UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Bc. Klára Kučerová

Vybrané úlohy antické matematiky

Olomouc 2023

Vedoucí práce: doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc.

Anotace

KUČEROVÁ, Klára. *Vybrané problémy antické matematiky,* Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, 2023. Diplomová práce.

Tato práce se zaměřuje na detailní vysvětlení klasických problémů antické řecké matematiky, což zahrnuje kvadraturu kruhu, trisekci úhlu, zdvojení krychle, rektifikaci kružnice a konstrukci pravidelných mnohoúhelníků. Jedním z hlavních cílů práce je charakterizovat tyto matematické problémy a poskytnout vysvětlení, proč nejsou za daných podmínek řešitelné.

Klíčová slova: Antická matematika, Eukleidés, kvadratura kruhu, trisekce úhlu, zdvojení krychle, rektifikace kružnice, pravidelné mnohoúhelníky.

Annotation

KUČEROVÁ, Klára. *Selected Problems of Ancient Mathematics, Palacký University in Olomouc, Faculty of Education, 2023. Master's Thesis.*

This work focuses on a detailed explanation of the classical problems of ancient Greek mathematics, which includes the quadrature of the circle, trisection of an angle, doubling of the cube, rectification of the circle, and construction of regular polygons. One of the main goals of the work is to characterize these mathematical problems and provide an explanation as to why they are not solvable under the given conditions.

Key words: Ancient Mathematics, Euclid, Quadrature of the Circle, Trisection of an Angle, Doubling the Cube, Rectification of the Circle, Regular Polygons.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a citovala jsem všechny použité zdroje.

V Olomouci dne …………….

……………….

Klára Kučerová

Poděkování

Děkuji doc. RNDr. Tomáši Zdráhalovi CSc. a Mgr. Jitce Hodaňové Ph.D. za vedení této diplomové práce.

Obsah

Úvod

Od počátku civilizace byla matematika jedním z klíčových nástrojů, kterými lidstvo zkoumalo a popisovalo svět kolem sebe. Starověké řecké civilizace, s jejich neúnavným důrazem na logiku a racionální myšlení, představují zásadní milník v historii matematiky. Právě zde byly položeny základy pro mnohé aspekty moderní matematiky.

Tato práce se zaměřuje na pět klasických problémů antické řecké matematiky, známých jako kvadratura kruhu, trisekce úhlu, zdvojení krychle, rektifikace kružnice a sestrojení pravidelných mnohoúhelníků. Tyto problémy, které byly považovány za nerozlučnou součást řecké matematiky, vedly k významným pokrokům v oblasti geometrie a algebraických rovnic, ale také k tvorbě celého nového oboru matematiky, a to teorie čísel.

I přes svou zdánlivou jednoduchost tyto úlohy představují záhady, které přetrvávají tisíce let. Řešení těchto úloh zůstalo mimo dosah kvůli omezením na použití pouze pravítka a kružítka, což byly jediné nástroje povolené v eukleidovské geometrii.

Cílem práce je detailně prozkoumat každý z těchto problémů a také sledovat historii jejich řešení a neúspěchů při pokusu o jejich řešení. Zároveň práce analyzuje dopad těchto problémů na vývoj matematiky a to, jak vedly k objevům a pokrokům, které přetrvávají dodnes. Takto poskytuje ucelený pohled na důležitost a vliv těchto pěti problémů, které významně ovlivnily vývoj matematiky jako disciplíny.

Ve snaze pochopit tyto problémy v plném kontextu, práce také zkoumá řešení a pokusy o řešení, které překračují hranice eukleidovské geometrie, a to s použitím moderních matematických nástrojů a konceptů.

Nakonec, zatímco tyto problémy zůstávají nerozřešitelné za daných eukleidovských podmínek, jsou v průběhu staletí znovu a znovu prozkoumávány. Proto tato práce nejen že poskytuje pohled do minulosti a do vývoje matematiky, ale také nahlíží do budoucnosti, kde tato starověká záhada stále inspiruje nové generace matematiků k dalšímu bádání.

1 Antická matematika

Rozvoj matematiky v Antickém Řecku započal kolem šestého století před naším letopočtem. Během tohoto období se v Řecku objevilo mnoho významných matematiků, kteří přispěli k rozvoji matematického myšlení a vytvořili základy mnoha matematických disciplín.

Představitelé tzv. předplatonovské matematiky, mezi něž se řadí Thales z Milétu či Pythagoras a jeho škola, se zabývali studiem geometrie a čísly. Thales je považován za prvního řeckého matematika, který přinesl geometrii do Řecka a vytvořil základy geometrického myšlení. Přisuzuje se mu výpočet výšky pyramidy a odhad vzdálenosti lodě od břehu, kde využil podobnost trojúhelníků. [1]

Pythagoras a jeho žáci jsou známí pro Pythagorovu větu, která říká, že v pravoúhlém trojúhelníku je součet druhých odmocnin délek odvěsen roven druhé odmocnině délky přepony. Díky jeho objevu nesouměřitelnosti došlo ke vzniku řecké geometrické algebry. To, že nelze číselně vyjádřit hodnotu $\sqrt{a}$, avšak geometricky to možné je, vedlo k myšlence, že jakýkoliv matematický problém je možné vyřešit pomocí geometrie. Avšak jak docházelo k rozvoji matematiky, tak se objevovaly problémy, které nebylo možné vyřešit jen s pomocí geometrie.[2]

Platon, který žil ve 4. století př. n. l., upřednostňoval geometrii a matematiku v rámci své filosofie a viděl v ní důležitý prostředek k poznání reality.

Euklides, žijící ve 3. století př. n. l., napsal knihu Základy, která se stala podkladem matematického vzdělání po mnoho století. Tato kniha obsahovala axiomatizaci geometrie a vysvětlovala základní principy a věty, jako je definice bodu, přímky, roviny a úhlu a další vlastnosti geometrických útvarů.

Další významný matematik byl Archimedes, který působil ve 3. století př. n. l. Zabýval se geometrií, aritmetikou a matematickou fyzikou. Jeho přínosy zahrnovaly objevy v oblasti ploch a objemů, výpočty hodnoty π a vynálezy matematických nástrojů.

Antická matematika pokračovala v dalších stoletích až do konce starověku, a to prostřednictvím dalších matematiků jako Pappus z Alexandrie a Diofantos z Alexandrie. Jejich příspěvky rozšířily oblasti jako je geometrie, teorie čísel a algebra.

---

[1] STRUIK, Dirk J. *Dějiny matematiky*.
[2] HERRMANN, Dietmar. *Ancient Mathematics*.

Celkově lze říci, že antické Řecko hrálo klíčovou roli ve vývoji matematiky a vytvořilo základy, které ovlivnily matematické myšlení a disciplíny až do současnosti. Myšlenky z tohoto období jsou stále studovány a ovlivňují moderní matematiku.

