

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Zuzana Michalovičová

Metody řešení rovnic a nerovnic

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala sama a čerpala jsem pouze ze zdrojů uvedených v seznamu literatury.

V Olomouci

.....
Zuzana Michalovičová

Touto cestou chci poděkovat Mgr. Jitce Hodaňové, Ph.D. za poskytnutí cenných rad, podnětů a připomínek při zpracování mé bakalářské práce a za její ochotu a čas při konzultacích. Také bych chtěla poděkovat mé rodině a přátelům, kteří mě po celou dobu podporovali.

Obsah

Úvod	6
Teoretická část.....	7
1. Rovnice	7
1.1. Lineární rovnice	9
1.1.1. Lineární rovnice s parametrem	10
1.1.2. Lineární rovnice s absolutními hodnotami	11
1.1.3. Grafické řešení lineární rovnice	15
1.2. Kvadratické rovnice	15
1.2.1. Kvadratické rovnice s parametrem	19
1.2.2. Kvadratické rovnice s absolutními hodnotami	20
1.2.3. Grafické řešení kvadratické rovnice	21
1.3. Soustavy rovnic	23
1.4. Rovnice vyšších stupňů.....	30
2. Nerovnice.....	33
2.1. Lineární nerovnice	34
2.1.1. Lineární nerovnice s parametrem	35
2.1.2. Lineární nerovnice s absolutními hodnotami	36
2.1.3. Grafické řešení lineárních nerovnic	37
2.2. Kvadratické nerovnice	39
2.2.1. Kvadratické nerovnice s parametrem	42
2.2.2. Kvadratické nerovnice s absolutními hodnotami	43
2.2.3. Grafické řešení kvadratických nerovnic.....	44
2.3. Nerovnice s více neznámými	46
2.4. Soustava nerovnic	49
Praktická část.....	52
3. Výzkum.....	52

3.1. Dotazník.....	52
3.2. Vyhodnocení	53
3.3. Shrnutí.....	65
Závěr.....	68
Seznam použitých zdrojů:	69
Seznam grafů	70
Seznam tabulek.....	71
Seznam příloh.....	72
Seznam použitých matematických symbolů a značek.....	73
Anotace	

Úvod

Téma metody řešení rovnic a nerovnic jsem si jako své téma bakalářské práce zvolila z důvodu, že jej považuji za jedno ze základních témat. S řešením jednoduchých rovnic jsme se setkali již na základní škole. Seznámili jsme se s lineárními a kvadratickými rovnicemi (popř. nerovnicemi), s metodami řešení rovnic včetně jejich grafického řešení. Na středních školách jsme toto téma rozvíjeli, prohlubovali. S řešením všech typů rovnic jsme se setkali na vysoké škole.

Uvědomuji si, že téma bakalářské práce je velmi rozsáhlé, protože zahrnuje různé typy rovnic a nerovnic. Proto se ve své práci pokusím vybrat a soustředit se na objasnění těch rovnic a nerovnic, se kterými se setkáváme často, jak na základních školách, tak na středních školách. Zaměříme se rovněž na grafické řešení.

Kromě rovnic a nerovnic, bych se ve své práci ráda zmínila i o soustavách rovnic a nerovnic a také o grafickém řešení soustav rovnic a nerovnic.

Ve své druhé části práce, v praktické části, předložíme studentům 1. ročníku, oboru Matematika se zaměřením na vzdělání Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, znalostní test s několika úlohami. Tyto respondenty volíme záměrně, a to z důvodu, že chceme zjistit úroveň znalostí studentů v oblasti řešení rovnic a nerovnic. Zajímali jsme se, jakými metodami studenti úlohy řeší a jaké používají postupy. Metody řešení rovnic a nerovnic je část matematiky, která je na středních školách probírána v dostatečném rozsahu, zejména ve čtvrtých ročnících. Předpokládáme, že studenti, kteří se hlásí na obor matematika, absolvovali maturitu z matematiky a naším záměrem je zjistit, zda absolvování maturitní zkoušky z matematiky ovlivní úroveň znalostí v matematice u absolventů středních škol.

Teoretická část

1. Rovnice

„ Pod pojmem rovnice se obvykle rozumí jakákoliv výroková forma n proměnných $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, jejímž oborem proměnnosti je množina všech reálných čísel. Řešením této rovnice rozumíme pak každý prvek z oboru pravdivosti výrokové formy $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, tj. každou uspořádanou n -tici reálných čísel $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, pro niž je výrok $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pravdivý.“ (Libicher, J.; Burian, K. 1975, s. 96)

„ Jsou dány dva výrazy $L(x), P(x)$ s proměnnou x . Mají se určit hodnoty této proměnné z daného číselného oboru M , pro něž jsou si rovny hodnoty obou výrazů. Zápis této úlohy ve tvaru

$$L(x) = P(x),$$

se nazývá rovnice. Výrazu $L(x)$ se říká levá strana rovnice, výrazu $P(x)$ pravá strana rovnice¹. Proměnná x v rovnici se nazývá neznámá². Hodnoty neznámé x_k , pro něž je rovnice splněna, tj. platí rovnost $L(x_k) = P(x_k)$ se nazývají kořeny (řešení) rovnice. Číselný obor M , ve kterém hledáme kořeny (řešení) rovnice, nazýváme oborem řešení rovnice. Podmnožina množiny M , v níž jsou definovány oba výrazy $L(x)$ a $P(x)$, neboli průnik definičních oborů těchto výrazů, se nazývá definiční obor rovnice a značí se D . Množinu všech kořenů (řešení) rovnice značíme K ($K \subset D \subset M$).“ (Polák, J.; 2012, s. 201)

Rovnice při řešení upravujeme tak, abychom je postupně zjednodušovali a mohli tak vypočítat neznámou.

„ Jestliže P_1 je obor pravdivosti nějaké rovnosti, P_2 obor pravdivosti rovnice po úpravě, pak úprava, při které $P_1 = P_2$, se nazývá ekvivalentní a nová rovnice ekvivalentní s původní. Jestliže $P_1 \subset P_2$, $P_1 \neq P_2$, nová rovnice je důsledkem původní rovnice a úprava se nazývá implikační. Při řešení rovnic zpravidla provádíme více úprav. Jestliže obory pravdivosti dané rovnice a dalších rovnic po úpravách jsou postupně $P_1, P_2, \dots, P_n$, platí

¹ Speciálně může být jedna strana rovnice konstanta; je-li jí nula, mluvíme o anulovaném tvaru rovnice (Polák, J., 2012, s. 201)

² K jejímu označení se užívají i jiná písmena, zpravidla z konce latinské abecedy (Polák, J., 2012, s. 201)

$P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_n$, přičemž při ekvivalentních úpravách symbol $\subset$ nahradíme symbolem $=$. Každý kořen kterékoli ze získaných rovnic je zároveň kořenem následující rovnice.“ (Schmidtmayer, J., Rozenský, Z., Šikola, B., 1979, s. 158)

„Předpokládáme, že daná rovnice má alespoň jeden kořen. Jejímí úpravami získáme rovnici, jejíž kořeny známe nebo je dovedeme určit. Přitom použité úpravy rovnice musí mít tu vlastnost, že každý kořen dané rovnice je také kořenem rovnice získané její úpravou. Těmto úpravám rovnice říkáme důsledkové (implikační) úpravy. Z těchto důsledkových úprav rovnic jsou zvláště důležité tzv. ekvivalentní úpravy.“ (Polák, J., 2012, s.202)

Zkouška je součástí řešení rovnice, pokud při řešení nebyly použity ekvivalentní úpravy. Ovšem i při použití ekvivalentních úprav je vhodné provést zkoušku, pro zjištění zda jsme se nedopustili numerické chyby.

„Mezi nejčastější ekvivalentní úpravy patří:

- I. Nahrazení libovolné strany rovnice výrazem, který se jí rovná v celém oboru rovnice;
- II. přičtení výrazu, který je definován v celém oboru rovnice, k oběma jejím stranám;
- III. násobení obou stran rovnice výrazem, který v celém oboru rovnice nabývá jen nenulových hodnot;
- IV. umocnění týmž přirozeným mocnitelem obou stran rovnice, které v celém oboru rovnice nabývají jen nezáporných hodnot.“ (Schmidtmayer, J., Rozenský, Z., Šikola, B., 1979, s. 159)

„Nejvýznamnější důsledkové úpravy rovnic, které nejsou obecně ekvivalentními úpravami:

- V. Vynásobení obou stran rovnice týmž číslem nebo výrazem s neznámou, který je definován v celém oboru řešení rovnice;
- VI. umocnění obou stran rovnice týmž přirozeným číslem.“ (Polák, J., 2012, s.203)

Při zadání rovnice je třeba vymezit, do které číselné množiny má řešení náležet. „Protože například u rovnice $3x=5$ má v množině všech reálných čísel jediné řešení, stejně tak v množině všech čísel racionálních. V množině všech celých čísel však tato rovnice nemá žádné řešení.“ (Rohlíček, J., Hruša, Dlouhý, 1996, s.138)

1.1. Lineární rovnice

Podle J. Poláka lineární rovnicí s neznámou x nazýváme každou rovnici tvaru $ax + b = 0$, kde a, b jsou libovolná reálná nebo komplexní čísla.

Pro řešení lineární rovnice $ax + b = 0$ v oboru R mohou nastat právě tyto tři případy:

- a) Je-li $a \neq 0$, je ekvivalentní s rovnicí $ax = -b$, takže má právě jeden kořen $x = -\frac{b}{a}$.
- b) Je-li $a = b = 0$, má nekonečně mnoho řešení: jejím kořenem je každé reálné, resp. komplexní číslo.
- c) Je-li $a = 0$, $b \neq 0$, nemá žádné řešení. (Polák, J., 2012)

Lineární rovnice je algebraickou rovnicí 1. stupně, právě když platí $a \neq 0$

Pozn.: „Algebraická rovnice n -tého stupně s neznámou $x \in R$ je rovnice ve tvaru $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, kde $a_n \neq 0$, $n \in N$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ jsou reálné koeficienty algebraické rovnice, $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$ jsou členy algebraické rovnice.“³ (Kubešová, N., Cibulková, E., 2011, s. 33)

Př.1: Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$3[2(3x-6)-2(4x-5)+1]-3=6[3-8(x-3)] \quad (\text{Petáková, 1998, s.12})$$

Řešení:

$$3[2(3x-6)-2(4x-5)+1]-3=6[3-8(x-3)]$$

$$3[6x-12-8x+10+1]-3=6[3-8x+24]$$

$$3[-2x-1]-3=6[27-8x]$$

$$-6x-3-3=162-48x$$

$$42x=168$$

$$x=4$$

³ „Nealgebraická rovnice je každá rovnice, která není algebraická, např. rovnice exponenciální, logaritmická, goniometrická.“ (Kubešová, N., Cibulková, E., 2011, s. 33)

Zkouška:

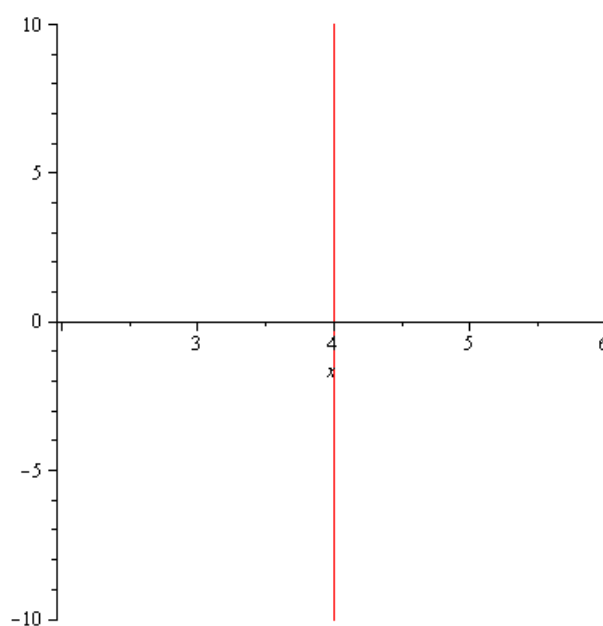
$$L(4) = 3[2(3 \cdot 4 - 6) - 2(4 \cdot 4 - 5) + 1] - 3 = 3[12 - 22 + 1] - 3 = -27 - 3 = -30$$

$$P(4) = 6[3 - 8(4 - 3)] = 6(-5) = -30$$

Výsledek:

$$K = \{4\}$$

Grafické řešení:



Graf 1-1.1.-Příklad 1

1.1.1. Lineární rovnice s parametrem

Rovnice kromě neznámé může obsahovat další proměnnou, tzv. parametr. Nejčastěji se značí písmeny a, b nebo p . V zadání je vždy dáno, které písmeno značí neznámou a které parametr. „Představuje zápis množiny všech rovnic, které získáme dosazením konstant za každý parametr, z dané číselné množiny (oboru parametru).“ (Polák, J., 2012, s. 202)

U rovnic s parametry je součástí řešení tzv. diskuze. „Stanovíme, pro které hodnoty parametrů má daná rovnice řešení, jež určíme, a pro které hodnoty parametrů daná rovnice nemá řešení.“ (Polák, J., 2012, s. 202)

Př.2: Řešte v R rovnici s parametrem $p \in R$:

$$x(p+2) + p(x-2) = x+2$$

Řešení:

$$\begin{array}{l}
 px + 2x + px - 2p = x + p \\
 x(2p+1) = 3p \\
 \begin{array}{ll}
 \hline
 p \neq -0,5 & p = -0,5 \\
 x = \frac{3p}{2p+1} & x \cdot 0 = -\frac{3}{2} \\
 K = \left(\frac{3p}{2p+1} \right) & K = \emptyset
 \end{array}
 \end{array}$$

Výsledek:

p	K
$p = -0,5$	$\emptyset$
$p \neq -0,5$	$\left\{ \frac{3p}{2p+1} \right\}$

Tab. 1-1.1.1- Příklad 2

1.1.2. Lineární rovnice s absolutními hodnotami

„Lineární rovnici s absolutními hodnotami nazýváme každou rovnici (s neznámou $x \in R$) tvaru

$$|a_1x + b_1| \pm |a_2x + b_2| \pm \dots \pm |a_nx + b_n| = a_0x + b_0,$$

kde $a_i, b_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ jsou daná reálná čísla, $a_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.“ (Polák, J., 2012, s. 208)

„Pro řešení lineárních rovnic s větším počtem absolutních hodnot se používá metoda intervalů (metoda nulových bodů). Nulovými body rozumíme čísla, pro která výrazy v absolutních hodnotách nabývají hodnoty nula. Nulové body rozdělí reálnou osu na intervaly, ve kterých odstraněním absolutních hodnot podle definice absolutní hodnoty vyřešíme lineární rovnici.“ (Kubešová, N., Cibulková, E., 2011, s. 37)

„Absolutní hodnota vyjadřuje vzdálenost obrazu čísla na číselné ose od nuly. Pro každé reálné číslo a definujeme:

a) Je-li $a \geq 0$, potom $|a| = a$

b) Je-li $a < 0$, potom $|a| = -a$

Z definice je tedy zřejmé, že chceme-li odstranit u výrazu operátor absolutní hodnoty, musíme vědět, s jakým číslem operujeme, zda s nezáporným či záporným.

Př.: $\left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}$, $|-8| = 8$, ale $|x-1|$ je buď $x-1$, a to pro $x-1 \geq 0$ nebo je to číslo opačné

k $x-1$, tj. $1-x$ a to tehdy, je-li $x-1 < 0$ (Muláčová, Pešková, 1996, s.45)

Další vlastnosti $|a|$:

$$|a| \geq 0$$

$$|a| = |-a|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|a-b| \geq |a| - |b|$$

Př.3: Řešte v R rovnici $|2x-5| + x = 4x+1$

Řešení:

Pro řešení rovnic s absolutní hodnou je důležitý pojem „nulový bod“, pod kterým si představíme číslo, pro něž je absolutní hodnota výrazu nulová.

$$2x-5=0$$

$$2x=5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Nyní musíme hledat řešení v intervalech $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ a $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$, protože v každém z těchto intervalů znamená $|2x-5|$ něco jiného. V prvním z nich je $|2x-5| = -2x+5$ a ve druhém $|2x-5| = 2x-5$

I. Řešíme rovnici pro první interval, kde platí $x < \frac{5}{2}$

$$(-2x+5) + x = 4x+1$$

$$-x+5 = 4x+1$$

$$-5x = -4$$

$$x = \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{4}{5} \text{ je prvním kořenem rovnice, protože patří do intervalu } \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$$

II. Řešíme rovnici pro druhý interval, kde platí $x \geq \frac{5}{2}$

$$(2x-5) + x = 4x+1$$

$$3x-5 = 4x+1$$

$$x = -6$$

$x = -6$ není kořenem rovnice, protože nepatří do daného intervalu $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$

Výsledek: $K = \left(\frac{4}{5}\right)$

Př.4: Řešte v R rovnici $|2x+1| + |2x-1| = 3$ (Polák, J., 2008, s.209)

Řešení: Pomocí metodou intervalů (nulových bodů)

Určíme nulové body obou výrazů v absolutní hodnotě

$$2x+1=0$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$2x-1=0$$

$$x_2 = \frac{1}{2},$$

Množinu $R = (-\infty, \infty)$ rozdělíme na intervaly $I_1 = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $I_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $I_3 = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. Nyní určíme znaménka libovolných hodnot dvojčlenů $2x+1, 2x-1$ uvnitř intervalů I_1, I_2, I_3

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
$2x+1$	-	+	+
$2x-1$	-	-	+

Tab. 2-1.2.1-Příklad 4

Odtud tedy plyne:

a) Pro $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$: $(-2x-1) + (-2x+1) = 3$

Jejím kořenem je číslo $x = -\frac{3}{4} \in I_1$ a tedy $K_1 = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$

b) Pro $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: $(2x+1) + (-2x+1) = 3$

Tato rovnice není splněna pro žádné reálné x a tedy $K_2 = \emptyset$

c) Pro $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$: $(2x+1) + (2x-1) = 3$

Kořenem je $x = \frac{3}{4}$ a patří do intervalu I_3 a tedy $K_3 = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

Výsledek: $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \left\{\pm\frac{3}{4}\right\}$

Geometrický význam absolutní hodnoty reálného čísla

„Absolutní hodnota reálného čísla je vzdálenost obrazu tohoto čísla od počátku na číselné ose.

