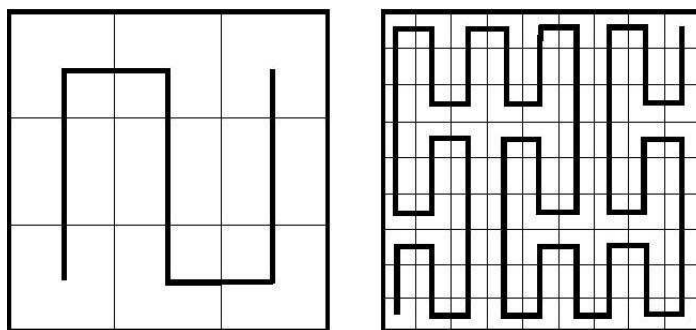
1.2 Eugen Netto

Roku 1879 E. Netto učinil takovýmto spekulacím konec. Ukázal, že takové bijektivní zobrazení je nutně nespojitě.

Eugen Netto (1848-1919) se narodil v Halle a zemřel v Giessen v Německu. Jako Cantor, i E. Netto studoval na Univerzitě v Berlíně od 1866 do 1870, kde byl do značné míry ovlivněn Leopoldem Kroneckerem a Karlem Weierstrassem. Roku 1870 získal doktorandský diplom pod vedením Weierstrasse. Učil na Univerzitě ve Štrasburgu od 1879 do 1882, na Univerzitě v Berlíně od 1882 do 1888 a nakonec se usadil na Univerzitě v Giessen, kde vyučoval až do svého důchodu, tj. do roku 1913. Jeho hlavní příspěvky k matematice spadají do oblasti teorie grup a kombinatoriky. [4, str. 6]

1.3 Giuseppe Peano

Předpokládejme, že bylo upuštěno od podmínky bijektivity. Je stále možné získat spojitě surjektivní zobrazení z $\mathcal{I}$ do $\mathcal{Q}$? Roku 1890 G. Peano vyřešil tuto otázku jednou provždy zkonstruováním první takovéto křivky. Křivky s touto vlastností jsou nyní nazývány jako prostor-vyplňující nebo také Peanovy křivky. [4, str. 1] Na obrázku si můžete prohlédnout první dvě iterace.



Obrázek 1: Peanova křivka vyplňující čtverec.

Giuseppe Peano (1858-1932) se narodil ve Spinettě v Itálii a zemřel v Turíně. Roku 1880 dokončil studium na Univerzitě v Turíně a o deset let později se zde stal profesorem. Tuto pozici si udržel do konce života. Je známý pro jeho průkopnické práce v symbolické logice, axiomatických metodách a pro jeho příspěvky k matematické analýze. [4, str. 31].

Byl to právě Peano, kdo zavedl symbol „ $\in$ “ pro prvky množiny a „ $\exists$ “ pro „takový že“. B. Russel jednou řekl, že dokud se nesetkal s Peanem, nikdy mu nedošlo, že by symbolická logika mohla mít využití v principech matematiky, protože znal Booleovu logiku a shledal to neužitečným. Peanův nejznámější příspěvek k analýze je pravděpodobně jeho důkaz existence řešení soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu (bez Lipschitzovských podmínek). V Aritmetickém principu položil základy aritmetiky přirozených čísel jako zřetelná tvrzení, vyjádřená v aritmetických a logických symbolech. Stále hovoříme o Peanových axiomech, dokonce i když Peano sám je přisuzuje Dedekindovy. Ivor Grattan-Guinness hodnotí Peana tak, že upozorňuje na jeho pozoruhodnou schopnost rozpoznat protipříklady,

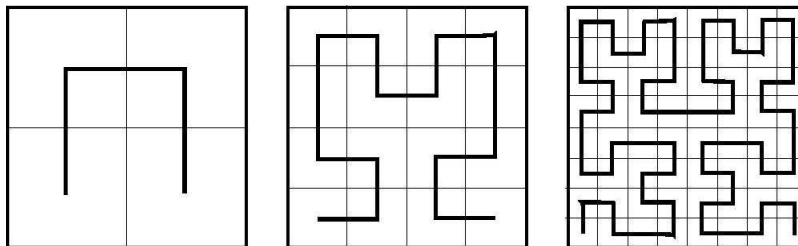
poukazující na rozdíly v teorii množin, které ostatní přehlédli, a schopnost cítit užitečnost jazykové analýzy v objasnění pojmů. [4, str. 31]

1.4 David Hilbert

David Hilbert (1862-1943), který víc než kdokoli jiný určil směr pro matematiky dvacátého století, se narodil v Kaliningradu a zemřel v Gotinkách. Studoval na Univerzitě v Kaliningradu, a doktorandský diplom získal roku 1884. C.L.F. Lindemann (který roku 1882 úspěšně dokázal, že π je transcendentní, tzn., že ho nelze určit konečně dlouhou řadou algebraických operací s celými čísly, [5]) a speciálně A. Hurwitz byli jeho nejvlivnější učitelé toho času. Po několika postgraduálních studiích v Lipsku a Paříži, se vrátil na Univerzitu v Kaliningradu (1886). Roku 1892 se stal nástupcem A. Hurwitze (který odešel do Curychu), a roku 1893 se stal řádným profesorem po Lindemannovi. Roku 1895 odešel na Univerzitu v Gotinkách, kde vyučoval až do svého odchodu do důchodu (1930). Významně přispěl ke všem oblastem matematiky: do roku 1893 se věnoval algebraickým formám, od roku 1894 do 1899 pracoval na teorii algebraických čísel, věnoval se i základům geometrie (1899-1903) a analýze, kde dokázal existenci řešení Dirichletova problému (1904-1909), zavedl neurčitý integrál do teorie pole a s jeho úpravou vztahů mezi integrály změnil pojem lineární systémy. Jeho úvod do úplných a oddělitelných Hilbertových prostorů, připravil půdu pro Riesz-Fischerův teorém o izometrii ℓ_2 a $\mathcal{L}_2$, někdy též tvrzení o úplnosti $L^2(a, b)$, a s tím také definitivní odpověď na otázku konvergence Fourierových řad. Riesz i Fischer si přáli dostat Hilbertovy výsledky pro obecnější třídy funkcí, což se jim nakonec nezávisle na sobě podařilo. Jejich objev je znám právě jako Riesz-Fischerův teorém, více v [14, str. 137]. Od roku 1918 obětoval čas a energii ke studii základů matematiky, kde byl nakonec zastíněn Kurtem Gödelem, který ukázal, že ve skutečnosti Hilbertův cíl zkonstruovat úplný a konzistentní systém, byl nedosažitelný. [4, str. 9]

Ačkoliv první prostor-vyplňující křivku objevil G. Peano, byl to právě Hilbert, který vytvořil tento fenomén plochy-vyplňujících křivek. On byl první, kdo roz-

poznal obecný geometrický postup generace, který umožnil konstrukci celé třídy prostor-vyplňujících křivek. Na obrázku si můžete prohlédnout, jak Hilbertova prostor-vyplňující křivka vypadá.



Obrázek 2: Hilbertova křivka vyplňující čtverec.

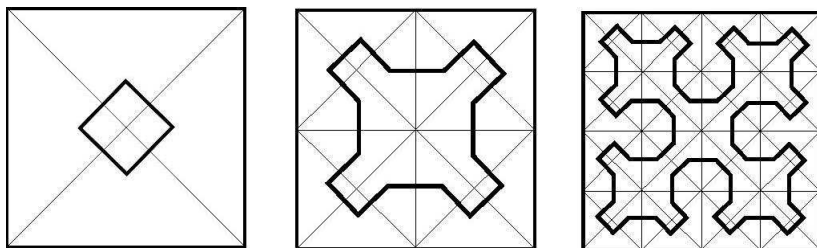
Může-li být interval $\mathcal{I}$ spojitě zobrazen do čtverce $\mathcal{Q}$, pak po rozdělení $\mathcal{I}$ do čtyř shodných podintervalů a $\mathcal{Q}$ do čtyř shodných podčtverců, může být každý podinterval spojitě zobrazen do jednoho z podčtverců. Každý podinterval je pak znovu rozdělen do dalších čtyř shodných podintervalů, a každý podčtverec do dalších čtyř shodných podčtverců a argument je opakován. Je-li to prováděno v rámci nekonečna, $\mathcal{I}$ a $\mathcal{Q}$ jsou rozděleny do 2^{2n} shodných replikací pro $n \in \mathbb{N}$. [4, str. 10]

1.5 Wacław Sierpiński

Wacław Sierpiński (1882-1969) se narodil a zemřel ve Varšavě v Polsku. Roku 1899 nastoupil na ruskou Univerzitu ve Varšavě. Roku 1904 odpromoval s diplomem v oblasti vědy. Poté odešel učit na gymnázium a zúčastnil se velké školské stávky, která byla spojována s revolucí z roku 1905. Poté odešel do Krakova, kde roku 1906, na Univerzitě v Krakově, získal doktorandský titul. Docentem se stal roku 1908 na Lvovské univerzitě a profesorem roku 1910. Toho času změnil zaměření z teorie čísel na topologii, přičemž k teorii čísel se vrátil až kolem roku 1950. Během posledních dvaceti let jeho života byla teorie čísel hlavním tématem jeho publikací. Sierpiński byl nejplodnějším matematikem, publikoval okolo 700 listů a knih, přičemž 600 z nich se týkalo topologie. Roku 1914 byl carskými orgány internován. V Moskvě se ho ujal Egorov a Lusin, a tím

bylo zahájeno dlouhé období spolupráce mezi Sierpińskim a Lusinem. Po válce se vrátil do Lvova a stal se profesorem na obnovené polské Univerzitě ve Varšavě. Toho času on společně s Mazurkiewiczem a Janiszewskim, založili novou polskou matematickou školu, zaměřenou na základy, teorii množin a aplikace. Pak také založili vědecký matematický časopis *Fundamenta Mathematicae*, což byl první časopis s tímto zaměřením. A pod jejich vedením ožil také časopis *Acta Arithmetica*. Během okupace, kdy byly veškeré instituce vyššího vzdělání zavřeny, Sierpiński učil tajně dál, a to ve svém bytě za velkého osobního rizika. Po válce byl členem předsednictva Matematického ústavu Polské akademie věd, kde zůstal téměř do konce života. Za jeho život mu bylo uděleno mnoho vyznamenání. [4, str. 49]

Roku 1912 W. Sierpiński představil jiný typ prostor-vyplňující křivky. Ukázal, že jeho křivka je limitou stejnoměrně konvergentní posloupnosti mnohoúhelníků. [4, str. 50] Tuto křivku si můžete prohlédnout na následujícím obrázku.