1.1 Pět úloh

Pojmem klasické úlohy řecké matematiky se označuje pět úloh, které byly definovány již v pátém století před našim letopočtem. Jedná se o kvadraturu kruhu, trisekci úhlu, zdvojení krychle, rektifikaci kružnice a sestrojení pravidelných n-úhelníků. Více jak dva tisíce let se je matematikové snažili vyřešit, avšak marně. Až v devatenáctém století bylo dokázáno, že tyto úlohy za daných podmínek vyřešit nelze.[3]

Důvody vzniku

Určitě je na místě se zeptat, co vedlo k vzniku těchto pěti úloh. Pro nalezení odpovědi musíme zohlednit historický kontext a vývoj matematiky v dané době. Po objevení nesouměřitelnosti úseček v 5. století př. n. l. došlo k tzv. první matematické krizi. Řekové viděli řešení v přechodu od aritmetiky k geometrii. Hodnoty nejsou již vnímány jako čísla, ale jako délky, plochy a objemy, které jsou reprezentovány úsečkami, čtverci a krychlemi. Tento pohled na matematiku je někdy také označován jako řecká geometrická algebra. Pracovat s těmito veličinami pak znamená provádět geometrickou konstrukci pomocí pravítka a kružítka.[4]

Jednorozměrné veličiny, reprezentované úsečkami, je snadné sčítat a odečítat, stejně tak vytvářet jejich násobky nebo je dělit na libovolný počet částí. Problém však nastává, když chceme takto vyjádřit délku nějaké křivky. Základní a jistě i nejjednodušší takový objekt je kružnice. Vyjádření její délky pomocí úsečky pak ovšem není nic jiného než úloha o kvadratuře kruhu.[5]

---

[3] KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*.
[4] STRUIK, Dirk J. *Dějiny matematiky*.
[5] HERRMANN, Dietmar. *Ancient Mathematics*.

Dvojrozměrné veličiny jsou reprezentovány plochami čtverců. I s nimi lze provádět základní operace. Pomocí Pythagorovy věty je můžeme sčítat i odečítat. Také je snadné libovolný n-úhelník převést na čtverec o stejném obsahu. Avšak opět narazíme u křivočarých útvarů. Převedení kruhu na čtverec odpovídá úloze o kvadratuře kruhu.[6]

U trojrozměrných veličin nastane problém hned při sčítání. Základní operace, tedy sčítání dvou jednotkových krychlí, je pak úlohou o zdvojení krychle.

Co se týče úhlů, je snadné je sčítat a odečítat, dokonce vytvářet jejich přirozené násobky. Dělit je lze bez problémů na polovinu. Avšak snaha o rozdělení úhlu na tři stejné části vedla ke zformulování úlohy o trisekci úhlu.

Těchto pět klasických úloh tedy pravděpodobně vzniklo z několika důvodů. Některé mohly vzniknout z praktických potřeb. Například, duplikace krychle mohla být motivována potřebou zdvojnásobit objem daného objektu. Řecká kultura také oceňovala intelektuální úsilí a logické myšlení, a tyto úlohy představovaly významné intelektuální výzvy. Navíc oceňovalo i symetrii a harmonii, což se odráželo v těchto matematických problémech. Například kvadratura kruhu byla pokusem najít harmonii mezi nejzákladnějšími formami – kruhem a čtvercem. Některé z těchto úloh mohly vzniknout z filosofických důvodů. Například trisekce úhlu mohla odrážet řecký zájem o trichotomii, což je rozdělení celku na tři stejné části. [7]

Stručný popis úloh

U kvadratury kruhu je cílem této úlohy najít metodu pro konstrukci čtverce se stejnou plochou jako má daný kruh.

Při trisekci úhlu hledáme úhel třetinové velikosti k původnímu libovolně velkému úhlu.

Zdvojení krychle neboli duplicita krychle označuje obecnou konstrukci, pomocí které sestrojíme krychli o dvojnásobném objemu oproti původní libovolné krychli.

Rektifikace kružnice prezentuje sestrojení úsečky o délce dané kružnice, tedy převedení kružnice na úsečku.

[6] HERRMANN, Dietmar. *Ancient Mathematics*.
[7] BEČVÁŘ, J. a E. FUCHS. *Historie matematiky I*.

Konstrukcí pravidelných n-úhelníků, jak už název sám napovídá, je myšlena obecná konstrukce, díky které sestrojíme pravidelný n-úhelník, kde n je větší než 3.

2 Eukleidés

Eukleidés byl slavný řecký matematik, který žil okolo roku 300 př. n. l. O jeho životě se nedochovalo mnoho informací, víme jen, že žil za vlády egyptského panovníka Ptolemaia I. Své vzdělání v oblasti matematiky získal nejspíše v Athénách, poté vyučoval v Alexandrii, kde také založil školu. Nejvíce se věnoval studiu geometrie, také fyziky, astronomie či hudby. Nejvýznamnějším Eukleidovým dílem jsou Základy, které se skládají ze třinácti knih. Později ještě vznikla čtrnáctá a patnáctá kniha, které však již nenapsal Eukleidés. Za autora čtrnácté knihy je považován Hypsikles z Alexandrie. U patnácté knihy není jisté, kdo je jejím autorem, může se jednat o Isidora z Milétu či o některého z jeho žáků. Mezi Eukleidova další díla patří Dané prvky, Úkazy, Nauka o světle, O hudebních intervalech. [8]

Základy obsahují systematické a axiomatizované základy geometrie, které Eukleides vyvinul. V této knize se Eukleides zabývá různými aspekty geometrie, jako jsou bod, přímka, úhel, trojúhelník, kruh a mnoho dalších geometrických konstrukcí a vztahů. Dále také obsahují mnoho důkazů a vět, které sloužily jako základ pro rozvoj matematického myšlení po mnoho století.[9]

Eukleides svou práci v Základech dále rozvíjel v oblasti teorie čísel, kde se zabýval vlastnostmi celých čísel a zavedl mnoho důležitých pojmů, včetně prvočísel a jejich vlastností. Jeho Základy se staly standardem matematického vzdělání po celá staletí a stále jsou studovány a používány dodnes. Eukleides a jeho dílo měly obrovský vliv na rozvoj matematiky a ovlivnily myšlení mnoha dalších matematiků po celou historii.[10]

2.1 Základy

Již zmíněných třinác knih obsahují souhrnné poznatky týkající se především geometrie a aritmetiky, která zde byla potřebná k důkazům. Tato kniha položila základy geometrie a byla důležitým krokem v matematickém myšlení a výuce geometrie.

[8] STRUIK, Dirk J. *Dějiny matematiky*.
[9] SERVÍT, F. *Eukleidovy základy*.
[10] KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*.

Jak již bylo řečeno, Základy jsou rozděleny do 13 knih, z nichž každá se zabývá určitým aspektem geometrie. Struktura je postavena na systému definic, axiomatických výroků a důkazů, které slouží k logickému vyvozování geometrických vlastností a vztahů.

Hlavní témata, kterými se Základy zabývají, zahrnují:

1. Bod, přímka a rovina.
2. Úhly, trojúhelníky a jejich vlastnosti.
3. Kruhy a kruhové konstrukce.
4. Čtverce, obdélníky a jejich vlastnosti.
5. Konstrukce pravidelných mnohoúhelníků.
6. Relace mezi geometrickými objekty, jako jsou podobnost a kongruence.[11]

Každá kniha obsahuje postupnou prezentaci definic a vět, následovanou důkazy. Eukleides přistupoval k matematice s důrazem na logickou strukturu a důkazy. Tento důraz na axiomatizaci a logiku udělal ze Základů příkladné dílo matematické deduktivní metody.