Pro každé $k \in \mathbb{R}^+$ platí:

$$\{x \in \mathbb{R}; |x| = k\} = \{-k, k\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}; |x| \leq k\} = \langle -k, k \rangle$$

$$\{x \in R; |x| < k\} = (-k, k)$$

$$\{x \in R; |x| \geq k\} = (-\infty, -k] \cup [k, +\infty)$$

$$\{x \in R; |x| > k\} = (-\infty, -k) \cup (k, +\infty)$$

(Hudcová, M., Kubičková, L., 2000, s. 14)

1.1.3. Grafické řešení lineární rovnice

Grafem každé lineární funkce je přímka⁴, která je různoběžná s osou y .

- a) Je-li $a = 0$, grafem je přímka rovnoběžná s osou x , k jejímu určení jen bod $[0, b]$.
- b) Je-li $a \neq 0$, grafem je různoběžka s osou x . Je určena dvěma různými body $[x_1, ax_1 + b]$, $[x_2, ax_2 + b]$, kde x_1 a $x_2 \neq x_1$ volíme libovolně.

1.2. Kvadratické rovnice

„Kvadratickou rovnicí s neznámou x nazýváme každou rovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde a, b, c jsou libovolná reálná, resp. komplexní čísla, $a \neq 0$. Členy kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c = 0$ se pak nazývají: ax^2 kvadratický člen, bx lineární člen, c absolutní člen kvadratické rovnice. (Polák, J., 2012, s. 211)

„Typy kvadratických rovnic

1. Neúplné kvadratické rovnice

- a) $ax^2 + bx = 0$ bez absolutního členu

- řeší se rozložením na součin $x \cdot (ax + b) = 0$, tzn. $x = 0$ nebo $x = -\frac{b}{a}$. Tato rovnice má vždy dva kořeny a z toho vždy jeden nulový.

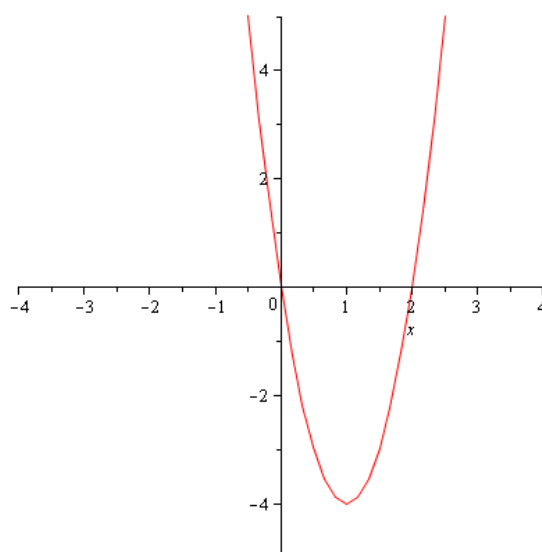
⁴ Z latinského slova linea, znamená čára, přímka

Př.5:

$$4x^2 - 8x = 0$$

$$4x \cdot (x - 2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$



Graf 2-1.2.-Příklad 5

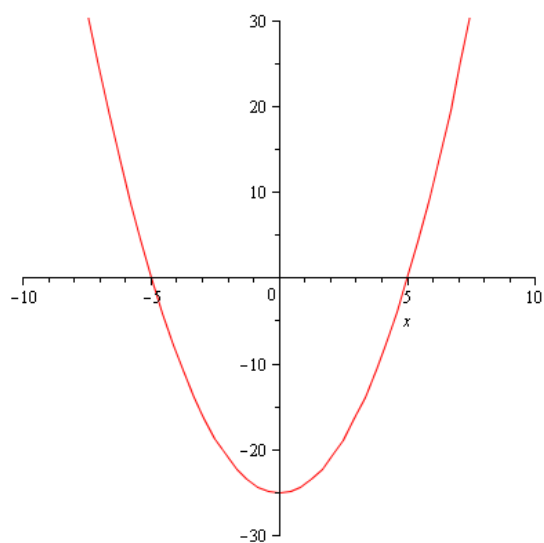
b) $ax^2 + c = 0$ bez lineárního členu, ryze kvadratická

Př.6:

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$



Graf 3-1.2.-Příklad 6

2. Úplné kvadratické rovnice

a) obecná: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

odvození vzorce pro kořeny

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Nyní doplníme $x^2 + \frac{b}{a}x$ na úplný čtverec

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Číslo $b^2 - 4ac$ nazýváme diskriminant, značíme $D = b^2 - 4ac$, potom $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ „

(Muláčová, Pešková, 1996, s.63,64)

„Necht' $ax^2 + bx + c = 0$ je libovolná kvadratická rovnice s reálnými koeficienty a, b, c ($a \neq 0$) a diskriminantem D

a) Je-li $D > 0$, má tato rovnice právě dva reálné různé kořeny,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

b) Je-li $D = 0$, má tato rovnice právě dva sobě rovné reálné kořeny (dvojnásobný reálný kořen)

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

c) Je-li $D < 0$, nemá tato rovnice v oboru reálných čísel žádný kořen⁵.“ (Polák, J., 2012, s. 212)

„Každou kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ s reálnými koeficienty a, b, c ; $a \neq 0$ lze vydělením rovnice koeficientem a upravit na normovaný tvar kvadratické rovnice $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Nahradíme-li $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$, zapisujeme kvadratickou rovnici v normovaném tvaru: $x^2 + px + q = 0$.

Vztahy mezi kořeny x_1, x_2 a koeficienty kvadratické rovnice vyjadřují Vietovy vzorce:

$$x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = q = \frac{c}{a} \text{ .“ (Kubešová, N., Cibulková, E., 2011, s. 39)}$$

Př.7: Řešte rovnici $2x^2 - x - 6 = 0$ (Boček, Charvát, 1995, s.30)

Řešení:

Nejdříve spočítáme diskriminant.

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 49$$

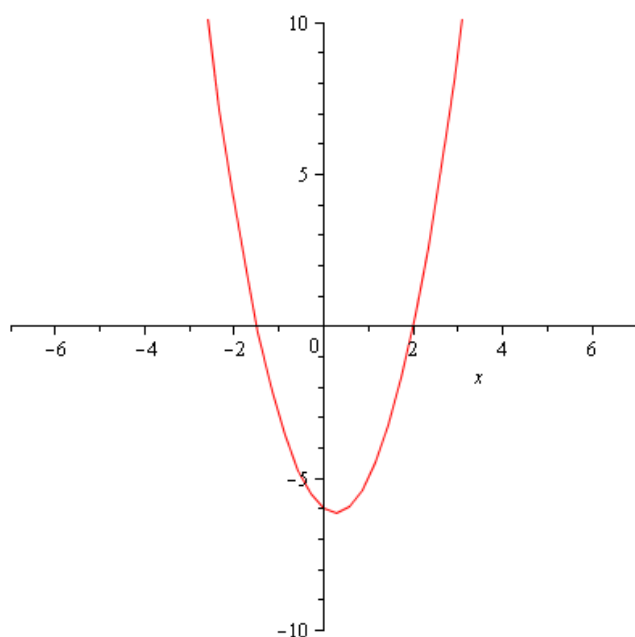
$$\sqrt{D} = 7$$

Jelikož $D > 0$ má právě dva reálné kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{matrix}$$

⁵ V oboru $\mathbb{C}$ komplexních čísel má kvadratická rovnice řešení vždy

Grafické řešení:



Graf 4-1.2-Příklad 7

1.2.1. Kvadratické rovnice s parametrem

Př.8: Řešte v R rovnici $2x^2 + 5px + 2 = 0$ s parametrem $p \in R$ (Bušek, 1999, s. 93)

Řešení: Daná rovnice je pro všechny reálné hodnoty parametru p kvadratickou rovnicí. Počet kořenů závisí na hodnotě diskriminantů.

$$D = (5p)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25p^2 - 16$$

Rozlišujeme tři případy:

$$D > 0$$

$$25p^2 - 16 > 0$$

$$25p^2 > 16$$

$$p^2 > \frac{16}{25}$$

$$|p| > \frac{4}{5}$$

$$p \in \left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{5}, \infty\right)$$

$$D = 0$$

$$25p^2 - 16 = 0$$

$$25p^2 = 16$$

$$p^2 = \frac{16}{25}$$

$$|p| = \frac{4}{5}$$

$$p = \pm \frac{4}{5}$$

$$p \in \left\{-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}$$

$$D < 0$$

$$25p^2 - 16 < 0$$

$$25p^2 < 16$$

$$p^2 < \frac{16}{25}$$

$$|p| < \frac{4}{5}$$

$$p \in \left(-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Pro $p \in \left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{5}, \infty\right)$ má daná rovnice dva různé reálné kořeny, pro $p \in \left\{-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ má rovnice jeden (dvojnásobný) reálný kořen, pro $p \in \left(-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$ nemá rovnice žádný reálný kořen.

Nyní určíme jednotlivé kořeny x_1, x_2 pro $p \in \left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{5}, \infty\right)$:

$$x_{1,2} = \frac{-5p \pm \sqrt{25p^2 - 16}}{4}$$

Určení kořenu x pro $p \in \left\{-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}$:

$$x = -\frac{5p}{4}$$

Shrnutí:

p	Množina kořenů
$p \in \left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{5}, \infty\right)$	$\left\{\frac{-5p + \sqrt{25p^2 - 16}}{4}, \frac{-5p - \sqrt{25p^2 - 16}}{4}\right\}$
$p \in \left\{-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}$	$\left\{-\frac{5}{4}p\right\}$
$p \in \left(-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$	$\emptyset$

Tab. 3-1.2.1-Příklad 8

1.2.2. Kvadratické rovnice s absolutními hodnotami

Př.9: Řešte rovnici $|x^2 + x - 2|$, $x \in R$ (Polák, J., 2008, s.160)

Nejdříve si vypočítáme diskriminant, pro zjištění krajních bodů paraboly.

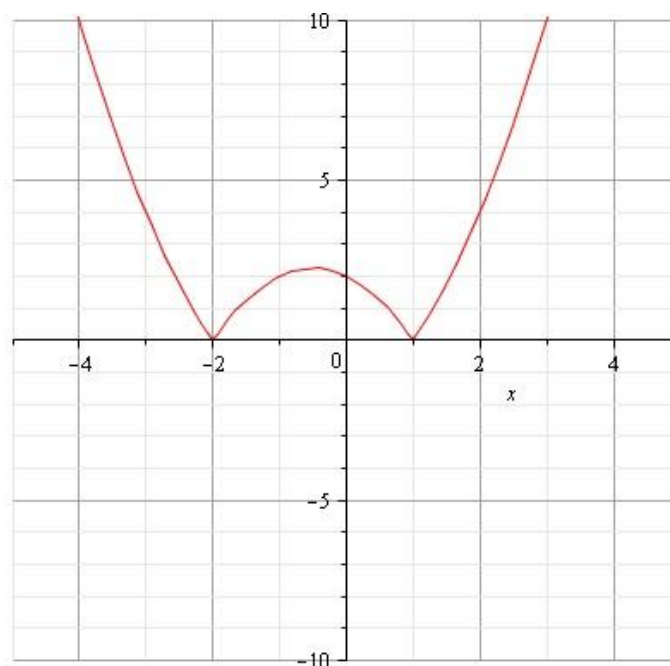
$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

$$\sqrt{D} = 3$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$$

Dále si zjistíme vrchol paraboly, a to tak, že $x^2 + x - 2$ doplníme na čtverec, tedy

$$y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$



Graf 5-1.2.2.-Příklad 9

1.2.3. Grafické řešení kvadratické rovnice

„Grafem kvadratické funkce je parabola. Při grafickém řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ můžeme postupovat dvěma způsoby:

- Sestrojíme graf kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ a x -ové souřadnice průsečíků paraboly s osou x určí hledané kořeny
- Nebo upravíme zadanou kvadratickou rovnici na tvar $ax^2 = -bx - c$, popřípadě na tvar $x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$. Pak x -ové souřadnice průsečíků grafu kvadratické a lineární funkce jsou hledanými kořeny rovnice“ (Cibulková, E., 2006, s.41)

Př.10: Řešte graficky rovnici $x^2 - 2x - 3$ (Polák, J., 2008, 213)

Řešení:

Podle způsobu a) si určíme průsečíky s osou x pomocí diskriminantu

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

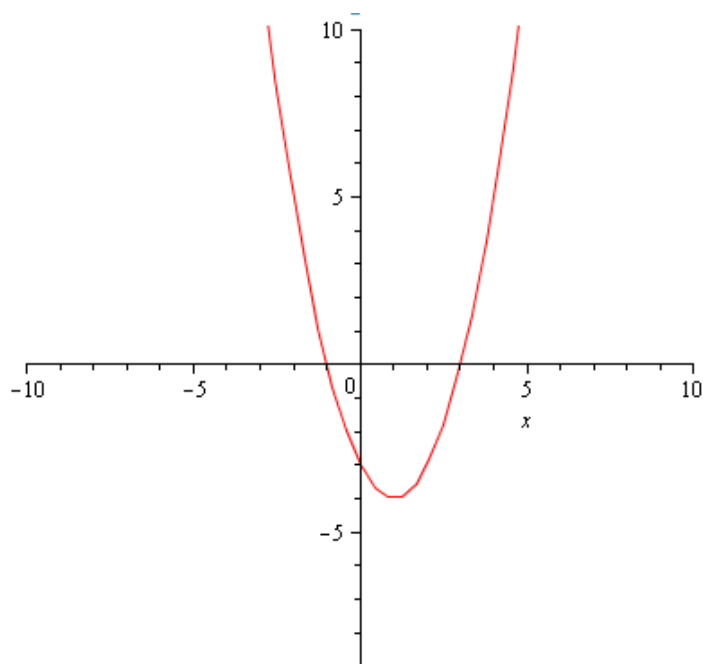
$$\sqrt{D} = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$$

Dále vypočítáme vrchol paraboly doplněním na čtverec

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$$

$$V[1, -4]$$



Graf 6-1.2.3.-Příklad 10

Podle způsobu b) upravíme rovnici na tvar $ax^2 = -bx - c$, resp. $x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ a

sestrojíme průsečíky grafu kvadratické funkce $y = x^2$ s grafem lineární funkce

$$y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$$

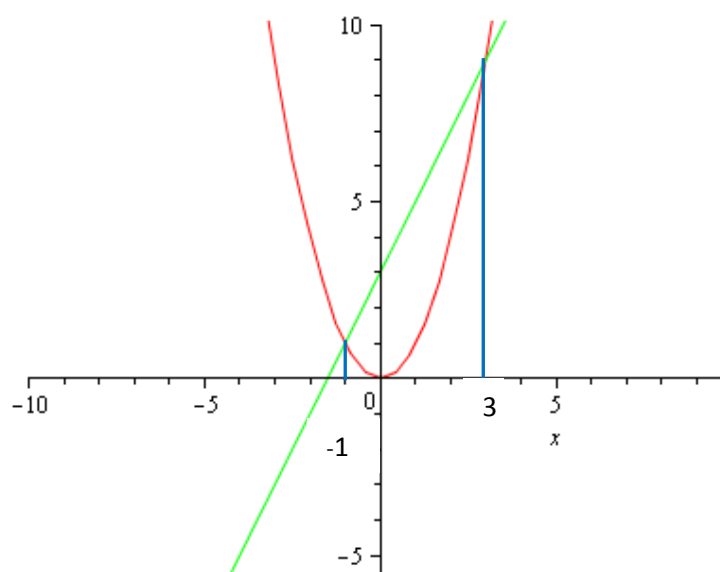
Tedy:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x^2 = 2x + 3$$

$$X[0;3]$$

$$Y\left[-\frac{3}{2};0\right]$$



Graf 7-1.2.3.-Příklad 10

1.3. Soustavy rovnic

„Řešením soustavy rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ je každá uspořádaná n – tice čísel $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ z daného číselného oboru M , která patří současně do množiny kořenů všech rovnic soustavy, tedy po dosazení takové n – tice čísel do každé rovnice soustavy vznikne pravdivý výrok. Množina všech kořenů (obor pravdivosti soustavy) je průnikem všech množin kořenů jednotlivých rovnic soustavy.

