

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Spojitosť funkcí více proměnných



Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.**

Vypracovala: **Markéta Blaháčková**

Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika

Studijní obor: Matematika–ekonomie se zaměřením na bankovníctví

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2015

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Markéta Blaháčková

Název práce: Spojitost funkcí více proměnných

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2015

Abstrakt: Cílem práce je shrnutí teorie týkající se spojitosti funkcí více proměnných. V práci bude ukázána souvislost mezi spojitostí a dalšími pojmy diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

Klíčová slova: spojitost funkcí více proměnných, limita funkcí více proměnných, parciální derivace, stejnoměrná spojitost

Počet stran: 36

Počet příloh: 0

Jazyk: Český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Markéta Blaháčková

Title: Continuity of functions of several variables

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

The year of presentation: 2015

Abstract: The object of the thesis is collecting of information about continuity of functions of several variables. In the thesis, the connections between continuity and other notions of differential calculus of several variables will be shown.

Key words: continuity of functions of several variables, limit of functions of several variables, partial derivatives, uniform continuity

Number of pages: 36

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně pod vedením RNDr. Martiny Pavlačkové, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 20. dubna 2015

Obsah

Úvod	7
1 Základní pojmy	8
1.1 Metrické prostory	8
1.2 Okolí bodu v metrickém prostoru	9
1.3 Funkce více proměnných	11
2 Spojitost funkcí více proměnných	12
2.1 Spojitost v bodě	12
2.2 Spojitost na množině	17
2.2.1 Funkce spojité na kompaktních množinách	17
2.2.2 Funkce spojité na souvislých množinách	17
3 Souvislost mezi spojitostí a limitou	19
3.1 Věty o limitách funkcí	20
3.2 Výpočet limit pro funkce dvou a tří proměnných	21
4 Souvislost mezi spojitostí a parciálními derivacemi	28
4.1 Směrové a parciální derivace	28
5 Stejnoměrná spojitost	31
Závěr	34

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí bakalářské práce RNDr. Martině Pavlačkové, Ph.D. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích. Poděkování patří také mé rodině a blízkým za jejich podporu po celou dobu mého studia.

Úvod

Tématem mé bakalářské práce je spojitost funkcí více proměnných, která je jednou z nejvýznamnějších složek diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

Hlavním cílem je shrnutí teorie spojitosti funkcí více proměnných a jejich vzájemných vztahů s limitou a derivací funkcí více proměnných.

Práce je rozdělena do pěti kapitol. V první kapitole jsou uvedeny nejdůležitější pojmy a definice potřebné k teorii spojitosti funkcí více proměnných, např. pojem funkce více proměnných, metrické prostory, okolí bodu v metrickém prostoru a jiné.

Druhá kapitola je věnována spojitosti funkcí více proměnných. Nadefinujeme si pojem spojitost funkce v bodě i na množině, uvedeme některé základní věty o spojitosti a příklady.

Třetí kapitola je zaměřena na limitu funkcí více proměnných, její výpočet a souvislost se spojitostí funkcí více proměnných.

Ve čtvrté kapitole se seznámíme s parciálními a směrovými derivacemi a ukážeme si, jak se vzájemně propojují s limitou a spojitostí funkcí více proměnných.

Poslední kapitola se zabývá stejnoměrnou spojitostí a jsou v ní uvedeny nejznámější věty o stejnoměrné spojitosti.

Práce je vypracována v programu $\text{\LaTeX}$ a ilustrována vlastními příklady a obrázky vytvořenými v programech AutoCad a Maple 7.

1. Základní pojmy

Předtím, než se budeme zabývat samotnou spojitostí funkcí více proměnných, je potřeba si nadefinovat samotný pojem funkce více proměnných, jeho definiční obor a obor hodnot.

Při vypracování této kapitoly byly použity zdroje [1], [3], [5], [6], [13], [14] a [15].

Reálná funkce jedné reálné proměnné, pro zjednodušení - funkce jedné proměnné, je zobrazení z podmnožiny množiny $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Z tohoto pojmu vychází zobrazení z podmnožiny množiny $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) do $\mathbb{R}$, které se nazývá *funkce více proměnných*.

Pojem spojitosti funkce více proměnných můžeme obdobně jako pro funkce jedné proměnné definovat např. pomocí limity funkce. K definici spojitosti, limity a dalších pojmů diferenciálního počtu je třeba na $\mathbb{R}^n$ zavést metriku.

1.1. Metrické prostory

Definice 1.1. Nechť M je libovolná neprázdná množina a ρ zobrazení z $M \times M$ do $\mathbb{R}$, které má pro každé $x, y, z \in M$ následující vlastnosti:

- $\rho(x, y) \geq 0$... nezápornost
- $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x = y)$... totožnost
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$... symetrie
- $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$... trojúhelníková nerovnost.

Potom se uspořádaná dvojice (M, ρ) nazývá *metrický prostor*. Zobrazení $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *metrika* a číslo $\rho(x, y)$ se nazývá *vzdálenost prvků x a y v prostoru (M, ρ)* .

Na každé množině M , která je neprázdná, můžeme zadat celou řadu různých metrik. Dostaneme tak různé metrické prostory se stejnou základní množinou, ale v každém z nich budeme měřit vzdálenosti jinými způsoby.

Příklady metrik:

Na množině $\mathbb{R}$ je metrika $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definována pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ např. jako

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Na množině $\mathbb{R}^2$ jsou nejčastěji používány metriky ($x, y \in \mathbb{R}^2, x = [x_1, x_2], y = [y_1, y_2]$):

- eukleidovská metrika $\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$
- součtová (listonošská, manhattanská) metrika $\rho_l(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$
- maximová metrika $\rho_m(x, y) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}.$

Tyto metriky rozšířené na množinu $\mathbb{R}^n (x, y \in \mathbb{R}^n, x = [x_1, x_2, \dots, x_n], y = [y_1, y_2, \dots, y_n])$:

- eukleidovská metrika $\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^n + (y_2 - x_2)^n + \dots + (y_n - x_n)^n}$
- součtová metrika $\rho_l(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + \dots + |y_n - x_n|$
- maximová metrika $\rho_m(x, y) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|, \dots, |y_n - x_n|\}.$

1.2. Okolí bodu v metrickém prostoru

Definice 1.2. Nechť $\varepsilon > 0$. ε -okolí vlastního bodu $a \in \mathbb{R}$ lze zapsat intervalem $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. ε -okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$ definujeme pomocí metriky ρ v $\mathbb{R}^n$ jako množinu

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, a) < \varepsilon\}.$$

Redukovaným ε -okolím bodu $a \in \mathbb{R}^n$ nazýváme množinu

$$U_\varepsilon^*(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \rho(x, a) < \varepsilon\}.$$

Index ε lze vynechat, není-li poloměr okolí podstatný.