Základy měly obrovský vliv na matematiku a geometrii po celá staletí. Byly přeloženy do mnoha jazyků a byly studovány jako základní text geometrie ve školách a univerzitách po celém světě. Euklidova práce položila pevné základy geometrického myšlení a ovlivnila vývoj matematiky až do současnosti.[12]

2.2 Eukleidovská konstrukce

Eukleides ve svých Základech formuloval požadavky na konstrukci daných úloh, dnes tyto požadavky označujeme jako Eukleidovská konstrukce. Při rýsování je povoleno pouze pravítko a kružítko. V praxi to znamená, že je k dispozici libovolně dlouhé pravítko s jednou rovnou hranou, avšak bez jakýchkoliv stupnic či značek. Přímku lze sestrojit tak, že je vedena již předem stanovenými dvěma body. Kružítko je možné použít s libovolně velkým

[11] EUKLEIDÉS. *Eukleidovy Základy [Elementa]*.
[12] SERVÍT, F. *Eukleidovy základy*.

poloměrem, avšak podmínkou jeho použití je známý střed a velikost poloměru, který je chápán jako vzdálenost dvou bodů.[13]

Jedná se tedy o konstrukční postup v geometrii, který se zaměřuje na vytváření geometrických útvarů jen za pomoci pravítka a kružítka. Tato konstrukční metoda je založena na přesných pravidlech a postupech, které se vyvinuly ve starověkém Řecku a byly popsány v Eukleidových Základech.

Euklidovské konstrukce se řídí několika základními pravidly, která jsou známa jako eukleidovské postuláty:

1. Postulát bodu: Lze zakreslit libovolný bod v rovině.
2. Postulát přímky: Lze spojit dva body přímkou.
3. Postulát oblouku: Lze kreslit oblouk kolem daného bodu s daným poloměrem.
4. Postulát kolmice: Lze postavit přímku kolmou na danou přímku přes daný bod.
5. Postulát rovnoběžnosti: Lze sestrojit rovnoběžku s danou přímkou, která prochází daným bodem.[14]

Tato pravidla umožňují provádět základní konstrukce, jako je spojování bodů přímkou, konstrukce úhlu, konstrukce rovnoběžek, sestrojení kolmice a mnoho dalšího.

Eukleidovská konstrukce je založena na použití pravítka jako nástroje na vytváření přímek a kružítka jako nástroje na sestrojení oblouků. S těmito nástroji a dodržováním eukleidovských pravidel lze provádět konstrukce, které nevyžadují měření nebo numerické hodnoty.[15]

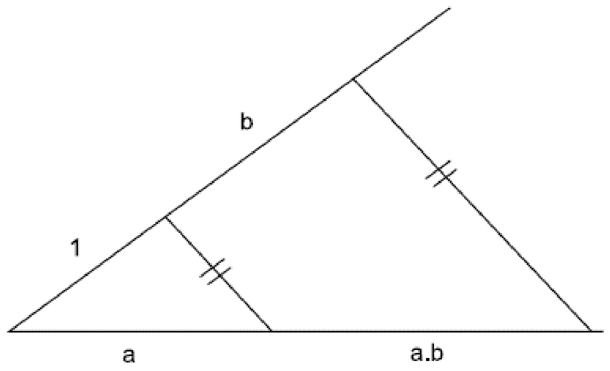
Tato konstrukce je důležitá pro geometrii a matematiku jako základní postup pro důkazy a konstrukce. Přestože moderní matematika používá širší spektrum nástrojů a metod, eukleidovská konstrukce zůstává důležitým aspektem geometrického myšlení a je stále studována a vyučována v matematickém vzdělávání.[16]

---

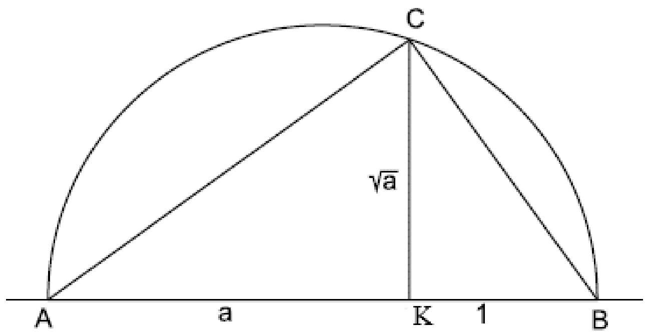
[13] ŠOFR, Bedřich. *Euklidovské geometrické konštrukcie*.
[14] EUKLEIDÉS. *Eukleidovy Základy [Elementa]*.
[15] SERVÍT, F. *Eukleidovy základy*.
[16] ARTMANN, Benno. *Euclid—The Creation of Mathematics*.

Při konstrukci pravítkem a kružítkem máme nějakou množinu bodů M_1, ze které chceme vytvořit množinu bodů M_2, a to pouze s využitím konečného počtu sestrojených kružnic a přímek.

Nejdříve je potřeba zvolit jednotkovou úsečku a libovolnou úsečku, která je a-násobkem délky jednotkové úsečky, a náleží R. Poté se jedná o úsečku délky a. Za využití racionálních operací, mezi které patří sčítání, odčítání, násobení a dělení a s pomocí druhých mocnin lze vytvořit z určených délek novou délku. Při zvolení jednotky o dané délce je možné k daným úsečkám o délkách a, b sestrojit úsečky délky $a \cdot b$ či $\sqrt{a}$.[17]



Obrázek 1: Konstrukce úsečky o délce a.b *(Zdroj: Vlastní zpracování)*



Obrázek 2: Konstrukce úsečky o délce $\sqrt{a}$ (Zdroj: Vlastní zpracování)

[17] SERVÍT, F. *Eukleidovy základy*.

Konstrukce pravítkem a kružítkem tedy obsahuje sestrojení přímky a kružnice, nalezení průsečíku dvou přímek, dvou kružnic a přímky a kružnice.

Sestrojení přímky

Mějme dva body $A = [x_1, y_1]$ a $B = [x_2, y_2]$. Přímka, která těmito body prochází, má rovnici

$$x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2) = 0.$$

Tudíž

$$ax + by + x = 0.$$

Množina racionálních čísel je uzavřená vzhledem ke sčítání, odčítání, násobení a dělení. Proto jsou i koeficienty a, b, c taktéž racionální čísla. [18]

Sestrojení kružnice

Mějme kružnici k se středem v bodě $S = [m, n]$ a poloměrem r.

Rovnice kružnice je $(x - m)^2 + (y - n)^2 - r^2 = 0$,

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Opět koeficienty a, b, c jsou racionální čísla.[19]

Průsečík dvou přímek

Jsou dány dvě přímky určené rovnicemi:

$$ax + by + c = 0$$

$$px + qy + r = 0.$$

[18] BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce*.
[19] BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce*.

Jestliže existuje průsečík těchto dvou přímek, pak má souřadnice

$$x = \frac{cp - ar}{aq - bp}$$

$$y = \frac{cq - br}{pb - aq}$$

Opět se jedná o racionální čísla.