Pro řešení soustav rovnic se používají ekvivalentní úpravy soustavy rovnic, kterými se nemění řešení soustavy.“ (Kubešová, N., Cibulková, E., 2011, s. 44)

„Přehled ekvivalentních úprav soustavy rovnic:

- I. Nahrazení libovolné rovnice soustavy rovnicí, která je s ní ekvivalentní, tj. má totéž řešení. Získává se zejména dvěma ekvivalentními úpravami:
 1. K oběma stranám rovnice přičteme totéž číslo nebo výraz s neznámými, který je definován v celém oboru, v němž se rovnice řeší.
 2. Obě strany rovnice násobíme týmž číslem různým od nuly nebo výrazem s neznámými, který je definován a nenulový v celém oboru, v němž se rovnice řeší.
- II. Nahrazení libovolné rovnice soustavy součtem této rovnice a libovolné jiné rovnice soustavy.
- III. Dosazení neznámé nebo výrazu s neznámou z jedné rovnice soustavy do jiné její rovnice.“ (Polák, J., 2012, s. 269)

Základním typem metod řešení soustav lineárních algebraických rovnic jsou eliminační metody, jejichž podstatou je postupná eliminace (vylučování) neznámých z rovnic soustavy.

1. Soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

„Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých x, y je dvojice rovnic

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ dx + ey + f &= 0, \end{aligned} \quad \text{kde } a, b, c, d, e, f \text{ jsou reálná čísla.}$$

Řešením takové soustavy rovnic je uspořádaná dvojice čísel $[x, y]$, která vyhovuje oběma rovnicím.“ (Kubešová, N., Cibulková, E., 2011, s. 46)

„Podle způsobu, kterým vyloučíme jednu neznámou z některé rovnice soustavy, rozlišujeme tři metody řešení:

- a) Metoda sčítací- rovnice soustavy násobíme čísly zvolenými tak, aby se po sečtení vynásobených rovnic jedna neznámá vyloučila.
- b) Metoda dosazovací (substituční)- vyjádříme jednu neznámou z jedné rovnice soustavy a dosadíme ji do druhé rovnice, čímž se jedna neznámá z této rovnice vyloučí.
- c) Metoda srovnávací- z obou rovnic vyjádříme touž neznámou, výsledky porovnáme a tím získáme rovnici, ve které je tato neznámá vyloučena.“ (Polák, J., 2012, s. 269)

Příklad č. 11- řešení soustavy dvou lineárních rovnic s neznámými $x, y \in R$

$$7x - 3y = 15$$

$$\underline{5x + 6y = 27}$$

a) Metoda sčítací

První rovnici vynásobíme dvěma a dostáváme rovnici

$$14x - 6y = 30$$

Získanou rovnici sečteme s druhou rovnicí soustavy, tím vyloučíme neznámou y a pro neznámou x dostáváme rovnici

$$19x = 57$$

Odtud po dělení rovnice devatenácti

$$x = 3.$$

Podobně lze vyloučit neznámou x vynásobením druhé rovnice sedmi a první rovnice pěti a následným odečtením dostáváme rovnici

$$-57y = -114$$

Odtud po dělení rovnice -57

$$y = 2.$$

b) Metoda dosazovací

Z první rovnice vyjádříme

$$y = -5 + \frac{7}{3}x$$

A dosadíme do druhé rovnice, dostáváme

$$5x - 30 + 14x = 27$$

Odkud

$$19x = 57 \text{ čili } x = 3.$$

Podobně, vyjádříme-li z druhé rovnice

$$x = \frac{27}{5} - \frac{6}{5}y$$

A dosadíme do první rovnice

$$\frac{189}{5} - \frac{42}{5}y - 3y = 15$$

Pro zbavení zlomku celou rovnici vynásobíme pěti

$$189 - 42y - 15y = 75$$

Odkud

$$-57y = -114 \text{ čili } y = 2.$$

c) Metoda srovnávací

Z první i druhé rovnice vyjádříme například neznámou y , dostáváme

$$y = \frac{7}{3}x - 5$$
$$y = -\frac{5}{6}x + \frac{27}{6}$$

Porovnáním odtud plyne

$$\frac{7}{3}x - 5 = -\frac{5}{6}x + \frac{27}{6}$$

Pro odstranění zlomků celou rovnici vynásobíme šesti

$$14x - 30 = -5x + 27$$

A odtud

$$19x = 57 \text{ čili } x = 3$$

Po dosazení do rovnice $y = \frac{7}{3}x - 5$ vypočteme $y = 2$.

Výsledek: Daná soustava rovnic má právě jedno řešení $[x, y] = [3, 2]$

Zkouška:

$$L_1 = 7 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 21 - 6 = 15$$

$$P_1 = 15$$

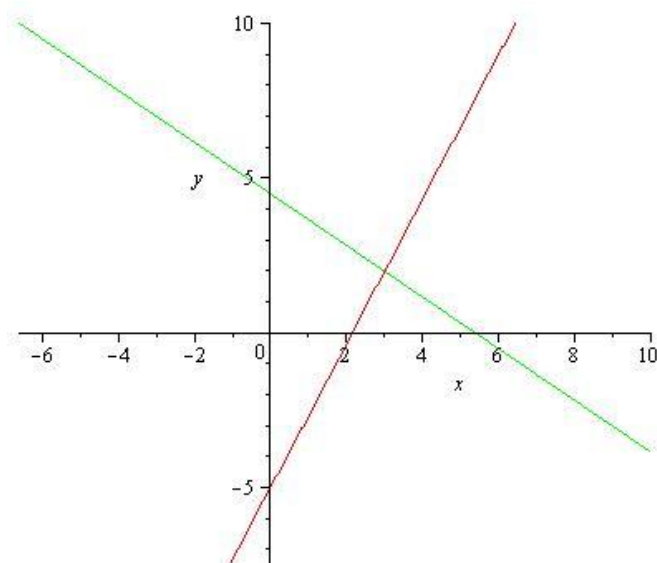
$$L_1 = P_1$$

$$L_2 = 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 15 + 12 = 27$$

$$P_2 = 27$$

$$L_2 = P_2$$

Grafické řešení dané soustavy rovnic:



Graf 8-1.3.-Příklad 11

2. Soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

„Soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých x, y, z můžeme také řešit metodou sčítací, dosazovací nebo srovnávací (viz výše). Výhodnější než tyto metody je Gaussova eliminační metoda (GEM), která za užití ekvivalentních úprav převádí soustavu rovnic na tzv. trojúhelníkový tvar. V trojúhelníkovém tvaru jsou v první rovnici ponechány všechny tři

neznámé, v druhé rovnici je eliminována první neznámá (zpravidla x), ve třetí rovnici jsou eliminovány první a druhá neznámá (zpravidla x a y).“ (Kubešová, N., Cibulková, E., 2011, s. 47)

Zápis řešení soustavy rovnic Gaussovou eliminační metodou lze zjednodušit pomocí matic, tzn. je možné zapisovat jen koeficienty a pravé strany rovnic (tedy vynechat v zápisech neznámé).

„Tabulka číselných údajů uspořádaných do p řádků a q sloupců se nazývá matice typu (p, q) . Koeficienty soustavy rovnic tvoří tzv. matici soustavy, rozšíříme-li ji o sloupec pravých stran (oddělený svislou čarou), dostáváme tzv. rozšířenou matici soustavy a právě s ní se v GEM pracuje.“ (Polák, J., 2012, s. 275)

Příklad řešení soustavy tří lineárních rovnic s neznámými $x, y, z \in R$

$$x + 2y + z = 9 \quad (1)$$

$$7x - y + z = 9 \quad (2)$$

$$\underline{2x + 3y + z = 15} \quad (3)$$

Řešení provedeme užitím Gaussovy eliminační metody. Danou soustavu rovnic převedeme na trojúhelníkový tvar.

Od rovnice (2) odečteme sedminásobek rovnice (1) a od rovnice (3) odečteme dvojnásobek rovnice (1), tím eliminujeme neznámou x v těchto rovnicích a dostáváme tuto ekvivalentní soustavu rovnic.

$$x + 2y + z = 9 \quad (1_1) = (1)$$

$$15y + 6z = 54 \quad (2_1)$$

$$y + z = 3 \quad (3_1)$$

Nyní rovnici (2_1) vydělíme patnácti, abychom u neznámé y získali koeficient 1. Dostáváme tak rovnici (2_2) . Dále od rovnice (2_1) odečteme patnácti násobek rovnice (3_1) , čímž v ní eliminujeme neznámou y a dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{array}{ll}
 x + 2y + z = 9 & (1_2) = (1_1) \\
 y + \frac{6}{15}z = \frac{54}{15} & (2_2) \\
 -9z = 9 & (3_2)
 \end{array}$$

Tato soustava rovnic má trojúhelníkový tvar. Z rovnice (3_2) po dělení číslem mínus devět dostáváme: $z = -1$. Dosazením do rovnice (2_2) vypočteme

$$y = \frac{54}{15} + \frac{6}{15} = 4$$

a po dosazení do rovnice (1_2) vychází $x = 2$.

Výsledek: daná soustava má právě jedno řešení $[x, y, z] = [2, 4, -1]$.

Zkouška:

$$\begin{array}{ll}
 L_1 = 2 + 2 \cdot 4 - 1 = 2 + 8 - 1 = 9 & L_1 = P_1 \\
 P_1 = 9 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 L_2 = 7 \cdot 2 - 4 - 1 = 14 - 4 - 1 = 9 & L_2 = P_2 \\
 P_2 = 9 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 L_3 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 - 1 = 4 + 12 - 1 = 15 & L_3 = P_3 \\
 P_3 = 15 &
 \end{array}$$

Řešení s užitím matice:

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 15 \\ 7 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 15 \\ 7 & -1 & 1 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 1 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 15 & 6 & 54 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{array} \right) \\
 \begin{array}{lll}
 9z = -9 & y - 1 = 3 & x + 8 - 1 = 9 \\
 z = -1 & y = 4 & x = 2
 \end{array}
 \end{array}$$

Výsledek: $[x, y, z] = [2, 4, -1]$

1.4. Rovnice vyšších stupňů

„Algebraická rovnice n -tého stupně má tvar $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, kde x je neznámá, $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou komplexní čísla, přičemž $a_0 \neq 0$. Celé kladné číslo n určuje stupeň rovnice.

Najít kořen algebraické rovnice $P(x) = 0$ není jednoduché. Známe-li však jeden kořen rovnice $P(x) = 0$, můžeme ji zjednodušit tak, že snížíme její stupeň.“ (Riečan, 1987, s. 160)

Př.12: Řešte rovnici $x^3 = 1$

Řešení: Jeden kořen $x_1 = 1$ rovnice $x^3 - 1 = 0$ snadno uhádneme. Zkusme dělit polynom $x^3 - 1$ tzv. kořenovým činitelem $x - 1$:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1 \\ -(x^3 - x^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 1 \\ -(x^2 - x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - 1 \\ -(x - 1) \\ 0 \end{array}$$

Dostali jsme rozklad $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Zbývá nám vyřešit rovnici $x^2 + x + 1 = 0$

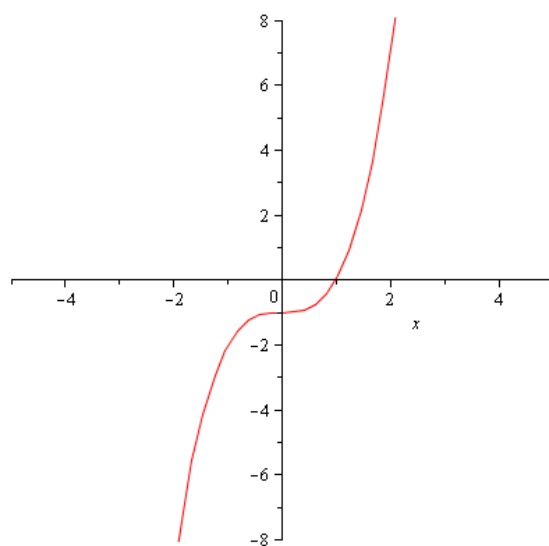
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Dostali jsme tři kořeny rovnice $x^3 - 1 = 0$. Kromě toho máme rozklad $x^2 + x + 1 = (x - x_1)(x - x_3)$, tedy

$$x^3 - 1 = (x - 1) \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

Takový rozklad existuje pro každý polynom. Vyplývá to z věty, kterou dokázal K. F. Gauss: Každá algebraická rovnice n -tého stupně má aspoň jeden komplexní kořen.“ (Riečan, 1987, s. 160)

Grafické řešení



Graf 9-1.4.-Příklad 12

Př.13: Řešte v R rovnici $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

Řešení: Substitucí $k = x^2$ převedeme zadanou rovnici na tvar $k^2 - 2k - 3 = 0$

Pomocí diskriminantu vypočítáme kořeny rovnice

$$D = 4 + 12 = 16$$

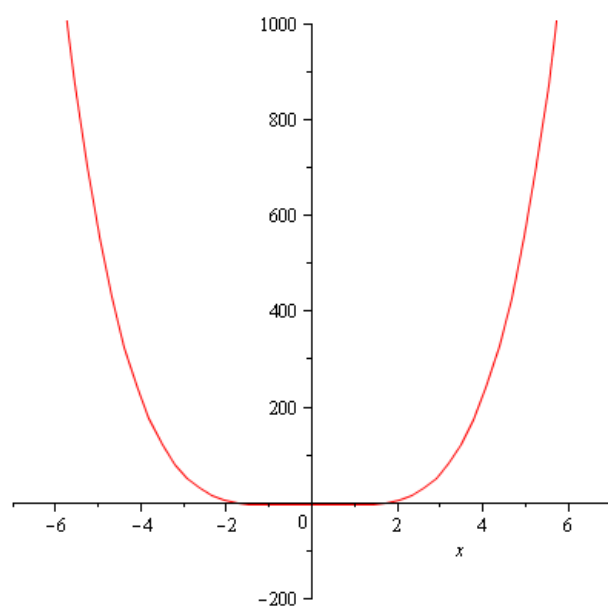
$$\sqrt{D} = 4$$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$$

Jejich dosazením do substituční rovnice získáme ryze kvadratickou rovnici $3 = x^2$ s kořeny $x = \pm\sqrt{3}$ a rovnici $-1 = x^2$, která nemá reálné kořeny.

Množina kořenů zadané rovnice je $K = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

Grafické řešení:



Graf 10-1.4.-Příklad 13

2. Nerovnice

„Vyšetřujeme, kdy pro dva výrazy $A(x), B(x)$, definované v množině M , platí vztah

$$A(x) < B(x) (\text{resp. } A(x) \leq B(x), A(x) > B(x), A(x) \geq B(x)).$$

Jestliže chceme určit všechny prvky množiny M , pro něž platí např. $A(x) < B(x)$, je třeba určit obor pravdivosti P výrokové formy

$$A(x) < B(x), x \in M.$$

Tuto výrokovou formu nazýváme nerovnicí s neznámou x . Množina M je jejím oborem, výraz $A(x)$ je její levá strana, $B(x)$ pravá strana.

Každý prvek oboru pravdivosti P výrokové formy se nazývá kořen (řešení) nerovnice.

Řešit nerovnici v množině M znamená určit množinu všech jejích kořenů patřících do množiny M .“ (Schmidtmayer J., Rozenský Z., Šikola B., 1978, s.177)

„Provedeme-li s libovolnou nerovnicí některou z těchto úprav:

- a) přičtení téhož čísla k oběma stranám nerovnice,
- b) přičtení libovolného násobku neznámé, popř. její mocniny (s přirozeným exponentem) k oběma stranám nerovnice,
- c) násobení obou stran nerovnice týmž kladným číslem
- d) násobení obou stran nerovnice týmž záporným číslem se současnou změnou smyslu nerovnice (znak $<$ je přitom nutno nahradit znakem $>$ a obráceně),

vznikne nerovnice ekvivalentní s původní.

Vzhledem k *a)* a *b)* můžeme k oběma stranám nerovnice přičítat libovolný mnohočlen neznámé, takže od každé nerovnice, jejíž levou i pravou stranou jsou libovolné mnohočleny neznámé x , lze ekvivalentními úpravami přejít k nerovnici tvaru

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n > 0,$$

Kde $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou daná čísla, x neznámá. Pak definujeme:

Nerovnici $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n > 0$, v níž $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou daná reálná čísla, $a_0 \neq 0, n \geq 1$ přirozené číslo a x je neznámá, nazýváme nerovnice n -tého stupně. Nerovnice prvního stupně se nazývá lineární, nerovnice druhého stupně se nazývá kvadratická.“ (Hruša, Dlouhý, Rohlíček, 1977, s.182)

„Obdobně jako u rovnic lze rozdělit nerovnice na dva druhy:

I. Algebraické nerovnice n -tého stupně s neznámou $x \in R$ je každá nerovnice tvaru

$$P_n(x) > 0, \text{ resp. } P_n < 0$$

$$P_n(x) \geq 0, \text{ resp. } P_n \leq 0,$$

kde $P_n(x)$ je mnohočlen n -tého stupně. Významnými speciálními případy jsou zejména lineární nerovnice a kvadratické nerovnice.