Obrázek 3: Sierpińského křivka vyplňující čtverec.

2 Topologické prostory

Než se dostaneme k definici topologického prostoru, uvedeme si nejprve několik obecných pojmů, které jsou nezbytné k pochopení dalšího textu. Tyto pojmy jsou z oblasti teorie množin a logiky. Následující definici věnuji pojmům injekce, surjekce a pro úplnost zadefinuji i bijekci.

Definice 1. *Nechť A, B jsou neprázdné množiny. Řekneme, že funkce $f : A \rightarrow B$ je injektivní, jestliže pro všechny dvojice různých bodů $a, a' \in A$ jsou jejich funkční hodnoty $f(a)$ a $f(a')$ různé, tedy*

$$[f(a) = f(a')] \Rightarrow [a = a'].$$

Řekneme, že f je surjektivní, pokud každý prvek $b \in B$ je zobrazením nějakého prvku $a \in A$ podle funkce f , tedy

$$[b \in B] \Rightarrow [b = f(a) \text{ pro alespoň jedno } a \in A].$$

Pokud je funkce injektivní i surjektivní, nazveme ji bijektivní. [1, str. 18]

Nedílnou součástí základních pojmů je také kartézský součin a složené zobrazení.

Definice 2. *Nechť jsou dány neprázdné množiny A, B . Jejich kartézský součin $A \times B$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b) takových, že $a \in A$ a $b \in B$, tj.*

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ a } b \in B\}. [1, str.13]$$

Definice 3. *Nechť A, B, C jsou neprázdné množiny a nechť $f : A \rightarrow B$ a $g : B \rightarrow C$ jsou dané funkce. Složené zobrazení $g \circ f$ funkcí f a g definujeme jako funkci $g \circ f : A \rightarrow C$ vztahem*

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)). [1, str.17]$$

V návaznosti na bijektivní funkci a kartézský součin definuji inverzní zobrazení.

Definice 4. *Uvažujme neprázdné množiny A, B a nechť je funkce $f : A \rightarrow B$ bijektivní, potom existuje zobrazení z B do A , které se nazývá inverzní zobrazení k zobrazení f , které definujeme pro $b \in B$ vztahem*

$$f^{-1}(b) = a,$$

kde a je prvek takový, že platí $b = f(a)$. [1, str. 18]

A nyní se dostáváme k pojmu topologický prostor. Tento pojem vznikl v důsledku studií reálné přímky, eukleidovských prostorů a spojitých funkcí na těchto prostorech [1].

Topologie se vyvinula v jednu z nejbohatších větví matematiky. Ovšem převážná většina aplikací topologie se týká prostorů metrických. S tím souvisí fakt, že topologie metrických prostorů je dnes v daleko pokročilejším stadiu než topologie obecná. I my zůstaneme pouze u základních pojmů a více se budeme věnovat metrickým prostorům. [6, str. 262]

Definice 5. *Topologií na množině X rozumíme soubor τ podmnožin množiny X splňujících následující vlastnosti:*

- (1) $\emptyset$ a množina X jsou v τ ,
- (2) sjednocení prvků libovolné podmnožiny z τ je v τ ,
- (3) průnik prvků libovolné konečné podmnožiny z τ je v τ .

Množina X , pro kterou byla zadána topologie τ , se nazývá topologický prostor. [1, str. 76]

Podmínky (1)-(3) se nazývají axiomy topologie. Topologický prostor je pak vlastně uspořádaná dvojice (X, τ) , je-li však zřejmé, o jakou topologii τ se jedná, místo označení (X, τ) používáme symbol X . Nyní uvedu některé základní příklady topologických prostorů:

- metrické prostory,
- pro libovolnou množinu X definujeme triviální topologii na X jako $\tau = \{\emptyset, X\}$
- pro libovolnou množinu X definujeme topologii konečných doplňků na X jako

$$\tau = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ konečná}\} \cup \{\emptyset\}. [10, str.1]$$

Prvky topologie τ se nazývají otevřené množiny. A každá množina $A \subseteq X$ se nazývá uzavřená, je-li její doplněk $X \setminus A$ množina otevřená. Pro úplnost doplním, co nazveme uzávěrem.

Definice 6. *Uzávěr množiny A je nejmenší uzavřená množina obsahující množinu A . [7, str. 4]*

Nyní zadefinujeme okolí bodu x , které obvykle značíme velkými tiskacími písmeny (např. U).

Definice 7. *Uvažujme topologický prostor X . Otevřená množina U , obsahující množinu $A \subset X$, se nazývá okolí množiny A . Okolím bodu $x \in X$ rozumíme okolí množiny $\{x\}$. [10, str. 1]*

Nedílnou součástí těchto úvodních definic jsou pojmy vnitřek, vnějšek a hranice.

Definice 8. *Uvažujme libovolnou množinu A v topologickém prostoru X . Bod $x \in X$ splňuje právě jednu z těchto tří podmínek:*

- *existuje okolí U bodu x tak, že $U \subset A$,*
- *existuje okolí U bodu x tak, že $U \subset X \setminus A$,*
- *každé okolí U bodu x má neprázdný průnik s množinou A i s jejím doplňkem $X \setminus A$.*

Splňuje-li bod x první, druhou resp. třetí podmínku, nazývá se vnitřní, vnější resp. hraniční bod množiny A . Množina všech vnitřních, vnějších resp. hraničních bodů množiny A se nazývá vnitřek, vnějšek resp. hranice množiny A a značí se $\text{int} A, \text{ext} A, \text{fr} A$. [7, str. 2]

Nyní zavedeme pojem spojitost.

Definice 9. *Nechť X a Y jsou topologické prostory. Řekneme, že funkce*

$$f : X \rightarrow Y$$

je spojitá, jestliže pro každou otevřenou podmnožinu $V \subseteq Y$ je množina $f^{-1}(V)$ otevřenou podmnožinou X . [1, str. 102]

Pomocí axiomů topologie lze potom snadno zjistit, jaké vlastnosti má systém všech uzavřených podmnožin daného topologického prostoru. Systémy podmnožin dané množiny, které mají tyto vlastnosti, lze rovněž použít k zavedení topologie na této množině. [7, str. 2]

Věta 1. *(a) Nechť X je topologický prostor. Systém σ všech uzavřených podmnožin X splňuje tyto podmínky:*

- (1) $\emptyset, X \in \sigma$,*
- (2) Průnik libovolného systému množin ze systému σ patří systému σ ,*
- (3) Sjednocení libovolných dvou množin ze systému σ patří systému σ .*

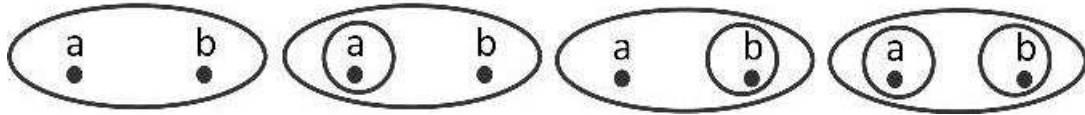
(b) Nechť X je množina, σ systém jejích podmnožin splňující podmínky (1)-(3). Pak systém množin $\tau = \{U \subset X | U = X \setminus A, A \in \sigma\}$, je topologie na X . Systém všech uzavřených množin v topologii τ splývá se systémem σ . [7, str. 2]

Nyní si uvedeme příklad, který jsem čerpala z [1, str. 76] a [7, str. 11], kde bylo k dispozici i řešení. Do příkladu doplním grafické znázornění a vysvětlení, aby bylo řešení srozumitelnější.

Příklad 1. Máme za úkol najít všechny topologie, které existují na jednoprvkové a dvouprvkové množině. A dále máme zjistit, kolik různých topologií existuje

na množině tříprvkové. [7, str. 11]

Řešení: Na jednoprvkové množině $X = \{a\}$ existuje pouze jedna topologie, a to $\tau = \{\emptyset, \{a\}\}$. První podmínka pro podmnožiny je splněna, protože topologie obsahuje jak prázdnou množinu, tak i samotnou jednoprvkovou množinu. A kdybychom vytvořili sjednocení i průnik podmnožin, získali bychom opět podmnožiny, které tvoří topologii. Uvažujme nyní dvouprvkovou množinu $X = \{a, b\}$. Na této množině existují čtyři topologie, které si tentokrát graficky znázorníme, tj. $\tau_1 = \{\emptyset, \{a, b\}\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$, $\tau_3 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$, $\tau_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.



Obrázek 4: Topologie na dvouprvkové množině.

Když si u jednotlivých obrázků zkusíme zjistit průniky a sjednocení, snadno ověříme, že se jedná o topologie.

Nakonec uvažujme tříprvkovou množinu $X = \{a, b, c\}$. Pokud bychom zkusili vytvořit topologie na X stejným principem, našli bychom 29 různých topologií. [7, str. 11] Na obrázku č. 5 jsem znázornila alespoň některé z nich.

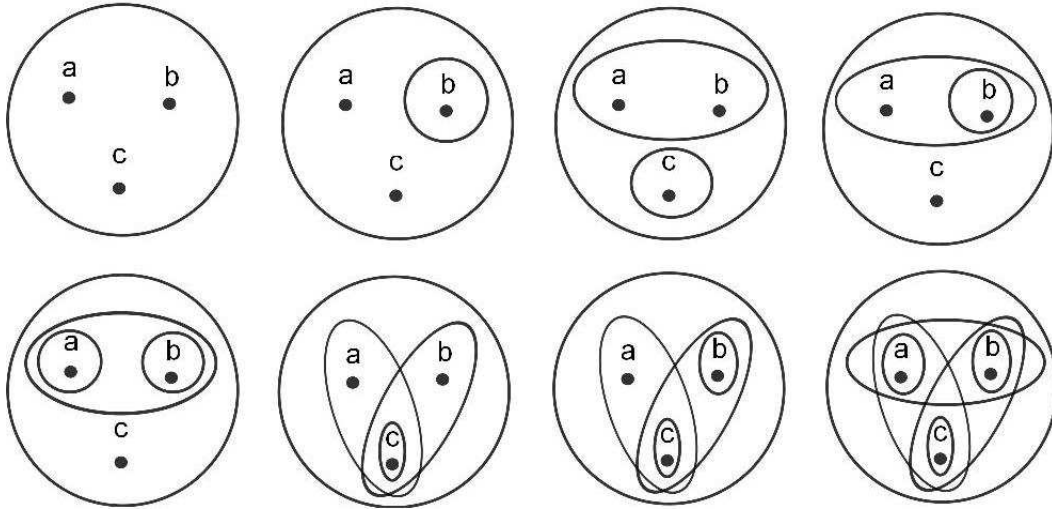
Další věta a definice nám poslouží zejména při řešení příkladů.

