UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Souvislé množiny

Katedra algebry a geometrie
Vedoucí bakalářské práce: **doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.**
Vypracoval(a): **David Dohnal**
Studijní program: B1101 Matematika
Studijní obor Matematika Informatika pro vzdělávání
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2017

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: David Dohnal

Název práce: Souvislé množiny

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra algebry a geometrie

Vedoucí práce: doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2017

Abstrakt: Cílem práce je pojednat o souvislých a nesouvislých množinách v topologických prostorech. V první části se zaobírám definicí důležitých pojmů, které hrají významnou roli v následujícím textu. Dále se zaobírám pojmy oblouková a lokální souvislost. Zjistil jsem, že z obloukové souvislosti plyne souvislost, avšak obráceně toto tvrzení neplatí. Dále jsem zjistil, že neexistuje vztah mezi souvislostí a lokální souvislostí. Práce obsahuje řešené příklady související s danou tematikou.

Klíčová slova: Topologie, topologické prostory, souvislá množina, obloukově souvislá množina, lokálně souvislá množina

Počet stran: 34

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: David Dohnal

Title: Connected sets

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of algebra and geometry

Supervisor: doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.

The year of presentation: 2017

Abstract: The aim of the thesis is to discuss connected and disconnected sets in topological spaces. Firstly, I deal with the definition of important concepts that play a significant role in the following text. Secondly, I deal with concepts of path and local connectedness. I have found that every path connected sets is either connected, but every connected sets are not path connected. I also found that there is not relationship between connectedness and local connectedness. The thesis contains solved examples related to the given topic.

Key words: Topology, topological space, connected set, path connected set, locally connected set

Number of pages: 34

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana doc. Mgr. Karla Pastora, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne 22. května 2017 ....

podpis

Obsah

Seznam obrázků

Poděkování

Rád bych poděkoval mému vedoucímu bakalářské práce za ochotu, vstřícnost a spolupráci. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přítelkyni za podporu při studiu.

Úvod

Cílem této bakalářské práce je pojednat o souvislých a nesouvislých množinách v topologických prostorech. Pod pojmem souvislá množina si čtenář může představit množinu, která se skládá z jednoho celku. Není tedy možné ji rozložit na dvě disjunktní podmnožiny. Práce je obohacena o příklady s grafickým znázorněním, což jsem bral jako největší přínos.

V první části této práce jsem se věnoval definici důležitých pojmů, které byly nezbytné pro hlavní část mé práce, jako je například topologický prostor, báze či metrika. Také jsem zde uvedl jednotlivé typy topologií, které jsem často využíval v jednotlivých příkladech.

Druhá část je rozdělena na 3 kapitoly. V první kapitole se pojednává o definici souvislých topologických prostorů a souvislých množin. U stěžejních vět jsem zde uvedl i důkazy. V následující kapitole jsem se věnoval pojmu oblouková souvislost a její vztah vzhledem k souvislosti. Poslední kapitolu jsem věnoval pojmu lokální souvislost a stejně jako u obloukové souvislosti jsem se zaměřil na její vztah s pojmem souvislost.

Kapitola 1

Topologické prostory

1.1. Definice topologického prostoru a jeho základní vlastnosti

Definice 1.1. [1, strana 1] Topologie na množině X je systém τ podmnožin X mající následující vlastnosti :

1) $\emptyset$ a X náleží do systému τ.

2) Sjednocení libovolného konečného systému množin z τ patří do τ.

3) Průnik libovolných dvou množin z τ patří do τ.

Množina X na níž je dána topologie τ splňující podmínky 1-3 se nazývá topologický prostor.

Příklad 1.1. Nechť $X = \{1, 2, a, b\}$ a $\tau = \{\emptyset, X, \{1, a\}, \{2\}, \{b\}, \{2, b\}, \{1, a, 2\}, \{1, a, b\}\}$. Ukažte, zda (X, τ) tvoří topologický prostor.

Řešení:

Cílem je ukázat, jestli systém množin τ vyhovuje výše zmíněné definici topologie. To znamená ověřit, jestli je tato topologie uzavřená na sjednocení konečného počtu systému množin z τ a průnik libovolných dvou množin.

$\{1, a\} \cup \{2\} = \{1, a, 2\} \in \tau$

$\{1, a\} \cup \{b\} = \{1, a, b\} \in \tau$

$\{2\} \cup \{b\} = \{2, b\} \in \tau$

$\{1, a, 2\} \cup \{1, a, b\} = X \in \tau$

Tímto jsme dokázali, že je daný topologický prostor uzavřen na sjednocení. Následně vyšetřeme uzavřenost na průnik.

$\{1, a\} \cap \{2\} = \emptyset \in \tau$,

$\{1, a\} \cap \{b\} = \emptyset \in \tau$,

$\{1, a\} \cap \{2, b\} = \emptyset \in \tau$,

$\{1, a\} \cap \{1, a, 2\} = \{1, a\} \in \tau$,

$\{1, a\} \cap \{1, a, b\} = \{1, a\} \in \tau$

$\{2\} \cap \{b\} = \emptyset \in \tau$,

$\{2\} \cap \{2, b\} = \{2\} \in \tau$,

$\{2\} \cap \{1, a, 2\} = \{2\} \in \tau$,

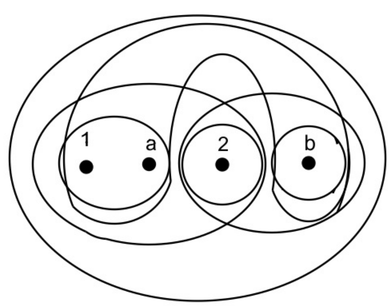
$\{2\} \cap \{1, a, b\} = \emptyset \in \tau$

$\{2, b\} \cap \{1, a, 2\} = \{2\} \in \tau$,

$\{2\} \cap \{1, a, b\} = \{b\} \in \tau$

$\{1, a, 2\} \cap \{1, a, b\} = \{1, a\} \in \tau$,

Všechny výsledné množiny patří do τ. Tímto jsme dokázali, že dvojice (X, τ) tvoří topologický prostor.



Obrázek 1.1: Graf topologického prostoru X

Příklad 1.2. Zjistěte, zda dvojice (X, τ) tvoří topologický prostor, kde $X = \{1, 2, a, b\}$ a $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2, a\}, \{b\}\}$.