Na základě zlomku je možné určit, v jaké vzájemné poloze se přímky nacházejí. Jestliže jsou oba jmenovatelé rovny nule, pak jsou přímky rovnoběžné. Když jsou čitatelé nenuloví, pak přímky nemají žádný společný bod. Jestliže jsou i oba čitatelé rovny nule, pak jsou přímky totožné. [20]

Průsečík přímky a kružnice

V tomto případě se musí řešit soustava dvou rovnic

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$px + qy + r = 0$$

Jestliže existuje řešení této soustavy, tak se nemusí jednat o racionální čísla, protože se v průběhu výpočtu používala druhá mocnina[21]

Průsečík dvou kružnic

Opět se zde řeší soustava dvou rovnic o dvou neznámých

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$$

Stejně jako u předchozího příkladu, řešením nemusí být racionální číslo, protože se k výpočtu využívá druhá odmocnina.

[20] BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce*.
[21] BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce*.

Souhrnně lze tedy říci, že konstrukci pravítkem a kružítkem je možné provést jedině v případě, kdy souřadnice původní množiny M_1 lze upravit pomocí racionálních operací a druhých odmocnin tak, aby vznikla výsledná množina M_2.[22]

[22] ŠOFR, Bedřich. *Euklidovské geometrické konštrukcie*.

3 Kvadratura kruhu

Kvadratura kruhu je jedním z klasických problémů řecké matematiky a odkazuje na úlohu, která se snaží transformovat daný kruh na čtverec se stejnou plochou pomocí geometrických konstrukcí provedených pouze s neznačeným pravítkem a kružítkem.

Výraz kvadratura pochází z latinského slova quadratus, což znamená čtverec. Kvadratura kruhu tedy odkazuje na nalezení čtverce, který má stejnou plochu jako daný kruh.

Převede-li se daný problém do rovnice, dostane se tak $a^2 = \pi r^2$, kde a je strana čtverce a r poloměr kruhu. Jestliže zvolíme kruh s poloměrem $r = 1$, poté získáme $a^2 = \pi$, tudíž $|a| = \sqrt{\pi}$. Protože je nemožné sestrojit za daných podmínek úsečku o délce transcendentního čísla, tak není možné ani sestrojit odmocninu z tohoto čísla. [23]

Problém kvadratury kruhu spočívá v tom, že $\sqrt{\pi}$ je iracionální číslo, a dokonce je to také transcendentní číslo, což znamená, že se jedná o komplexní číslo, které není kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty.. Tím pádem nelze hodnotu √π přesně zkonstruovat pomocí pravítka a kružítka. To bylo dokázáno v 19. století, kdy matematici jako Carl Friedrich Gauss a Ferdinand von Lindemann prokázali, že π je transcendentní číslo. Tím definitivně ukázali, že kvadratura kruhu pomocí pravítka a kružítka není možná. Tato úloha tak patří mezi "nemožné" úlohy starořecké geometrie.[24]

Hodnota π

Koncept čísla π a jeho vztahu k poměru obvodu kruhu k průměru byl známý a používaný tisíce let. Nejstarší známé využití tohoto konceptu je v Egyptě a Babylónii přibližně v roce 2000 před naším letopočtem. Tito starověcí matematici neměli přesnou hodnotu π, jak ji známe dnes, ale používali přibližné hodnoty, které byly pro jejich práci dostatečné.

V 3. století před naším letopočtem, řecký matematik Archimédés z Syracuse vytvořil jedny z nejranějších známých přesnějších výpočtů π. Použil geometrický přístup, který obklopil

[23] GOODWIN, E. J. Quadrature of the Circle.
[24] MARTIN, G. E. *Quadrature of the Circle*.

kruh mnohoúhelníky a vypočítal jejich obvody. Tímto způsobem byl schopen odhadnout hodnotu π s poměrně vysokou přesností.

Ludolph van Ceulen byl nizozemský matematik narozený v 16. století. Je známý svými výpočty hodnoty π na neuvěřitelných 35 desetinných míst, což byl rekord až do doby vývoje počítačových algoritmů. Ceulen použil metodu založenou na geometrii, podobně jako Archimédés před ním. Specificky použil metodu obvodu. Začal s hexagonem a postupně zdvojnásobil počet stran polygonu až na 2^{62} stran. Výpočty byly extrémně pracné a trvalo mu to celý život.[25]

3.1 Důkaz neřešitelnosti

Důkaz je založen na konceptu algebraických a transcendentních čísel: [26]

1. **Algebraická čísla** jsou čísla, která jsou kořenem nějaké polynomiální rovnice s celočíselnými koeficienty. Například číslo $\sqrt{2}$ je algebraické, protože je kořenem rovnice $x^2 - 2 = 0$.
2. **Transcendentální čísla** jsou čísla, která nejsou algebraická. To znamená, že neexistuje žádná polynomiální rovnice s celočíselnými koeficienty, jejíž kořenem by bylo toto číslo.

Ferdinand von Lindemann v roce 1882 dokázal, že π je transcendentní číslo.

Eukleidovské konstrukce pravítkem a kružítkem mohou vytvořit pouze délky odpovídající algebraickým číslům. Jinými slovy, všechny možné délky, které lze zkonstruovat pomocí Eukleidovských konstrukcí, jsou kořeny polynomiálních rovnic s celočíselnými koeficienty.

Jelikož π je transcendentní číslo a ne algebraické, nelze pomocí Eukleidovských konstrukcí přesně zkonstruovat čtverec s plochou rovnou danému kruhu, protože by to vyžadovalo konstrukci délky odpovídající $\sqrt{\pi}$, což je také transcendentní číslo.

[25] BECKMANN, Petr. *Historie čísla pí*.
[26] MARTIN, G. E. *Quadrature of the Circle*.

Takže i když lze π přiblížit pomocí Eukleidovských konstrukcí (například pomocí metody Archimédové založené na mnohoúhelnících), nelze ho přesně zkonstruovat, a proto nelze přesně zkonstruovat kvadraturu kruhu.

3.2 Historie pokusů o řešení

Kvadratura kruhu je problém, který fascinoval matematiky po mnoho staletí, a mnoho z nich se pokusilo tento problém vyřešit. Zde je přehled některých klíčových jmen a jejich příspěvků:[27]

Anaxagoras, který žil v 5. století př. n. l., byl starořecký filozof, který se podle některých zpráv pokusil o kvadraturu kruhu během svého vězení.

Hippokratés z Chiu (5 – 4. stol. př.n.l.) byl první písemně doložený matematik, který se pokusil o kvadraturu kruhu. Zabýval se především kvadraturou lichoběžníků a jiných specifických oblastí.

Archimédés žijící ve 3. stol. př. n. l. byl významný řecký matematik, který se kvadraturou kruhu zabýval a byl schopen omezit hodnotu π mezi dvěma racionálními čísly pomocí mnohoúhelníků vepsaných a opsaných kolem kruhu.

Ptolemaios (asi 100–170 n.l.): Starověký řecký astronom a matematik, který představil metodu pro aproximaci hodnoty π, což je klíčový krok pro kvadraturu kruhu.

Ludolph van Ceulen (1540–1610): Holandský matematik, který vypočítal hodnotu π na 35 desetinných míst.