II. Nealgebraická nerovnice je každá nerovnice, která není algebraická. Patří mezi ně nerovnice iracionální, exponenciální, logaritmické a goniometrické.“ (Polák J., 2008, s.243)

2.1. Lineární nerovnice

„ Výrokovou formu $V(x): ax + b < 0; a, b \in R, a \neq 0$, nazýváme lineární nerovnicí s jednou neznámou. Řešíme ji v množině R , popřípadě v některé její podmnožině.

Kořeny nerovnice $ax + b < 0$ jsou dány nerovností

$$x < -\frac{b}{a} \text{ pro } a > 0 \quad \text{a} \quad x > -\frac{b}{a} \text{ pro } a < 0.$$

V prvním případě je $P = \left\{ x; x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a} \right), a > 0 \right\}$,

ve druhém $P = \left\{ x; x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty \right), a < 0 \right\}$.“ (Schmidtmayer J., Rozenský Z., Šikola B., 1978, s.178)

Př.: Najděte všechna reálná čísla x vyhovující nerovnici $3x-7 \leq 5x+6$ (Hruša, Dlouhý, Rohlíček, 1977, s.183)

Řešení: Zde jde vlastně o dvě úlohy řešení: nerovnice $3x-7 < 5x+6$ a rovnice $3x-7 = 5x+6$. Hledáme taková čísla, která splňují oba vztahy. Je ale zbytečné řešit každou úlohu zvlášť, neboť všechny úpravy jsou ekvivalentní. Po úpravě vztahu dostáváme

$$-2x \leq 13 \Rightarrow x \geq -\frac{13}{2}$$

Řešením dané nerovnice jsou tudíž právě všechna čísla z intervalu $\left[-\frac{13}{2}, \infty\right)$

2.1.1. Lineární nerovnice s parametrem

Př.1: Řešte nerovnici $3(2p-x) < px+1$ s neznámou $x \in R$ a s parametrem $p \in R$

Řešení: Danou rovnici roznásobíme, podle ekvivalentních úprav rovnici upravíme a dostaneme

$$\begin{aligned} 3(2p-x) &< px+1 \\ 6p-3x &< px+1 \\ 6p-1 &< px+3x \\ (p+3)x &> 6p-1 \end{aligned}$$

Diskuze řešení:

$$\begin{array}{lll} p > -3 & p < -3 & p = -3 \\ x > \frac{6p-1}{p+3} & x < \frac{6p-1}{p+3} & 0x > -19 \Rightarrow x \in R \end{array}$$

Výsledek:

p	Množina kořenů
$p > -3$	$K = \left(\frac{6p-1}{p+3}, \infty\right)$
$p < -3$	$K = \left(-\infty, \frac{6p-1}{p+3}\right)$
$p = -3$	$K = R$

Tab. 4-2.1.1- Příklad 1

2.1.2. Lineární nerovnice s absolutními hodnotami

„Lineární nerovnicí s neznámou v absolutní hodnotě nazýváme každou nerovnici (s neznámou $x \in R$) tvaru

$$|a_1x + b_1| \pm |a_2x + b_2| \pm \dots \pm |a_nx + b_n| > a_0x + b_0 \text{ (popř. } \geq, <, \leq \text{)},$$

přičemž a_i, b_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) jsou daná reálná čísla, $a_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Řeší se úpravou na lineární nerovnice bez absolutních hodnot užitím metody intervalů (metody nulových bodů) obdobně jako v případě lineární rovnice s absolutními hodnotami.“ (Polák, J., 2008, s.248)

Př.2: Řešte v R nerovnici $|x - 2| + |1 - x| \leq x + 5$

Řešení: Nejprve si najdeme nulové body absolutních hodnot. To jsou čísla $x = 2, x = 1$. Dále si najdeme intervaly, které nám určily nulové body a jsou to $(-\infty, 1), \langle 1, 2 \rangle, (2, \infty)$

	$(-\infty, 1)$	$\langle 1, 2 \rangle$	$(2, \infty)$
$x - 2$	–	–	+
$1 - x$	+	–	–

Tab. 5-2.1.2- Příklad 2

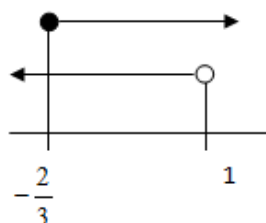
$x \in (-\infty, 1)$:

$$-x + 2 + 1 - x \leq x + 5$$

$$-2x + 3 \leq x + 5$$

$$-3x \leq 2$$

$$x \geq -\frac{2}{3}$$



Graf 11-2.1.2.-Příklad 2

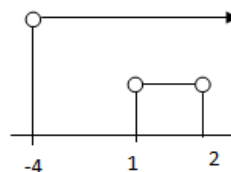
$$K_1 = \left[-\frac{2}{3}; 1 \right)$$

$$x \in \langle 1, 2 \rangle:$$

$$-x + 2 + x - 1 \leq x + 5$$

$$1 \leq x + 5$$

$$x \geq -4$$



Graf 12-2.1.2.-Příklad 2

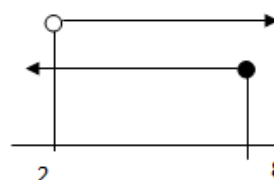
$$K_2 = \langle 1; 2 \rangle$$

$$x \in (2, \infty):$$

$$x - 2 + x - 1 \leq x + 5$$

$$2x - 3 \leq x + 5$$

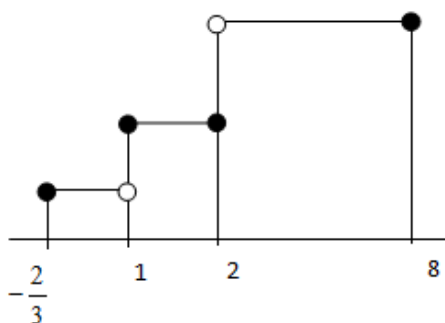
$$x \leq 8$$



Graf 13-2.1.2.- Příklad 2

$$K_3 = (2; 8 \rangle$$

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \left\langle -\frac{2}{3}, 8 \right\rangle$$



2.1.3. Grafické řešení lineárních nerovnic

„Nerovnici $A(x) < B(x)$, $A(x) \leq B(x)$, $A(x) > B(x)$, $A(x) \geq B(x)$ můžeme řešit také graficky.

Při grafickém řešení nerovnice znázorníme binární relace určené výrokovými formami

$$y = A(x) \text{ a } y = B(x).$$

Obor pravdivosti dané nerovnice zjistíme porovnáním poloh bodů na grafech relací, které odpovídají téže hodnotě proměnné x .

Př.3: Řešte graficky nerovnici $2x - 3 < \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Řešení: V kartézské souřadnicové soustavě znázorníme funkce dané výrokovými formami

$$y = 2x - 3 \quad \text{a} \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

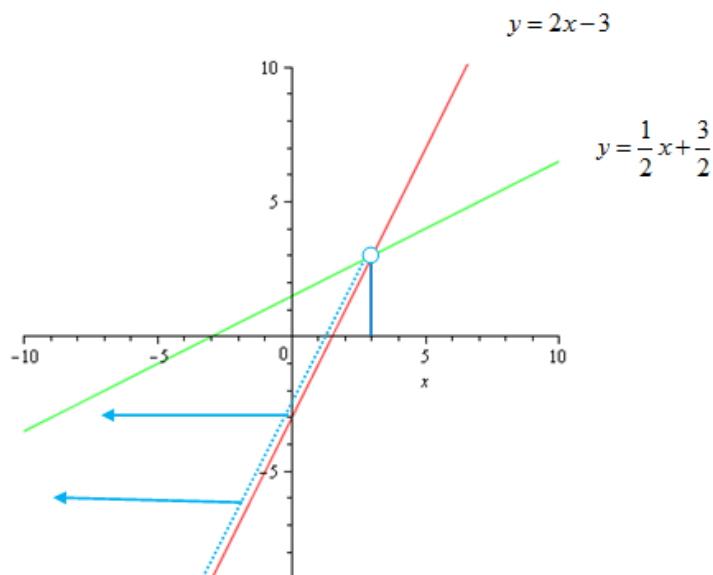
Dále už snadno zjistíme všechna x , pro něž body grafu funkce dané výrokovou formou $y = 2x - 3$ leží pod grafem funkce dané výrokovou formou $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Dostáváme $x < 3$ a tedy $K = (-\infty, 3)$

Pozn.: Číslo 3 vidíme z grafu, popřípadě si jej můžeme pro přesnost a kontrolu vypočítat tak, že dáme do rovnosti obě strany nerovnice. Tedy

$$2x - 3 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow x = 3$$

Grafické řešení:



Graf 14-2.1.3.-Příklad 3

2.2. Kvadratické nerovnice

„Kvadratickou nerovnicí s neznámou $x \in R$ nazýváme každou nerovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c > 0, \text{ resp. } ax^2 + bx + c < 0,$$

kde a, b, c jsou libovolná reálná čísla, $a \neq 0$. O kvadratické nerovnici se mluví také v případě, že má tvar

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \text{ resp. } ax^2 + bx + c \leq 0. \text{“ (Polák, J., 2008, s.251)}$$

„Způsoby řešení nerovnic:

1) Pomocí rozkladu na součin a dále jako soustava nerovnic; pomocí nulových bodů

Př.4: Řešte v R nerovnici $5x^2 + 6x - 2 < 4x^2 + 8x + 1$

Řešení: Nejprve nerovnici anulujeme, dále levou stranu rozložíme na součin a stanovíme nulové body.

$$\begin{aligned} 5x^2 + 6x - 2 &< 4x^2 + 8x + 1 \\ x^2 - 2x - 3 &< 0 \\ (x-3) \cdot (x+1) &< 0 \end{aligned}$$

Budeme se tedy pohybovat a počítat v intervalech $(-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, \infty)$ ⁶

Dále z každého intervalu dosadíme libovolné číslo a přiřadíme znaménko výrazu $(x-3)$, výrazu $(x+1)$ a určíme výsledné znaménko součinu

$(-\infty, -1)$	Např. $x = -10$	$x-3 \ominus$	$\Rightarrow (x-3)(x+1) \oplus$
		$x+1 \ominus$	
$(-1, 3)$	Např. $x = 0$	$x-3 \ominus$	$\Rightarrow (x-3)(x+1) \ominus$
		$x+1 \oplus$	

⁶ Body 3 a -1 neuvažujeme, nebo nerovnost je ostrá

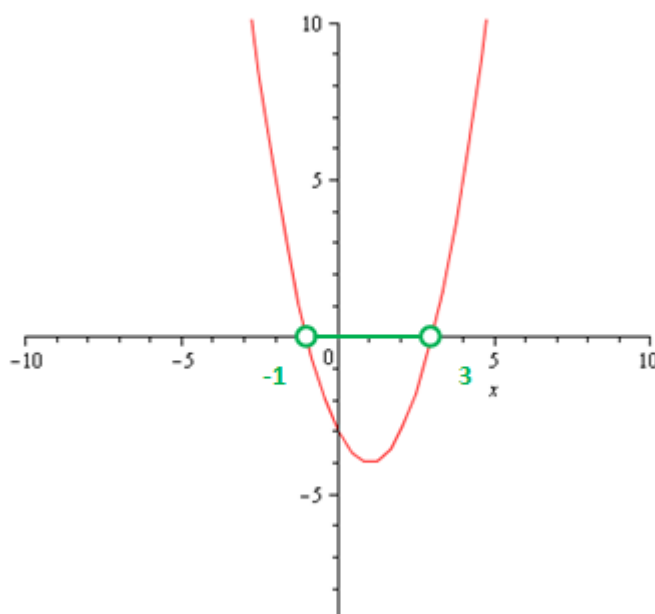
$(3, \infty)$	Např. $x = 5$	$x - 3 \oplus$	$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) \oplus$
		$x + 1 \oplus$	

Tab. 6-2.2- Příklad 4

Protože jsme od začátku použili jen ekvivalentní úpravy, je interval, v němž je $(x - 3)(x + 1) < 0$ totožný s intervalem, v němž je $5x^2 + 6x - 2 < 4x^2 + 8x + 1$.

Hledaná množina je tedy $(-1, 3)$.

Grafické řešení:



Graf 15-2.2.-Příklad 4

2) Pomocí vlastností kvadratické funkce

Kvadratická funkce má rovnici $y = ax^2 + bx + c$

Je-li $a > 0$, je graf dutý, funkce má své globální minimum a je shora neomezená.

Je-li $a < 0$, je graf vypuklý, funkce má globální maximum v R

Mohou nastat tyto případy:

$a > 0$ a $D > 0$: pro $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ je $ax^2 + bx + c > 0$

Pro $x \in (x_1, x_2)$ je $ax^2 + bx + c < 0$

Pro $x = x_1$ nebo $x = x_2$ je $ax^2 + bx + c = 0$

$a > 0$ a $D < 0$: pro každé $x \in R$ je $ax^2 + bx + c > 0$

$a > 0$ a $D = 0$: pro každé $x \in R - \{x_0\}$ je $ax^2 + bx + c > 0$ nebo pro každé $x \in R$ je

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$a < 0$ a $D > 0$: pro $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ je $ax^2 + bx + c < 0$

Pro $x \in (x_1, x_2)$ je $ax^2 + bx + c > 0$

Pro $x = x_1$ a $x = x_2$ je $ax^2 + bx + c = 0$

$a < 0$ a $D = 0$: pro každé $x \in R$ je $ax^2 + bx + c \leq 0$

$a < 0$ a $D < 0$: pro každé $x \in R$ je $ax^2 + bx + c < 0$ “ (Muláčová, Pešková, 1996, s.68)

Př.5: Řešte v R nerovnici $4x^2 + 10x + 4 < 0$

Řešení: Nerovnici můžeme vydělit dvěma a vypočítáme diskriminant

$$2x^2 + 5x + 2 < 0$$

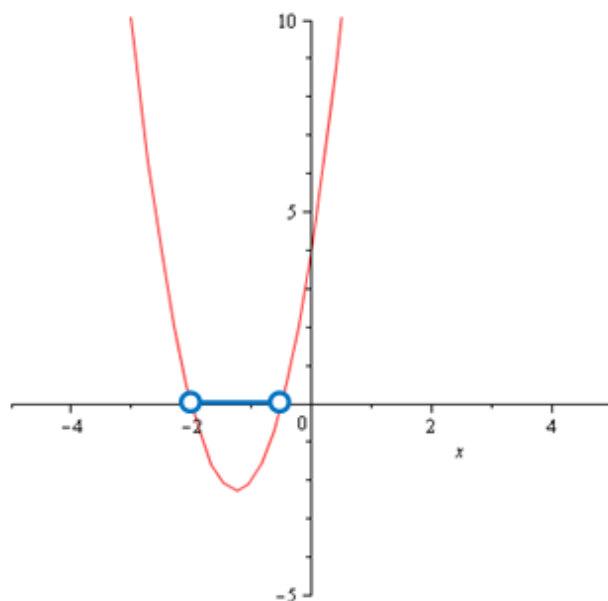
$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$$

$$\sqrt{D} = 3$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = -0,5$$

Hledaný obor pravdivosti je $(-2; -0,5)$, protože zde má funkce $y = 2x^2 + 5x + 2$ záporné funkční hodnoty.

Grafické řešení:



Graf 16-2.2.-Příklad 5

2.2.1. Kvadratické nerovnice s parametrem

Př.6: Řešte v oboru R nerovnici s neznámou x a s reálným parametrem m (Polák, J., 2008, s.259)

$$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m-3 > 0$$

Řešení:

Je-li $m-1=0 \Rightarrow m=1$, daná rovnice je lineární a má tvar $-4x-2 > 0$ a jejími řešeními jsou všechna $x < -\frac{1}{2}$

Je-li $m-1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$, daná nerovnice je kvadratická s diskriminantem příslušné kvadratické rovnice:

$$D = 4(m+1)^2 - 4(m-1)(m-3) = 24m - 8 = 8(3m-1)$$

Rozlišujeme tři případy:

$$D > 0$$

$$3m-1 > 0 \wedge m \neq 1$$

$$m \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; \infty)$$

$$D = 0$$

$$3m-1 = 0$$

$$m = \frac{1}{3}$$

$$D < 0$$

$$3m-1 < 0$$

$$m \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$$

Výsledek:

Hodnoty parametru	Množin všech kořenů nerovnice
$m \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$	$K = \emptyset$
$m \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$	$K = \left(\frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}, \frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}\right)$
$m = 1$	$K = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$
$m \in (1; \infty)$	$K = \left(-\infty, \frac{m+1-\sqrt{6m-2}}{m-1}\right) \cup \left(\frac{m+1+\sqrt{6m-2}}{m-1}; \infty\right)$

Tab. 7-2.2.1- Příklad 6

2.2.2. Kvadratické nerovnice s absolutními hodnotami

Př.7: Řešte v R nerovnici $|x^2 + x| - 5 \leq 0$ (Cibulková, 2006, s.54)

Řešení: Opět nejdříve určíme nulové body v absolutní hodnotě, dále rozdělíme množinu na intervaly určené nulovými body.