Řešení:

Už na první pohled vidíme, že tato dvojice topologický prostor netvoří, protože např. $\{1\} \cup \{2, a\} = \{1, 2, a\} \notin \tau$.

Příklad 1.3. Zjistěte, zda dvojice (X, τ) tvoří topologický prostor, kde $X = \{1, 2, a, b\}$ a $\tau = \{X, \emptyset, \{1, 2\}, \{2, a, b\}\}$.

Řešení:

Jak vidíme, tak množiny $\{1, 2\}$ a $\{2, a, b\}$ sice splňují 2. podmínku z definice 1.1, tedy $\{1, 2\} \cup \{2, a, b\} \in \tau$, avšak tyto množiny nesplňují podmínku č.3. Závěrem tedy můžeme říct, že dvojice (X, τ) netvoří topologický prostor.

Definice 1.2. [1, strana 1] Prvky topologie τ se nazývají otevřené množiny.

Definice 1.3. [1, strana 1] Nechť X je topologický prostor a množina A taková, že $A \subset X$. Otevřenou množinu B budeme nazývat okolím množiny A, jestliže $A \subset B \subset X$. Okolím bodu x budeme rozumět okolí množiny $\{x\}$. Toto okolí budeme značit $U(x)$.

Definice 1.4. Nechť A je otevřená množina v X. Pak doplněk množiny A je uzavřená množina v X.

Definice 1.5. Nechť x je bod množiny A. Bod x nazveme vnitřním bodem A, jestliže existuje okolí bodu x tak, že $U(x) \subset A$.

Definice 1.6. Množina všech vnitřních bodů množiny A se nazývá vnitřek množiny.

Vnitřek množiny značíme $\mathrm{int}A$. Je-li množina A otevřená, pak platí $\mathrm{int}A = A$

Definice 1.7. Bod x budeme nazývat vnějším bodem množiny A, jestliže existuje okolí bodu x takové, že $U(x) \subset X \setminus A$.

Definice 1.8. Množina všech vnějších bodů množiny A se nazývá vnějšek množiny A.

Vnějšek množiny značíme $\mathrm{ext}A$. Vnějšek množiny je vždy otevřená množina až na případ, kdy $A = X$.

Definice 1.9. Řekneme, že x je hraničním bodem množiny A, jestliže do každého $U(x)$ náleží vnitřní i vnější body množiny A.

Definice 1.10. Hranice množiny A je sjednocením všech svých hraničních bodů.

Tuto hranici budeme označovat jako bd$A$

Věta 1.1. *Nechť X je topologický prostor, pak platí $X = \text{int}A \cup \text{ext}A \cup \text{bd}A$ pro libovolnou množinu $A \subset X$. Jelikož* int$A$ *i* ext$A$ *jsou otevřené množiny pak* bd$A$ *musí být uzavřená množina.*

Definice 1.11. Uzávěr množiny A je nejmenší uzavřená množina obsahující množinu A.

Tento uzávěr budeme značit jako $\overline{A}$.

Poznámka 1.1. *Máme-li otevřenou množinu A, pak pro její uzávěr platí $\overline{A} = \text{int}A \cup \text{bd}A$.*

Nyní bychom si pro úplnost měli definovat vztahy mezi dvěma topologiemi na jedné množině.

Definice 1.12. [2, strana 77] Nechť τ' a τ jsou dvě topologie na množině X. Řekneme, že topologie τ' je jemnější než topologie τ, pokud platí $\tau' \supset \tau$. Obráceně můžeme říct, že τ je hrubší než τ'. O topologiích τ' a τ řekneme, že jsou porovnatelné, jestliže $\tau' \supset \tau$ nebo $\tau \supset \tau'$.

1.2. Báze, lokalní báze a subbáze topologického prostoru

Motivací k zavedení pojmu báze je způsob, jak popsat topologii daného prostoru. V minulé sekci jsme se setkali s příkladem 1.1, kde daná topologie obsahovala 8 podmnožin množiny X. Uvědomme si však, jak by mohla vypadat situace, kdy by množina X obsahovala například 1000 prvků. Bylo by tedy dobré najít systém množin, ze kterých bychom mohli tuto topologii vygenerovat.

Definice 1.13. [1, strana 5] Bází topologie τ rozumíme podsystém σ systému τ takový, že každá neprázdná množina z τ je sjednocením nějakých množin ze systému σ.

Nyní je tedy jasné, jak budeme tvořit topologii z báze. Nyní se podívejme na to, co musí daný podsystém splňovat, abychom ho mohli nazývat bází.

Věta 1.2. [2, strana 79] *Nechť X je množina, báze topologie na množině X rozumíme systém σ podmnožin množiny X (prvky báze nazýváme elementy), pro které platí :*
1) pro každé $x \in X$ existuje aspoň jeden element $B \subset \sigma$ takový, že $x \in B$
2) pokud x náleží průniku dvou elementů $B_1, B_2 \subset \sigma$, pak existuje B_3 tak, že $x \in B_3$ a zároveň $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Je potřeba si také uvědomit, že každý element báze patří také do topologie. Z tohoto poznatku nám ovšem plyne důsledek.

Důsledek 1.1. *Topologie τ topologického prostoru X je svou bází.*

Příklad 1.4. Nechť $X = \{1, 2\}$ a $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$. Najděte bázi tohoto topologického prostoru.
Řešení:
Podle předchozího důsledku můžeme triviálně říct, že bází tohoto topologického prostoru je jeho topologie τ. Je ovšem nutné si uvědomit, že tento prostor nemá jen tuto bázi.

Např: $\sigma_1 = \{X, \{1\}, \{2\}\}$ také tvoří bázi X.

Vyjmenujme tedy všechny možné báze topologického prostoru X.

$\sigma_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$

$\sigma_3 = \{\{1\}, \{2\}\}$

Vidíme tedy, že topologický prostor (X, τ) má 4 báze.

Dalším velmi důležitým pojmem o kterém se v této sekci budeme bavit je pojem subbáze. Jak už název napovídá, bude mít tento pojem co do činění s pojmem báze. Jeho hlavní myšlenkou je to, jestli existuje podsystém topologie takový, který by ji generoval, avšak aby byl ještě úspornější než předešlá báze. Tedy jestli existuje systém takový, který by generoval bázi, která následně generuje danou topologii. Tuto úvahu nám popíše následující definice.