Každá z metrik má své okolí, například v $\mathbb{R}^2$ pro eukleidovskou metriku dostaneme kruhové okolí, pro maximovou metriku dostaneme čtvercové okolí a pro součtovou metriku dostaneme kosočtvercové okolí.

Pomocí pojmu okolí charakterizujeme polohu bodu vzhledem k množině.

Definice 1.3. Nechť x je bod a M je množina v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že bod x je

- *vnitřním bodem* množiny M , existuje-li okolí $U(x)$ bodu x takové, že

$$U(x) \subset M,$$

- *hraničním bodem* množiny M , jestliže pro každé okolí $U(x)$ bodu x platí současně

$$U(x) \cap M \neq \emptyset \text{ a } U(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset,$$

- *vnějším bodem* množiny M , existuje-li takové okolí $U(x)$ bodu x , že

$$U(x) \cap M = \emptyset,$$

- *hromadným bodem* množiny M , jestliže pro každé redukované okolí $U^*(x)$ bodu x platí

$$U^*(x) \cap M \neq \emptyset,$$

- *izolovaným bodem* množiny M , existuje-li takové okolí $U(x)$ bodu x , že

$$U(x) \cap M = \{x\}.$$

Podíváme se na podrobnější význam jednotlivých pojmů. Vnitřní bod množiny M je takový bod, který leží v M i se svým určitým okolím. Hraniční bod množiny M je bod, jehož každé okolí protíná jak množinu M , tak i její doplněk. K hraničnímu bodu mají libovolně blízko jak body dané množiny, tak i body jejího doplňku. Vnější bod není nic jiného než vnitřní bod doplňku dané množiny. Hromadným bodem množiny M nazveme bod, jehož každé okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů z množiny M a bod z M , který není hromadným bodem, nazýváme izolovaný bod množiny M .

1.3. Funkce více proměnných

Reálná funkce n -reálných proměnných je zobrazení, které každé uspořádané n -tici reálných čísel z nějaké podmnožiny kartézského součinu $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ přiřazuje nějaké reálné číslo. Stejně jako u reálných funkcí jedné reálné proměnné zavádíme pojem definiční obor funkce a obor funkčních hodnot.

Definice 1.4. Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $D \neq \emptyset$. Zobrazení $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *reálná funkce n reálných proměnných* a množina D se nazývá *definiční obor* této funkce a značí se $D(f)$.

Z výše uvedené definice vyplývá, že funkce $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je množina uspořádaných dvojic $[x, y] \in D \times \mathbb{R}$, $x = [x_1, \dots, x_n]$, která má tu vlastnost, že ke každému bodu $x = [x_1, \dots, x_n] \in D$ existuje právě jedno číslo y tak, že $[x, y] \in f$. Značíme ho $f(x)$ nebo $f(x_1, \dots, x_n)$ a nazýváme ho *hodnotou funkce f* nebo *funkční hodnotou* v bodě $x = [x_1, \dots, x_n]$.

Definice 1.5. *Oborem hodnot* nazveme všechna y , kterých funkce f nabývá a značíme ho symbolem $H(f)$.

Funkce více proměnných jsou většinou zadány funkčními předpisy, například $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 2y$, $f(x, y, z) = \ln(x + y^3 + z^2)$. Můžeme zde hovořit o elementárních funkcích více proměnných. Jedná se o funkce zadané předpisem, ve kterém jsou obsaženy jen názvy proměnných, reálná čísla, závorky, znaménka pro odečítání, sčítání, násobení, dělení a symboly základních elementárních funkcí (mocninné, logaritmické atd.).

2. Spojitost funkcí více proměnných

Pojem spojitost funkce patří k základním pojmům diferenciálního počtu. Tato kapitola se bude věnovat spojitosti funkcí více proměnných jak v daném bodě, tak i na množině.

K vypracování této kapitoly byly použity zejména zdroje [1], [2], [3], [6], [7], [8], [14] a [16].

2.1. Spojitost v bodě

Definice 2.1. Nechť $D \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset D$, $x_0 \in A$. Řekneme, že funkce $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je *spojitá v bodě* x_0 *vzhledem k množině* A , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý bod $x \in A$ splňující

$$\rho(x, x_0) < \delta \text{ platí : } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (1)$$

Je-li $A = D$, říkáme, že je f spojitá v x_0 .

Příklad 2.1. Dokažte, že funkce definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x \cdot y^2}{x^2 + y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

je spojitá v bodě $[0, 0]$.

Řešení: Mějme dáno libovolné reálné číslo $\varepsilon > 0$. Funkce f je v bodě $[0, 0]$ spojitá, pokud bychom pro toto libovolně zvolené ε byli schopni nalézt reálné číslo $\delta > 0$ takové, že bude splněna nerovnost $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$ pro všechna $[x, y] \in D(f)$ splňující podmínku $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, tj. pokud

$$\left| \frac{4x \cdot y^2}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon,$$

platí-li: $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$.

Nyní si ukážeme, jak najít odpovídající reálné číslo $\delta > 0$.

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{4x \cdot y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| = 4|x| \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 4|x| \cdot 1 = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2 + y^2} < 4\delta.$$

Jestliže $[x, y] \in D(f)$ a $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, pak z výše uvedeného plyne, že pokud bychom zvolili $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ pak dostaneme

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 4\sqrt{x^2 + y^2} < 4\delta = 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

nebo ekvivalentně

$$|f(x, x) - 0| = \left| \frac{4x \cdot y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 4\delta = \varepsilon.$$

Pro libovolné kladné ε tedy existuje $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ takové, že je splněna podmínka z Definice 2.1. a funkce $f(x, y)$ je tedy spojitá v bodě $[0, 0]$. $\triangle$

Věta 2.1. *Funkce f je spojitá v bodě $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ právě tehdy, když má v tomto bodě vlastní limitu a platí:*

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = f(x^*).$$

Důkaz by se provedl analogicky jako v případě funkce jedné proměnné, viz např. [16].

Věta 2.2. *Pro následující dvě podmínky platí ekvivalence:*

- a) *f je spojitá v x_0 vzhledem k množině A ,*
- b) *pro každou posloupnost $\{x_m\} \subset A$, která konverguje k x_0 platí, že*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) = f(x_0). \quad (2)$$

Důkaz lze nalézt např. v [6].

Věta 2.3. *Existuje-li konstanta $k_0 > 0$ taková, že pro každý bod $x \in A$ platí*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k_0 \rho(x, x_0), \quad (3)$$

pak je f spojitá v bodě x_0 vzhledem k A .