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1$$

	$ x^2 + x $	Nerovnice a její řešení	Množina kořenů
$I_1 = (-\infty; -1)$	$x^2 + x$	$x^2 + x - 5 \leq 0$ $x \in \left(-\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$	$K_1 = \left(-\frac{1+\sqrt{21}}{2}; -1\right)$

$I_2 = \langle -1; 0 \rangle$	$-x^2 - x$	$-x^2 - x - 5 \leq 0$ $x \in R$	$K_2 = \langle -1; 0 \rangle$
$I_3 = \langle 0; \infty \rangle$	$x^2 + x$	$x^2 + x - 5 \leq 0$ $x \in \left\langle \frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \right\rangle$	$K_3 = \left\langle 0; \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \right\rangle$

Tab. 8-2.2.2- Příklad 7

Výsledek: Množina kořenů zadané nerovnice je $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \left\langle -\frac{1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \right\rangle$

2.2.3. Grafické řešení kvadratických nerovnic

Stejně jako u kvadratických rovnic je grafickým řešením parabola. Nejdříve vypočítáme diskriminant, který nám určí kořeny kvadratické rovnice, a zjistíme, ve kterých bodech protíná osu x . Pro přesnost grafu si můžeme také vypočítat vrchol paraboly, ten vypočítáme doplněním na úplný čtverec. Celkem může nastat šest případů grafického řešení kvadratické nerovnice. Záleží, zda funkce $ax^2 + bx + c$ je větší nebo menší jako nula a dále záleží na diskriminantu, který může být opět větší, menší nebo roven nule.

Pro upřesnění si uvedeme příklady, kdy funkce $ax^2 + bx + c$ je větší než nula:

Př.8: Řešte v R nerovnici $3x^2 - 4x + 1 < 0$

Řešení:

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4$$

$$\sqrt{D} = 2$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{6} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3}$$

$$V = [x, y]$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

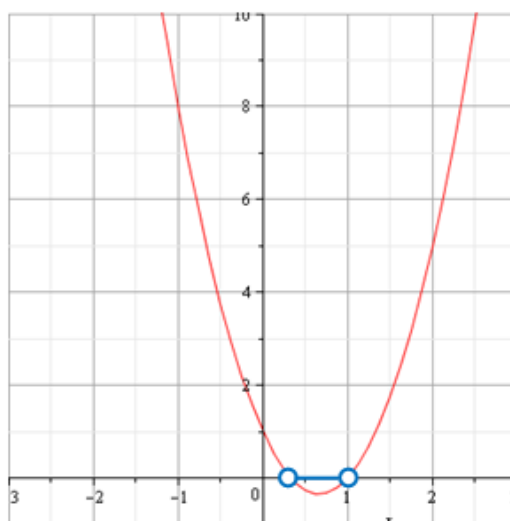
Vrchol paraboly: $\left(x - \frac{4}{6}\right)^2 - \frac{16}{36} + \frac{1}{3} \Rightarrow \left(x - \frac{4}{6}\right)^2 - \frac{1}{9}$

$$V\left[\frac{4}{6}; -\frac{1}{9}\right]$$

Na základě předchozích výpočtů víme, že funkce $3x^2 - 4x + 1$ má záporné hodnoty v intervalu

$$\left(\frac{1}{3}; 1\right)$$

$$\boxed{D > 0}$$



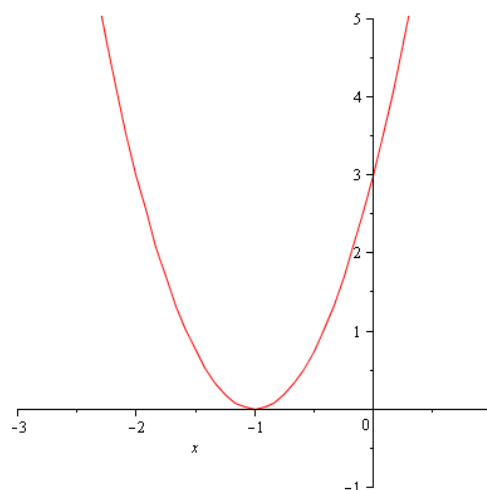
Graf 17-2.2.3.-Příklad 8

Př.9: Řešte v R nerovnici $3x^2 + 6x + 3 \geq 0$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36 - 36 = 0$$

$$\sqrt{D} = 0$$

$$\boxed{D = 0}$$



Graf 18-2.2.3.-Příklad 9

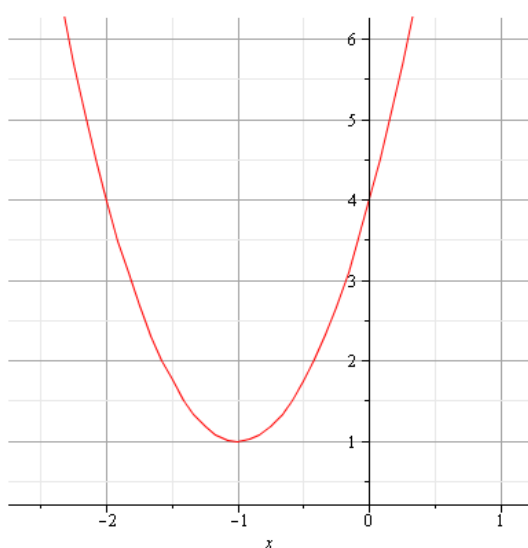
Jde vidět, že graf protíná osu x v jediném bodě a to $x_1 = -1$ a zbytek grafu je nad osou x v kladných hodnotách. To znamená, že řešením nerovnice $3x^2 + 6x + 3 \geq 0$ je celá množina reálných čísel, protože ať dosadíme za x jakékoliv reálné číslo, vždy bude hodnota větší nebo rovna nule.

Př.10: Řešte v R nerovnici $3x^2 + 6x + 4 > 0$

Řešení:

$$D = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 36 - 48 = -12$$

$$D < 0$$



Graf 19-2.2.3.-Příklad 10

Graf je celý nad osou x a když dosadíme za x jakékoliv reálné číslo, výsledná hodnota bude vždy kladná. Řešením nerovnice je tedy množina reálných čísel.

Další tři stejně řešené příklady by byly pro $ax^2 + bx + c < 0$. Výsledné paraboly by byly stejné, jen vypuklé. V našich uvedených příkladech byly všechny paraboly duté.

2.3. Nerovnice s více neznámými

„Pojem nerovnice s jednou neznámou lze zobecnit na nerovnice s n neznámými $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \in N$) v oboru R

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) < P(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) > L(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(popř. se znaky $\leq, \geq$). Taková nerovnice vyjadřuje úlohu určit všechny uspořádané n -tice reálných čísel $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, které splňují nerovnici, tj. po dosazení do ní dostáváme pravdivý výrok (nerovnost). Každou takovou uspořádanou n -tici $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ nazýváme řešení nerovnice.“ (Polák, J., 2008, s.276)

„Výrokovou formu s dvěma proměnnými $V(x, y): ax + by + c > 0$ (popř. $ax + by + c < 0$), kde $a, b, c \in R, a \neq 0, b \neq 0$, nazýváme lineární nerovnicí s dvěma neznámými x, y .

Řešením nerovnice s dvěma neznámými jsou všechny uspořádané dvojice $[x, y]$, které splňují danou nerovnici a tvoří tedy obor pravdivosti výrokové formy $V(x, y)$.“ (Schmidtmayer J., Rozenský Z., Šíkola B., 1978, s.196)

„Grafické řešení nerovnice lze znázornit v kartézské soustavě souřadnic jako množinu bodů, jejichž souřadnice vyhovují zadané nerovnici. Grafem lineární nerovnice se dvěma neznámými je polorovina, grafem kvadratické nerovnice se dvěma neznámými je část roviny ohraničená některou z kuželoseček.“ (Cibulková, 2006, s.56)

Př.10: Řešte v $R \times R$ nerovnici $2x + 3y \leq 10$ (Boček, L., 1995, s.99)

Řešení: Nerovnice má nekonečně mnoho řešení. Jsou jimi uspořádané dvojice čísel, které zapíšeme tak, že jednu z proměnných můžeme zvolit zcela libovolně, druhou proměnnou do uspořádané dvojice musíme vyjádřit ze zadané nerovnice. Zvolíme si například libovolné

$$x \in R, \text{ pak } y \leq \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x.$$

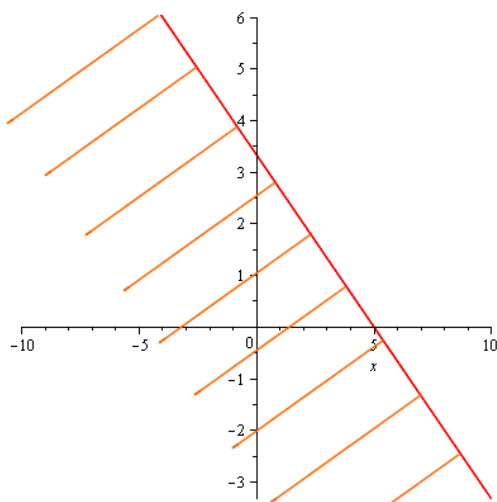
$$\text{Množina kořenů je } K = \left\{ [x; y], x \in R \wedge y \leq \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x \right\}.$$

Všechna řešení této nerovnice jsou znázorněna v kartézské soustavě souřadnic.

Hraniční přímkou poloroviny je přímka o rovnici $y = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x$. K sestrojení této přímky si dopočítáme souřadnice, $X\left[0; \frac{10}{3}\right], Y[5; 0]$.

Výběr poloroviny provedeme tak, že do nerovnice dosadíme souřadnice libovolného bodu roviny, který nenáleží hraniční přímce. Výhodné je dosazovat souřadnice počátku soustavy souřadnic $[0; 0]$. Pokud vznikne pravdivý výrok, je polorovina, obsahující zvolený bod, grafickým řešením nerovnice.

$$[0; 0]: 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 10 \Rightarrow 0 \leq 10 \text{ platí, proto } 0 \text{ bude patřit do poloroviny}$$



Graf 20-2.3.-Příklad 11

Je-li v zadání nerovnice ostrá nerovnost, pak hraniční přímka nebo křivka znázorňované části roviny do řešení nepatří.

Př.12: Řešte v $R \times R$ nerovnici $x^2 - 3x < y + 4$ (Cibulková, 2006, s.56)

Řešení: Nerovnice má nekonečně mnoho řešení. Jsou jimi uspořádané dvojice čísel, které zapíšeme do množiny kořenů $K = \{[x; y], x \in R \wedge y > x^2 - 3x - 4\}$.

Hraniční křivkou části roviny je parabola o rovnici $y = x^2 - 3x - 4$.

Pro grafické řešení si dopočítáme průsečíky paraboly s osou x a vrchol paraboly.

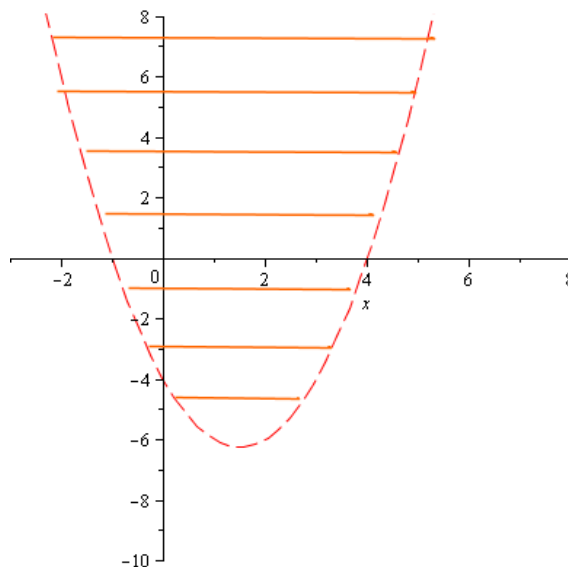
$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$$

$$\sqrt{D} = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -1$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

$$V\left[\frac{3}{2}; -\frac{25}{4}\right]$$



Graf 21-2.3.-Příklad 12

2.4. Soustava nerovnic

„Obdobně jako u rovnic se také u nerovnic s více neznámými setkáváme s úlohou řešit soustavu nerovnic, které mají platit zároveň, tj. lze mezi ně psát znak $\wedge$.

Řešením soustavy nerovnice o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ se rozumí každá uspořádaná n -tice $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ čísel z daného číselného oboru $M \subset R$, pro kterou platí zároveň všechny nerovnice soustavy, tj. po dosazení do každé z nich dostáváme pravdivý výrok (nerovnost). Množina všech řešení soustavy nerovnic je průnikem množin všech řešení jednotlivých nerovnic soustavy.“ (Polák, J., 2008, s.278)

„ Obecně můžeme říci, že jsou-li $M_1, M_2, \dots, M_n$ po řadě množiny všech řešení jednotlivých nerovnic dané soustavy (o n neznámých), pak řešením soustavy jsou právě všechna reálná

čísla patřící průniku $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$ (neboť jde o úlohu najít všechna čísla splňující současně první, druhou, ..., n -tou nerovnici, čili patřící současně do množin $M_1, M_2, \dots, M_n$). Tento průnik může ovšem také být prázdný, jako například v následujícím příkladu č. 12:“(Hruša, Dlouhý, Rohlíček, 1977, s.186)

$$\begin{aligned}x - 2 &< 3x - 4 \\ \underline{2x + 3 &> 5x + 1}\end{aligned}$$

Úpravami obou vztahů dostaneme ekvivalentní soustavu

$$\begin{aligned}x &> 1 \\ x &< \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Máme tedy $M_1 = (1; \infty)$ a $M_2 = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$. Průnikem těchto dvou množin je prázdná množina

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset$$

Př.13: Najděte všechna reálná čísla vyhovující soustavě nerovnic

$$\begin{aligned}7 - 3x &\leq x - 1 \\ \underline{x - 3 &> 2x - 6}\end{aligned}$$

Řešení: Úpravami dostaneme ekvivalentní soustavu

$$\begin{aligned}x &\geq 2 \\ x &< 3\end{aligned}$$

Řešením těchto nerovnic jsou po řadě prvky intervalů $\langle 2; \infty \rangle, (-\infty; 3)$. Jejich průnikem je interval $\langle 2; 3 \rangle$, který je množinou všech řešení soustavy.

Př.: Řešte v $R \times R$ soustavu nerovnic

$$\begin{aligned}y + 1 &\leq -(x - 1)^2 \\ \underline{y &< -2x + 2}\end{aligned}$$

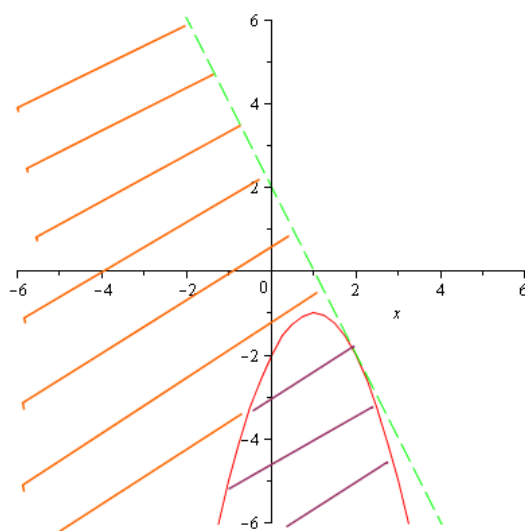
Po úpravě první nerovnice dostáváme ekvivalentní soustavu nerovnic. V případě první nerovnice se jedná o kvadratickou nerovnici, grafem tedy bude parabola, určíme si průsečíky s osou a vrchol paraboly. V případě druhé nerovnice jde o lineární nerovnici a grafem bude přímka.

$$y \leq -(x-1)^2 - 1 \quad (1)$$

$$y < -2x + 2 \quad (2)$$

$$(1): V[1; -1]$$

$$(2): X[0; 2], Y[1; 0]$$



Graf 22-2.4.-Příklad 13

Pro zkoušku, zda jsme vyšrafovali správnou polorovinu, si můžeme opět dosadit souřadnici libovolného bodu, dosadíme $[0; 0]$:

$$(1): 0 \leq -(0-1)^2 - 1 \Rightarrow 0 \leq 0$$

$$(2): 0 < -2 \cdot 0 + 2 \Rightarrow 0 < 2$$

Praktická část

3. Výzkum

3.1. Dotazník

Moje bakalářská práce je zaměřena na oddíl matematiky týkající se řešení rovnic a nerovnic. Proto si má praktická část klade za cíl zjistit úspěšnost studentů v řešení rovnic, popř. nerovnic. Zda dokážou efektivně řešit zadané příklady, zda se liší metody řešení těchto příkladů a zda jsou dostatečně seznámeni se všemi souvislostmi daného tématu.