Definice 1.14. [1, strana 5] Subbází topologie τ rozumíme podsystém δ systému τ takový, že systém všech konečných průniků množin z δ tvoří bázi topologie τ.

Obrázek 1.2: Diagram znázorňující vztah mezi bází, subbází a topologií

Pro nás nejdůležitějším pojmem této sekce bude pojem lokální báze. Zde si tento pojem jen stručně popíšeme a jeho využití si ukážeme v sekci Lokálně souvislá množina.

Definice 1.15. [1, strana 5] Nechť X je topologický prostor, τ jeho topologie. Lokální bází topologie τ v bodě $x \in X$ rozumíme systém σ_x okolí bodu x takový, že ke každému okolí U bodu x existuje element $V \in \sigma_x$ tak, že $V \subset U$.

Příklad 1.5. Nechť (X, τ) je topologický prostor takový, že $X = \{1, 2, 3\}$ a $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$. Napište lokální báze prvku 1.

Řešení:

Nejprve si napíšeme všechny podmnožiny τ obsahující prvek 1.

$$\text{Tzn. } 1 \in \{1\}, 1 \in \{1, 2\}, 1 \in \{1, 3\}, 1 \in X,$$
$$\text{tedy } \sigma_1 = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, X\} \text{ je lokální báze prvku 1,}$$
$$\text{ovšem i } \sigma_2 = \{1\} \text{ je lokální bází.}$$

Tato topologie má tedy 2 lokální báze.

1.3. Druhy topologických prostorů

V poslední části této kapitoly se budeme věnovat některým významným topologiím, pomocí kterých budeme řešit příklady v následujících kapitolách.

Diskrétní topologie
Mějme libovolnou množinu X, systém všech podmnožin množiny X nazýváme diskrétní topologie, t.j. $\tau = P(X)$. Množinu X s diskrétní topologií nazýváme diskrétní topologický prostor.

Indiskrétní topologie(triviální)
Opět mějme libovolnou množinu X, indiskrétní topologií nazýváme topologii τ takovou, že $\tau = \{\emptyset, X\}$.

Podprostorová topologie
Mějme topologický prostor (X, τ) a množinu S takovou, že $S \subset X$. Podprostorovou topologii definujeme jako topologii $\tau_p = \{S \cap A \mid A \in \tau\}$. Množinu S s podprostorovou topologií nazýváme topologický podprostor.

Topologie konečných doplňků
Nechť X je libovolná množina, pak je topologie konečných doplňků definovaná následovně: $\tau = \{A \subset X \mid X - A$ je konečná množina nebo $X\}$.

Topologie indukovaná metrikou
Než definujeme topologii indukovanou metrikou, bude účelné si vysvětlit pojem metrika či metrický prostor. Metriku můžeme chápat jako zobrazení, kdy dvěma bodům přiřadíme reálné číslo. Toto číslo pak budeme nazývat vzdálenost bodů. Abychom zobrazení mohli nazývat metrikou, musí pro něj platit 3 axiomy. První axiom nám říká, že vzdálenost bodů, které jsou si rovny, je rovna nule. Druhý axiom nám ukazuje, že je daná metrika symetrická, což znamená, že se vzdálenost dvou různých bodů zachovává, i když vyměníme pořadí bodů. Poslední axiom se

nazývá trojúhelníková nerovnost. Spojíme-li tři body úsečkami pak nám vytvoří trojúhelník, kde součet libovolných dvou stran je vždy vetší než strana třetí. Rovnost nastává pouze tehdy, leží-li všechny tři body na jedné přímce. Výše zmíněné poznatky nám shrne následující definice.

Definice 1.16. Metrikou na neprázdné množině X rozumíme zobrazení $\rho : X \times X \to R$ splňující následující axiomy :
1)$\forall x \in X : \rho(x,x) = 0$
2)$\forall x, y \in X : \rho(x,y) = \rho(y,x)$
3)$\forall x, y, z \in X : \rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$
Množina X s danou metrikou tvoří metrický prostor.

Položíme-li $x = z$, dostaneme následující nerovnost

$$\rho(x,y) + \rho(y,x) \geq \rho(x,x)$$

Z druhého axiomu víme, že $\rho(x,y) = \rho(y,x)$. Jsme tedy oprávněni psát

$$2 * \rho(x,y) \geq \rho(x,x)$$

Dále můžeme dle prvního axiomu psát

$$2 * \rho(x,y) \geq 0$$

Což nám po vydělení číslem 2 dává následující nerovnost

$$\rho(x,y) \geq 0$$

Důsledek 1.2. *Vzdálenost bodů je vždy nezáporné číslo.*

Nyní si uvedeme typy metrik na prostoru $\mathbb{R}^n$. Uvažujme body $x = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$, $y = \{y_1, y_2, y_3, ..., y_n\}$
1) Eukleidovská metrika

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

$\mathbb{R}^n$ spolu s takto definovanou metrikou tvoří tzv. Eukleidovský metrický prostor. Důležitost tohoto prostoru si uvedeme na konci této kapitoly.

2) součtová metrika

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

3) maximální metrika

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$$

Definice 1.17. Buď X metrický prostor s metrikou ρ. Otevřenou (resp. uzavřenou) koulí se středem v bodě $x \in X$ a poloměrem $r > 0$ rozumíme množinu $B_x(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$ (resp. $\overline{B_x}(x, r) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\}$).

Věta 1.3. *[1, strana 112] Buď X metrický prostor.*
1) Systém všech otevřených koulí je báze topologie na X.
2) Systém všech otevřených koulí se středem v bodě $x \in X$ je lokální báze této topologie v bodě x.

Definice 1.18. [1, strana 112] Topologie na metrickém prostoru X generovaná systémem všech otevřených koulí, se nazývá topologie indukovaná metrikou.

Věta 1.4. *Topologie indukovaná eukleidovskou metrikou se nazývá přirozená topologie.*

Kapitola 2

Souvislá množina

2.1. Základní definice

Na úvod této sekce si představíme pojem oddělené množiny.

Definice 2.1. [4, strana 180] O podmnožinách A, B topologického prostoru X řekneme že jsou oddělené, jestliže platí: $A \cap \overline{B} = \emptyset$ a $\overline{A} \cap B = \emptyset$.