Důkaz. Zvolíme si libovolné ε z intervalu $(0, \infty)$ a položíme $\delta = \frac{\varepsilon}{k_0}$. Potom dle (3) pro libovolné $x \in A$, které splňuje $\rho(x, x_0) < \delta$ bude $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, tj. platí $\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. $\square$

Věta 2.4. *Platí:*

- a) Jestliže je x_0 izolovaný bod množiny A , pak je f spojitá v x_0 vzhledem k A .
b) Nechť $A_1 \subset A$ a $x_0 \in A_1$. Je-li f spojitá v x_0 vzhledem k A , potom je f spojitá v x_0 i vzhledem k A_1 .

c) Nechť $A_1 \subset D, A_2 \subset D, x_0 \in A_1 \cap A_2$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

- f je spojitá v x_0 vzhledem k $A_1 \cup A_2$,
- f je spojitá v x_0 vzhledem k A_1 i vzhledem k A_2 .

Důkaz. a) Jestliže je x_0 izolovaný bod množiny A , pak jediný typ posloupnosti bodů množiny A , která konverguje k x_0 je posloupnost $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, pro kterou existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m \in \mathbb{N}, m \geq m_0$ platí $x_m = x_0$. Pro tuto posloupnost je splněno (2).

b) Vyplývá z Definice 2.1. Je-li pro každé $x \in A$ splněn vztah (1), pak platí i pro každé $x \in A_1 \subset A$.

c) První tvrzení implikuje dle vlastnosti b) druhé tvrzení. Dokažme, že i druhé tvrzení implikuje to první. Nechť tedy platí, že f je spojitá v x_0 vzhledem k A_1 i vzhledem k A_2 . Poté dle Definice 2.1. ke každému $\varepsilon \in (0, \infty)$ existují $\delta_1, \delta_2 \in (0, \infty)$ tak, že pro každé $x \in A_1$ platí $\rho(x, x_0) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ a pro každé $x \in A_2$ platí $\rho(x, x_0) < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Zvolíme-li $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ pak pro každé $x \in A_1 \cup A_2$ platí (1). Tímto jsme dokázali, že první tvrzení platí. $\square$

Věta 2.5. *(Operace s funkcemi).* Nechť jsou funkce $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ a $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ spojité v bodě x_0 vzhledem k množině A . Pak jsou v x_0 vzhledem k A spojité i následující funkce $f + h, f \cdot h, \max\{f, h\}, \min\{f, h\}, |f|$ a funkce f/h , pokud $h(x_0) \neq 0$.

Důkaz. Nechť $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset A, x_m \rightarrow x_0$. Potom dle Věty 2.1. platí (2) a také $\lim_{m \rightarrow \infty} h(x_m) = h(x_0)$. Z vlastností limit číselných posloupností dostaneme

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f + h)(x_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} (f(x_m) + h(x_m)) = f(x_0) + h(x_0) = (f + h)(x_0).$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f \cdot h)(x_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} (f(x_m) \cdot h(x_m)) = f(x_0) \cdot h(x_0) = (f \cdot h)(x_0).$$

Stejným způsobem postupujeme i u zbývajících operací. □

Příklad 2.2. Určete, kde je daná funkce spojitá

a) $f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{\sin(x - y)}$

b) $g(x, y, z) = \frac{\arctan(e^{x+y+z^3} - \sqrt[3]{x \cdot z})}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$

c) $h(x, y, z) = \operatorname{sgn}((x - 1)(y - 2)(z - 3)).$

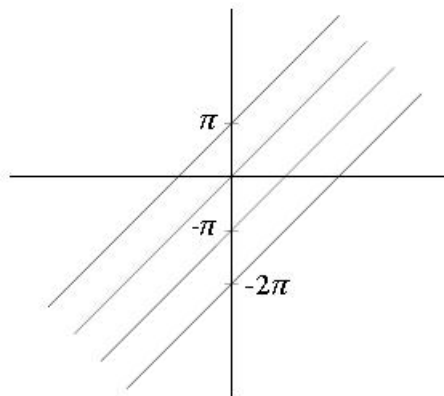
Řešení: a) Vzhledem k $D(f)$ logaritmu musí platit, že $x^2 + y^2 > 0$, tj. funkce f není spojitá v bodě $[0, 0]$. Navíc musí být dle Věty 2.4. splněna podmínka $\sin(x - y) \neq 0$, tj.

$$x - y \neq k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z},$$

neboli

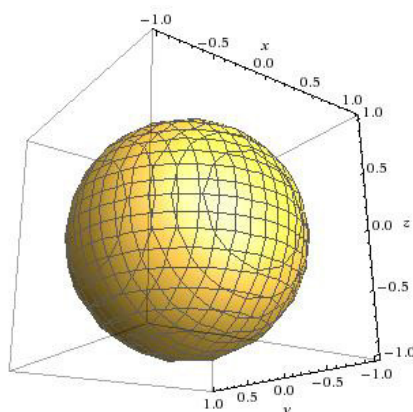
$$y \neq x - k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Funkce f je tedy spojitá na množině $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x - k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}.$



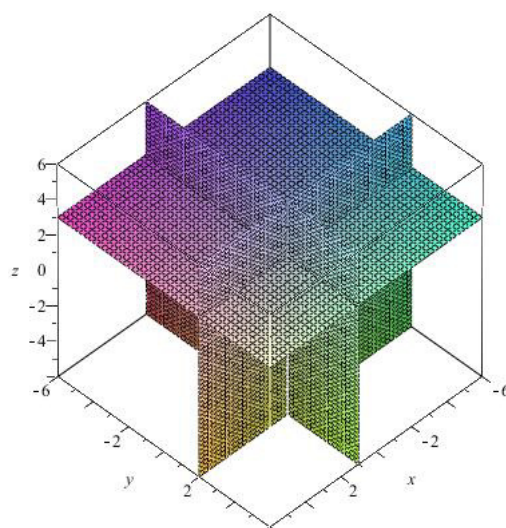
Obrázek 1: Body, v nichž není funkce $f(x, y)$ spojitá.

b) Vzhledem k definičním oborům funkcí $\arctan x$, e^x a $\sqrt[3]{x}$, je čítec definován pro všechna $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$. Jmenovatel se nesmí $= 0$, tj. musí platit, že $x^2 + y^2 + z^2 - 1 \neq 0$. Funkce f je tedy spojitá v bodech splňujících $x^2 + y^2 + z^2 \neq 1$, tj. v bodech neležících na jednotkové kouli.



Obrázek 2: Jednotková koule, na které není funkce $g(x, y, z)$ spojitá.

c) Definičním oborem funkce $\text{sgn } x$ jsou všechna reálná čísla. Funkce $\text{sgn } x$ není spojitá v bodě 0. Funkce $h(x, y, z) = \text{sgn}((x - 1)(y - 2)(z - 3))$ tedy není spojitá pro $x = 1$ nebo $y = 2$ nebo $z = 3$, $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$. $\triangle$



Obrázek 3: Roviny $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, na nichž není funkce $h(x, y, z)$ spojitá.

2.2. Spojitost na množině

Definice 2.2. Funkce $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *spojitá na množině A* , jestliže je spojitá v každém bodě množiny A vzhledem k A . Je-li spojitá na svém definičním oboru $D(f)$, řekneme, že funkce f je *spojitá*.