François Viète (1540–1603): Francouzský matematik, který zavedl koncept kružnicové kvadratury pomocí nesčíslně mnoha mnohoúhelníků, což vedlo k novým pokrokům v kalkulu.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855): Německý matematik, který významně přispěl k důkazu, že kvadratura kruhu není možná pomocí pravítka a kružítka.

[27] STRUIK, Dirk J. *Dějiny matematiky*.

Ferdinand von Lindemann (1852–1939): Německý matematik, který v roce 1882 dokázal, že π je transcendentalní číslo, čímž definitivně ukázal, že kvadratura kruhu pomocí pravítka a kružítka je nemožná.

Tyto a mnoho dalších matematiků se pokusilo o kvadraturu kruhu, a přestože se jim to nikdy nepodařilo dosáhnout pomocí pravítka a kružítka, jejich úsilí vedlo k mnoha významným pokrokům v oblasti matematiky.

3.3 Úprava podmínek a možná řešitelnost

V roce 1925 Alfred Tarski oživil problém úpravou pravidel. Položil otázku, zda je možné úlohu splnit rozdělením kruhu na konečný počet částí, které by se daly přesunout v rovině a znovu sestavit do čtverce o stejné ploše. Neboli dva předměty jsou stejně rozložitelné, jestliže je lze rozdělit na části stejné velikosti a tvaru. Dokument z roku 1964 upřesnil, že tuto úpravu není možné provést za užití nůžek, protože jsou zapotřebí komplikovanější fraktální kousky s dírkami a zubatými okraji. [28]

Kvadraturu kruhu lze vyřešit, pokud se upustí od omezení Eukleidovských konstrukcí a povolí se použití dalších matematických nástrojů a metod. Zde jsou některé příklady:

Kalkulus: [29]

Kalkulus, obor matematiky vyvinutý v 17. století, umožňuje přesné výpočty ploch kruhů a čtverců. Protože kalkulus pracuje s přesnými hodnotami a umožňuje použití iracionálních a transcendentních čísel jako π, umožňuje také přesné výpočty pro kvadraturu kruhu.

Kalkulus je matematická disciplína, která se zabývá limity, derivacemi, integrály a nekonečnými řadami. Ve vztahu k problému kvadratury kruhu je důležitý především koncept integrálu, který nám umožňuje vypočítat plochu pod křivkou v kartézském souřadnicovém systému.

[28] GOODWIN, E. J. Quadrature of the Circle.
[29] MARTIN, G. E. *Quadrature of the Circle*.

Nyní se podívejme na kvadraturu kruhu pomocí kalkulu. Nejdříve se podíváme na definici plochy kruhu. Pokud má kruh poloměr *r*, pak je jeho plocha dána vzorcem $A = \pi r^2$. Kvadratura kruhu tedy znamená najít čtverec, který má stejnou plochu jako daný kruh. Pokud je A plocha kruhu, hledáme čtverec, jehož délka strany s je taková, že $s^2 = A$. Protože $A = \pi r^2$, máme $s = \sqrt{\pi r^2} = r\sqrt{\pi}$. Takže pokud bychom mohli zkonstruovat délku odpovídající $\sqrt{\pi}$, mohli bychom zkonstruovat kvadraturu kruhu.

Avšak $\sqrt{\pi}$ je transcendentní číslo, takže ho nelze zkonstruovat pomocí pravítka a kružítka. Na druhou stranu, v kalkulu můžeme pracovat s $\sqrt{\pi}$ či jakýmkoli jiným transcendentním číslem přímo a přesně, takže můžeme vypočítat délku strany čtverce, který má stejnou plochu jako daný kruh, což je kvadratura kruhu.

Speciální kónické seky: [30]

Některé křivky, jako například parabola, hyperbola a elipsa, lze použít pro konstrukci kvadratury kruhu. Například starověký matematik Dinostratos použil speciální křivku zvanou kvadratrix pro kvadraturu kruhu.

Kvadratrix je typ křivky, která byla použita pro řešení kvadratury kruhu. Tato křivka byla poprvé popsána Dinostratem, řeckým matematikem a sochařem ze 4. století př. n. l.

Jak se kvadratrix konstruuje? Představte si, že máte čtverec a v něm rovnoměrně rotující čáru a rovnoměrně padající čáru. Kvadratrix je křivka, kterou vytvoří průsečík těchto dvou pohybujících se čar.

Když je kvadratrix správně nanesen na čtverec, lze určitou délku na této křivce použít jako novou jednotku míry, která odpovídá $\sqrt{\pi}$. Takže pokud bychom mohli tuto délku zkonstruovat, mohli bychom zkonstruovat kvadraturu kruhu.

Avšak, kvadratrix je tzv. transcendentní křivka, tzn. křivka, která není algebraická a nemůže být zkonstruována pouze pomocí pravítka a kružítka. To znamená, že i když kvadratrix poskytuje teoretické řešení kvadratury kruhu, stále to nevyřeší problém pomocí pravítka a kružítka, které byly jediné nástroje povolené v antické řecké geometrii.

---

[30] MARTIN, G. E. *Quadrature of the Circle*.

Takže ačkoli konické seky a jiné speciální křivky mohou poskytnout řešení kvadratury kruhu ve smyslu najití čtverce s rovnocennou plochou, stále to vyžaduje použití nástrojů a metod mimo pravítko a kružítko.

Aproximace:[31]

I když to není přesné řešení, lze pomocí různých aproximačních metod dosáhnout velmi přesných výsledků pro kvadraturu kruhu. Tyto metody se snaží přiblížit se řešení tak blízko, jak je to jen možné, při použití konečného počtu kroků.

Jednou z nejstarších a nejznámějších aproximačních metod pro kvadraturu kruhu je Archimédova metoda. Tato metoda spočívá v inskripci a opsání mnohoúhelníků uvnitř a vně kruhu a využití těchto mnohoúhelníků k aproximaci plochy kruhu.

Archimedes zjistil, že pokud vepisuje a opisuje pravidelné mnohoúhelníky s rostoucím počtem stran kolem kruhu, plochy těchto mnohoúhelníků se stále více přibližují k ploše kruhu. Archimedes dokázal, že plocha kruhu je menší než plocha vnějšího mnohoúhelníku a větší než plocha vnitřního mnohoúhelníku pro jakýkoli počet stran.

Tím, že zvětšil počet stran těchto mnohoúhelníků, byl Archimedes schopen stále více se přiblížit k ploše kruhu, což mu umožnilo odhadnout hodnotu π s překvapivou přesností pro jeho dobu.

Ačkoli tato metoda neposkytuje přesné řešení kvadratury kruhu pomocí pravítka a kružítka, poskytuje velmi přesný odhad a ilustruje koncept limitu, který je klíčový v kalkulu. Je to také příklad, jak může být nemožný problém aproximován a prakticky řešen pomocí matematiky.

Neklasické konstrukce: [32]

Pokud povolíme použití nástrojů, které nejsou neznačené pravítko a kružítko, můžeme vyřešit kvadraturu kruhu. Jedním z takových příkladů je využití origami, tradičního japonského

[31] GOODWIN, E. J. Quadrature of the Circle.
[32] MARTIN, G. E. *Quadrature of the Circle*.

umění skládání papíru. Origami má matematickou strukturu, která umožňuje konstrukci, jež nejsou možné pomocí Eukleidovských konstrukcí.