Příklad 2.1. Nechť A, B, C jsou intervaly na množině reálných čísel R takové, že $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$, $C = [3, 4)$. Určete, jestli jsou tyto množiny navzájem oddělené.
Řešení:
$\overline{A} = [1, 2]$, $\overline{B} = [2, 3]$ a $\overline{C} = [3, 4]$
$A \cap \overline{B} = (1, 2) \cap [2, 3] = \emptyset$,
$\overline{A} \cap B = [1, 2] \cap (2, 3) = \emptyset$
Tyto množiny jsou tedy oddělené.
$B \cap \overline{C} = (2, 3) \cap [3, 4] = \emptyset$
$\overline{B} \cap C = [2, 3] \cap [3, 4) = 3$
Tedy množiny B, C oddělené nejsou.

Definice 2.2. [1, strana 249] Topologický prostor X se nazývá nesouvislý, jestliže existují dvě neprázdné, otevřené podmnožiny U, $V \subset X$ tak, že $U \cap V = \emptyset$ a $X = U \cup V$. Topologický prostor, který není nesouvislý, se nazývá souvislý.

Jinak řečeno, topologický prostor X je souvislý, jestliže neobsahuje otevřenou a uzavřenou podmnožinu $A \subset X$ různou od $\emptyset$ a X.

Definice 2.3. Nechť X je topologický prostor. Řekneme, že množina $A \subset X$ je souvislá, pokud je souvislá jako topologický podprostor s podprostorovou topologií.

Na začátku této kapitoly jsme si definovali pojem oddělené množiny. Můžeme tedy vyslovit větu, která nám popisuje vztah mezi pojmem souvislá množina a oddělené množiny.

Věta 2.1. [4, strana 181] *Množina A je souvislá, právě když není sjednocením dvou neprázdných oddělených množin.*

Důsledek 2.1. [4, strana 181] *Pokud jsou A, B dvě souvislé množiny, které nejsou oddělené, pak $A \cup B$ je souvislá množina.*

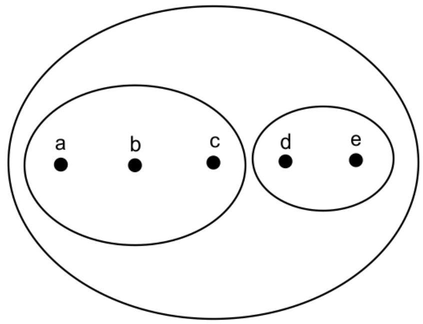
Poznámka 2.1. *O množinách U a V v definici 2.2 budeme říkat, že tvoří rozklad topologického prostoru X.*

Příklad 2.2. Nechť X je množina taková, že $X = \{a, b, c, d, e\}$. Na množině X je dána topologie τ_1 následovně: $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a, b, c\}, \{d, e\}\}$. Tvoří dvojice (X, τ_1) souvislý topologický prostor?

Řešení:

Nejprve je třeba dokázat, zda-li dvojice (X, τ_1) vůbec tvoří topologický prostor. Triviálně zjistíme, že tato dvojice opravdu tvoří topologický prostor, jelikož $\{a, b, c\} \cup \{d, e\} = X$ a $\{a, b, c\} \cap \{d, e\} = \emptyset$.

Dále budeme postupovat podle definice 2.2. Hledejme tedy množiny U a V, pro které platí: $U \cap V = \emptyset$ a $X = U \cup V$. Snadno uvidíme, že takové množiny opravdu existují. Tedy $U = \{a, b, c\}$,$V = \{d, e\}$. Dvojice (X, τ_1) tedy netvoří souvislý topologický prostor.



Obrázek 2.1: Graf topologického prostoru (X, τ_1)

Zde si uvedeme příklad podobný tomu předchozímu, kde nosná množina X bude obsahovat stejné prvky, ale topologie na množině X bude odlišná od té předchozí.

Příklad 2.3. Nechť X je množina z předchozího příkladu. Na této množině je dána topologie τ_2 taková, že $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, c\}, \{c\}, \{c, d, e\}\}$. Otázka opět zní: Tvoří dvojice (X, τ_2) souvislý topologický prostor?

Řešení:

Stejně jako u minulého příkladu nejdřív musíme dokázat, zda-li tato dvojice opravdu tvoří topologický prostor. Triviálně zjistíme, že dvojice (X, τ_2) opravdu tvoří topologický prostor.

Pro úplnost :

$\{a, b, c\} \cup \{c\} = \{a, b, c\} \in \tau_2$

$\{a, b, c\} \cup \{c, d, e\} = X \in \tau_2$

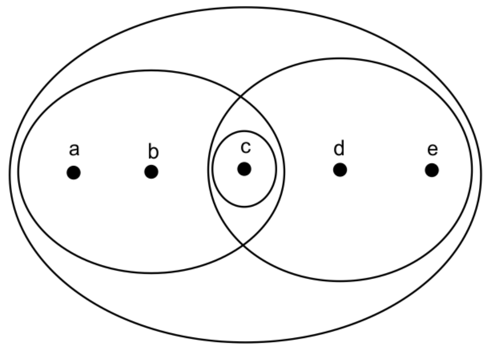
$\{c\} \cup \{c, d, e\} = \{c, d, e\} \in \tau_2$

$\{a, b, c\} \cap \{c\} = \{c\} \in \tau_2$

$\{c\} \cap \{c, d, e\} = \{c\} \in \tau_2$

$\{a, b, c\} \cap \{c, d, e\} = c \in \tau_2$

Když se následně zaměříme na otázku, zda-li je tento prostor souvislý, všimneme si, že neexistují žádné dvě množiny U, V takové, aby vyhovovaly definici 2.2, protože žádné dvě neprázdné množiny této topologie nejsou disjunktní. Závěrem tedy můžeme říct, že tento topologický prostor je souvislý.



Obrázek 2.2: Graf topologického prostoru (X, τ_2)

Vidíme, že i když oba tyto topologické prostory mají stejnou nosnou množinu (v našem případě množinu X), tak obecně oba souvislými prostory být nemusí. Z předchozích dvou příkladů nám tedy plyne, že pojem souvislost je úzce spjata s danou topologií. Mohli bychom se však ptát, zda-li toto platí vždy? Existují dva topologické prostory se stejnou nosnou množinou avšak rozdílnými topologiemi, které by byly oba souvislé či oba nesouvislé? Na tuto otázku nám odpoví následující příklad.