Elementární funkce n proměnných jsou spojité na svém definičním oboru.

2.2.1. Funkce spojité na kompaktních množinách

Věta 2.6. *Je-li f spojitá na kompaktní množině A , pak je množina $f(A)$ také kompaktní.*

Důkaz. Zvolíme si libovolnou posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^\infty \subset f(A) \subset \mathbb{R}$. Potom existuje ke každému číslu b_n bod $x_n \in A$ takový, že $f(x_n) = b_n$. Protože je A kompaktní, můžeme z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, která má limitu $x \in A$. Ze spojitosti funkce f vyplývá, že $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x) \in f(A)$. Tedy lze vybrat z posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ podposloupnost $\{b_{n_k}\}_{k=1}^\infty = \{f(x_{n_k})\}_{k=1}^\infty$, která má limitu $f(x) \in f(A)$. Tím jsme dokázali, že $f(A)$ je kompaktní. $\square$

Věta 2.7. (Weierstrassova) *Nechť je funkce f spojitá na kompaktní množině A . Pak funkce f nabývá na A své nejmenší a největší hodnoty.*

Důkaz. Množina A je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená. Z této vlastnosti plyne, že $f(A)$ je omezená a uzavřená v $\mathbb{R}$. Každá neprázdná množina reálných čísel, která je omezená a uzavřená, obsahuje své supremum a infimum. Proto také $f(A)$ musí obsahovat své supremum a infimum. To znamená, že existují dva body $B, C \in A$ s vlastností

$$\sup f(A) = \max f(A) = f(B), \quad \inf f(A) = \min f(A) = f(C),$$

tj. funkce f nabývá svého minima v bodě C a svého maxima v bodě B . $\square$

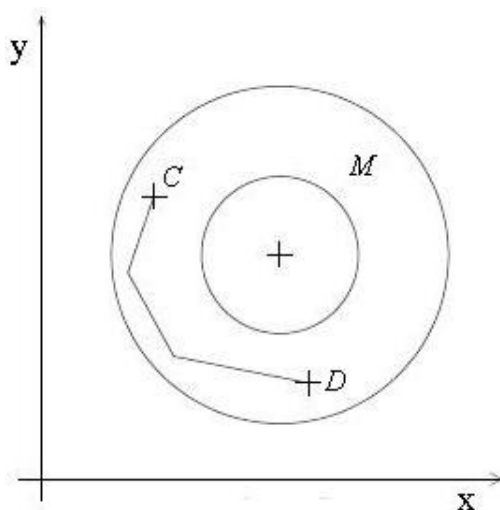
2.2.2. Funkce spojité na souvislých množinách

Definice 2.3. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina. Řekneme, že body $C, D \in M$ lze *spojit cestou* ležící v M , jestliže existují $a, b \in \mathbb{R}$ a spojitě zobrazení

$\Phi : [a, b] \rightarrow M$ takové, že $\Phi(a) = C$ a $\Phi(b) = D$. Množinu $\Phi([a, b])$ spojující C a D nazýváme *cesta*.

Definice 2.4. Neprázdná množina $M \subset \mathbb{R}^n$, v níž lze dva její libovolné body spojit cestou ležící v M , se nazývá *souvislá*.

Příklad 2.3. Intervaly v množině $\mathbb{R}$ jsou souvislé množiny. Speciálně je souvislá množina $\mathbb{R}$. Stačí když si zvolíme identickou funkci $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t$. Pak pro libovolná reálná a, b je $|\varphi(a) - \varphi(b)| = 1 \cdot |a - b|$. Tedy dle Věty 2.3. je φ spojitá. Dále platí $\varphi([a, b]) = [a, b]$ a $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$. Z toho plyne, že $\varphi([a, b])$ je cesta spojující a, b a ležící v $\mathbb{R}$. $\triangle$



Obrázek 4: Souvislá množina M , $M \subset \mathbb{R}^2$.

3. Souvislost mezi spojitostí a limitou

Třetí kapitola je věnována limitám funkcí více proměnných, metodám jejich výpočtu a jak lze pomocí limit funkcí určit spojitost funkce.

Kapitola byla sepsána pomocí následujících zdrojů [1], [2], [3], [4], [6], [8], [9], [10], [11], [12] a [15].

Definice 3.1. Nechť $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A symbolem $D(f)$ a nechť $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je hromadný bod množiny A . Řekneme, že reálné číslo c je *limitou* funkce f v bodě x_0 vzhledem k A , jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in A \text{ splňující } 0 < \rho(x, x_0) < \delta \text{ platí } |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Zapisujeme:

$$\lim_{\substack{A \\ x \rightarrow x_0}} f(x) = c.$$

Je-li $A = D$, říkáme, že f má v x_0 limitu c .

Uvedená definice limity popisuje vlastní limitu c ve vlastním bodě x_0 . Tuto definici lze modifikovat tak, aby zahrnovala všechny typy limit, tj. vlastní či nevlastní limitu c ve vlastním nebo nevlastním bodě.

Definice 3.2. Řekneme, že funkce $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 1$) má limitu c , $c \in \mathbb{R}^*$, kde $\mathbb{R}^*$ je množina reálných čísel rozšířená o $+\infty$ a $-\infty$, v bodě $x_0 \in (R^*)^n$, jestliže ke každému okolí $U(c)$ bodu c existuje redukované okolí $U^*(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro každý bod $x \in U^*(x_0) \cap D(f)$ platí $f(x) \in U(c)$.

Hlavní rozdíl mezi limitou funkce jedné proměnné a limitou funkce více proměnných je v přibližování se k bodu x_0 . U funkce jedné proměnné se k bodu x_0 můžeme blížit pouze po přímce, tj. pouze zleva nebo zprava. To znamená, že funkce má v daném bodě limitu, existují-li obě jednostranné limity a ty se sobě rovnají. U funkce dvou a více proměnných je těchto možností jak se můžeme k danému bodu blížit nekonečně mnoho, např. po přímkách, parabolách či obecných množinách. Z definice limity v daném bodě plyne, že nezáleží na cestě, po které se k danému bodu blížíme. Dostaneme-li pro různé cesty různé hodnoty limity, znamená to, že limita v daném bodě neexistuje.

3.1. Věty o limitách funkcí

V následujících větách budeme předpokládat, že $x = [x_1, \dots, x_n]$.

Věta 3.1. *Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a je-li funkce g omezená v nějakém redukovaném okolí bodu x_0 (tj. existuje-li konstanta $K \geq 0$ tak, že $|g(x)| \leq K$ v tomto redukovaném okolí). Pak*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0.$$

Věta 3.2. *(O limitě tří funkcí) Nechť $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ v nějakém redukovaném okolí bodu x_0 a platí*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c.$$

Potom

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = c.$$

Příklad 3.1. Limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^4 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + |y|}\right)$$

lze vyřešit např. následujícími dvěma způsoby:

a) větou o limitě tří funkcí

b) větou 3.1.