Konkrétně matematička Margherita Piazzola Beloch v roce 1936 ukázala, že pomocí skládání papíru (origami) je možné zkonstruovat délku, která je rovna čtvercovému kořeni daného čísla. To je klíčový krok k vyřešení kvadratury kruhu, protože pro kvadraturu kruhu musíme najít čtverec s plochou rovnou danému kruhu. Pokud je poloměr kruhu *r*, pak je plocha kruhu πr^2. Čtverec s touto plochou má stranu délky $\sqrt{\pi r^2} = r\sqrt{\pi}$. Belochova metoda by tedy umožňovala zkonstruovat tuto délku pomocí skládání papíru.

V roce 1992, matematik Humiaki Huzita formalizoval šest základních axiómů origami, známých jako Huzitovy axiómy. Těmito axiómy lze dokázat různé geometrické konstrukce, které nejsou možné pomocí Eukleidovských konstrukcí. Axiómy zahrnují operace, jako je složení papíru tak, aby procházel dvěma body, a složení papíru tak, aby bod padl na čáru. S Huzitovými axiómy lze konstruovat kvadraturu kruhu pomocí origami.

Nicméně i když tato metoda umožňuje vyřešit kvadraturu kruhu, není to řešení, které by vyhovovalo původním podmínkám problému - tedy výhradně pomocí neznačeného pravítka a kružítka.

3.4 Josef Husák

Byl český matematik, který zkoumal přibližné řešení kvadratury kruhu.

Přišel s řešením, ve kterém je dán čtverec *ABCD* o straně *a*. Nad úhlopříčkou *AC* sestrojíme rovnostranný trojúhelník *AKC* a do deltoidu *AKCD* vepíšeme kružnici *k*. Obsah kruhu, který je ohraničený kružnicí *k*, je přibližně roven obsahu původního čtverce ABCD.[33]

[33] HUSÁK, J. Přibližné řešení kvadratury kruhu.

3.5 Hippokratovy menisky

Hippokratovy menisky jsou geometrické útvary, které byly poprvé zkoumány řeckým matematikem Hippokratem z Chiu v 5. století před naším letopočtem.

Hippokrates je známý jako první matematik, který se pokusil o kvadraturu kruhu, což je problém sestrojení čtverce, jehož obsah je stejný jako obsah daného kruhu pomocí použití pouze pravítka a kružítka. Hippokrates vytvořil pokrok v řešení tohoto problému prostřednictvím konceptu menisků.[34]

Hippokratovy menisky jsou vytvořeny tím, že se ze dvou kruhů odstraní stejně velké kruhové výseče a vzniklé křivky se pak spojí. Tento proces vede k vytvoření dvou menisků: jeden je konvexní a druhý je konkávní.

Za určitých podmínek může být obsah konkávního menisku vypočten jako rozdíl mezi obsahem poloviny původního kruhu a obsahem trojúhelníka. Pokud jsou poloměry výsečí a zbytkového kruhu známé, lze tuto hodnotu snadno vypočítat.

Hippokrates objevil, že za určitých podmínek mohou být obsahy konkávního a konvexního menisku stejné. Toto zjištění bylo důležité, protože to znamená, že určité plochy, které nejsou obdélníky ani čtverce, mohou být "zčtvercovány" pomocí pravítka a kružítka. To vedlo k pokroku v oblasti kvadratury kruhu, i když samotný problém kvadratury kruhu nebyl vyřešen.[35]

Je potřeba poznamenat, že ačkoli objev Hippokratových menisků byl důležitým krokem ve vývoji řecké matematiky, nevedl k definitivnímu řešení problému kvadratury kruhu. Tento problém zůstal otevřeným po tisíce let a byl nakonec vyřešen pouze prostřednictvím moderních metod matematické analýzy.

[34] STRUIK, Dirk J. *Dějiny matematiky*.
[35] KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*.

4 Trisekce úhlu

Trisekce úhlu je jedna z klasických úloh řecké matematiky. Úkolem je rozdělit daný úhel na tři rovné části pomocí použití jen neznačeného pravítka a kružítka. To znamená, že musíme být schopni vytvořit tři úhly, které jsou rovnocenné, použitím pouze těchto dvou jednoduchých nástrojů. To je výzva, která se ukázala jako nemožná.

Matematický důvod, proč není možné provést trisekci úhlu pomocí pouze pravítka a kružítka, spočívá v tom, že by to vyžadovalo řešení kubické rovnice pomocí těchto jednoduchých geometrických nástrojů. Ve skutečnosti je to významný problém, protože kubické rovnice mohou mít složité řešení, které zahrnují iracionální čísla, a tato řešení nejsou přístupná pomocí jednoduchých geometrických konstrukcí.[36]

Přestože trisekce úhlu pomocí pravítka a kružítka není možná, existují metody pro trisekci úhlu, které využívají další nástroje nebo techniky. Jedním takovým příkladem je metoda s origami nebo metoda pomocí kružnice Archimedovy.

Je důležité poznamenat, že i když trisekce úhlu je matematicky nemožná za daných podmínek, bylo to stále velmi důležité cvičení v oblasti matematiky. Problém trisekce úhlu vedl k hlubokému zkoumání povahy úhlů a rovnice, které je popisují. Navíc pokusy o řešení tohoto problému vedly k objevu mnoha důležitých konceptů a technik v oblasti geometrie.

Historicky byla snaha o trisekci úhlu jedním z důvodů, proč byla vytvořena algebra. Matematikové jako například Évariste Galois a Pierre Wantzel použili koncepty z oblasti algebraické teorie čísel k prokázání nemožnosti trisekce úhlu, stejně jako nemožnosti duplicity krychle a kvadratury kruhu, pomocí pravítka a kružítka. Mnoho významných matematiků se zabývalo problémem trisekce úhlu, včetně Hippokrata, Eukleida, Archiméda a mnoha dalších. Trisekce úhlu byla také klíčovým prvkem ve vývoji trigonometrie.[37]

Takže ačkoli trisekce úhlu pomocí pravítka a kružítka je nemožná, její studium přineslo mnoho významných pokroků v matematice. Je to příklad toho, jak matematický problém, i když nemožný k řešení za daných podmínek, může přesto vést k hlubokým a důležitým poznatkům.

[36] BEN-ARI, M. Trisection of an Angle.
[37] KOŘÍNEK, Vladimír. *Základy algebry*.

4.1 Důkaz neřešitelnosti

Ověření nemožnosti trisekce úhlu pomocí pravítka a kružítka je skutečně nelehké, protože to vyžaduje pokročilé matematické techniky. Tento problém byl definitivně vyřešen až ve 19. století, když byla vynalezena algebraická teorie čísel. Klíčem k tomuto důkazu je pochopení, že jakékoli délky, které lze zkonstruovat pomocí pravítka a kružítka, musí být konstruovatelná čísla.[38]

Konstruovatelné číslo je číslo, které lze vyjádřit pomocí racionálních čísel a operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocnění, kde exponenty jsou celá čísla. Například $\sqrt{2}$ je konstruovatelné číslo, protože je to řešení rovnice $x^2 = 2$.