Příklad 2.4. [2, strana 152, př.1] Nechť τ a τ' jsou dvě topologie na množině X. Jestliže $\tau' \supset \tau$, co nám souvislost X v jedné topologie implikuje o souvislosti v topologii druhé?

Řešení:

Mějme množinu $A \subset (X, \tau)$, která je nesouvislá.

Znamená to tedy, že existuje rozklad této množiny na dvě otevřené neprázdné podmnožiny v topologii τ tj.

$$A = C \cup D \text{ a zároveň } C \cap D = \emptyset$$

Jestliže $\tau' \supset \tau$, potom C je neprázdná a otevřená v (X, τ') a také D je neprázdná a otevřená v (X, τ'). Tedy množiny C a D tvoří také rozklad množiny A v topologii (X, τ'). Z toho vyplývá, že je A nesouvislá v (X, τ').

Tímto jsme dokázali, že z nesouvislosti v (X, τ) plyne nesouvislost v (X, τ'). Z vlastnosti implikace víme, že pro výroky V_1 a V_2 obecně platí:

$$(V_1 \Rightarrow V_2) \iff (\neg V_2 \Rightarrow \neg V_1)$$

tzn. položíme-li V_1 = nesouvislost v (X, τ) a V_2 = nesouvislost v (X, τ'), vyplývá nám, že ze souvislosti v (X, τ') plyne souvislost v (X, τ).

Následně si uvedeme větu, která pro nás bude mít velmi důležitý důsledek např. při definici oblouku.

Věta 2.2. [1, strana 252, v.7] *Množina reálných čísel* $\mathbb{R}$ *s přirozenou topologií je souvislý topologický prostor.*

Důkaz. [1, strana 252] Předpokládejme, že existují otevřené množiny $U, V \subset \mathbb{R}$ takové, že $U \cap V = \emptyset$, $\mathbb{R} = U \cup V$. Ukážeme, že buď $U = \emptyset$ nebo $V = \emptyset$. Předpokládejme, že $U, V \neq \emptyset$. Zvolme $x \in U$, $y \in V$, $x < y$. Pak množina $U \cap [x, y]$ je ohraničená, existuje tedy číslo $z = \sup(U \cap [x, y])$. Nechť $z \in A$. Pak existuje interval $[z, z + h]$ kde $h > 0$ takový, že $[z, z + h] \subset [x, y]$ a zároveň $[z, z + h] \subset U$, neboť množina U je otevřená. Odtud $[z, z + h] \subset A \cap [x, y]$, což je spor s předpokladem, že z je supremum množiny $A \cap [x, y]$. Platí tedy, že $z \notin U$. Ovšem $\mathbb{R} = U \cup V$ a $U \cap V = \emptyset$, takže $z \in V$. Existuje tedy $h > 0$ takové, že $[z - h, z] \subset [x, y]$, a z otevřenosti množiny V plyne, že zle vzít $[z - h, z] \subset V$. Pak ovšem $[z - h, z] \subset V \cap [x, y]$. Jelikož z je supremem množiny $A \cap [x, y]$, interval $[z - h, z]$ obsahuje nějaký bod množiny U, což je spor s předpokladem, že $U \cap V = \emptyset$. Musí tedy platit $U = \emptyset$ nebo $V = \emptyset$ □

Důsledek 2.2. [1, strana 252] *Libovolný interval v* $\mathbb{R}$ *je souvislá množina.*

Otázka nyní zní, jak bychom mohli zkonstruovat souvislou množinu. Konstruovat souvislé množiny budeme tak, že k už známé souvislé množině přidáme další tak, abychom ale zachovali souvislost. K tomu nám poslouží následující věta.

Věta 2.3. *Uzávěr souvislé množiny je souvislá množina.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\overline{A}$ je nesouvislá. Existují tedy dvě disjunktní, uzavřené neprázdné podmnožiny U a V tak, že $\overline{A} = U \cup V$ a $U \cap V = \emptyset$. Jelikož $A \subseteq \overline{A}$, pak $A \subseteq\ U$ nebo $A \subseteq\ V$(viz věta 2.5), například $A \subseteq\ U$. Z vlastností uzávěru víme, že $\overline{A} \subseteq \overline{U} = U$, což vede ke sporu protože $V = \emptyset$. Tímto jsme dokázali, že uzávěr souvislé množiny je souvislá množina. $\square$

Nyní bychom se mohli ptát, je-li uzávěr množiny A souvislý, je souvislá i množina A? Obecně tomu tak není. Vezměme například množinu $\mathbb{Q}$ s přirozenou topologií. Víme, že uzávěr množiny $\mathbb{Q}$ je $\mathbb{R}$, což je ovšem podle věty 2.2 souvislá množina. Avšak množina $\mathbb{Q}$ souvislá není. Uvažujme číslo $x \notin \mathbb{Q}$, například $\sqrt{2}$. Definujme dvě množiny U a V následovně:

$$U = (-\infty, \sqrt{2})\ ,\ V = (\sqrt{2}, \infty)$$

Můžeme tedy psát:

$$\mathbb{Q} = (U \cap \mathbb{Q}) \cup (V \cap \mathbb{Q}) \ \text{ a } \ U \cap V = \emptyset$$

Vidíme, že množina $\mathbb{Q}$ je sjednocením dvou disjunktních otevřených neprázdných množin U a V. Množina racionálních čísel je tedy podle definice 2.2 nesouvislá.

Z výše dokázaného jsme zjistili, že uzávěr souvislé množiny je souvislá množina, co můžeme říct o množině, ke které přidáme jen část její hranice (v extrémním případě i jeden bod). K tomu nám poslouží následující věta.