Věta 2. *Podmnožina topologického prostoru je uzavřená tehdy a jen tehdy, když obsahuje všechny její limity. [1, str. 98]*

Definice 10. *Nechť X je topologický prostor s topologií τ . Pokud je Y podmnožinou X , pak soubor*

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$$

je topologií na Y , nazývaný podprostorová topologie. S touto topologií je Y nazýváno podprostorem X a jeho otevřené množiny se skládají ze všech průniků otevřených



Obrázek 5: Příklady topologií na X .

množin na X a Y . [1, str. 88]

2.1 Souvislé topologické prostory

Definice souvislosti topologického prostoru je zcela přirozená. Nesouvislý objekt obvykle vidíme jako objekt složený ze dvou a více nezávislých kusů. Jedná se samozřejmě o topologickou vlastnost, neboť je formulována pomocí souboru otevřených množin na X .

Definice 11. Uvažujme topologický prostor X . Tento prostor nazveme *nesouvislý*, jestliže existují dvě neprázdné otevřené podmnožiny $U, V \subset X$ tak, že $U \cap V = \emptyset$ a $X = U \cup V$. Topologický prostor, který není nesouvislý, se nazývá *souvislý*. [7, str. 249]

Věta 3. Topologický prostor X je souvislý tehdy a jen tehdy, když neobsahuje otevřenou a uzavřenou podmnožinu $A \subset X$ různou od $\emptyset$ a X . [7, str. 249]

Nyní uvedeme několik vět, které nám řeknou, jak ze souvislých prostorů získat jiné souvislé prostory.

Věta 4. *Sjednocení souboru souvislých podprostorů X , které mají společný bod, je souvislé. [1, str. 150]*

Věta 5. *Nechť A je souvislý podprostor X . Jestliže $A \subset B \subset \bar{A}$, pak také B je souvislý. [1, str. 150]*

Věta 6. *Kartézský součin konečně mnoha souvislých prostorů je souvislý. [1, str. 150]*

Příklad 2. Nechť $\{A_\alpha\}$ je soubor souvislých podprostorů X a nechť A je souvislý podprostor X . Ukažte, že pokud $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ pro všechna α , pak $A \cup (\cup A_\alpha)$ je souvislé. [1, str. 152]

Řešení: Označme $B = \cup A_\alpha$ a nechť C je neprázdná, otevřená a uzavřená podmnožina množiny $Y = A \cup B$. Vzhledem k souvislosti množiny A platí buď $A \subset C$, nebo $A \cap C = \emptyset$. Předpokládejme, že platí $A \subset C$. (V případě $A \cap C = \emptyset$ bychom uvažovali množinu $Y \setminus C$, která je také neprázdná, otevřená a uzavřená podmnožina Y .) Podle Věty 4 nyní stačí ukázat, že $C = Y$. Vzhledem k souvislosti každého A_α pro $\forall \alpha$ máme buď $A_\alpha \subset C$ nebo $A_\alpha \cap C = \emptyset$. Pro žádné α poslední tvrzení nemůže platit, protože $A \cap A_\alpha$ je neprázdná podmnožina C , a pak tedy A_α je podmnožinou C pro $\forall \alpha$. Takže $C = Y$, a proto Y je souvislé.

3 Metrické prostory

Nejprve zdefinuji metrický prostor a pojmy s ním související.

Definice 12. *Nechť X je množina a $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ je reálná funkce taková, že pro každé $x, y, z \in X$ platí*

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. (trojúhelníková nerovnost) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Pak řekneme, že (X, d) je metrickým prostorem. Funkce d se nazývá metrika. [2, str. 1]

Je-li zřejmé, o jaký metrický prostor se jedná, místo označení (X, d) používáme symbol X . Pro představu si uvedeme příklady několika metrických prostorů:

- $X \neq \emptyset$, kde

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

- $X = \mathbb{R}(\mathbb{C})$, kde

$$d(x, y) = \alpha |x - y|, \quad \alpha > 0$$

- $X = \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, kde

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Nyní si definujeme některé známé typy prostorů, které budeme později v práci používat.

Definice 13. *Mějme dané $x = (x_1, \dots, x_n)$ na $\mathbb{R}^n$, kde normu x definujeme jako*

$$\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

Pak eukleidovskou metriku d na $\mathbb{R}^n$ definujeme takto

$$d(x, y) = \|x - y\| = [(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}$$

a čtvercovou metriku ρ definujeme vztahem

$$\rho(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}. \text{ [1, str.122]}$$

Mezi základní pojmy bude patřit limita posloupnosti a ε -okolí, které se využívá v řadě dalších definic a vět.

Definice 14. *Nechť X je metrický prostor. Prvek x metrického prostoru X nazýváme limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z tohoto prostoru, jestliže*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0.$$

Značíme

$$x_n \rightarrow x \quad \text{v } X. \text{ [8, str.823]}$$

Věta 7. *Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů metrického prostoru X má nejvýše jednu limitu. Má-li limitu, tj. je-li konvergentní, pak tutéž limitu má i libovolná její podposloupnost. [8, str. 823]*

Definice 15. *Množinu všech bodů metrického prostoru X , které mají od daného bodu $x \in X$ vzdálenost menší než ε , kde $\varepsilon > 0$, nazýváme ε -okolím bodu x , resp. otevřenou koulí se středem v x a poloměrem ε , a značíme $B(x, \varepsilon)$. [8, str. 823]*

Metrický prostor je zároveň topologickým prostorem, což je zřejmé z definice indukované topologie. Tento pojem spadá spíše do předchozí kapitoly, ale vychází z pojmu metrika, který je součástí až této kapitoly.

Definice 16. Uvažujme metrický prostor X s metrikou d . Na tomto prostoru uvažujme množinu všech koulí $B(x, \varepsilon)$, kde $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Topologie τ na metrickém prostoru je pak množina všech možných sjednocení těchto koulí a nazývá se topologie indukovaná metrikou d . [1, str. 119]

A nyní zadefinujeme metrizable topologický prostor, který navazuje na předchozí definici.

Definice 17. Nechť X je topologický prostor. Řekneme, že X je metrizable, jestliže zde existuje metrika d na množině X , která indukuje topologii X . Metrický prostor je metrizable prostor X společně s konkrétní metrikou d , která zadává topologii X . [1, str. 120]

Další pojem je cauchyovská posloupnost, který je často definován v souvislosti s metrickými prostory.

Definice 18. Nechť (X, d) je metrický prostor. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů na X se nazývá cauchyovská posloupnost na (X, d) , jestliže platí, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje celé číslo N takové, že

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{pro všechna } n, m \geq N. \quad [1, \text{str. 264}]$$

3.1 Úplné metrické prostory

A nyní už díky cauchyovské posloupnosti můžeme zadefinovat i úplný metrický prostor.

Definice 19. Uvažujme metrický prostor (X, d) . Tento prostor nazveme úplným, jestliže každá cauchyovská posloupnost na X konverguje. [1, str. 264]

Jeden z nejznámějších příkladů úplného metrického prostoru je prostor reálných (nebo komplexních) čísel, avšak například prostor racionálních čísel úplný není. Nyní zpět k hledání a ověřování cauchyovských posloupností.

Věta 8. *Každá konvergentní posloupnost na X je cauchyovská posloupnost.*[7, str. 117]

Nyní uvedu větu, kterou využiji pro důkaz v kapitole Křivka vyplňující čtverec.

Věta 9. (a) *Úplný podprostor metrického prostoru je uzavřená množina.*
(b) *Uzavřená množina v úplném metrickém prostoru je úplný podprostor.*[7, str. 117]

Další věta je velmi důležitá pro vyřešení následujícího příkladu.

Věta 10. *Každá cauchyovská posloupnost je omezená. Jestliže nějaká podposloupnost cauchyovské posloupnosti konverguje, pak samotná posloupnost konverguje a má tutéž limitu.*[15, str. 14]

A zdefinuji průměr množiny, který je potřeba při řešení dalšího z příkladů.

Definice 20. *Nechť (X, d) je metrický prostor. Podmnožinu $A \subset X$ nazveme omezenou, jestliže existuje přirozené číslo M takové, že platí*

$$d(a_1, a_2) \leq M \quad \text{pro všechna } a_1, a_2 \in A.$$

Jestliže je množina A omezená a neprázdná, pak průměr množiny A je definován jako číslo

$$\text{diam} A = \sup\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$
[1, str.121]

Příklad 3. Ukažte, že metrický prostor (X, d) je úplný tehdy a jen tehdy, když pro posloupnost $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ do sebe vnořených neprázdných uzavřených množin z X takovou, že $\text{diam} A_n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$, je průnik množin A_n neprázdný.[1,

str. 270]

Řešení: „ $\Rightarrow$ “ Zvolme libovolnou posloupnost neprázdných uzavřených do sebe vnořených množin $\{A_n\}$, pro jejichž průměry platí $\text{diam}A_n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$, tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L \in \mathbb{N} \quad (\forall n \in \mathbb{N}, n > L) \quad (\text{diam}A_n < \varepsilon).$$

K této posloupnosti budeme dále uvažovat posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tak, že $x_n \in A_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro $n, m \geq L$ je $x_n, x_m \in A_L$, protože

$$A_1 \supset \dots \supset A_L \supset \dots \supset A_n \supset \dots \supset A_m \supset \dots,$$

a tedy

$$\text{diam}A_1 \geq \text{diam}A_2 \geq \dots \geq \text{diam}A_L \geq \dots \geq \text{diam}A_n \geq \dots \geq \text{diam}A_m \geq \dots$$

Je zřejmé, že vybráním L dostatečně velkého může být $\text{diam}A_L$ menší než nějaké dané ε . Platí

$$d(x_n, x_m) \leq \text{diam}A_L < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq L$$

a tedy $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská posloupnost. Navíc víme, že metrický prostor je úplný. Tedy každá cauchyovská posloupnost na X je konvergentní, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

kde $x \in X$. Díky uzavřenosti množin platí $A_n = \bar{A}_n$. Pak tedy

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Pokud by totiž existovalo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x \notin A_{n_0}$, pak existuje δ -okolí bodu x disjunktní s A_{n_0} . To ovšem vzhledem k tomu, že A_n je posloupnost do sebe vnořených množin, znamená, že $d(x_n, x) > \delta$ pro každé $n \geq n_0$, což je spor s tím, že posloupnost x_n konverguje k x .

