

Posudek na doktorskou disertační práci Mgr. Petry Pirklové (UP Olomouc) s názvem „Metrizovatelnost afinní konexe“.

Komentáře.

Kapitola 1 je úvodem k celé práci a celkem dobře vystihuje její obsah.

Kapitola 2 se zabývá základními pojmy a výsledky afinní diferenciální geometrie a Riemannovy geometrie v rozsahu základního kurzu pro 3. ročník studia. Tento krátký kurz je obohacen ještě o pojem rekurentnosti tenzorových polí.

Kapitola 3 se zabývá obecnými pravidly týkajícími se metrizovatelnosti afinní konexe. Autorka zde mohla podrobněji komentovat podmínky (3.2), (3.3) jako nutné podmínky pro metrizovatelnost.

V kapitole 4 se popisuje na příkladech v dvojrozměrném případě „přímá metoda metrizace“ pocházející od Eisenhardta a Veblena. K tomu mám tuto poznámku: v posledním příkladě by bylo vhodné ještě dodat, že sestrojené metriky jsou vesměs euklidovské, jak je vidět po transformaci souřadnic. Autorka mohla raději uvést méně triviální příklad, který by vedl na metriku s nenulovou konstantní křivostí resp. na Lorentzovu metriku s konstantní křivostí.

V kapitole 5 se popisuje metrizací metoda Eisenhardta a Veblena v obecnějším případě a je ilustrována na řadě příkladů, které jsou však pro jednoduchost opět voleny v dimenzi 2. Věta 5.1 je velmi dobře a srozumitelně podaná. Pokud jde o Příklad 5.3, není úplně dobře prezentován. Píše se, kovariantní derivace tenzorových polí $G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)}$ musí vyhovovat (prázdně!) soustavě (5.3), namísto toho, aby se řeklo, že jejich kovariantní derivace mají být nulové. Zajímavá je poslední formule na straně 52. Na první pohled vůbec není zřejmé, že metriky tohoto tvaru jsou vesměs euklidovské. Dobře je pojednána Poznámka 5.4 s následujícími příklady. Na straně 57, v předposledním řádku je jazyková perlička „varieta je nikde plochá“ místo správného překladu „varieta není nikde plochá“.

Kapitola 6 má název „Tensorové metody v dimenzi 2“. Na straně 56, osmý řádek zdola, je stylistická chyba: místo „nahradíme-li komponenty tenzoru křivosti“ by mělo být „použijeme-li formuli (2.5) pro tenzor křivosti“. „Čínské formule“ (6.13) – (6.15) jsou velmi zajímavé. Na straně 60 v prvním řádku je omylem uveden odkaz [39] místo odkazu [38]. Na stranách 62 – 64 jsou uvedeny zajímavé příklady. Také je zde použita počítačová grafika. Tato část však souvisí s tématem kapitoly jen velmi volně.

Kapitola 7 má název „Metrizovatelnost dvojdimenzionálních variet“. Jsou zde systematicky shrnuty známé výsledky pro metrizovatelnost v dimenzi 2 a to i v globálním případě. Na straně 67 dole je však opět omylem uveden odkaz [39] místo odkazu [38].

Kapitola 8 je zřejmě ústřední kapitolou celé práce. Ta začíná shrnutím definic grup holonomie, které je ale neúplné. Ze čtyř variant grup holonomie jsou explicitně popsány jen dvě. V Důsledku 8.3 je vysloveno jedno známé tvrzení, ale v poněkud neuspořádaném tvaru. Patrně by se mělo dokázat první tvrzení věty a to z toho, že zúžená grupa holonomie je komponentou jednotky v celé grupě holonomie a obě grupy tedy mají stejné Lieovy algebry. Toho je si ale autorka zřejmě vědoma.

V dalším odstavci je popsána podmínka, za které je některá bilineární symetrická forma invariantní vzhledem ke grupě holonomie. V analytickém případě se tato podmínka dá vyjádřit pomocí algebry

holonomie. Následující odstavec je věnován „rozhodovacímu algoritmu“ z práce [37]. Zde je překlep na straně 74, čtvrtý řádek zdola: Správně má být „mnohočlen je nulový“ místo „mnohočlen je nenulový“ (srovnej s textem o dva řádky níže). Jinak autorka ukázala dobré porozumění nesnadného textu z [37]. Pomocí nové metody znovu řeší příklad 5.3 z kapitoly 5 a dochází ke stejnému závěru. V posledních dvou příkladech se autorka odvolává na diplomovou práci [79]. Měla by vyjasnit, zdali vnesla do řešení těchto dvou úloh nějaký vlastní přínos.

V kapitole 9 se hledají aplikace metrízovatelnosti ve variačním počtu. Pro tento účel se uchazečka musela seznámit s novými tématy, jako jsou Lagrangian, Eulerovy-Lagrangeovy operátory, inverzní problém ve variačním počtu, Helmholtzovy podmínky aj. Dochází se k velmi zajímavým výsledkům. Zajímavá je například věta 9.2 z článku [75], pro niž autorka podává nový důkaz. Novou metodou je opět řešena řada příkladů na metrízovatelnost.