Řešení: a) Funkce $\cos x$ nabývá hodnoty z intervalu $< -1, 1 >$, můžeme tedy psát

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2 + |y|}\right) \leq 1 \quad \text{pro } [x, y] \neq [0, 0].$$

Výraz vynásobíme x^4 a obdržíme:

$$-x^4 \leq x^4 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + |y|}\right) \leq x^4.$$

Dále dostaneme nerovnost

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -x^4 = 0 \leq x^4 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + |y|}\right) \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^4 = 0$$

z které dle Věty 3.2. plyne, že

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^4 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + |y|}\right) = 0.$$

b) Protože je limita

$\lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$ a funkce $\cos\left(\frac{1}{x^2 + |y|}\right)$ je omezená na každém redukovaném okolí bodu $[0, 0]$, bude dle tvrzení Věty 3.1. původní limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^4 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + |y|}\right) = 0.$$

△

Věta 3.3. *Nechť*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c_2$$

a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Potom pro každé $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ platí*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a \cdot f(x) = a \cdot c_1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a_1 \cdot f(x) + a_2 \cdot g(x)) = a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = c_1 \cdot c_2.$$

Jestliže $c_2 \neq 0$, pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Důkazy výše uvedených vět jsou analogické jako u funkce jedné proměnné, které lze najít například v [10].

3.2. Výpočet limit pro funkce dvou a tří proměnných

Při počítání limit funkcí jedné proměnné máme k dispozici k výpočtu tzv. neurčitých výrazů, tj. např. limit typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, l'Hospitalovo pravidlo. U funkcí dvou a více proměnných žádné takové pravidlo není, proto je počítání limit obtížnější

a v případě neurčitých výrazů používáme různých úprav funkčních předpisů. Při vyšetřování dvojné limity u funkcí dvou proměnných lze využít i tzv. dvojnásobné limity (postupné, opakované). V tomto případě se pohybujeme po lomených čarách, které jsou vždy z části rovnoběžné s jednou ze souřadnicových os.

$$c_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y))$$

$$c_2 = \lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y))$$

Existuje-li limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = c$ a také limity c_1 a c_2 , pak $c = c_1 = c_2$.

Při výpočtu postupujeme tak, že si zvolíme jednu proměnnou, např. x a druhou pak považujeme za konstantu. Takto dostáváme limitu funkce jedné proměnné, funkci závisící pouze na x . Stejný postup provedeme i v opačném pořadí. Dalším způsobem jak převést dvojnou limitu na limitu funkce jedné proměnné je užitím *polárních souřadnic*. Pomocí polárních souřadnic při výpočtu limity vyšetřujeme chování funkce f v okolí bodu $[x_0, y_0]$ na přímkách se směrovým vektorem $(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Výjde-li limita nezávisle na úhlu φ , jedná se pouze o nutnou podmínku pro existenci limity v bodě $[x_0, y_0]$, protože pro jiný způsob přibližování, např. po parabolách, se může stát, že obdržíme zcela odlišný výsledek.

Věta 3.4. *Funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ limitu rovnou c , existuje-li nezáporná funkce $g: < 0, \infty) \rightarrow < 0, \infty)$ splňující $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} g(\rho) = 0$ taková, že*

$$|f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) - c| < g(\rho)$$

pro každé $\varphi \in < 0, 2\pi >$ a dostatečně malá $\rho > 0$.

Jestliže po transformaci do polárních souřadnic platí

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} h(\rho)g(\varphi)$$

kde $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} h(\rho) = 0$ a funkce $g(\varphi)$ je omezená pro $\varphi \in < 0, 2\pi >$, potom

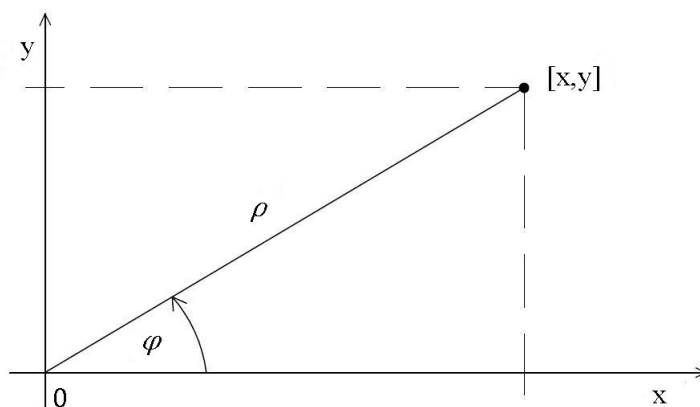
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = 0.$$

Důkaz. Protože $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} g(\rho) = 0$, ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < \rho < \delta$ je $g(\rho) < \varepsilon$, tj.

$$|f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) - c| < g(\rho) < \varepsilon.$$

To znamená, že pro $[x, y]$ z redukovaného kruhového δ - okolí bodu $[x_0, y_0]$ je $|f(x, y) - c| < \varepsilon$, což je právě definice vztahu $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = c$. $\square$

Výše uvedená věta udává podmínku, ze které je nezávislost limity na φ po transformaci do polárních souřadnic i postačující pro existenci limity.

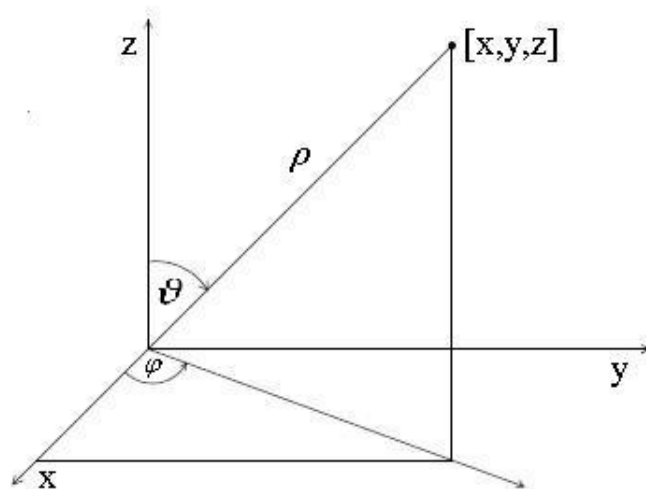


Obrázek 5: Polární souřadnice.

Podobně jako u výpočtu limity funkce dvou proměnných pomocí transformace do polárních souřadnic, používáme k výpočtu limity funkce tří proměnných transformaci do *sférických souřadnic*.

$$x - x_0 = \rho \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y - y_0 = \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z - z_0 = \rho \cos \vartheta,$$

kde ρ je vzdálenost bodů $[x_0, y_0, z_0]$ a $[x, y, z]$, ϑ je úhel svírající spojnice těchto bodů s kladným směrem osy z a φ je úhel, který svírá průmět spojníc do podstavné roviny (rovina obsahující osy x, y) s kladným směrem osy x . Výchází-li po zavedení sférických souřadnic výraz závisející na φ nebo ϑ , pak limita neexistuje.