„ $\Leftarrow$ “ Pro libovolně zvolenou cauchyovskou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ položíme

$$A_1 = \overline{\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}},$$

$$A_2 = \overline{\{x_n\}_{n=2}^{+\infty}},$$

$$A_3 = \overline{\{x_n\}_{n=3}^{+\infty}},$$

$\vdots$

Posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupností do sebe vnořených, neprázdných a uzavřených množin, pro kterou navíc platí, že $\text{diam} A_n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$, neboť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost. Dle předpokladu je

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Nechť tedy

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Tvrdíme, že

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

V opačném případě by existovalo δ -okolí bodu x a podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ležící vně δ -okolí bodu x . Jelikož $\text{diam} A_n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$, našli bychom pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ množinu A_{n_0} tak, že $x \notin A_{n_0}$, což by bylo ve sporu s tím, že $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Uvažovaná posloupnost je tak konvergentní a metrický prostor je úplný.

3.2 Topologicky úplné metrické prostory

Abychom mohli zadefinovat topologicky úplný metrický prostor, musíme nejprve zmínit pojem homeomorfismus a homeomorfní prostory.

Definice 21. *Nechť X a Y jsou topologické prostory a nechť $f : X \rightarrow Y$ je bijekce. Jestliže jsou funkce f i její inverze*

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

spojité, pak nazveme funkci f homeomorfismem.[1, str. 105]

Tato zobrazení přenášejí topologickou strukturu jednoho topologického prostoru na druhý a jsou v tomto smyslu topologickými ekvivalencemi.[7, str. 17]

Definice 22. *Mějme topologické prostory X, Y . Tyto prostory se nazývají homeomorfní, existuje-li homeomorfismus $f : X \rightarrow Y$.*[7, str. 18]

A nyní už můžeme zadefinovat topologicky úplný metrický prostor.

Definice 23. *Metrický prostor (X, d) nazveme topologicky úplným tehdy a jen tehdy, když existuje úplný metrický prostor homeomorfní s tímto metrickým prostorem.*[13, str. 87]

Zamyslíme-li se nad vztahem úplného a topologicky úplného metrického prostoru, získáme následující implikaci. Je-li metrický prostor úplný, pak je tento prostor také topologicky úplný. Avšak tato implikace se nedá obrátit. Existuje totiž topologicky úplný metrický prostor, který není úplný. Uvažujme již zmiňovaný prostor reálných čísel, který je úplný a s ním homeomorfní otevřený interval $(0, 1)$. Otevřený interval není úplný metrický prostor, ale existuje úplný prostor homeomorfní s tímto intervalem a proto je tento interval topologicky úplný metrický prostor. Pojem úplnost, kterému jsme se věnovali v předchozí kapitole, byl vlastností metrickou. Avšak pojem topologická úplnost je vlastností topologickou. A jedná se tedy o pojem obecnější. To znamená, že věty z předchozí kapitoly můžeme využít i v této kapitole.

Příklad 4. Ukažte, že uzavřený podprostor topologicky úplného prostoru je topologicky úplný.[1, str. 270]

Řešení: Toto je přesně ten případ, kdy můžeme využít větu z předchozí kapitoly a zobecnit ji. Uzavřený podprostor úplného metrického prostoru je úplný, a proto také uzavřený podprostor topologicky úplného prostoru je topologicky úplný.

3.3 Součin metrických prostorů

Definice 24. *Bud'te X, Y neprázdné množiny, $X \times Y$ jejich kartézský součin. Zobrazení $\text{pr}_1 : X \times Y \rightarrow X$ (resp. $\text{pr}_2 : X \times Y \rightarrow Y$), definované vztahem $\text{pr}_1(x, y) = x$ (resp. $\text{pr}_2(x, y) = y$), se nazývá první (resp. druhá) kanonická projekce součinu $X \times Y$. [7, str. 34]*

Definice 25. *Bud' X_1 (resp. X_2) metrický prostor s metrikou d_1 (resp. d_2). Pro libovolné $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X_1 \times X_2$ položme*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = ((d_1(x_1, x_2))^2 + (d_2(y_1, y_2))^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Funkce d je metrika na součinu množin $X_1 \times X_2$ a množina $X_1 \times X_2$ s touto metrikou se nazývá součin metrických prostorů X_1, X_2 . [7, str. 114]

Pojem součinu (dvou) metrických prostorů se přirozeným způsobem zobecňuje na libovolný konečný systém metrických prostorů. [7, str. 115]

Definice 26. *Bud'te $X_i, i = 1, 2, \dots, k$, metrické prostory, nechť d_k je metrika metrického prostoru X_k . Označme $\text{pr}_i : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k \rightarrow X_i$ i -tou kanonickou projekci součinu množin. Pro každé $x, y \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$ položme*

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^k (d_i(\text{pr}_i x, \text{pr}_i y))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Funkce d je metrika na množině $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$ a množina $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$ s touto metrikou se nazývá součin metrických prostorů $X_1, X_2, \dots, X_k$. [7, str. 115]

Věta 11. *Metrická topologie na součinu metrických prostorů $X_i, i = 1, 2, \dots, k$ je totožná se součinem metrických topologií metrických prostorů $X_i, i = 1, 2, \dots, k$. [7, str. 114]*

Příklad 5. Ukažte, že kartézský součin konečně mnoha topologicky úplných metrických prostorů je topologicky úplný metrický prostor. [1, str. 270, speciální případ]

Řešení: Abychom potvrdili toto tvrzení, postačí dokázat, že kartézský součin konečně mnoha úplných metrických prostorů je úplný metrický prostor. Nechť X_1 je úplný metrický prostor s metrikou d_1 , X_2 je úplný metrický prostor s metrikou d_2 ,
...

X_n je úplný metrický prostor s metrikou d_n , kde n je libovolné konečné přirozené číslo. V řešení se omezíme na dva metrické prostory, přičemž kartézský součin konečně mnoha prostorů bychom dostali postupným násobením dalšími prostory.

Označme d_{12} jako metriku na $X_1 \times X_2$. Předpokládejme, že $\{\{x_{1i}\}, \{x_{2i}\}\}$ je cauchyovská posloupnost na $X_1 \times X_2$. Protože pro $\forall i, j$ platí

$$d_1(x_{1i}, x_{1j}) \leq d_{12}((x_{1i}, x_{2i}), (x_{1j}, x_{2j})),$$

$$d_2(x_{2i}, x_{2j}) \leq d_{12}((x_{1i}, x_{2i}), (x_{1j}, x_{2j})),$$

je každá z posloupností $\{x_{1i}\}, \{x_{2i}\}$ také cauchyovská. Z toho vyplývá, že existují limity

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{1i} = x_1,$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{2i} = x_2.$$

Nyní nechť je $\varepsilon > 0$, pak existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že

$$d_1(x_{1i}, x_1) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

$$d_2(x_{2i}, x_2) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{pro } \forall i \geq N.$$

Pak tedy

$$d_{12}((x_{1i}, x_{2i}), (x_1, x_2)) = ((d_1(x_{1i}, x_1))^2 + (d_2(x_{2i}, x_2))^2)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

a $\lim(x_{1i}, x_{2i}) = (x_1, x_2)$, čímž jsme dokázali, že metrický prostor $X_1 \times X_2$ je úplný [7, str. 118] a tedy i topologicky úplný. Pokud bychom nyní vzali metrické prostory $X_1 \times X_2$ a X_3 a postupovali stejně, získali bychom opět topologicky úplný metrický prostor. A takto bychom pokračovali až do n .

3.4 Kompaktní metrické prostory

Pojem kompaktnosti není tak přirozený, jako pojem spojitosti. Od počátků topologie bylo zřejmé, že uzavřený interval na reálné přímce měl jisté vlastnosti, které byly stěžejní pro důkazy různých tvrzení. Ale dlouho nebylo jasné, jak by se měla tato vlastnost přeformulovat pro libovolný topologický prostor. Nakonec se tato vlastnost zformulovala na dnes již dobře známý pojem kompaktnost.[1, str. 163]

Definice 27. *Nechť (X, d) je metrický prostor. Jestliže každá posloupnost $\{x_n\} \subset X$ obsahuje podposloupnost, která má limitu v X , řekneme, že prostor X je kompaktní.[2, str. 21]*

Dále zadefinujeme vzdálenost bodu x od množiny A .

Definice 28. *Nechť (X, d) je metrický prostor, $x \in X$ a A je libovolná neprázdná podmnožina X . Číslo*

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

nazveme vzdáleností bodu x od množiny A . [2, str. 13]

A nyní už můžeme zadefinovat totálně omezený prostor. Jedná se o vlastnost, která je silnější než pouhá omezenost prostoru.

Definice 29. *Nechť (X, d) je metrický prostor. Jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $M_\varepsilon \subset X$ taková, že*

$$d(x, M_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in X,$$

řekneme, že (X, d) je totálně omezený. [2, str. 21]

Nyní na základě předchozí definice dostáváme větu, která může usnadnit hledání kompaktních prostorů.

Věta 12. *Prostor (X, d) je kompaktní právě tehdy, je-li úplný a totálně omezený.* [2, str. 21]

Nyní uvedeme některé základní vlastnosti kompaktních metrických prostorů a vhodné doplňující příklady.