Věta 2.4. [1, strana 250, v.3] *Buď A souvislá množina v topologickém prostoru X. Množina $B \subset X$ taková, že $A \subset B \subset \overline{A}$, je souvislá.*

Důkaz. [1, strana 250] Předpokládejme, že množina B není souvislá. Pak existují 2 neprázdné disjunktní otevřené množiny $U, V \subset B$ tak, že $B = U \cup V$. Množiny $A \cap U, A \cap V$ jsou otevřené v A a platí $(A \cap V) \cup (A \cap U) = A \cap (U \cup V) = A \cap B = A$. Ovšem $A \cap U, A \cap V$ jsou disjunktní množiny a množina A je souvislá, takže jedna z těchto množin musí být prázdná. Nechť například $A \cap U = \emptyset$. Pak $A = A \cap V$, t.j. $A \subset V$ a tedy $\overline{A} \subset \overline{V}$. Ovšem $U \cap V = \emptyset$, takže $U \cap \overline{V} = \emptyset$ a tedy $U \cap B \subset U \cap \overline{A} \subset U \cap \overline{V} = \emptyset$. To je spor s předpokladem, že množina B není souvislá. $\square$

Věta uvedená níže bude velmi důležitá při řešení následujícího příkladu.

Věta 2.5. [2, strana 149, v.2] *Nechť C a D tvoří rozklad topologického prostoru X a Y je souvislý podprostor prostoru X. Pak Y leží celý v C nebo D.*

Příklad 2.5. [2, strana 152, př.2] Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost souvislých podprostorů X, pro něž platí $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pro všechna n. Ukažte, že $\bigcup A_n$ je souvislá.

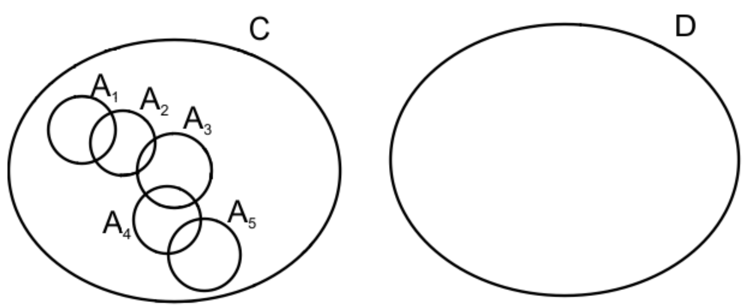
Řešení:

Předpokládejme, že $\bigcup A_n$ je nesouvislá množina.

Existují tedy dvě neprázdné otevřené disjunktní množiny C, D takové, že:

$$\bigcup A_n = C \cup D \text{ a } C \cap D = \emptyset.$$

Podle předchozí věty 2.5 tedy každý prvek $\{A_n\}$ náleží do jedné z množin C nebo D. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že prvek A_1 náleží do množiny C. Tímto však dostáváme, že i prvek A_2 musí ležet v téže množině C, protože $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Jestliže takto budeme postupovat prvek po prvku posloupnosti $\{A_n\}$, dostaneme spor s předpokladem, že druhá z množin je neprázdná. Tedy $\bigcup A_n$ musí být souvislá.



Obrázek 2.3: Obrázek množiny $\bigcup A_n$

Zde si ukážeme příklad, který má velice cenný důsledek v teorii souvislých množin.

Příklad 2.6. Nechť $\{A_\alpha\}$ je systém souvislých podprostorů prostoru X a nechť A je souvislý podprostor prostoru X. Ukažte, že pokud $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ pro všechna α, pak $A \cup (\cup A_\alpha)$ je souvislý.

Řešení:

Uvažujme, že $A \cup (\cup A_\alpha)$ souvislý není.

Potom dle definice existují neprázdné a otevřené množiny C a D takové, že

$$A \cup (\cup A_\alpha) = C \cup D \text{ a zároveň } C \cap D = \emptyset$$

Víme také, že podle věty 2.5 musí množina A náležet do právě jedné z množin C nebo D. Stejnou myšlenku použijeme i pro každý podprostor ze systému $\{A_\alpha\}$. Zde se pozastavme nad zadáním příkladu, které nám říká, že každý souvislý podprostor ze systému $\{A_\alpha\}$ má neprázdný průnik s A. Tedy každý tento podprostor musí náležet do stejné množiny jako množina A, například do C. Tímto však dostáváme, že množina D je prázdná, čili jsme dostali spor s předpokladem, že je množina $A \cup (\cup A_\alpha)$ nesouvislá.

Důsledek 2.3. *Sjednocení systému souvislých množin, jehož průnik je neprázdný, je souvislá množina.*

Představme si nyní situaci, kdy by množina A z předchozího příkladu obsahovala pouze jeden bod x. Pak by všechny souvislé podprostory ze systému $\{A_\alpha\}$ měly společný právě tento jediný bod. Sjednocení toho systému budeme nazývat souvislá komponenta v bodě x. Přesnou definici souvislé komponenty uvedeme záhy.

Definice 2.4. [1, strana 250] Nechť X je topologický prostor a nechť $x \in X$. Sjednocením systému souvislých podprostorů obsahující bod x nazýváme souvislá komponenta bodu x.

Důsledek 2.4. [1, strana 250] *Je-li prostor X souvislý, je souvislou komponentou libovolného ze svých bodů.*

Uvědomme si však, že souvislá komponenta bodu x je největší souvislá množina obsahující bod x. Z věty 2.3 víme, že uzávěr souvislé množiny je souvislá množina. Z toho nám plyne následující důsledek.

Důsledek 2.5. [1, strana 250] *Souvislá komponenta bodu x topologického prostoru X je uzavřená množina.*

V následujících sekcích si ukážeme bližší význam této souvislé komponenty.

Věta 2.6. [1, strana 251, v.5] *Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení topologických prostorů. Obraz $f(A)$ souvislé množiny $A \subset X$ je souvislá množina.*

Na konec této sekce jsem si přichystal celkem 3 zajímavé příklady.

Příklad 2.7. [2, strana 152, př.5] Prostor je totálně nesouvislý, pokud jsou jeho jediné souvislé podprostory jednobodové množiny. Ukažte, že pokud je prostor vybaven diskrétní topologií, potom je X totálně nesouvislý.
Řešení:
Nechť X není totálně nesouvislý, pak existuje množina A mající alespoň 2 prvky, která je souvislá. Mějme $x \in A$, uvažujme množiny $\{x\}$ a $A - \{x\}$. Tyto množiny jsou ovšem neprázdné a otevřené, přičemž

$$\{x\} \cup (A - \{x\}) = A \text{ a zároveň } \{x\} \cap (A - \{x\}) = \emptyset$$

Tedy $\{x\}$ a $A - \{x\}$ tvoří rozklad A, což je spor.