V kapitole 10 se autorka zabývá rekonstrukcí konexe nebo metriky z jejích předepsaných hodnot na nadploše zkoumané variety. K Větě 10.2 bych poznamenal, že by ji bylo možné formulovat názorněji. Například tak, že místo o podvarietě S by se prostě mluvilo o krychli K_{n-1} v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$, podobně jako je tomu u následující Věty 10.4. Jinak jsou věta i její důkaz správné. V této kapitole mi chybí zobecnění Věty 10.4 a Věty 10.5, které jsou podle mého názoru formulovány pouze pro euklidovský prostor, na libovolnou varietu. To by zřejmě byla jen aplikace toho, jak se obvykle definuje podvarietu dimenze $n-1$ hladké variety dimenze n , totiž, že v každém bodě takové podvariety musí existovat lokální mapa, která difeomorfně převádí okolí bodu na dané varietě na otevřenou množinu v $\mathbb{R}^n$ a současně průnik tohoto okolí s podvarietou na otevřenou podmnožinu v prostoru $\mathbb{R}^{n-1}$ („lokální rektifikace podvariety“). Poznamenejme, že fundamentálním příspěvkem k dané tematice je článek < [Reckziegel, Helmut, Über Riemannsche Metriken, deren Werte, Levi-Civita-Zusammenhang und Riemannscher Krümmungstensor über einer Untermannigfaltigkeit vorgeschrieben sind. *Math. Ann.* 207 \(1974\), 281–299.](#) >

Kapitola 11 se nazývá „Křivostně homogenní prostory“. Tato kapitola není vyčerpávajícím přehledným článkem o tematice, ale věnuje se především novým trendům, jako je například nedávný článek [46]. Tato užší tematika je celkem dobře zpracována. (Dotaz: autorka píše na straně 106 „Existují však lokálně homogenní variety, nikoli úplné, které nejsou lokálně izometrické žádnému homogennímu prostoru“. Umí autorka najít nějakou referenci k tomuto (pravdivému) tvrzení?)

Kapitola 12 nazvaná „Lokálně homogenní afinní konexe“ zřejmě patří k nejslabším místům dizertace. Jde současně o tematiku velmi náročnou. Hlavním důvodem bude nejspíš to, že se autorka příliš opírala o práci [41], která je poněkud hůře čitelná a srozumitelná.

V kapitole 12 měla být více využita práce [3], především tabulka na stranách 3-5 této práce. Z tabulky se sice snadno vidí, že Věta 12.10 na straně 124 platí, ale stejně snadno se ukáže, že Věta 12.15 uvedená na konci práce **neplatí**. Jako pravděpodobný důvod této chyby může být, že autorka v předchozích lemmatech všude předpokládala *rekurentnost* Ricciho tenzoru, ale neuvádí tento předpoklad ve znění věty 12.15. Je tedy možné, že za předpokladu rekurentnosti tato věta platí. Proč ale Věta 12.15 neplatí v obecném znění? V tabulce v [3, p. 3-5] totiž najdeme, že existují dokonce **dvě** neploché metrízovatelné konexe typu B. Jedna je uvedena jako případ 1.2 tabulky (Levi-Civitova konexe Lorentzovy metriky s konstantní křivostí) a druhá je uvedena jako případ 2.2 tabulky (Levi-Civitova konexe hyperbolické roviny). Na omluvu autorky je možné uvést, že citovaná Věta 12.1 B. Opozdy je formulována poněkud zavádějícím způsobem, který jakoby odděloval metrízovatelné

konexe od konexí typu A a typu B. To je ale zcela napraveno v Theorem 2 práce [3] . Tato věta říká, že ve skutečnosti jediná metrizovatelná konexe, která nepatří žádnému z typů A,B je Levi-Civitova konexe sféry (případ 2.3 tabulky). Takže i podle Theorému 2 z práce [3] je věta 12.15 nesprávná, protože přinejmenším Levi-Civitova konexe hyperbolické roviny musí být jednoho z typů A, B. (Že jde o typ B, je samozřejmě vidět až z tabulky).

Stejně tak v podkapitole 12.2 o Killingových vektorových polích se mohla autorka aspoň zmínit o tabulce z [3, p. 3-5], ve které jsou explicitně vyjádřeny všechny **potenciální** Lieovy algebry afinních Killingových vektorových polí, které se „vůbec mohou vyskytnout“ (k některým z těchto algeber ale stále neexistuje žádná odpovídající konexe, viz např. případy 1.4, 1.9, 1.10, 1.11.)

Závěr.

Práce nazvaná „Metrizovatelnost afinní konexe“ se skládá z celkem 12 kapitol a jejich tematika je různorodá. Jednotíci obory jsou afinní konexe, Riemannova geometrie a globální variační počet. Práce neobsahuje žádné převratně nové výsledky, prokazuje však schopnost autorky tvůrčím způsobem pracovat s literaturou (v práci je uvedeno 86 odkazů) a také schopnost jiným způsobem interpretovat řadu známých výsledků. Jedinou závažnější chybu jsem našel v kapitole 12, jinak výsledky pokládám za správné. Práce vcelku splňuje předpoklady kladené na doktorskou dizertaci; doporučuji její uznání a na jejím základě udělení Mgr. Petře Pirklové titul Dr. (PhD).

V Praze 14.8.2012

Prof. RNDr. Oldřich Kowalski, DrSc