Věta 13. *Každý uzavřený podprostor kompaktního prostoru je kompaktní.* [1, str. 165]

Věta 14. *Kartézský součin konečně mnoha kompaktních prostorů je kompaktní.* [1, str. 167]

Následující větu využijeme zejména v závěru této práce.

Věta 15. *Mějme topologické prostory X, Y , spojitě zobrazení $f : X \rightarrow Y$ a podmnožinu $A \subset X$. Je-li A kompaktní, pak také množina $f(A) \subset Y$ je kompaktní.* [7, str. 197]

Příklad 6. *Nechť X je metrický prostor. Předpokládejme, že pro nějaké $\varepsilon > 0$ platí, že každé ε -okolí na X má kompaktní uzávěr. Ukažte, že X je úplný metrický prostor.* [1, str. 270]

Řešení: Uvažujme cauchyovskou posloupnost $\{x_n\}$ na X a vezměme $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná $m, n \geq N$ platí $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Pak všechny body posloupnosti $\{x_n\}$, s případnou výjimkou prvních $N-1$ členů, leží v kompaktním uzávěru ε -okolí bodu x_N . Z toho vyplývá, že posloupnost má konvergentní podposloupnost x_{n_k} . Limitu této podposloupnosti označíme x a ukážeme si, že x je i limitou celé posloupnosti. Pro libovolné $\delta > 0$ vezmeme $N_1 \geq N$ takové, že pro $m, n \geq N_1$ platí $d(x_m, x_n) < \frac{\delta}{2}$ a podobně pro $N_2 \geq N$ takové, že $n_k > N_2$ platí $d(x_{n_k}, x) < \frac{\delta}{2}$. Vezmeme-li libovolné M takové, že platí $M \geq N_1, N_2$ a aplikujeme-li trojúhelníkovou nerovnost, pak

$$d(x_n, x) < \delta \quad \text{pro } n \geq M.$$

Tedy x je limitou dané cauchyovské posloupnosti a X je úplný metrický prostor.

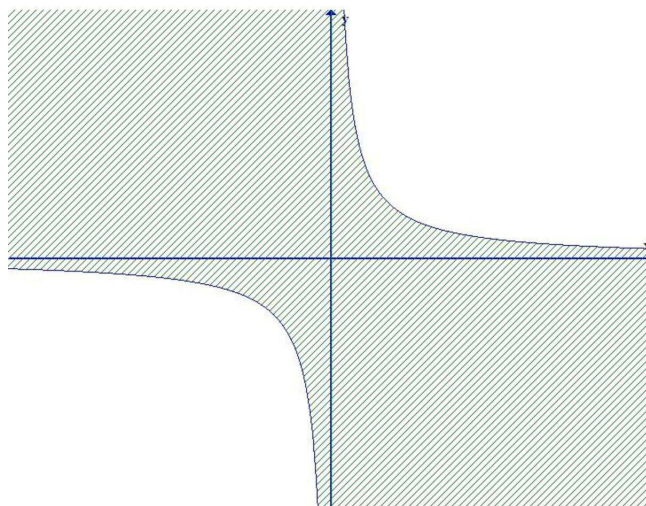
Příklad 7. Necht' X je metrický prostor. Předpokládejme, že pro všechna $x \in X$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že okolí $B(x, \varepsilon)$ má kompaktní uzávěr. Ukažte na příkladu, že X nemusí být úplné.[1, str. 270]

Řešení: Uvažujme množinu všech bodů takových, že platí $xy < 1$. Tuto množinu si můžete prohlédnout na obrázku.

Tuto množinu označíme $X \subset \mathbb{R}^2$. Množina X není uzavřená v $\mathbb{R}^2$ a tedy podle Věty 9.a) nemůže být X s eukleidovskou metrikou úplným prostorem. Ale protože X je množina otevřená v $\mathbb{R}^2$, pro každé $x \in X$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že uzávěr $B(x, \varepsilon)$ je podmnožinou X a je kompaktní v topologii dané eukleidovskou metrikou $\mathbb{R}^2$, a tudíž i v indukované podprostorové topologii na X .

3.5 Stejnoměrná spojitost

Spojitosť, což byla lokoální vlastnost, jsme již zadefinovali. Nyní se dostáváme k vlastnosti globální, která je silnější, a to k vlastnosti stejnoměrné spojitosti. Z toho vyplývá, že je-li funkce stejnoměrně spojitá, je také spojitá.



Obrázek 6: Množina všech bodů takových, že $xy < 1$.

Definice 30. Uvažujme metrické prostory (X, d_x) , (Y, d_Y) . Funkci f danou zobrazáním z metrického prostoru (X, d_X) do (Y, d_Y) nazveme *stejněměrně spojitou*, jestliže pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolnou dvojici bodů $x_0, x_1 \in X$ platí

$$d_X(x_0, x_1) < \delta \implies d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon. [1, \text{str.176}]$$

Dostaneme-li se do speciální situace, že bychom měli X kompaktní, platila by následující implikace.

Věta 16. Nechť $f : X \rightarrow Y$ je spojitě zobrazení z kompaktního metrického prostoru (X, d_X) do metrického prostoru (Y, d_Y) . Pak f je *stejněměrně spojitá*. [1, str. 176]

Příklad 8. Nechť (X, d_X) a (Y, d_Y) jsou metrické prostory, kde Y je úplné a nechť $A \subset X$. Ukažte, že pokud je $f : A \rightarrow Y$ *stejněměrně spojitá*, pak f může být jednoznačně rozšířena na spojitou funkci $g : \bar{A} \rightarrow Y$ a g je také *stejněměrně spojitá*. [1, str. 270]

Řešení: Budeme-li uvažovat $x \in A$, bude platit $f(x) = g(x)$. Ale pro $x \in \bar{A} \setminus A$ budeme muset $g(x)$ dodefinovat. Vezměme $x \in \bar{A} \setminus A$, pak bude existovat alespoň jedna posloupnost $\{a_n\}$ bodů z A taková, že $a_n \rightarrow x$ pro $n \rightarrow \infty$. Dále budeme uvažovat takovou posloupnost.

Nyní si ukážeme, že $f(a_n) \rightarrow z$, kde $z \in Y$. Protože je Y úplné, stačí ověřit následující podmínku:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 : \quad d_Y(f(a_m), f(a_n)) < \varepsilon.$$

Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$. Podle definice stejnoměrné spojitosti k němu existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné $a_n, a_m \in A$ splňující podmínku $d_X(a_n, a_m) < \delta$ bude

$$d_Y(f(a_n), f(a_m)) < \varepsilon.$$

Uvažujme $\frac{\delta}{2}$ okolí bodu x a označme je U . Podle definice limity existuje číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro libovolné přirozené $n \geq n_0$ bude $a_n \in U$. Poté pro $n \geq n_0, m \geq n_0$, platí

$$d_X(a_m, a_n) \leq d_X(a_m, x) + d_X(x, a_n) < 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta = \delta,$$

a tedy

$$d_Y(f(a_m), f(a_n)) < \varepsilon.$$

Bod $z \in Y$ nezávisí na tom, kterou posloupnost $\{a_n\}$ bodů z A uvažujeme. Opravdu, pokud by pro nějakou posloupnost $\{b_n\} \subset A$ platilo, že $\lim b_n = x$, předchozím postupem zjistíme, že existuje $\lim f(b_n)$. Pokud by $\lim f(b_n) \neq \lim f(a_n)$, znamenalo by to, že pro jisté $M > 0$ a $n_1 \in \mathbb{N}$ je

$$d_Y(f(a_n), f(b_n)) > M$$

pro každé $n \geq n_1$, což je ovšem spor se stejnoměrnou spojitostí funkce f na A a s tím, že $\lim a_n = \lim b_n = x$.

Nyní uvažujme $x, y \in \bar{A}$ takové, že $d_X(x, y) < \delta$. Necht' $\{x_n\}, \{y_n\}$ jsou posloupnosti na A , pro které platí

$$x_n \rightarrow x \quad \text{a} \quad y_n \rightarrow y \quad \text{pro} \quad n \rightarrow \infty$$

a proto

$$d_X(x_n, y_n) \rightarrow d_X(x, y) \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

To plyne z trojúhelníkové nerovnosti

$$d_X(x, y) - d_X(x_n, x) - d_X(y, y_n) \leq d_X(x_n, y_n) \leq d_X(x_n, x) + d_X(x, y) + d_X(y, y_n)$$

a přejdeme-li k limitě, získáme

$$\lim d_X(x_n, y_n) = d_X(x, y) < \delta.$$

Nyní zvolme n_0 tak, že platí

$$n > n_0 : \quad d_X(x_n, y_n) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Protože $f(x_n) \rightarrow g(x)$, lze vzít n_1 tak, že

$$n > n_1 : \quad d_Y(f(x_n), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

a stejně tak, protože $f(y_n) \rightarrow g(y)$, lze zvolit n_2 tak, že

$$n > n_2 : \quad d_Y(f(y_n), g(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nechť $N = \max\{n_0, n_1, n_2\}$, pak platí

$$\begin{aligned} n > N : \quad d_Y(g(x), g(y)) &\leq d_Y(g(x), f(x_n)) + d_Y(f(x_n), f(y_n)) + d_Y(f(y_n), g(y)) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

a tedy i $g(x)$ je stejnoměrně spojitě zobrazení.

3.6 Ekvivalence metrických prostorů

V této kapitole se budu věnovat pojmu ekvivalentní metriky. Pomocí takové metriky si můžeme často usnadnit vyšetřování topologických pojmů. To jsou pojmy, na které nemá vliv výměna metriky za ekvivalentní. Mezi tyto pojmy patří např. otevřená množina, uzavřená množina nebo uzávěr. A nyní už uvedu samotnou definici.