Respondenti mého znalostního testu byli studenti prvního ročníku Pedagogické fakulty v Olomouci, kteří si zvolili studijní obor matematika se zaměřením na vzdělání.

Znalostního testu se zúčastnilo celkem 30 respondentů. Kromě samotného řešení znalostního testu, respondenti uvedli pohlaví a jakou střední školu mají vystudovanou, pro zjištění, zda volba střední školy ovlivnila znalost řešení příkladů a také jsem chtěla zjistit, jestli respondenti, kteří studují obor matematika se zaměřením na vzdělání na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého, maturovali z předmětu matematika.

Hlavními cíly výzkumu byla tato šetření:

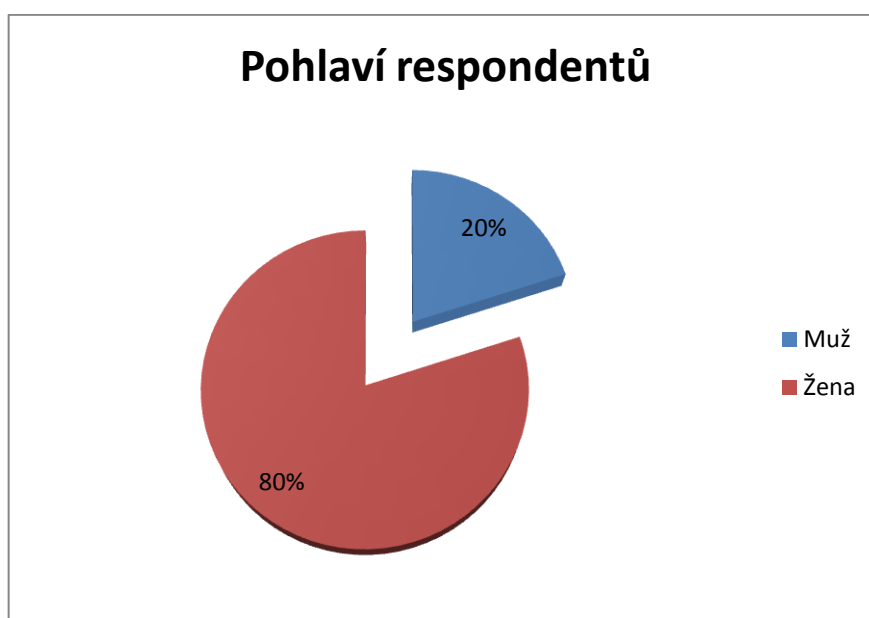
- Jakou střední školu studovali dotazovaní respondenti, kteří v současné době studují obor Matematika se zaměřením na vzdělávání na Pedagogické fakultě UP v Olomouci?
- Kolik studentů, kteří studují obor matematika se zaměřením na vzdělání, absolvovali maturitu z matematiky?
- Jsou znalosti metod řešení rovnic a nerovnic u studentů z gymnázií nejvyšší?
- Budou mít studenti problém s řešením nějakého konkrétního druhu rovnice, popř. nerovnice? (parametrické, s absolutními hodnotami, soustavy rovnice, ...)

Na základě takto položených otázek předpokládám:

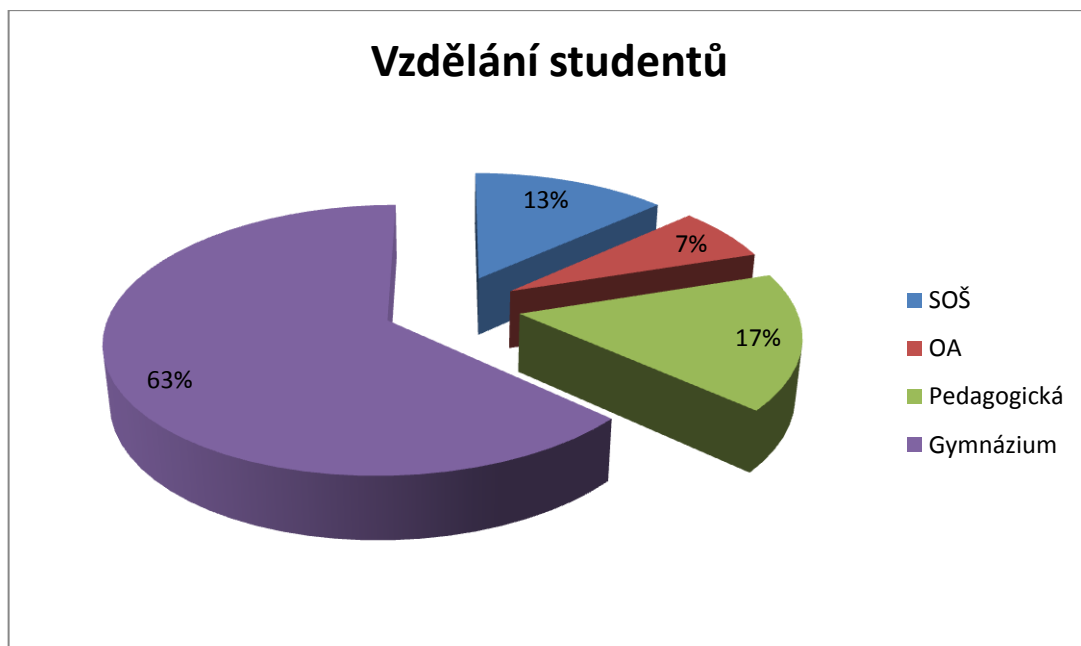
- Nejvíce dotazovaných studentů studujících obor matematika se zaměřením na vzdělání bude z gymnázií.
- Všichni dotazovaní studenti, kteří studují obor matematika se zaměřením na vzdělání, absolvovali maturitu z matematiky

- Studenti, kteří maturovali na gymnáziích, mají nejlepší znalosti v rámci řešení rovnic a nerovnic
- Studenti budou dostatečně seznámeni s metodami řešení rovnic a nerovnic, protože se jedná o část matematiky, které je ve školách probírána v dostatečném rozsahu. A z předpokladu, že respondenti, kteří se hlásí na obor matematika, mají znalosti v rámci řešení rovnic a nerovnic.
- Studenti budou mít nejvíce problém s řešením rovnice, popř. nerovnice s parametrem.

3.2. Vyhodnocení

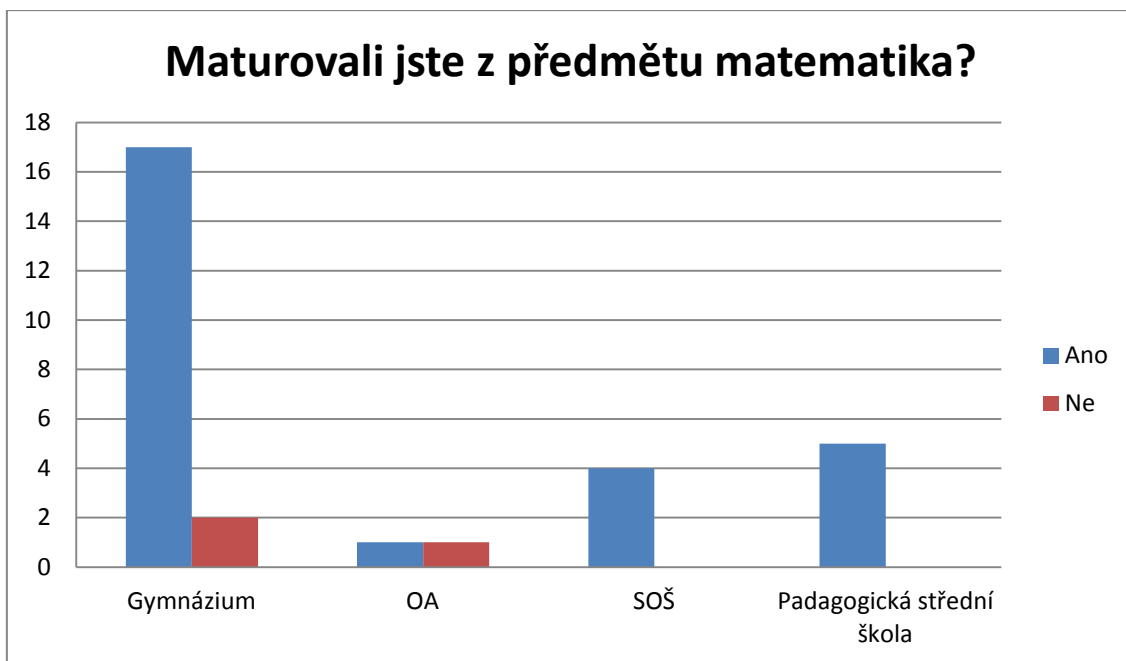


	Četnost	%
Muž	6	20
Žena	24	80
Celkem	30	100



Nejvyšší počet dotazovaných studentů má ukončené střední vzdělání na gymnáziu, konkrétně 19 studentů, tj. 63%. Následovala střední pedagogická škola a střední odborné školy. Tyto dvě školy byly zastoupeny v počtu studentů 5 a 4, tj. 17% a 13%. Z obchodní akademie byli zastoupeni 2 studenti, tj. 7%.

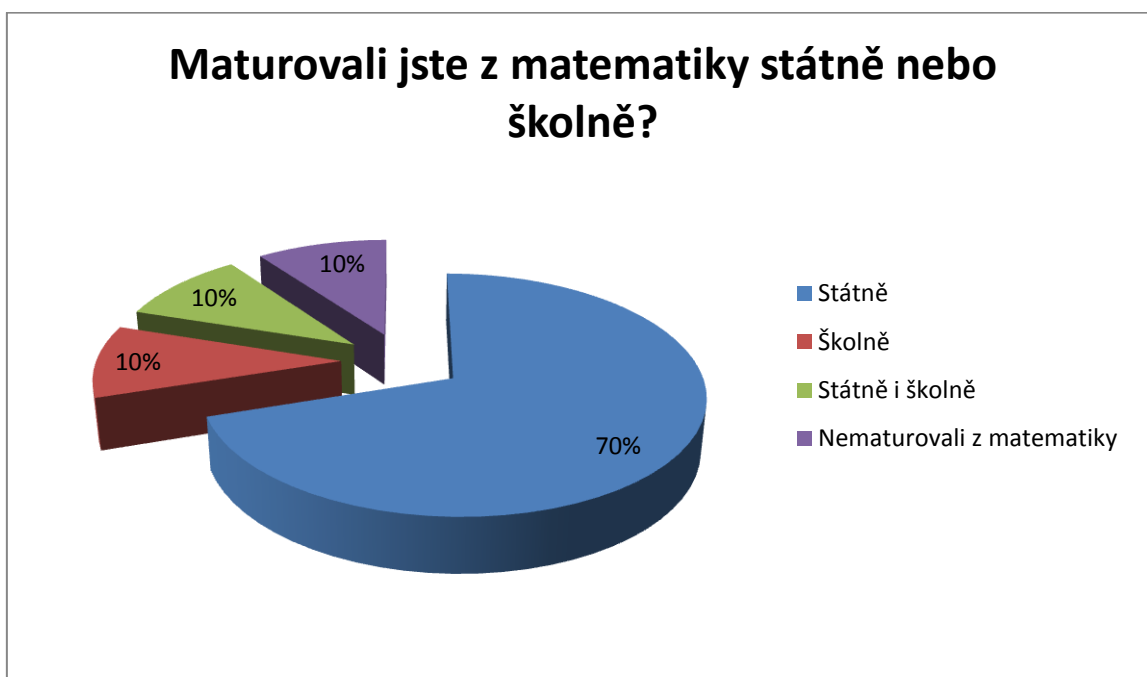
	Četnost	%
Gymnázium	19	63
SOŠ	4	13
OA	2	7
Pedagogická střední škola	5	17
Celkem	30	100



Graf nám ukazuje, že velká většina studentů maturovala z matematiky, konkrétně 90% studentů. Dále jsem rozlišila, na jaké střední škole studenti maturitu absolvovali.

Můj předpoklad byl takový, že všichni studenti, kteří studují obor matematika, absolvovali maturitu z matematiky, a to státně nebo školně. Ovšem na tomto grafu vidíme, že 3 ze 30 respondentů maturitu z matematiky neabsolvovali.

V dalším grafu rozliším, zda respondenti maturovali z matematiky školně nebo státně.



Už víme, že celkem 90% studentů, tedy 27 studentů, absolvovalo maturitu z předmětu matematika. Z toho 70%, tedy 21 respondentů, maturovalo státní formou maturity a 10%, tedy 3 respondenti, školní formou maturity. A mezi studenty byli i takoví, kteří zkusili i státní i školní formu maturity.

	Četnost	%
Státně	21	70
Školně	3	10
Státně i školně	3	10
Nematurovali z matematiky	3	10
Celkem	30	100

V rámci dotazníku, byly stanoveny tyto příklady:

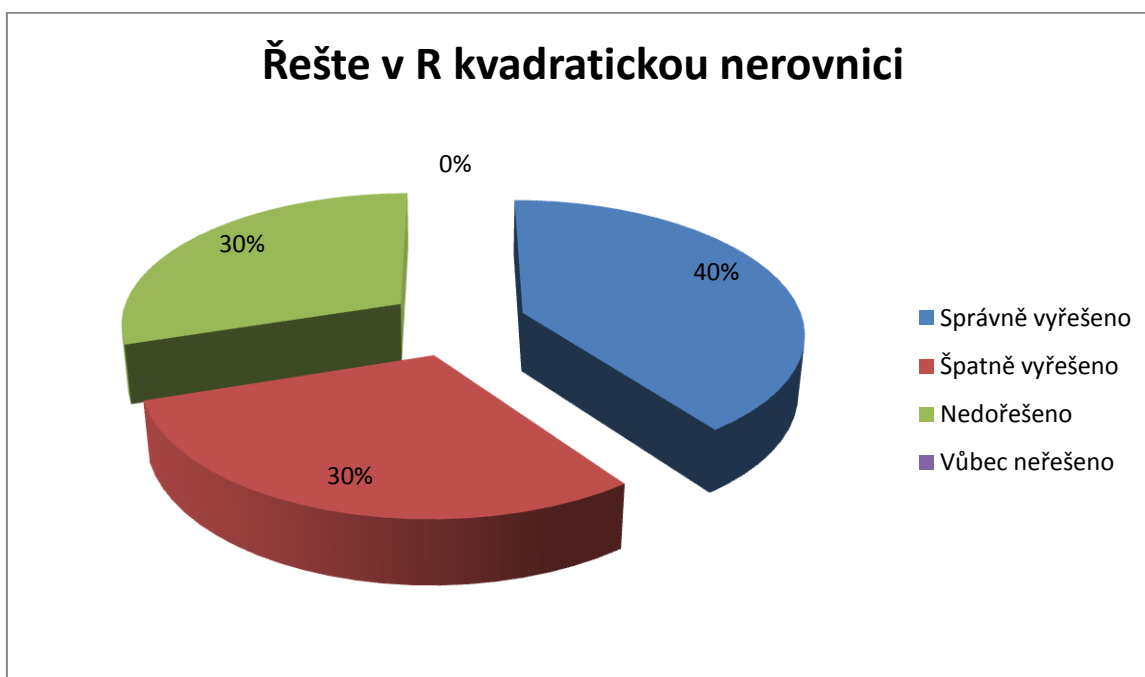
1) Řešte v R kvadratickou nerovnici+ grafické řešení: $x^2 - 2x - 3 < 0$

2) Řešte v R nerovnici $|x+1| - |x-2| + |x-5| \leq 6$

3) Řešte v R rovnici $px^2 + (2p+3)x + p + \frac{3}{4} = 0$, s parametrem $p \in R$

Ad 1) Řešte v R kvadratickou nerovnici+ grafické řešení: $x^2 - 2x - 3 < 0$

První příklad si klade za cíl zjistit, zda studenti umí řešit kvadratické nerovnice. V prvním příkladu studenti musí vědět, že při řešení kvadratických nerovnic postupuje tak, že nejprve najde kořeny x_1, x_2 . Pokud má daná rovnice reálné kořeny, lze kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ rozložit na součin. Kořeny můžeme zjistit také pomocí diskriminantu. Z toho plyne, že studenti by měli být schopni pomocí vypočítaného diskriminantu určit polohu parabola, která je grafických řešením kvadratických rovnic (nerovnic).



	Četnost	%
Správně vyřešeno	12	40
Špatně vyřešeno	9	30
Nedořešeno	9	30
Vůbec neřešeno	0	0
Celkem	30	100

V prvním příkladu, který se týkal kvadratické nerovnice, měli studenti kromě samotného řešení doplnit i grafické řešení této nerovnice.

Po vyhodnocení příkladu jsem došla k výsledku, že velkému množství studentů dělá problém právě grafické řešení, kterým je v tomto případě parabola, na které měli respondenti správně vyznačit interval. Dále se zde objevil i problém nesprávného vyjádření kořenů nerovnice.

Pro upřesnění dále popíši nejčastější chyby vyskytující se v tomto příkladu.