Příklad 2.8. [2, strana 152, př.4] Nechť je X nekonečná množina, pak je souvislá v topologii konečných doplňků.
Řešení:
Uvažujme, že je množina X nesouvislá v topologii konečných doplňků. Pro připomenutí topologie konečných doplňků vypadá následovně.

$$\tau = \{A \subset X \mid X - A \text{ je konečná množina nebo } X\}$$

Jelikož je množina X nesouvislá, pak musí existovat rozklad množiny X na množiny U a V tak, že $X = U \cup V$ a $U \cap V \neq \emptyset$, přitom $U \in \tau$ a $V \in \tau$ a zároveň obě množiny U i V nejsou prázdné množiny.
Z rozkladu množiny X víme, že $U = X - V$. Jak je snadno vidět, tak U je konečná množina. Stejný princip provedeme i pro V. Nyní se ale dostáváme ke sporu s tím, že je množina X nekonečná, protože sjednocením dvou konečných množin vznikne opět konečná množina.

Příklad 2.9. [2, strana 152, př.6] Nechť $A \subset X$. Ukažte, že pokud je C souvislý podprostor X, který má průnik s A i $X - A$, pak má průnik i s ∂A.

Řešení :

Uvažujme, že C nemá průnik s ∂A.

Množinu X můžeme zapsat jako

$$X = (X - \overline{X - A}) \cup (X - \overline{A}) \cup \partial A$$

Podle zadaní, C musí mít neprázdný průnik s A i $X - A$. Můžeme tedy psát, že

$$C \cap X = (C \cap (X - \overline{X - A})) \cup (C \cap (X - \overline{A})) \cup (C \cap \partial A)$$

podle našeho předpokladu ale $C \cap \partial A = \emptyset$ můžeme tedy psát

$$C \cap X = (C \cap (X - \overline{X - A})) \cup (C \cap (X - \overline{A}))$$

Víme, že množina C je souvislá, tzn. mohou nastat pouze tyto dvě možnosti.

1) $C \cap (X - \overline{X - A}) = C \Rightarrow C \cap (X - \overline{A}) = C \cap int(X - A)) = \emptyset$

2) $C \cap (X - \overline{A}) = C \Rightarrow C \cap (X - \overline{X - A}) = C \cap int(A)) = \emptyset$

Obě tyto možnosti jsou však ve sporu se zadáním, kdy C musí mít neprázdný průnik s A i $X - A$ a víme, že $A = \mathrm{int} A \cup \delta A$ a $X - A = \mathrm{int}(X - A) \cup \delta A$.

2.2. Obloukově souvislá množina

Definice 2.5. [1, strana 256] Obloukem v topologickém prostoru X spojujícím body x a $y \in X$ rozumíme spojité zobrazení f uzavřeného intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ do X takové, že $f(a) = x$, $f(b) = y$.

Definice 2.6. [1, strana 256] Topologický prostor X se nazývá obloukově souvislý, jestliže každé dva body x,$y \in X$ lze spojit obloukem.

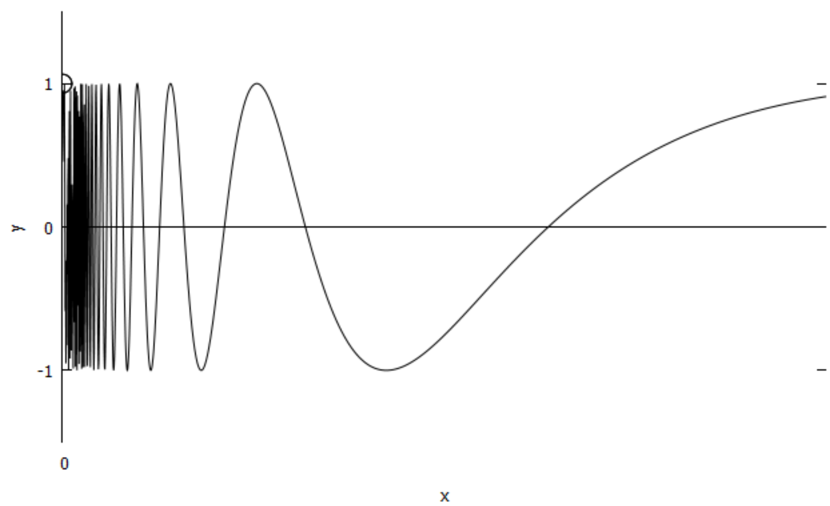
Věta 2.7. [1, strana 256, v.12] *Každý obloukově souvislý prostor je zároveň i souvislý.*

Důkaz. [1, strana 256] Buď X obloukově souvislý prostor. Předpokládejme, že X není souvislý. Existují tedy otevřené množiny $U, V \subset X$ takové, že $U \cap V = \emptyset, U \cup V = X$. Buď $f : [a, b] \to X$ libovolný oblouk. Jelikož interval $[a, b]$ je souvislý, množina $f([a, b]) \subset X$ je souvislá(věta 3.). Dále $U \cup V = X$, takže $f([a, b]) = (f([a, b]) \cap U) \cup (f([a, b]) \cap V)$ a přitom $f([a, b]) \cap U \cap f([a, b]) \cap V = \emptyset$. Ze souvislosti topologického prostoru $f([a, b])$ tedy vyplývá, že jedna z množin $f([a, b]) \cap U, f([a, b]) \cap V$ musí být prázdná. Znamená to tedy, že $f([a, b])$ leží buď v U nebo ve V a tedy žádné dva body $x \in U, y \in V$ nelze spojit obloukem. To je ovšem spor s předpokladem, že X je obloukově souvislý. Tento spor ukazuje, že X musí být souvislý. $\square$

Nyní bychom se mohli ptát, zda-li ze souvislosti prostoru plyne i oblouková souvislost. Obecně to ovšem neplatí. Jako důkaz této myšlenky uvedu následující příklad.

Příklad 2.10. Mějme množinu $A = \{\sin(1/x), x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 1\}$ a $X = (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Otázka zní, je množina $M = A \cup X$ souvislá a obloukově souvislá ?