Definice 31. *Bud'te d_1, d_2 dvě metriky na množině X . Označme $X_1 = (X, d_1)$, $X_2 = (X, d_2)$. Řekneme, že metriky d_1, d_2 jsou stejnoměrně (metricky) ekvivalentní, jestliže identické zobrazení $i : X_1 \rightarrow X_2$ i k němu inverzní zobrazení $X_2 \rightarrow X_1$ jsou obě stejnoměrně spojité.*[7, str. 120]

Přičemž identické zobrazení je definováno následovně:

Definice 32. *Nechť X je metrický prostor. Zobrazení $f : X \rightarrow X$, pro které je $f(x) = x$ pro každé $x \in X$ nazýváme identickým a označujeme i_X nebo prostě i .*[11, str. 11]

Věta 17. *Jsou-li metriky d_1, d_2 stejnoměrně ekvivalentní, pak X_1 je úplný tehdy a jen tehdy, je-li úplný metrický prostor X_2 .*[7, str. 120]

Nyní uvedeme definici standardní omezené metriky, na které je postaven následující příklad.

Definice 33. *Nechť X je metrický prostor s metrikou d . Definujeme $\bar{d} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem*

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}.$$

Pak $\bar{d}$ je metrika, která indukuje stejnou topologii na d . Metriku $\bar{d}$ nazýváme standardní omezená metrika odvozená z d .[1, str. 121]

Poznemejme, že pokud X je úplný metrický prostor v metrice d , pak X je úplný metrický prostor ve standardní omezené metrice $\bar{d}$ odvozené z d a naopak [1, str. 268]. Dále platí, že uzavřená podmnožina A úplného metrického prostoru (X, d) je nutně úplná v omezené metrice. Existuje-li cauchyovská posloupnost v A , pak se jedná také o cauchyovskou posloupnost v X , která konverguje na X . Přičemž limita nutně náleží do množiny A , protože A je uzavřenou podmnožinou množiny X . [1, str. 264]

Příklad 9. Mějme dány dva metrické prostory (X, d) a $(X, \bar{d})$. Máme dokázat, že

metrika d je metricky ekvivalentní se standardní omezenou metrikou $\bar{d}$. [1, str. 270]

Řešení: Uvažujme nejprve zobrazení $f : (X, \bar{d}) \rightarrow (X, d)$, pro které platí $f(x) = x$. Dokážeme, že se jedná o stejnoměrně spojitě zobrazení. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad \bar{d}(f(x), f(y)) = \bar{d}(x, y) < \varepsilon.$$

Uvažujeme-li totiž $\delta = \min\{\varepsilon, 1\}$, pak pro libovolné $0 < \varepsilon \leq 1$ bude $\delta = \varepsilon$ takové, že $d(x, y) < \delta$ a pak tedy

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\} = d(x, y) < \varepsilon.$$

Pokud bychom však vzali libovolné $\varepsilon > 1$, dostali bychom $\delta = 1$ takové, že platí $d(x, y) < \delta = 1$, a pak tedy

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\} = 1 < \varepsilon.$$

Nyní vezměme inverzní zobrazení $f^{-1} : (X, d) \rightarrow (X, \bar{d})$. Opět bychom zvolili $\delta = \min\{\varepsilon, 1\}$ a stejným postupem bychom dokázali, že je i toto zobrazení stejnoměrně spojitě. A tedy podle definice ekvivaletních metrik jsou metriky d a $\bar{d}$ metricky ekvivalentní.

Příklad 10. Mějme dány metrické prostory (X, d) a (X, d') . Máme ukázat, že pokud jsou metriky d a d' metricky ekvivalentní, pak platí, že metrický prostor (X, d) je úplný tehdy a jen tehdy, když je úplný metrický prostor (X, d') . [1, str. 270]

Řešení: Zvolme posloupnost $\{x_n\}$ prvků z X . Předpokládejme, že je $\{x_n\}$ Cauchyovská na (X, d') . Dokážeme, že je také Cauchyovská na (X, d) . Uvažujme libovolné $\varepsilon > 0$, pak k němu podle definice stejnoměrné spojitosti aplikované na zobrazení $f : (X, d') \rightarrow (X, d)$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí

$$d'(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y) < \varepsilon.$$

Pokud vezmeme $L \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq L$, bude platit

$$d'(x_n, x_m) < \delta$$

a pak tedy také

$$d(f(x_n), f(x_m)) = d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

tedy cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ na (X, d') je cauchyovská posloupnost také na (X, d) . Protože dokazujeme první implikaci, předpokládáme, že (X, d') je úplný. Navíc víme, že cauchyovská posloupnost na tomto prostoru konverguje, tj.

$$x_n \rightarrow x \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

A jelikož víme, že zobrazení $f : (X, d') \rightarrow (X, d)$ je stejnoměrně spojitý, je bod x limitou posloupnosti i na metrickém prostoru (X, d) .

3.7 Uniformní metrika

Definice 34. *Bud' X množina, Y metrický prostor s metrikou d . Uvažujme ohraničenou metriku δ na Y , definovanou vztahem $\delta(y_1, y_2) = \min\{d(y_1, y_2), 1\}$. Na množině Y^X všech zobrazení $f : X \rightarrow Y$ definujeme funkci $\delta_{X,Y}$ vztahem*

$$\delta_{X,Y}(f, g) = \sup_{x \in X} \{\delta(f(x), g(x))\}.$$

Funkce $\delta_{X,Y}$ je tedy metrika na Y^X a nazývá se uniformní metrika asociovaná s metrikou d . [7, str. 123]

Věta 18. *Bud' X množina, Y metrický prostor s metrikou d . Je-li Y úplný, pak také metrický prostor Y^X s uniformní metrikou asociovanou s d je úplný. [7, str. 123]*

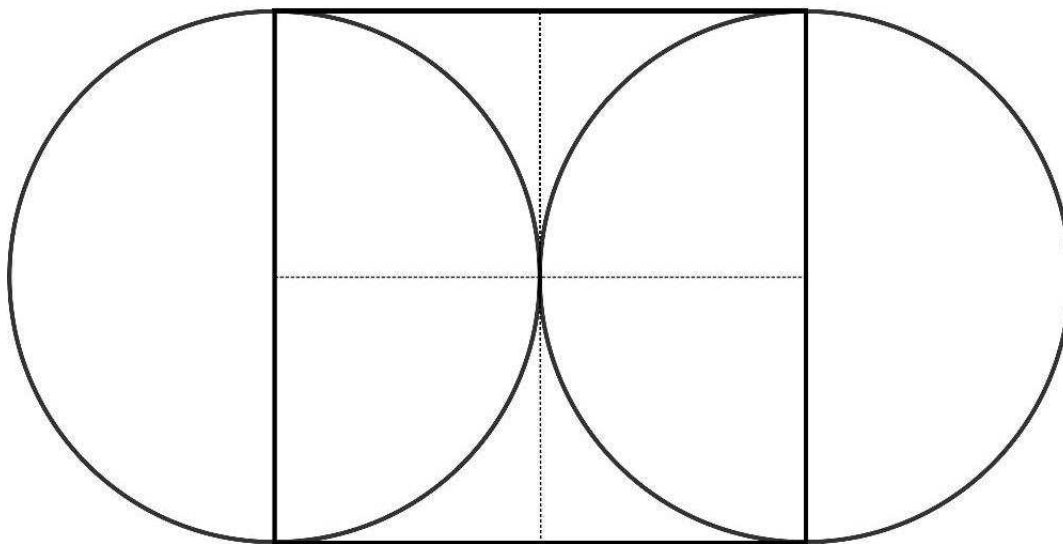
Uvažujme podmnožinu $\mathcal{C}(X, Y)$ prostoru Y^X , která se skládá ze všech spojitých funkcí $f : X \rightarrow Y$. Tato množina má uniformní metriku zavedenou

v předchozí definici. Pokud je Y úplný metrický prostor s metrikou d , pak podmnožina $\mathcal{C}(X, Y)$ je úplná v uniformní metrice. [1, str. 267]

Věta 19. *Bud' X topologický prostor, (Y, d) metrický prostor. Necht' množina $\mathcal{C}(X, Y)$ spojitých funkcí je uzavřená na Y^X v uniformní metrice. Jestliže je Y úplný metrický prostor s metrikou d , je také prostor $\mathcal{C}(X, Y)$ úplný v uniformní metrice. [1, str. 267]*

4 Křivka vyplňující čtverec

Nyní jako aplikaci úplnosti metrického prostoru $\mathcal{C}(X, Y)$ v uniformní metrice, kde Y je úplné, můžeme zkonstruovat čtverec-vyplňující křivku. Křivku jsem sestrojila tak, že jsem nejprve ve čtverci sestrojila dva kružnicové oblouky, které jsou součástí těchto kružnic:



Obrázek 7: Kružnice.

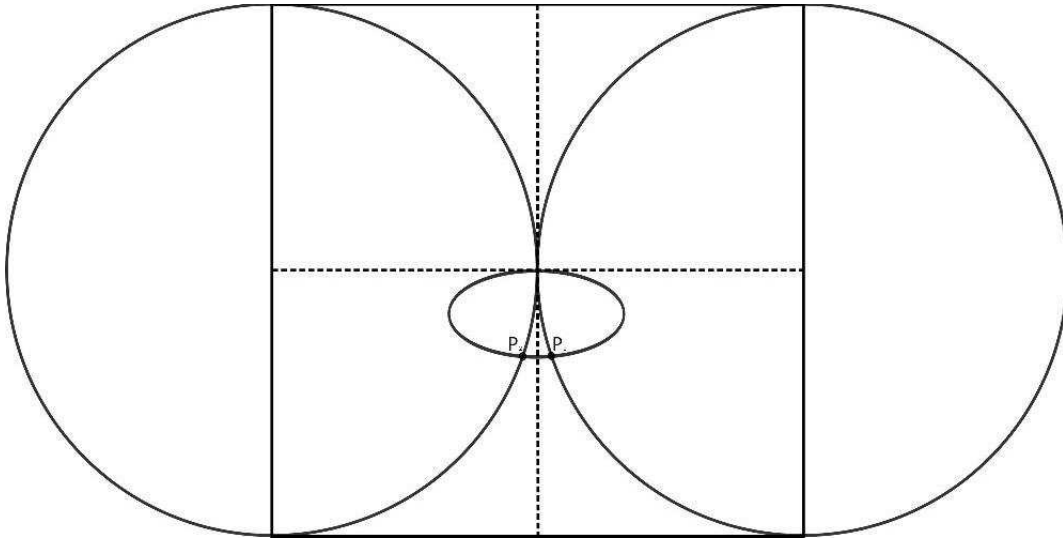
Na konce oblouků jsem napojila křivku, která je součástí elipsy. Na obrázku 7 uvažuji souřadný systém, z kterého vychází i funkční předpisy použitých funkcí, tj.