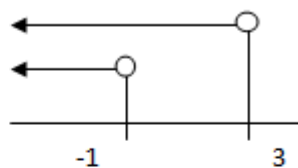
Problém řešení nastal při grafickém vyjádření. Pouze 40%, 12 studentů, si správně uvědomilo, co je výsledkem kvadratické nerovnice a jak správně kořeny a výsledný interval zaznačit.

První příklad jsem považovala za základ řešení rovnic a nerovnic, ale výsledky byly velmi různorodé. Nejčastější špatné grafické řešení vypadalo následovně:

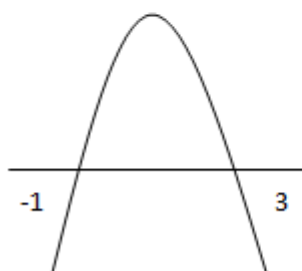
1)



2)



3)



V případě za 1) a za 2) studenti chybovali v tom, že si správně neuvědomili, že jde o kvadratickou nerovnici, nikoli o lineární nerovnici. V případě za 3) si studenti, kteří takto graficky řešili příklad, si neuvědomili, že tvar paraboly se řídí podle prvního členu nerovnice (rovnice), tedy a .

Správné řešení příkladu 1)

1. způsob řešení:

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$(x+1)(x-3) < 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$$

$$(x+1 > 0 \wedge x-3 < 0) \vee (x+1 < 0 \wedge x-3 > 0)$$

$$(x > -1 \wedge x < 3) \vee (x < -1 \wedge x > 3)$$

$$(1;3) \vee \emptyset \Rightarrow x \in (-1;3)$$

2. způsob řešení:

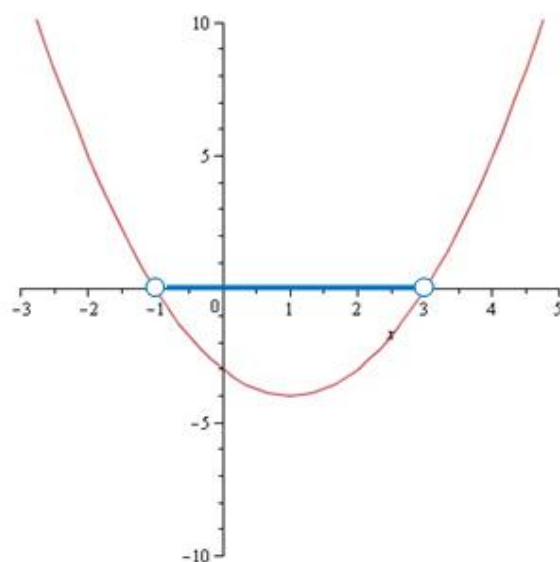
$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 4 + 12 = 16$$

$$\sqrt{D} = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$$

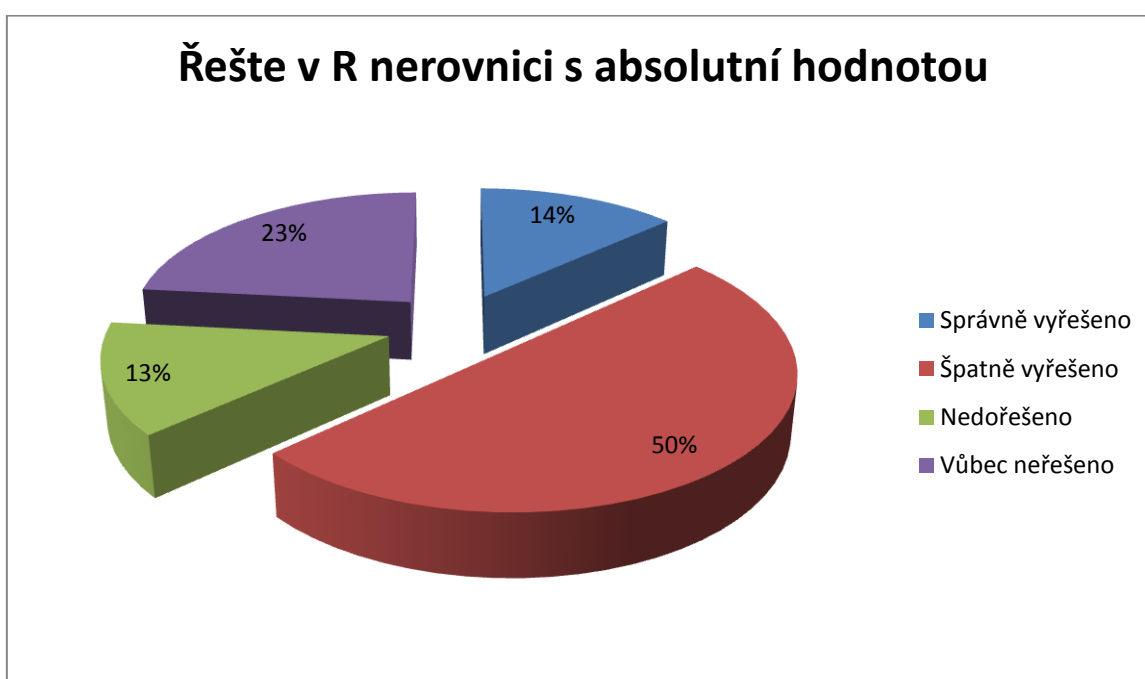
Grafické řešení:



Výsledek: $x \in (-1;3)$

Ad 2) Řešte v R nerovnici $|x+1|-|x-2|+|x-5|\leq 6$

Druhý příklad si klade za cíl zjištění, zda studenti umějí pracovat s absolutními hodnotami v nerovnici. Při řešení nerovnic s absolutními hodnotami se postupuje tak, že si nejdříve určíme nulové body s absolutních hodnot. Tyto nulové body⁷ nám rozdělí definiční obor nerovnice na čtyři intervaly, v našem případě. Využijeme tabulky znamének hodnot jednotlivých dvojčlenů pro vnitřní body intervalů. V těchto intervalech podle tabulky dále řešíme nerovnice bez absolutních hodnot. Konečným výsledkem je tedy průnik jednotlivě řešených rovnic v rámci daného intervalu.



	Četnost	%
Správně vyřešeno	4	14
Špatně vyřešeno	15	50
Nedořešeno	4	13
Vůbec neřešeno	7	23
Celkem	30	100

Z výsledného grafu je jasné vidět, jak řešení tohoto příkladu dopadlo. Polovina studentů příklad vyřešila špatně, více jak 20% studentů příklad vůbec neřešilo. Tady jsem zahrнула i velmi jednoduché řešení $x+1-x+2+x-5\leq 6$, které samozřejmě řešením nerovnice

⁷ Nulové body=čísla, pro které výrazy v absolutních hodnotách nabývají hodnoty nula

s absolutními hodnotami není. Tohle řešení bylo nečastějším špatným řešením. Studenti si tedy neuvědomili určité zákonitosti, které platí v nerovnicích s absolutními hodnotami.

13% studentů se dostalo k určení nulových bodů, rozdělení do intervalů na číselné ose a následného zapsání do tabulky. Celý příklad vyřešili pouze 4 studenti, tedy 14%.

Správné řešení příkladu 2)

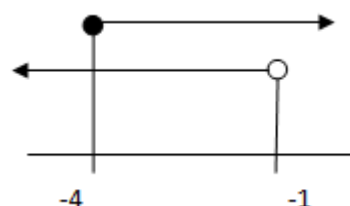
Nulové body: $-1; 2; 5$

	$(-\infty; -1)$	$\langle -1; 2)$	$\langle 2; 5)$	$\langle 5; \infty)$
$ x+1 $	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$
$ x-2 $	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$	$x-2$
$ x-5 $	$-x+5$	$-x+5$	$-x+5$	$x-5$

Pro $(-\infty; -1)$:

$$\begin{aligned} (-x-1) - (-x+2) + (-x+5) &\leq 6 \\ -x-1+x-2-x+5 &\leq 6 \\ x &\geq -4 \end{aligned}$$

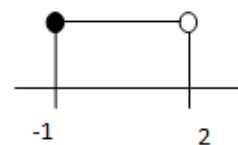
$$K_1 = \langle -4; 1)$$



Pro $\langle -1; 2)$:

$$\begin{aligned} (x+1) - (-x+2) + (-x+5) &\leq 6 \\ x+1+x-2-x+5 &\leq 6 \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

$$K_2 = \langle -1; 2)$$



Pro $\langle 2; 5)$:

$$\begin{aligned} (x+1) - (x-2) + (-x+5) &\leq 6 \\ x+1-x+2-x+5 &\leq 6 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

$$K_3 = \langle 2; 5)$$



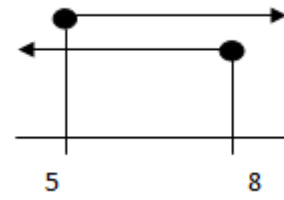
Pro $\langle 5; \infty \rangle$:

$$(x+1)-(x-2)+(x-5) \leq 6$$

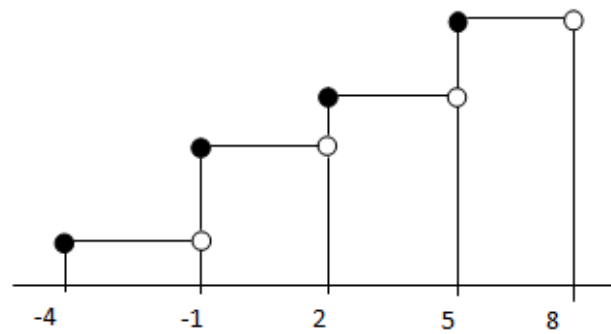
$$x+1-x+2+x-5 \leq 6$$

$$x \leq 8$$

$$K_4 = \langle 5; 8 \rangle$$



$$K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$$



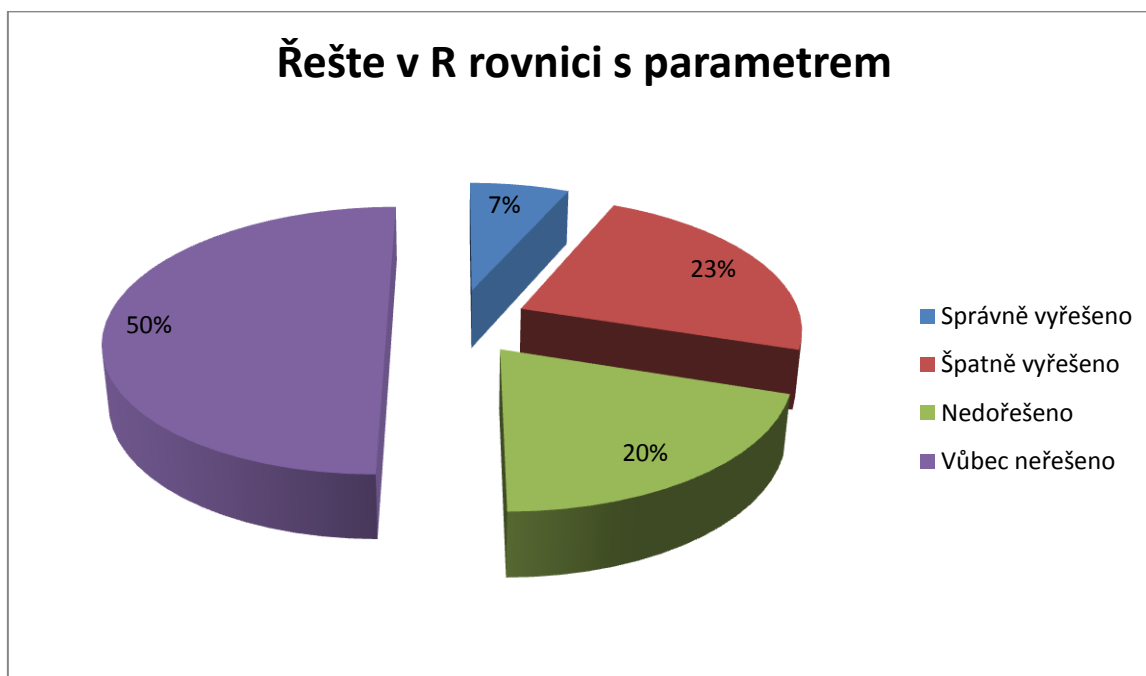
Výsledek: $K = \langle -4; 8 \rangle$

Ad 3) Řešte v R rovnici $px^2 + (2p+3)x + p + \frac{3}{4} = 0$, s parametrem $p \in R$

Třetí příklad si klade za cíl zjistit, zda jsou studenti schopni vypočítat rovnici s parametrem.

Konkrétně u naší zadané rovnice řešíme jako první podmínku pro parametr roven nule nebo různý od nuly. Když se parametr rovná nule nebo jakémukoliv jinému číslu, vždy dosadíme do rovnice. Pro podmínku, kde je parametr různý od nuly, v našem příkladu, vypočítáme si diskriminant, pro který dále řešíme případy, kde je $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

Při řešení rovnic, popř. nerovnic, s parametrem v závěru provádíme diskuzi řešení, kde stanovíme, pro které hodnoty parametrů má daná rovnice řešení a pro které hodnoty řešení nemá.



	Četnost	%
Správně vyřešeno	2	7
Špatně vyřešeno	7	23
Nedořešeno	6	20
Vůbec neřešeno	15	50
Celkem	30	100

Třetí příklad, který se zaměřil na řešení rovnice s parametrem, dopadl ze všech nejhůře. Příklad vyřešili pouze 2 studenti z 30, tedy 7% úspěšnost. Celých 50%, tj. 15 studentů, příklad ani nezačalo řešit a dalších 25% studentů řešilo příklad špatně.

Správné řešení příkladu 3)

$$px^2 + (2p+3)x + p + \frac{3}{4} = 0$$

$p = 0$

$$0x^2 + (2 \cdot 0 + 3)x + 0 + \frac{3}{4} = 0$$

$$3x + \frac{3}{4} = 0$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

$p \neq 0$

$$D = (2p+3)^2 - 4p\left(p + \frac{3}{4}\right)$$

$$D = 9p + 9$$

$D > 0$

$$9p + 9 > 0$$

$$9p > -9$$

$$p > -1 \wedge p \neq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(2p+3) \pm \sqrt{9p+9}}{2p} =$$

$$= \frac{-2p-3 \pm 3\sqrt{p+1}}{2p}$$

$D = 0$

$$9p + 9 = 0$$

$$9p = -9$$

$$p = -1$$

$$x = \frac{-(2p+3)}{2p} =$$

$$= \frac{-(2(-1)+3)}{2(-1)} = \frac{1}{2}$$

$D < 0$

$$9p + 9 < 0$$

$$9p < -9$$

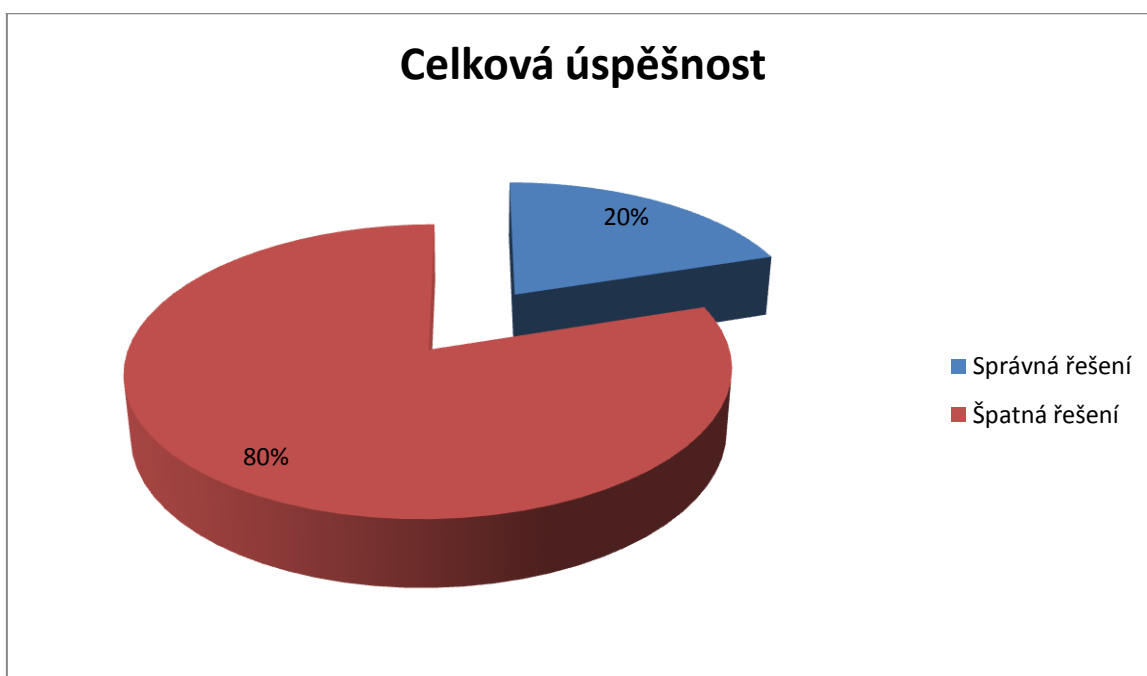
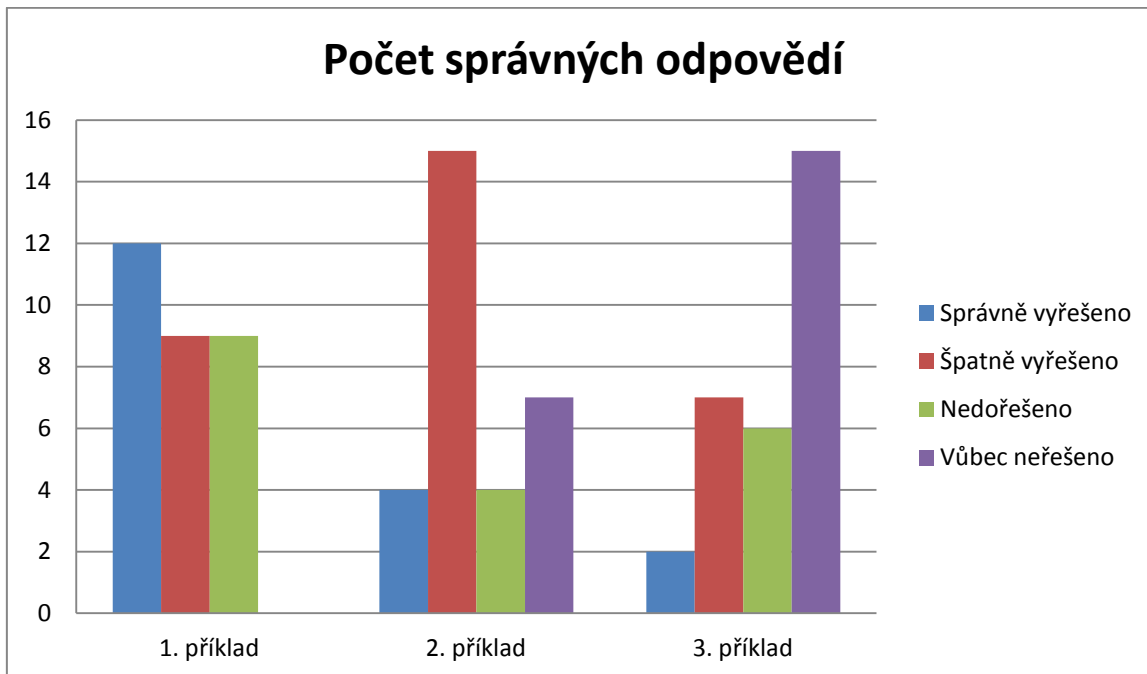
$$p < -1$$