Pokud máme úhel, který lze rozdělit na tři rovné části pomocí pravítka a kružítka, pak kosinus tohoto úhlu musí být konstruovatelné číslo. To plyne z faktu, že jakákoli konstrukce s pravítkem a kružítkem, která zahrnuje kružnice a přímky, může být vyjádřena pomocí kvadratických rovnic, a kořeny těchto rovnic jsou konstruovatelná čísla.

Nicméně, pokud vezmeme úhel o velikosti 60 stupňů, pak kosinus tohoto úhlu je 1/2, což je konstruovatelné číslo. Ale pokud tento úhel rozdělíme na tři rovné části, dostaneme úhel o velikosti 20 stupňů, a kosinus tohoto úhlu není konstruovatelné číslo. To můžeme dokázat tím, že zjistíme, že kosinus 20 stupňů je kořenem kubické rovnice $8x^3 - 6x - 1 = 0$ a tato rovnice nemá žádné konstruovatelné kořeny.

Tedy, protože kosinus úhlu, který by byl třetinou úhlu o velikosti 60 stupňů, není konstruovatelné číslo, nemůže být takový úhel zkonstruován pomocí pravítka a kružítka. Toto je matematický důkaz nemožnosti trisekce úhlu pomocí pravítka a kružítka.[39]

[38] ŠVEHLA, J. *Moje dělení úhlu (kruhu) kružítkem a pravítkem*.
[39] BEN-ARI, M. Trisection of an Angle.

4.2 Historie pokusů o nalezení řešení

Historie pokusů o trisekci úhlu je dlouhá a fascinující, a přesahuje tisíce let. Začíná v době starověkého Řecka a pokračuje až do 19. století, kdy bylo konečně dokázáno, že trisekce úhlu pomocí pravítka a kružítka je nemožná.

Jedním z prvních pokusů o trisekci úhlu byl proveden řeckým matematikem Hippiasem z Elis okolo roku 450 př. n. l. Hippias přišel s křivkou, která byla později nazvána po něm - Hippiasova křivka. Tato křivka je schopná trisekce jakéhokoli úhlu, ale vyžaduje víc, než jen pravítko a kružítko.

Další slavný řecký matematik, Archimedes, přišel se svou vlastní metodou trisekce úhlu, která využívala speciálního nástroje nazývaného dělením kruhu. Pomocí této metody je možné rozdělit jakýkoli úhel na třetiny, ale opět vyžadovala víc než jen pravítko a kružítko.

Pokusy o trisekci úhlu pokračovaly během středověku a renesance, s mnoha matematiky a vynálezci, kteří přicházeli se svými vlastními metodami a nástroji. Nicméně, žádná z těchto metod nebyla schopná provést trisekci jakéhokoli úhlu pouze pomocí pravítka a kružítka.

Nakonec, v 19. století, bylo konečně dokázáno, že trisekce úhlu pomocí pravítka a kružítka je nemožná. Tento důkaz byl proveden francouzským matematikem Pierre Wantzelem v roce 1837. Wantzel ukázal, že pokud má úhel kosinus, který je kořenem kubické rovnice, pak tento úhel nemůže být rozdělen na třetiny pouze pomocí pravítka a kružítka.

Od té doby se matematici soustředili na zkoumání jiných metod trisekce úhlu, které vyžadují více než jen pravítko a kružítko. Například, v 20. století bylo ukázáno, že trisekce úhlu je možná pomocí origami, tradičního japonského umění skládání papíru.

Pokusy o trisekci úhlu tedy představují zajímavou kapitolu v historii matematiky, která ukazuje, jak mohou matematické problémy vést k novým a hlubším poznatkům, i když se ukáže, že jsou nemožné k řešení za daných podmínek.[40]

[40] STRUIK, Dirk J. *Dějiny matematiky*.

4.3 Úprava podmínek a možná řešitelnost

Změna podmínek pro řešení problému trisekce úhlu může zahrnovat použití dalších nástrojů nebo metod mimo klasické pravítko a kružítko. Následující jsou příklady metod, které umožňují trisekci úhlu:

Archimedova metoda: [41]

Archimedes popsal metodu trisekce úhlu pomocí speciálního nástroje zvaného dělený kruh, který umožňuje měření různých délek na kružnici.

Dělený kruh je mechanický nástroj s dvěma rotačními rameny umístěnými na stejném bodě, jako střed kružnice. Na jednom rameni je pevně připevněný kruh a druhé rameno má špičku, která může klouzat po obvodu tohoto kruhu.

Začínáme s daným úhlem, který chceme rozdělit na tři stejné části. Úhel je vykreslen pomocí jednoho z ramen děleného kruhu. Dále je na pevném kruhu vyznačena poloha špičky klouzajícího ramene.

Poté se klouzající rameno pootočí o třetinu cesty kolem obvodu pevného kruhu. Výsledný úhel mezi původním ramenem a pozicí klouzajícího ramene je třetina původního úhlu.

Tato metoda je matematicky platná a umožňuje přesné rozdělení jakéhokoli úhlu na tři rovné části. Nicméně, nesplňuje podmínky klasické euklidovské konstrukce, která povoluje pouze použití neznačeného pravítka a kružítka.

Navzdory tomu je Archimedova metoda trisekce úhlu důležitým příspěvkem k historii matematiky, protože ukazuje, že trisekci úhlu lze dosáhnout pomocí inovativních a kreativních řešení, i když ne za podmínek klasické euklidovské konstrukce.

[41] BEN-ARI, M. Trisection of an Angle.

Origami: [42]

Origami, tradiční japonské umění skládání papíru, nabízí metodu pro trisekci úhlu, která se liší od klasických euklidovských konstrukcí. Origami umožňuje vytvoření některých konstrukcí, které nejsou možné pomocí pouhého pravítka a kružítka. Trisekce úhlu je jedním z těchto příkladů.

Postup trisekce úhlu pomocí origami je následující:

1. Začneme s papírem, na kterém je nakreslený úhel, který chceme rozdělit na třetiny.
2. První krok je složit papír tak, aby vrchol úhlu byl na hraně papíru.
3. Poté složíme papír znovu, tentokrát tak, že hranice úhlu se překryje s hranou papíru, která prochází vrcholem úhlu.
4. Nakonec rozložíme papír a máme úhel rozdělený na tři stejné části. Linie, které jsou vytvořeny skládáním, tvoří tři úhly stejné velikosti.

Tato metoda je matematicky platná a umožňuje trisekci jakéhokoli úhlu. Nicméně, stejně jako Archimedova metoda, tato metoda nesplňuje podmínky klasických euklidovských konstrukcí, protože vyžaduje víc než jen pravítko a kružítko.

Metoda trisekce úhlu pomocí origami je fascinující ukázkou toho, jak různé disciplíny - v tomto případě umění skládání papíru a matematika - se mohou prolínat a vytvářet inovativní a kreativní řešení matematických problémů.

Nelineární křivky: [43]

Některé nelineární křivky, jako je Hippiasova křivka, umožňují trisekci úhlu. Tyto křivky však nelze konstruovat pouze pomocí pravítka a kružítka.

Hippiasův kvadratrix je křivka generovaná pohybem dvou bodů pohybujících se stejnoměrnou rychlostí, ale v různých směrech. Křivka se generuje tak, že jeden bod se pohybuje podél přímky a druhý bod se pohybuje kolem kruhu.