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$36\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 144\left(y - \frac{5}{12}\right)^2 = 1.$$

Ale abych zjistila definiční obory jednotlivých funkcí pro x, y , musela jsem řešit dvě soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Ručně by byl tento výpočet příliš obtížný, a proto jsem k vyřešení využila program Matlab. Zjistila jsem souřadnice průsečíků označených na obrázku 8



Obrázek 8: Průsečíky.

a nyní už můžu přesně nadefinovat kružnicové oblouky a křivku, která je součástí elipsy:

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}, \quad x \in \langle 0; 0, 4718 \rangle \wedge y \in \langle 0; 0, 3345 \rangle,$$

$$(x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}, \quad x \in \langle 0, 5282; 1 \rangle \wedge y \in \langle 0; 0, 3345 \rangle,$$

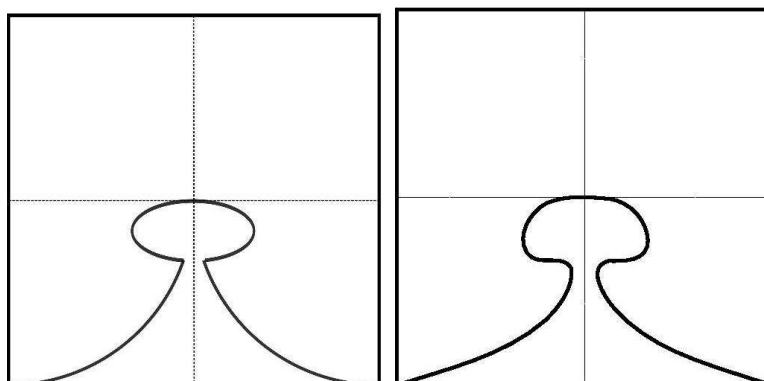
$$36(x - \frac{1}{2})^2 + 144(y - \frac{5}{12})^2 = 1, \quad x \in \langle \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \rangle \wedge y \in \langle 0, 3345; 0, 5 \rangle.$$

Tuto křivku jsem pak dál upravovala a tvarovala pomocí programu Inkscape, ve kterém jsem vytvářela všechny obrázky, které jsou v této kapitole. Snažila jsem se docílit tvaru, který by připomínal puzzle, jak je vidět na obrázku 9.

Pomocí takto vytvořené křivky dokážeme následující teorém.

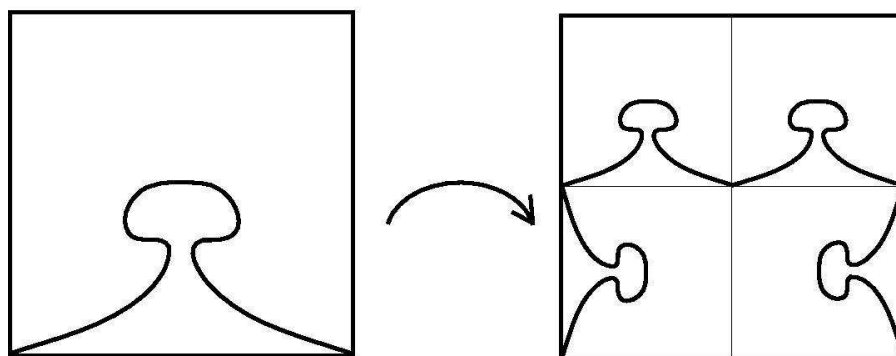
Teorém 1. *Nechť $I = \langle 0, 1 \rangle$. Pak existuje spojitá křivka $f : I \rightarrow I^2$ taková, že vyplní vnitřek prostoru I^2 .*

A nyní se už dostáváme ke konstrukci křivky f , kterou můžeme zkonstruovat jako limitu posloupnosti spojitých funkcí f_n . Nyní popíšu jednotlivé části



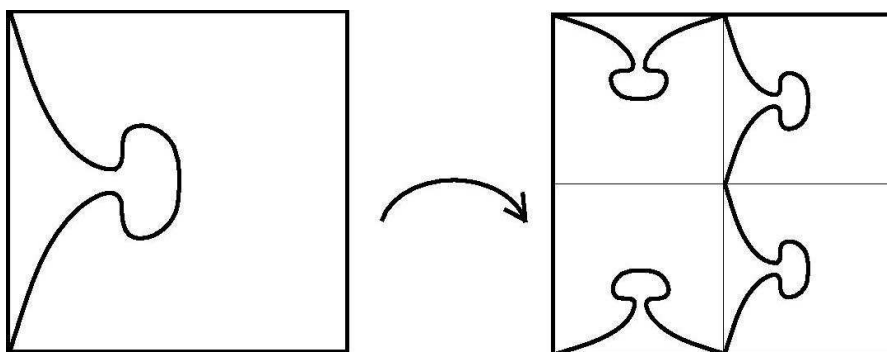
Obrázek 9: Výsledná křivka bez úprav a upravená.

konstrukce, které budou použity ke generování posloupnosti. Vezmeme si libovolný uzavřený interval $\langle a, b \rangle$ na přímce a libovolný čtverec v rovině se stranami rovnoběžnými se souřadnicemi os. A uvažujme spojitou křivku g umístěnou do čtverce, kterou jsem vytvořila způsobem popsáním výše. Nyní už popíšu operaci, která nahradí křivku g křivkou g' , tj.

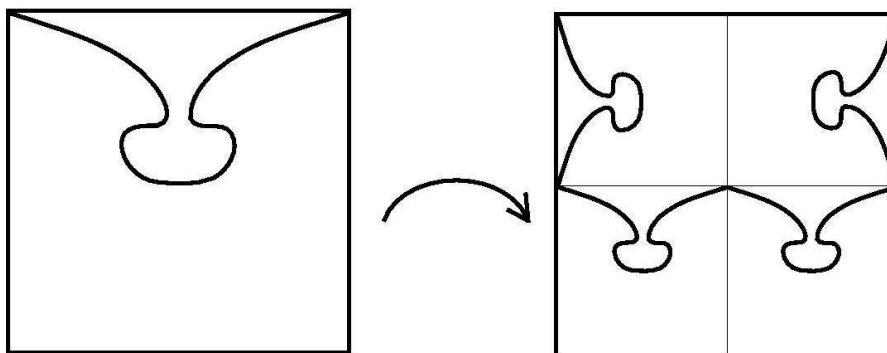


Obrázek 10: Křivka g vlevo nahrazena křivkou g' vpravo.

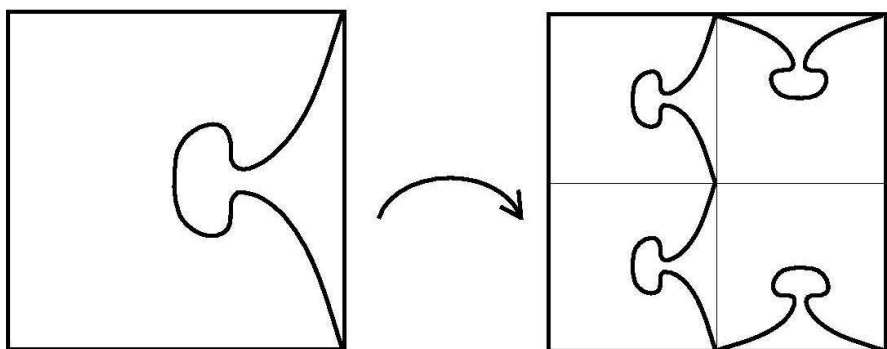
Křivka g' je složena ze čtyř částí, které jsou v poloviční velikosti křivky g . Obě tyto křivky mají stejný počáteční i konečný bod. Je tedy zřejmé, že tuto operaci lze aplikovat na každou křivku ve tvaru g spojující dva sousední body čtverce, jak je vidět na následujících obrázcích:



Obrázek 11: Křivka g vlevo nahrazena křivkou g' vpravo.



Obrázek 12: Křivka g vlevo nahrazena křivkou g' vpravo.



Obrázek 13: Křivka g vlevo nahrazena křivkou g' vpravo.

Nyní definujeme posloupnost funkcí $f_n : I \rightarrow I^2$:

f_0 ... jedna křivka v jednom čtverci,

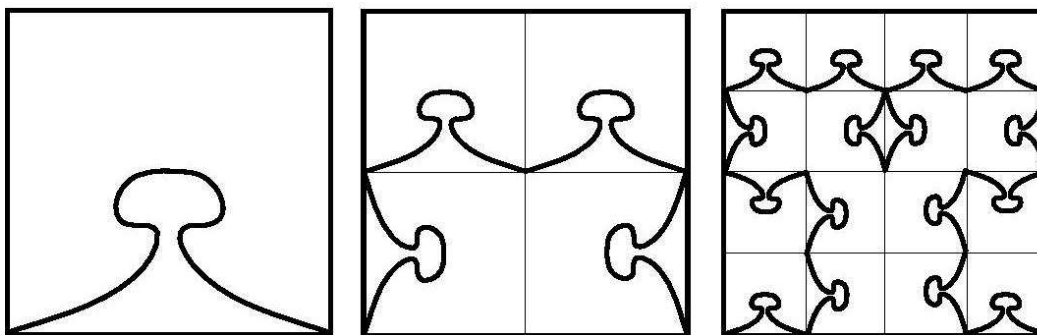
f_1 ... křivka vkreslená do čtyř čtverců podle postupu, který jsem popsala výše,

f_2 ... křivka v šestnácti čtvercích, která vznikne výše popsáním postupem aplikovaným na f_1 ,

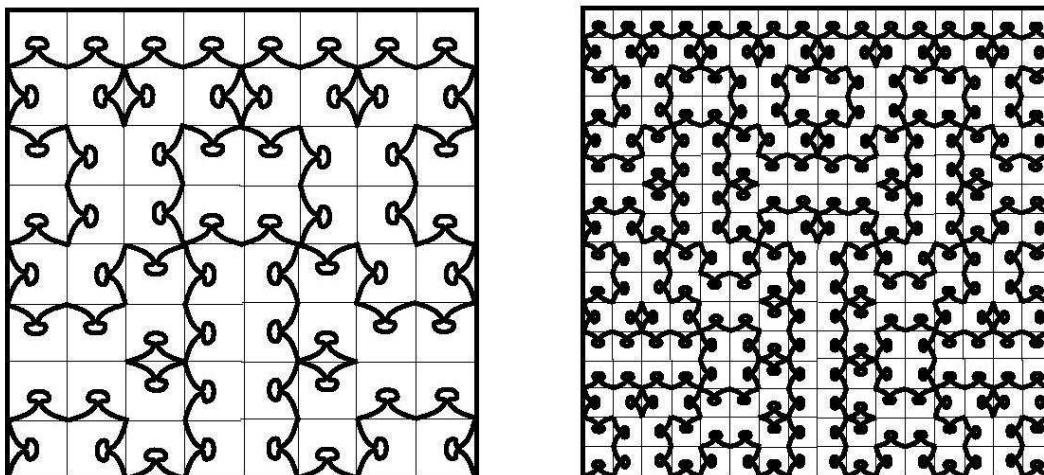
f_3 ... křivka v šedesáti čtyřech čtvercích získaná analogicky,

f_4 ... křivka ve dvě stě padesáti šesti čtvercích získaná analogicky,

které jsou vidět na následujících obrázcích:



Obrázek 14: Funkce f_0 , f_1 , f_2 .