Obrázek 6: Sférické souřadnice.

V některých případech je výhodné k šetření existence limity následující věta, která se v literatuře někdy uvádí jako definice limity (tzv. Heineho definice).

Věta 3.5. *Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a nechť $[x_0, y_0]$ je hromadným bodem definičního oboru $D(f)$. Funkce f má v tomto bodě limitu c , jestliže pro každou posloupnost bodů $\{[x_n, y_n]\}$, kde $[x_n, y_n] \neq [x_0, y_0]$ pro velká n , které konvergují k bodu $[x_0, y_0]$ má posloupnost $\{f(x_n, y_n)\}$ limitu c .*

Důkaz Věty 3.5. je v podstatě stejný jako u funkce jedné proměnné, např. viz [9].

Příklad 3.2. Zjistěte, je-li funkce definovaná předpisem

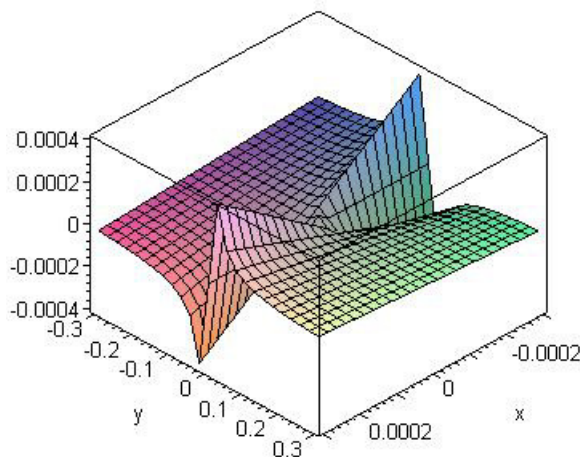
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y^2}{x^3 + 3y^3} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[0, 0]$.

Řešení: Postupné limity se rovnají nule, proto musíme zvolit jiný způsob výpočtu limity a to např. metodu svazku parabol. Zavedeme substituci $y = \varphi(x)$, tedy $y = k^2 \cdot x^2$.

$$c = \lim_{x \rightarrow 0, y = k^2 x^2} \frac{x \cdot y^2}{x^3 + 3y^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot k^2 \cdot x^2}{x^3 + 3k^3 x^3} = \frac{k^2}{1 + 3k^3}.$$

Protože limita c je závislá na parametru k , limita funkce f v bodě $[0, 0]$ neexistuje a tudíž f není v tomto bodě spojitá. $\triangle$



Obrázek 7: Graf funkce $f(x, y) = \frac{x \cdot y^2}{x^3 + 3y^3}$.

Příklad 3.3. Zjistěte, je-li funkce definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 5y^3}{3x^2 + 3y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[0, 0]$.

Řešení: K vyšetření limity použijeme metodu polárních souřadnic. Zavedeme substituci $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, tedy

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + 5y^3}{3x^2 + 3y^2} &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\rho^3 \cdot \cos^3 \varphi + 5 \cdot \rho^3 \cdot \sin^3 \varphi}{3 \cdot \rho^2 \cdot \cos^2 \varphi + 3 \cdot \rho^2 \cdot \sin^2 \varphi} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\rho \cdot (\cos^3 \varphi + 5 \cdot \sin^3 \varphi)}{3} = 0 \end{aligned}$$

dle věty 3.4., protože

$$\frac{(\cos^3 \varphi + 5 \cdot \sin^3 \varphi)}{3} \leq 2 \quad \text{a} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho = 0.$$

Z toho vyplývá, že funkce f je v bodě $[0, 0]$ spojitá. $\triangle$

Příklad 3.4. Zjistěte, pro jaké $a \in \mathbb{R}$ je funkce definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{x^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0] \\ a & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[0, 0]$.

Řešení: Výpočet provedeme pomocí transformace do polárních souřadnic:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2} &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} [\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)]^{\rho^2 \cos^2 \varphi} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} (\rho^2)^{\rho^2 \cos^2 \varphi} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} e^{2\rho^2 \cos^2 \varphi \ln \rho}. \end{aligned}$$

Poslední krok jsme provedli dle poznatku:

$$f = u^v = e^{\ln f} = e^{v \ln u}, \quad \text{pro každé } f, u > 0.$$

Nyní vypočítáme hodnotu limity v exponentu. Při výpočtu užijeme l'Hospitalovo pravidlo:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} (2\rho^2 \cos^2 \varphi \ln \rho) &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos^2 \varphi \ln \rho}{\frac{1}{\rho^2}} = - \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos^2 \varphi \frac{1}{\rho}}{(-2)\rho^{-3}} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{2\rho^3 \cos^2 \varphi}{-2\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} -\rho^2 \cos^2 \varphi = 0, \end{aligned}$$

protože jsou splněny všechny předpoklady Věty 3.4.

Po následném dosazení do původní limity dospějeme k výsledku:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2} = e^0 = 1.$$

Funkce $f(x, y)$ je tedy v bodě $[0, 0]$ spojitá, pokud $a = 1$. △

Příklad 3.5. Zjistěte, je-li funkce definovaná předpisem

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} & \text{pro } [x, y, z] \neq [0, 0, 0] \\ 0 & \text{pro } [x, y, z] = [0, 0, 0] \end{cases}$$

spojitá v bodě $[0, 0, 0]$.

Řešení: K výpočtu použijeme transformaci do sférických souřadnic:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\rightarrow(0,0,0)} \frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)} &= \lim_{\rho\rightarrow 0^+} \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta}{\rho^2 (\cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta)} = \\ &= \lim_{\rho\rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta} = \lim_{\rho\rightarrow 0^+} \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta.\end{aligned}$$

Protože je výsledný výraz závislý na úhlech φ , ϑ , limita neexistuje a tudíž funkce $f(x, y, z)$ není v bodě $[0, 0, 0]$ spojitá. $\triangle$

4. Souvislost mezi spojitostí a parciálními derivacemi

Následující kapitola se zaměřuje na parciální a směrové derivace a na jejich propojení s limitou a spojitostí funkce.

V celé kapitole předpokládáme, že $D(f)$ je otevřená množina v $\mathbb{R}^n$, $x \in D(f)$, $\alpha \in V(\mathbb{R}^n)$, kde $V(\mathbb{R}^n)$ je vektorový prostor dimenze n nad $\mathbb{R}$.

Kapitola byla sepsána pomocí zdrojů [1], [2], [3], [6] a [14].

4.1. Směrové a parciální derivace

Definice 4.1. Jestliže existuje limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\alpha) - f(x)}{t} = f_\alpha(x),$$

pak tuto limitu nazýváme *směrovou derivací (prvního řádu) funkce f v bodě x dle vektoru α* . Je-li $\|\alpha\| = 1$, mluvíme tak o *směrové derivaci ve směru α* .