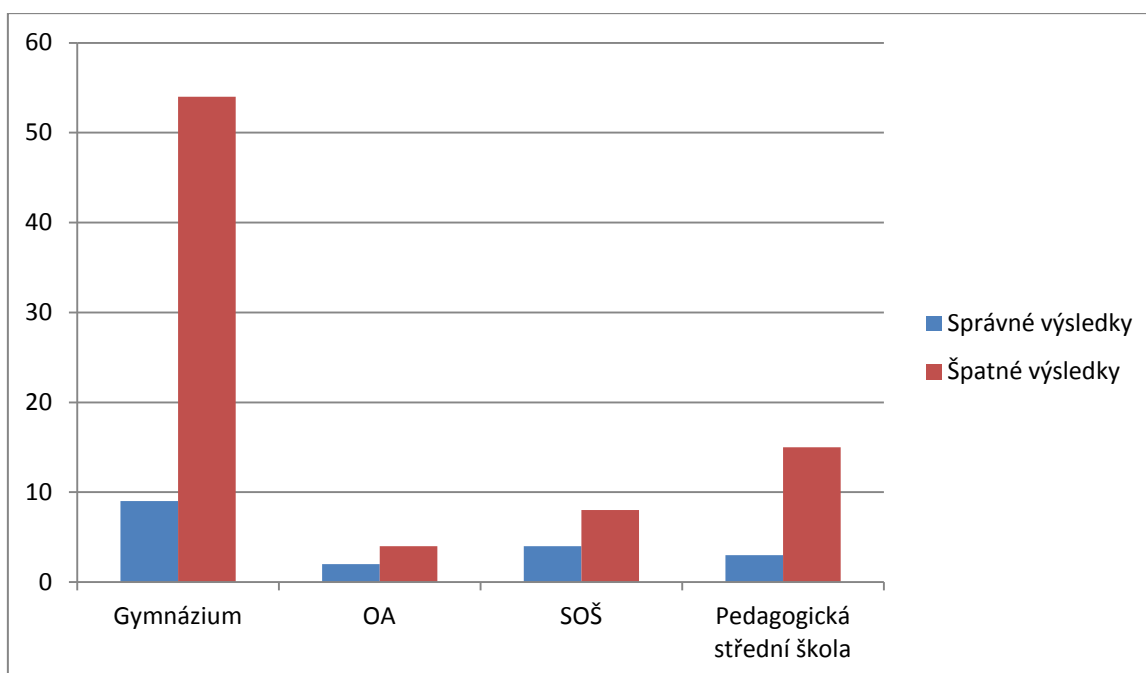
Nemá reálný kořen

p	Množina kořenů
$p \in (-\infty; -1)$	$\emptyset$
$p = -1$	$\left\{\frac{1}{2}\right\}$
$p \in (-1; 0) \cup (0; \infty)$	$\left\{\frac{-2p-3 \pm 3\sqrt{p+1}}{2p}\right\}$
$p = 0$	$\left\{-\frac{1}{4}\right\}$

3.3. Shrnutí

Přehled správnosti řešení jednotlivých příkladů a celkovou úspěšnost můžete vidět v následujících dvou grafech.





	Počet studentů	Počet možných správných odpovědí	Počet správných odpovědí	Úspěšnost %
Gymnázium	19	57	9	16%
OA	2	6	2	33%
SOŠ	4	12	4	33%
Pedagogická střední škola	5	15	3	20%
Celkem	30	90	18	

Poslední graf nám ukazuje počet správných výsledků v závislosti na střední škole.

Jeden znalostní test jsem brala za 3 možné správné odpovědi, proto celkových správných odpovědí na 30 studentů je 90.

Po vypočítání úspěšnosti podle střední školy vidíme, že nejvyšší úspěšnost v řešení měli studenti z obchodní akademie a středních odborných škol. Nejhůře naopak dopadli studenti z gymnázií.

A celková úspěšnost celého znalostního testu, kterého se účastnilo 30 respondentů, byla 20%.

Po celkovém shrnutí musím tedy zhodnotit, že můj předpoklad, že studenti studující obor matematika nebudou mít problém s řešením rovnic a nerovnic, byl špatný.

Hlavním cílem výzkumu byla daná šetření (viz výše) a výsledky jsou tedy takové:

- Nejvíce studentů 1. ročníku, kteří studují obor matematika se zaměřením na vzdělání na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého, má ukončené střední vzdělání na gymnáziu. Dále se zde vyskytovaly školy jako obchodní akademie, střední odborné školy a také pedagogické střední školy.
- Můj předpoklad, že všichni studenti, kteří studují matematiku, absolvovali maturitu z matematiky a to už jak ve formě státní maturity nebo školní, byl špatný. Mezi 30-ti studenty 1. ročníku jsou 3 studenti, kteří neabsolvovali ani jeden typ maturity z matematiky, státní nebo školní, a i přesto studují obor matematiku.
- Předpoklad, že nejlépe obeznámeni s metodami řešení rovnic a nerovnic budou studenti z gymnázií, se opět nepotvrdila. Nejlépe v úspěšnosti řešení dopadli studenti z obchodní akademie a ze středních odborných škol s úspěšností 33%
- Opět byl můj předpoklad špatný, že studenti, kteří studují obor matematika, jsou dostatečně obeznámeni s metodami řešení rovnic a nerovnic, protože z výsledků dotazníku, ať už se na něj díváme jako celek nebo jednotlivě na konkrétní příklady, tak je vidět, že studenti nejsou dostatečně seznámeni s metodami řešení rovnic a nerovnic. Protože celková úspěšnost byla pouze 20%.
- Můj předpoklad byl, že studenti budou mít nejvíce problém s řešením rovnice s parametrem a to se potvrdilo. Polovina z dotazovaných respondentů příklad nezačalo ani řešit a jen dva studenti ze 30-ti příklad vyřešili celý. Ovšem nemůžu říct, že by jinde velký problém nenastal. Velké nedostatky v řešení a znalostech se ukázaly i u řešení kvadratické nerovnice.

Závěr

Téma metody řešení rovnic a nerovnic je velmi rozsáhlé, proto jsme se v práci soustředili na objasnění těch rovnic a nerovnic, se kterými se setkáváme často, jak na základních školách, tak na středních školách. Podle tohoto uvážení jsme tedy vybrali lineární rovnice a nerovnice, kvadratické rovnice a nerovnice, dále také rovnice a nerovnice s absolutními hodnotami a parametrem, rovnice vyšších stupňů, nerovnice s více neznámými a také soustavy rovnic a nerovnic.

V každé části jsme popsali základní fakta o daném typu rovnic (popř. nerovnic), dále jsme uvedli ukázkové příklady i s řešením a vysvětlením, pro lepší pochopení a připojili jsme i grafické řešení.

V praktické části bakalářské práce bylo cílem zjistit pomocí výzkumu u studentů 1. ročníků oboru matematika se zaměřením na vzdělání na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci, znalosti a metody při řešení rovnic a nerovnic a to na základě znalostního testu obsahující příklady na vybrané typy rovnic a nerovnic. Jako vybrané příklady znalostního testu jsme zvolili 3 příklady a to kvadratickou nerovnici, nerovnici s absolutními hodnotami a rovnici s parametrem (viz příloha č. 1- Znalostní test).

Po vyhodnocení znalostního testu jsme došli k výsledku, že studenti studující 1. ročník obor matematika se zaměřením na vzdělání na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci, nemají dostatečné znalosti v rámci metod řešení rovnic a nerovnic.

Celková úspěšnost znalostní testu, kterého se zúčastnilo 30 respondentů, byla 20%.

Hlavní cíl práce, který byl objasnění teoretické části metod řešení vybraných rovnic a nerovnic a prošetření výzkumu, který se zakládal na znalostním testu, na základě znalostí metod řešení rovnic a nerovnic u vybraných respondentů byl splněn.

Seznam použitých zdrojů:

Literatura

BOČEK, L., BOČKOVÁ, J., CHARVÁT, J., Matematika pro gymnázia- rovnice a nerovnice, Praha, Prometheus s.r.o, 1995, ISBN 80-7196-001-2

BUŠEK, I., Řešené maturitní úlohy z matematiky, Praha, Prometheus s.r.o, ISBN 80-7196-140-X

KUBEŠOVÁ, N., CIBULKOVÁ, E., Matematika-přehled středoškolského učiva, 2006, Nakladatelství Petra Mrákové, ISBN 978-80-86873-05-3

LIBICHER, J., BURIAN, K., Algebra- okruhy, polynomy, tělesa, rovnice, Ostrava, Pedagogická fakulta v Ostravě, 1975

MULÁČOVÁ, J., PEŠKOVÁ, E., Matematika- univerzální příručka pro maturanty a uchazeče o studium na vysokých školách, 1996, Praha, ALBRA

PETÁKOVÁ, J., Matematika- příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, 1998, Praha, Prometheus, ISBN 978-80-7196-099-7

POLÁK, J., Přehled středoškolské matematiky, Praha, Prometheus s.r.o, 2008, ISBN 978-80-7196-356-1

RIEČAN, B., Matematika pro IV. ročník gymnázií, 1987, Praha, Státní pedagogické nakladatelství

ROHLÍČEK, J., HRUŠA, DLOUHÝ, Úvod do studia matematiky, 1977, Praha, Státní pedagogické nakladatelství

SCHMIDTMAYER, J., ROZENSKÝ, Z., ŠIKOLA, B., *Matematika pro IV. ročník středních průmyslových škol a středních zemědělských technických škol*, Praha, Státní pedagogické nakladatelství, 1978

SCHWARZ, Š., *Základy nauky o řešení rovnic*, Bratislava, Vydavateľstvo Slovenskej akademie vied, 1968

Internetové zdroje

Matematika polopateř. *Kvadratické nerovnice* [online]. 2006 [cit. 2014-02-06]. Dostupné z: <http://www.matematika.cz/kvadraticke-nerovnice>

Seznam grafů

GRAF 1-1.1.-PŘÍKLAD 1	10
GRAF 2-1.2.-PŘÍKLAD 5	16
GRAF 3-1.2.-PŘÍKLAD 6	16
GRAF 4-1.2.-PŘÍKLAD 7	19
GRAF 5-1.2.2.-PŘÍKLAD 9	21
GRAF 6-1.2.3.-PŘÍKLAD 10	22
GRAF 7-1.2.3.-PŘÍKLAD 10	23
GRAF 8-1.3.-PŘÍKLAD 11	27
GRAF 9-1.4.-PŘÍKLAD 12	31
GRAF 10-1.4.-PŘÍKLAD 13	32
GRAF 11-2.1.2.-PŘÍKLAD 2	36
GRAF 12-2.1.2.-PŘÍKLAD 2	37
GRAF 13-2.1.2.- PŘÍKLAD 2.....	37
GRAF 14-2.1.3.-PŘÍKLAD 3	38
GRAF 15-2.2.-PŘÍKLAD 4	40
GRAF 16-2.2.-PŘÍKLAD 5	42
GRAF 17-2.2.3.-PŘÍKLAD 8	45
GRAF 18-2.2.3.-PŘÍKLAD 9	45
GRAF 19-2.2.3.-PŘÍKLAD 10	46
GRAF 20-2.3.-PŘÍKLAD 11	48
GRAF 21-2.3.-PŘÍKLAD 12	49
GRAF 22-2.4.-PŘÍKLAD 13	51

Seznam tabulek

TAB. 1-1.1.1- PŘÍKLAD 2	11
TAB. 2-1.2.1-PŘÍKLAD 4.....	14
TAB. 3-1.2.1-PŘÍKLAD 8.....	20
TAB. 4-2.1.1- PŘÍKLAD 1	35
TAB. 5-2.1.2- PŘÍKLAD 2	36
TAB. 6-2.2- PŘÍKLAD 4	40
TAB. 7-2.2.1- PŘÍKLAD 6	43
TAB. 8-2.2.2- PŘÍKLAD 7	44

Seznam příloh

PŘÍLOHA 1-ZNALOSTNÍ TEST	2
--------------------------------	---

Seznam použitých matematických symbolů a značek

$=$	rovná se
$\neq$	nerovná se, je různé od
$>$	je větší
$\geq$	je větší nebo rovno
$<$	je menší
$\leq$	je menší nebo rovno
N	množina všech přirozených čísel
R	množina všech reálných čísel
$a \in A$	a je prvek množiny A
$a \notin A$	a není prvkem množiny A
$A = \{1, 3, 5\}$	množina A je dána výčtem prvků
$A \subset B$	množina A je podmnožinou množiny B
$A \cap B$	průnik množin A, B
$A \cup B$	sjednocení množin A, B
$\emptyset$	prázdná množina
$ a $	absolutní hodnota čísla a
(a, b)	otevřený interval
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval
$(a, b], \langle a, b \rangle$	polozavřené intervaly
$A[a_1, a_2]$	bod A o souřadnicích a_1, a_2
$(a_1, a_2, \dots, a_n)$	uspořádaná n -tice

Příloha 1-Znalostní test

Znalostní test

Dobrý den studenti 1. ročníku matematického oboru na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého. Ráda bych Vás požádala o vyplnění matematického dotazníku, který bude součástí mé bakalářské práce. Proto se prosím pokuste příklady vyřešit co nejlépe.

Předem děkuji a hodně štěstí při řešení úloh.

Muž-Žena

Název střední školy

Maturovali jste z matematiky?
(státně nebo školně)

1) Řešte v R kvadratickou nerovnici+ grafické řešení: $x^2 - 2x - 3 < 0$

2) Řešte v R nerovnici $|x+1| - |x-2| + |x-5| \leq 6$

3) Řešte v R rovnici $px^2 + (2p+3)x + p + \frac{3}{4} = 0$, s parametrem $p \in R$

Anotace

Autor:	Zuzana Michalovičová
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D
Rok obhajoby:	2014

Název práce:	Metody řešení rovnic a nerovnic
Název v angličtině:	Methods of solving equations and inequalities
Anotace práce:	Cílem práce je objasnění metod řešení vybraných typů rovnic a nerovnic, které jsou doplněné o grafické řešení. Druhá část práce obsahuje výzkum, který se zaměřuje na znalosti metod řešení rovnic a nerovnic.
Klíčová slova:	Rovnice, nerovnice, absolutní hodnota, parametr, grafy
Anocation:	The target is to clarify the methods of solution of selected types of equations and inequalities, which are supplemented by graphical solution. The second part of the thesis research, which focuses on knowledge of methods for solving equations and inequalities.
Keywords:	Equation, inequalities, absolute value, parameter, graphs
Přílohy:	1
Rozsah práce:	73
Jazyk práce:	Český jazyk