Obrázek 15: Funkce f_3 , f_4 .

Tímto způsobem bychom mohli pokračovat až do n . Křivka f_n je pak tvořena

4^n křivkami poskládanými stejným postupem, kde každá křivka leží ve čtverci s délkou strany $\frac{1}{2^n}$.

Pro účel důkazu popíšeme čtvercovou metriku na $\mathbb{R}^2$ vztahem

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

a také ρ , které popisuje odpovídající sup metriku na $\mathcal{C}(I, I^2)$

$$\rho(f, g) = \sup\{d(f(t), g(t)) | t \in I\}.$$

A protože I^2 je uzavřené na $\mathbb{R}^2$, tak je také úplné v čtvercové metrice, což je důsledkem Věty 10.b). Navíc I je kompaktní, tedy každá spojitá funkce $f : I \rightarrow I^2$ je omezená, a proto je na $\mathcal{C}(I, I^2)$ definovaná sup metrika. Protože platí, že I^2 je úplné v čtvercové metrice, pak $\mathcal{C}(I, I^2)$ je úplné v odpovídající uniformní metrice a $\mathcal{C}(I, I^2)$ je úplné i v metrice ρ .

Tvrdíme, že posloupnost funkcí (f_n) definována výše je cauchyovská posloupnost v ρ . K ověření tohoto tvrzení prozkoumejme, co se děje při přechodu z f_n do f_{n+1} . Každá malá křivka tvořící f_n leží ve čtverci s délkou hrany $\frac{1}{2^n}$. Operace, kterou obdržíme f_{n+1} , nahradí každou křivku dalšími čtyřmi křivkami, které leží ve stejném prostoru. A tedy ve čtvercové metrice na I^2 je vzdálenost $f_n(t)$ a $f_{n+1}(t)$ je nanejvýš $\frac{1}{2^n}$. V důsledku tedy $\rho(f_n, f_{n+m}) \leq \frac{1}{2^n}$. Z toho vyplývá, že (f_n) je cauchyovská posloupnost, poněvadž

$$\rho(f_n, f_{n+m}) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+m-1}} < \frac{2}{2^n}$$

pro všechna n a m .

Jelikož $\mathcal{C}(I, I^2)$ je úplné, posloupnost f_n konverguje ke spojitě funkci $f : I \rightarrow I^2$. Nyní dokážeme, že f je surjektivní.

Nechť x je bod z I^2 . Ukážeme, že x náleží do $f(I)$. Nejdříve ale ověříme, že pro dané n leží f_n ve vzdálenosti menší než $\frac{1}{2^n}$ od bodu x . Křivka f_n prochází každým z malých čtverců s délkou strany $\frac{1}{2^n}$, na které je prostor I^2 rozdělen.

S využitím tohoto tvrzení můžeme dokázat, že pro dané $\varepsilon > 0$, ε -okolí bodu x protne $f(I)$. Vezměme N dostatečně velké tak, že

$$\rho(f_N, f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

a

$$\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Je zřejmé, že existuje bod $t_0 \in I$ takový, že platí $d(x, f_N(t_0)) \leq \frac{1}{2^N}$. Pak $d(f_N(t), f(t)) < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna t , to znamená, že platí

$$d(x, f(t_0)) < \varepsilon,$$

tedy ε -okolí bodu x protne $f(I)$. Z toho plyne, že x náleží do uzávěru $f(I)$. Ale I je kompaktní, takže $f(I)$ je kompaktní a je proto uzavřené. Z toho důvodu x náleží do $f(I)$, jak jsme požadovali.

Závěr

V této diplomové práci se čtenář nejdříve seznámil s historií křivek vyplňujících prostor a s nejvýznamějšími osobnostmi, které tyto křivky objevily nebo k jejich objevení značně přispěly. V druhé kapitole jsme se seznámili se základními pojmy z teorie množin, logiky a topologie. Třetí kapitola je věnována metrickým prostorům a jejich vlastnostem. A kapitola čtvrtá popisuje mou vlastní prostor vyplňující křivku.

Hlavní náplň mé práce je v kapitole třetí a čtvrté. Ve třetí kapitole jsem vyřešila doplňující příklady ke kapitolám, které se týkají úplnosti, topologické úplnosti, součinu metrických prostorů, kompaktnosti, stejnoměrné spojitosti a stejnoměrné ekvivalence metrických prostorů. V kapitole čtvrté jsem sestojila křivku, která beze zbytku vyplnila čtverec. A dokázala jsem, že tomu tak vskutku je. Celou tuto kapitolu jsem doplnila řadou obrázků, které čtenáři umožní pochopit, jak jsem křivku zkonstruovala. A také čtenáři názorně vysvětlí, jak vznikly jednotlivé iterace.

V průběhu psaní této práce jsem se naučila mnoho nového z funkcionální analýzy, zejména co se týká metrických prostorů. Měla jsem možnost pochopit řadu technik pro dokazování různých tvrzení. Zlepšila jsem své dovednosti práce s typografickým systémem TeX, naučila jsem se pracovat s programem pro tvorbu vektorových obrázků InkScape a v neposlední řadě jsem zlepšila znalosti anglického jazyka díky anglicky psané literatuře.

Seznam obrázků

1	Peanova křivka vyplňující čtverec.	9
2	Hilbertova křivka vyplňující čtverec.	11
3	Sierpiňského křivka vyplňující čtverec.	12
4	Topologie na dvouprvkové množině.	17
5	Příklady topologií na X	18
6	Množina všech bodů takových, že $xy < 1$	32
7	Kružnice.	39
8	Průsečíky.	40
9	Výsledná křivka bez úprav a upravená.	41
10	Křivka g vlevo nahrazena křivkou g' vpravo.	41
11	Křivka g vlevo nahrazena křivkou g' vpravo.	42
12	Křivka g vlevo nahrazena křivkou g' vpravo.	42
13	Křivka g vlevo nahrazena křivkou g' vpravo.	42
14	Funkce f_0, f_1, f_2	43
15	Funkce f_3, f_4	43

Literatura

- [1] MUNKRES, James R. *Topology*. 2nd ed. Upper Saddle River: NJ Prentice Hall, 2000. 537 p. s. ISBN 0131816292.
- [2] LUKŠAN, Ladislav. *Úvod do funkcionální analýzy* [online], dostupné z: <http://www.cs.cas.cz/luksan/lekce2.pdf>, [citováno 14.6.2013].
- [3] LUKEŠ, Jaroslav. *Zápisky z funkcionální analýzy*. Druhý dotisk 1. vyd. Praha: Karolinum, 2002, 354 s. ISBN 80-718-4597-3.
- [4] SAGAN, Hans. *Space-Filling Curves*. New York: Springer, 1994. 193 p. s. ISBN 0-387-94265-3.
- [5] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet: Celost. vysokošk. učebnice. 2.* [díl. 2. vyd. Praha: ČSAV, 1956. 609, [1] s. Práce Čs. akademie věd. Sekce matematickofyzikální.
- [6] ČECH, Eduard. *Topologické prostory*. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky [online]. Praha: Jednota česko-slovenských matematiků a fyziků, 1937, vol. 66, č. 4, D225-D264 [cit. 2014-01-19]. DOI: 1802-114X. Dostupné z: <http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/123380>.
- [7] KRUPKA, Demeter a Olga KRUPKOVÁ. *Topology and Geometry-Lectures and Solved Problems: I. General Topology*[online]. Praha: SPN, 1989 [cit. 2013-03-11]. Dostupné z: <http://globanal.upol.cz/pdf/topologie.pdf>.
- [8] REKTORYS, Karel a spol. *Přehled užití matematiky*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000, xxxii, 874 s. ISBN 80-719-6179-5.
- [9] LOMTATIDZE, Lenka. *Historický vývoj pojmu křivka*. Brno: Nadace Universitas v Brně, 2007. ISBN 978-08-7204-492-4.
- [10] VOKŘÍNEK, Lukáš. *Topologie*. [online], dostupné z: <http://www.math.muni.cz/koren/Topologie.pdf>, [citováno 4.11.2013].

- [11] KOPÁČEK, Jiří. *Matematická analýza nejen pro fyziky (I)*. 4., přeprac. vyd. Praha: Matfyzpress, 2004, 187 s. ISBN 80-867-3225-8.
- [12] RACHŮNEK, Lukáš a Irena RACHŮNKOVÁ. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2004, 132 s. ISBN 80-244-0948-8.
- [13] ČECH, Eduard. *Bodové množiny. Část první*. Praha: Jednota českoslov. matematiků a fysiků, 1936. 275 s.
- [14] NETUKA, Ivan a Jiří VESELÝ. *F. Riesz a matematika dvacátého století*. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky [online]. Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1980, vol. 25, č. 3, D128-D138 [cit. 2014-02-16]. Dostupné z: <http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/138774>.
- [15] TOMEČEK, Jan. *Texty k přednáškám z MMAN3: 3. Metrické prostory* [online]. [cit. 2014-02-22]. Dostupné z: http://aix-slx.upol.cz/tomecek/vyuka/mali/metr_prostory.pdf.