Uvažujme standardní bázi ve vektorovém prostoru $V(\mathbb{R}^n)$, kterou tvoří vektory $e_1, \dots, e_n$, kde $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$, tj. e_i je vektor, který má všechny své souřadnice rovny nule s výjimkou i -té souřadnice, ta je rovna 1. Vektory $e_1, \dots, e_n$ se nazývají *vektory jednotkové*. Směrové derivace vůči těmto jednotkovým vektorům v uvedené bázi udávají, jak je daná funkce závislá na jednotlivých proměnných.

Definice 4.2. Nechť má funkce f v bodě x směrové derivace ve směru jednotkových vektorů e_i , $i = 1, \dots, n$, pak se tyto derivace nazývají *parciálními derivacemi funkce f v bodě x podle proměnné x_i* . Značíme:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \text{ nebo } f'_{x_i}(x).$$

Poznámka 4.1. Pro zvolené $i \in 1, \dots, n$ budeme předpokládat, že jsou všechny proměnné $x_1, \dots, x_n$ fixované s výjimkou x_i . Uvažujme $g(x_i) = f(x_1, \dots, x_n)$,

potom platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= f'_{e_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t e_i) - f(x)}{t} = \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t} &= \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x_i + t) - g(x_i)}{t} &= \frac{dg}{dx_i}(x_i) = g'(x_i),\end{aligned}$$

to znamená, že parciální derivace funkce f je shodná s obyčejnou derivací funkce g . Z výše uvedeného tedy vyplývá metoda výpočtu parciálních derivací. Parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ vypočítáme jako obyčejnou derivaci funkce f podle proměnné x_i a ostatní proměnné, které jsou různé od x_i , považujeme za konstanty.

V případě funkcí jedné proměnné platí, že má-li funkce v bodě vlastní derivaci, pak je v tomto bodě i spojitá. O tom, že obdobné tvrzení v případě funkcí více proměnných a parciálních derivací neplatí, se přesvědčíme na následujícím příkladu.

Příklad 4.1. Funkce definovaná předpisem

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} a \neq 0 & \text{pro } x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

má v bodě $[0, 0, \dots, 0]$ všechny parciální derivace vlastní (rovny 0) a přesto zde funkce není spojitá, protože $f(0, 0, \dots, 0) = a$ a v každém okolí kolem počátku lze nalézt body, v níž má f funkční hodnotu rovnu 0. Parciální derivace totiž charakterizují chování funkce pouze ve směrech rovnoběžných se souřadnicovými osami. $\triangle$

Věta 4.1. (*O střední hodnotě*) *Nechť je $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ otevřený interval (viz Poznámka 4.2.) a nechť funkce $f : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ má všechny parciální derivace v libovolném bodě $z \in \gamma$. Pak existují čísla $\theta_1, \dots, \theta_n$ z intervalu $(0, 1)$ k bodům $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n] \in \gamma$ taková, že*

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(Q_i), \quad (4)$$

kde

$$Q_i = (y_1, \dots, y_{i-1}, x_i + \theta_i(y_i - x_i), x_{i+1}, \dots, x_n) \in \gamma, \quad i = 1, \dots, n.$$

Důkaz věty lze najít například v [6].

Poznámka 4.2. Otevřeným intervalem $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme množinu

$$\gamma = \{[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n : a_1 < x_1 < b_1, \dots, a_n < x_n < b_n\}, \quad (5)$$

kde $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_n$ jsou pevná reálná čísla splňující $a_i \leq b_i$ pro každé $i = 1 \dots n$.

Věta 4.2. Má-li funkce f v libovolném bodě $x \in D(f)$ všechny své parciální derivace a existuje-li $c \in (0, \infty)$ takové, že

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq c \quad \text{pro každé } x \in D(f), \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

potom je f na $D(f)$ spojitá.

Důkaz. Mějme libovolné pevné $x = [x_1, \dots, x_n]$ z $D(f)$. Protože je $D(f)$ otevřená množina, existuje $r > 0$ tak, že otevřená koule se středem v bodě x a poloměrem r $\kappa(x, r) \subset D(f)$. Nechť množina

$$\gamma = \{y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < \frac{r}{\sqrt{n}}, i = 1, \dots, n\}, \quad (7)$$

pak dle (5) je γ interval, který je otevřený a platí $x \in \gamma \subset \kappa(x, r)$. Následně pro libovolný bod $y \in \gamma$ dostaneme podle vztahu (6) a Věty 4.1.

$$|f(y) - f(x)| = \left| \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(Q_i) \right| \leq c \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|. \quad (8)$$

Z výše uvedeného plyne $\lim_{\substack{\gamma \\ y \rightarrow x}} |f(y) - f(x)| = 0$. Dle ekvivalence

$$\lim_{\substack{A \\ x \rightarrow x_0}} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{A \\ x \rightarrow x_0}} |f(x)| = 0 \text{ je } \lim_{\substack{\gamma \\ y \rightarrow x}} f(y) = f(x). \quad (9)$$

Pro dostatečně velká m každá posloupnost $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset D(f)$, $x_m \rightarrow x_0$ splňuje, že $x_m \in \gamma$, proto dle Definice 3.1. platí $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$. Funkce f je tedy spojitá

v x . Protože je x libovolné, je f spojitá na $D(f)$. □

5. Stejnoměrná spojitost

Poslední kapitola je zaměřena na stejnoměrnou spojitost funkce a její souvislost se spojitostí.

Při vypracování kapitoly byly použity zdroje [3], [6].

Definice 5.1. Nechť pro každé dvě posloupnosti $\{x_m\}_{m=1}^\infty, \{y_m\}_{m=1}^\infty \subset A$ platí:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_m, y_m) = 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |f(x_m) - f(y_m)| = 0, \quad (10)$$

pak se funkce f nazývá *stejnoměrně spojitá na A* .

Věta 5.1. Jestliže je funkce f stejnoměrně spojitá na množině A , potom je f na A spojitá.

Důkaz. Uvažujme funkci f , která je stejnoměrně spojitá na A . Zvolíme si libovolnou posloupnost $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A$ a libovolný bod x z A a položíme $y_m = x$ pro každé $m \in \mathbb{N}$. Následně z výše uvedeného vztahu (10) dostáváme

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_m, x) = 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} |f(x_m) - f(x)| = 0.$$

Podle vztahu (2) z Věty 2.2. to znamená, že je f vzhledem k A spojitá v bodě x . Spojitost f na A vyplývá z libovolnosti x . $\square$

O tom, že opačná implikace neplatí, se přesvědčíme na následujícím příkladu.