Řešení:



Obrázek 2.4: Graf množiny M

Množina $M - \{X\}$ je jistě obloukově souvislá a proto podle věty 2.7 je množina $M - \{X\}$ souvislá. Co můžeme říct o uzávěru množiny $M - \{X\}$?
Uzávěr množiny $M - \{X\}$,

$$\text{tzn. } \overline{M - \{X\}} = A \cup (\{0, y\} : -1 \leq y \leq 1)$$

je souvislá množina podle věty 2.3. Podle věty 2.4 je každá množina B, která splňuje podmínku $A \subset B \subset \overline{A}$, souvislá. Položíme-li $A = M - \{X\}$, $B = M$ a $\overline{A} = \overline{M - \{X\}}$, dostáváme, že i množina M je souvislá.
Zbývá nám tedy zjistit, zda-li je množina M obloukově souvislá. Předpokládejme, že je množina M obloukově souvislá. Existuje tedy oblouk $f : [0,1] \to M$ takový, že $f(0) = X$. Zaměřme se na množinu $f^{-1}(X)$. Jelikož f je oblouk, je tedy toto zobrazení spojité a množina $\{X\} \subset M$ je uzavřená, tedy množina $f^{-1}(X) \subset [0,1]$ je také uzavřená.
Uvažujme nyní kouli K se středem v bodě X. Opět ze spojitosti oblouku f vyplývá, že ke každému bodu $a \in f^{-1}(X)$ existuje otevřený interval I_a se středem

v a takový, že $f(I_a) \subset K \cap M$. Jelikož je I_a interval, tak je podle důsledku 2.2 souvislý. Obrazem souvislé množiny je podle věty 2.6 souvislá množina. Dostáváme tedy, že $f(I_a)$ je také souvislá množina. Z tohoto nám vyplývá, že $f(I_a) = X$ pro všechna $a \in f^{-1}(X)$. Tímto jsme dokázali otevřenost množiny $f^{-1}(X)$. Dohromady dostáváme, že tato množina je uzavřená, otevřená a neprázdná a prostor $[0, 1]$ je souvislý, musí tedy platit, že $f^{-1}(X) = [0, 1]$. Výsledkem je tedy, že neexistuje oblouk takový aby spojil bod X s nějakým bodem množiny A, takže množina M není obloukově souvislá.

(v předchozím příkladu jsem se inspiroval příkladem [1, strana 258, př.4])

2.3. Lokální souvislá množina

Definice 2.7. [1, strana 254] Topologický prostor se nazývá lokálně souvislý, má-li každý jeho bod lokální bázi tvořenou souvislými množinami.

Věta 2.8. [1, strana 254, v.9] *K tomu, aby topologický prostor X byl lokálně souvislý je nutné a stačí, aby pro libovolnou otevřenou množinu $U \subset X$ každá souvislá komponenta množiny U byla otevřená množina v X.*

Stejně, jako nás v sekci obloukově souvislá množina zajímal vztah mezi obloukovou souvislostí a souvislostí množiny, můžeme se i nyní ptát, zda-li souvislost implikuje lokální souvislost či naopak.
Tedy souvislost $\Rightarrow$ lokální souvislost nebo lokální souvislost $\Rightarrow$ souvislost.
Zaměřme se tedy na první část. Vraťme se k příkladu 2.10 v minulé sekci. Vidíme, že tento prostor je souvislý. Pokud ale vezmeme otevřenou kouli K se středem v bodě X a poloměrem $1/10$, pak $M \cap K$ je otevřená množina, ale souvislá komponenta $\{X\}$ je ovšem v M uzavřená což je spor s větou 2.8. Tedy M není lokálně souvislý.

Vidíme tedy, že ze souvislosti neplyne lokální souvislost. Ptejme se nyní, zda-li obecně existuje obrácená implikace, tedy jestli z lokální souvislosti plyne souvislost.

Příklad 2.11. Dokažte, zda-li je topologický prostor X obdařený diskrétní topologií lokálně souvislý.

Řešení:

Vezměme libovolný bod $x \in X$, pak $\{x\}$ je souvislá množina obsahující bod x. Tuto množinu však obsahuje každá otevřená množina obsahující bod x. Tedy prostor X s diskrétní topologií je lokálně souvislý prostor.

V příkladu 2.7 jsme se však dozvěděli, že diskrétní topologický prostor s více jak 2 prvky je totálně nesouvislý. Jsme oprávněni tvrdit, že ani obrácená implikace neplatí. Závěrem tedy dostáváme, že obecně není žádný vztah mezi souvislostí a lokální souvislostí.

Závěr

Cílem práce bylo čtenáře seznámit s pojmem souvislá a nesouvislá množina v topologických prostorech. Čtenář byl obeznámen s definicí tohoto pojmu a na příkladech bylo ukázáno, jak postupovat při zjišťovaní, zda-li je tato množina či prostor souvislý. Můžeme si však všimnout, že dokázat, zda-li je množina souvislá, je obvykle náročnější, než dokázat opak. Proto jsem často při řešení používal důkaz sporem. Také jsme mohli vidět, že z obloukové souvislosti plyne souvislost, avšak opačně toto tvrzení neplatí. V kapitole popisující pojem lokální souvislost jsme si také mohli povšimnout, že z lokální souvislosti neplyne souvislost. Z příkladu v této kapitole však víme, že i obracené tvrzení neplatí. Tedy neexistuje žádný vztah mezi těmito dvěma pojmy.

Na úplný závěr je třeba zmínit, že pojem souvislá množina je hojně používaným pojmem v různých odvětvích matematiky. Například v komplexní analýze se čtenář může setkat s pojmem souvislá oblast či jednoduše souvislá oblast, který je definovaný pomocí souvislé množiny.

Literatura

[1] KRUPKA, Demeter a Olga KRUPKOVÁ *Topologie a geometrie, Obecná topologie.* SPN Praha, 1989, 404 s.

[2] MUNKRES, James R. *Topology.* 2nd ed. Upper Saddler River, NJ: Prentice Hall, c2000. ISBN 0-13-181629-2

[3] HAMHALTER, Jan a Jaroslav TIŠER. *Funkce komplexní proměnné.* Praha: Vydavatelství ČVUT, 2001. ISBN 80-01-02415-6.

[4] LIPSCHUTZ, Seymour. *General topology.* [Rev. ed.]. New York: McGraw-Hill, 2012. ISBN 9780071763479.