Příklad 5.1. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je dána vztahem $f(x, y) = x^3 + y^3$. Položme $A = \mathbb{R}^2$. Funkce f je spojitá na A , protože je f polynom v $\mathbb{R}^2$. Nyní si ukážeme, že f není na A spojitá stejnoměrně. V množině A si zvolíme posloupnosti $\{x_m\}_{m=1}^\infty, \{y_m\}_{m=1}^\infty$ takto: $x_m = (m + \frac{1}{m}, m)$ a $y_m = (m, m)$ pro $m \in \mathbb{N}$. Pak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_m, y_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{(m + \frac{1}{m} - m)^2 + (m - m)^2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0.$$

Dále pro

$$f(x_m) = (m + \frac{1}{m})^3 + m^3 \quad \text{a} \quad f(y_m) = m^3 + m^3$$

je

$$|f(x_m) - f(y_m)| = (m + \frac{1}{m})^3 - m^3 = 3m + \frac{3}{m} + \frac{1}{m^3}.$$

Protože $\lim_{m \rightarrow \infty} |f(x_m) - f(y_m)| = \infty$, není splněna podmínka (10) a tedy funkce f není na A stejnoměrně spojitá. $\triangle$

Věta 5.2. *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- a) *funkce f je na množině A stejnoměrně spojitá,*
- b) *pro každé ε z intervalu $(0, \infty)$ existuje δ z intervalu $(0, \infty)$ takové, že každé dva body $x, y \in A$ splňují*

$$\rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (11)$$

Důkaz Věty 5.2. lze najít například v [6].

Poznámka 5.1. Uvažujme, že f je na množině A spojitá, tj. v libovolném bodě $x \in A$ je f spojitá vzhledem k A . Z Definice 2.1. plyne, že

$$\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

je ekvivalentní s podmínkou

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in A : \quad \text{platí (11)}. \quad (12)$$

Nyní uvažujme, že je f stejnoměrně spojitá na A . Podle Věty 5.2. můžeme tuto podmínku ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A : \quad \text{platí (11)}. \quad (13)$$

Je vidět, že podmínka spojitosti (12) je odlišná od podmínky stejnoměrné spojitosti (13) pouze pořadím kvantifikátorů $\exists \delta > 0$ a $\forall x \in A$. Ve vztahu (12) je číslo δ závislé na ε a x , zatímco ve vztahu (13) závisí δ jen na ε .

Věta 5.3. *Nechť f je spojitá na kompaktní množině A . Potom je funkce f na A stejnoměrně spojitá .*

Důkaz. Nechť je množina A kompaktní a nechť f je spojitá na A . Důkaz této věty provedeme sporem. Budeme tedy předpokládat, že funkce f není na A stejnoměrně spojitá. Tzn., že existují dvě posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ v A , které mají následující vlastnost

$$\rho(x_n, y_n) \rightarrow 0 \text{ a přitom } |f(x_n) - f(y_n)| \not\rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Potom existuje $\varepsilon > 0$ a vybrané podposloupnosti $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ pro které platí

$$\rho(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{k} \text{ a přitom } |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon \text{ pro } n_k \in \mathbb{N}.$$

Protože je A kompaktní, lze vybrat $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in A$.

Pak je

$$0 \leq \rho(x_0, y_{n_k}) \leq \rho(x_0, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) < \rho(x_0, x_{n_k}) + \frac{1}{k},$$

tedy $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x_0$. Ze spojitosti funkce f plyne

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = f(x_0).$$

Dostaneme tedy

$$0 < \varepsilon \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_0) - f(y_{n_k})| = 0,$$

spor. □

Poznámka 5.2. Spojitost na kompaktních množinách (tj. uzavřených a omezených) v $\mathbb{R}^n$ je ekvivalentní se stejnoměrnou spojitostí.

Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo vytvořit ucelený pohled na jeden z důležitých pojmů matematické analýzy - na spojitost funkcí více proměnných. V práci se čtenář může blíže seznámit se spojitostí funkcí více proměnných a její souvislosti s dalšími složkami diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Práce obsahuje základní definice, věty a vlastnosti spojitých funkcí a je obohacena o řadu příkladů.

Psaní této práce mi prohloubilo mé znalosti týkající se spojitosti, limity a derivací funkcí více proměnných. Naučila jsem se pracovat s typografickým programem $\text{\LaTeX}$, který mi při sázení složitých matematických vzorců práci velmi usnadnil. Dále jsem se naučila při tvorbě obrázků pracovat s matematickým programem Maple 7 a programem AutoCad a vyzkoušela jsem si i práci s cizojazyčnou odbornou literaturou.

Doufám, že jsem čtenáře prací zaujala a že úsilí, které jsem do práce vložila, mi bude přínosem do budoucnosti.

Literatura

- [1] Došlá, Z., Došlý, O., *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, 3. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2006
- [2] Došlá, Z., Plch, R., Sojka, P., *Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple V*. Brno: Masarykova univerzita, 1999
- [3] Hamhalter, J., Tišer, J., *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, 2. vydání. Praha: ČVUT, 2005
- [4] Klaška, J., *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*, 1. vydání. Brno: VUT, 2006
- [5] Rachůnková, I., *Matematická analýza - Metrické prostory*, 1. vydání. Olomouc: rektorát Univerzity Palackého, 1987
- [6] Rachůnková, I., Rachůnek, L., *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2004
- [7] *Limits and continuity of function of two or three variables*, [online], dostupné z: <http://math.sci.ccny.cuny.edu/document/show/2214>, [citováno 20. 4. 2015]
- [8] *II. Funkce dvou proměnných*, [online], dostupné z: <http://kma.me.sweb.cz/funkce-dvou-prom.pdf>, [citováno 21. 10. 2014]
- [9] *Heineho věta*, [online], dostupné z: <http://fyzikalniulohy.cz/uloha.php?uloha=1226>, [citováno 10. 2. 2015]
- [10] *Limita a spojitost*, [online], dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/portal/limita_examsa_examsspojnost/limita.php?kapitola=vety, [citováno 14. 2. 2015]
- [11] *Limita a spojitost funkce více proměnných*, [online], dostupné z: http://homen.usb.cz/kre40/espmat2/kapitoly/kapitola_exam4_exam3.pdf, [citováno 14. 2. 2015]
- [12] *Limity a derivace funkcí více proměnných*, [online], dostupné z: <http://dagles.klenot.cz/rihova/limfcevp.pdf>, [citováno 20. 2. 2015]
- [13] *Metrické prostory*, [online], dostupné z: <http://kma.me.sweb.cz/metr-prostor.pdf>, [citováno 15. 10. 2014]
- [14] *Reálné funkce více proměnných*, [online], dostupné z: http://www.kubenka.org/PEF/1_examsrcnik/Matematika/fcedvouprom.pdf, [citováno 10. 10. 2014]

- [15] Studijní text - MATEMATIKA, *Funkce více proměnných*, [online], dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_examsfile=799, [citováno 10. 10. 2014]
- [16] *Supplement on continuity of real-valued functions*, [online], dostupné z: http://www.math.ucsd.edu/~minnes/archive/spring2011/109/files/109_examssp2011_examscontinuity.pdf, [citováno 20. 4. 2015]