Postup je následující:

[42] BEN-ARI, M. Trisection of an Angle.
[43] *Historie matematiky*.

1. Vezmeme jednotkový kruh a jednu polopřímkou z bodu (0,0), která bude rotovat konstantní rychlostí kolem tohoto bodu až dosáhne vertikální polohy.
2. Zároveň uvažujeme horizontální přímku, která se pohybuje konstantní rychlostí nahoru od bodu (0,0) až dosáhne horního bodu kruhu.
3. Místo, kde se tyto dvě linie protínají, tvoří kvadratrix. Tato křivka se ukáže být účinným nástrojem pro trisekci jakéhokoli úhlu.

Kvadratrix Hippiase lze použít k trisekci úhlu tím, že se vypočítá bod na křivce, který odpovídá třetině úhlu, který chceme rozdělit na třetiny. Tento bod pak určuje linii, která dělí původní úhel.

Nicméně, jak bylo uvedeno dříve, tato metoda nesplňuje podmínky klasické euklidovské konstrukce, která povoluje pouze použití pravítka a kružítka. Křivka generovaná pohybem bodů pohybujících se různými směry s konstantní rychlostí nelze vytvořit použitím pouze pravítka a kružítka.

Přesto je tato metoda dalším příkladem toho, jak lze dosáhnout trisekce úhlu pomocí inovativních a kreativních řešení, i když ne podle klasických euklidovských konstrukcí.

Algebraické metody: [44]

Konečně, trisekci úhlu lze provést za použití algebry a trigonometrie. Toto je metodou, která byla zvlášť populární od dob renesance, kdy matematici začali využívat algebru pro řešení geometrických problémů.

Výpočet je následující:

1. Pokud máme úhel α, který chceme rozdělit na tři stejné části, musíme najít úhel β takový, že $\cos(3\beta) = \cos(\alpha)$.
2. S využitím $\cos(3\beta) = 4\cos^3(\beta) - 3\cos(\beta)$, můžeme řešit rovnici $4\cos^3(\beta) - 3\cos(\beta) - \cos(\alpha) = 0$ pro $\cos(\beta)$.
3. Tato rovnice je kubická rovnice v $\cos(\beta)$ a může být řešena pomocí kardinálních nebo Ferrariho metod pro řešení kubických rovnic.

Tato metoda je matematicky platná a umožňuje přesné rozdělení jakéhokoli úhlu na tři rovné části. Nicméně, opět nevyhovuje podmínkám klasických euklidovských konstrukcí,

[44] KOŘÍNEK, Vladimír. *Základy algebry*.

protože vyžaduje více než jen pravítko a kružítko - v tomto případě znalost algebry a trigonometrie.

I tak je tato metoda dalším příkladem toho, jak lze dosáhnout trisekce úhlu pomocí inovativních a kreativních řešení, i když ne podle klasických euklidovských konstrukcí. V kontextu historie matematiky ukazuje, jak se matematika vyvíjela a stávala se stále komplexnější, s novými nástroji a technikami, které umožňují řešit problémy, které byly dříve považovány za neřešitelné.

Každá z těchto metod má své vlastní výhody a nevýhody a každá poskytuje jedinečný pohled na problém trisekce úhlu. Bez ohledu na to, kterou metodu použijeme, je však důležité si uvědomit, že trisekce úhlu pomocí pravítka a kružítka za daných podmínek (s použitím pouze pravítka a kružítka a bez označení délek) je nemožná. Tato skutečnost byla potvrzena v 19. století a od té doby nebyla zpochybněna.[45]

4.4 Josef Vaňous

Josef Vaňous využil trisektorii k vyřešení trisekci úhlu. Popisuje skupinu křivek třetího stupně, které splňují rovnici

$$Ax^3 + By^3 + Cxy^2 + Dyx^2 + Ex^2 + Fy^2 + Gxy = 0,$$

ve které platí

$$A = C, B = 1, E = -F.$$

Tudíž

$$y^3 + A(x^2 + y^2)x + Dyx^2 + E(x^2 - y^2) + Gxy = 0.$$

Jestliže se vhodně zvolí koeficienty *A, D, E, G*, pak je tato křivka množinou bodů, které jsou stejně vzdálené od kružnice a také její sečny. Z tohoto důvodu je možné tyto křivky využít k vyřešení trisekce úhlu.

Mějme bod *O*, který je počátkem kartézské soustavy souřadnic, dále kružnici *k* s poloměrem *r* a průměrem *OA*. Přímka *OA* je rovna ose *x*. Bodem *A* je vedena sečna *s*, která svírá úhel α s osou *x*. Bodem *O* je vedena libovolná přímka, která protíná sečnu *s* – tento průsečík označíme bodem *B*. Také protíná kružnici – průsečík označíme bodem *D*. Dále na této

[45] ŠVEHLA, J. *Moje dělení úhlu (kruhu) kružítkem a pravítkem*.

přímce sestrojíme bod M, aby platilo $|MD| = |BD|$. Bod M je bodem křivky trisektorie, celá křivka je pak tvořena množinou všech takovýchto bodů.

Rovnice křivky je ve tvaru

$$[y^2(2r + x) - x^2(2r - x)]a = y(y^2 + x^2 - 4rx),$$

kde r je poloměr kružnice, $a = tan\alpha$.

Můžou nastat speciální případy křivky:

1. $\alpha = 45°$, což znamená, že $\tan\alpha = a = 1$.

Rovnice trisektorie je

$$y^3 - x^3 - 2r(y^2 - x^2) - xy(y - x + 4r) = 0.$$

2. $\alpha = 90°$, tudíž $\tan\alpha = a = \infty$

Z původní rovnice dostaneme výraz

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{2r-x}{2r+x}.$$

Celá křivka je souměrná podle osy x. Ze sečny s se stává tečna ke kružnici k.

3. $\alpha = 0$, což znamená, že sečna s je průměrem kružnice k.
   Všechny přímky, které vychází z bodu O, se se sečnou s také v tomto bodě protínají. Dosadíme $a = 0$ do původní rovnice a dostaneme
   $$x^2 + y^2 - 4rx = 0,$$
   což je rovnice kružnice o dvojnásobném poloměru.

Trisektroii lze využít k vyřešení trisekce úhlu. Mějme úhel $\gamma = \angle AOA'$, u kterého chceme nalézt jeho třetinovou velikost. Z bodu A je vedena kolmice na rameno OA'. Patu této kolmice označíme P. Střed úsečky OA označíme jako L. Sestrojíme kružnici k, která má střed v bodě L a poloměrem $r = |CA|$. Bod P na základě Thaletovy věty musí ležet na kružnici k.

Sestrojíme trisektorii k sečně AP a kružnici k. Bod X je průsečík oblouku AA' a trisektorie, který dělí oblouk AA' v poměru 1:2.[46]

[46] VAŇOUS, J. Trisektorie.

5 Zdvojení krychle

Zdvojení krychle, také známé jako problém Deliů, je jednou z klasických úloh řecké matematiky, která požaduje konstrukci délky strany krychle, která má dvojnásobný objem dané krychle, a to pouze pomocí pravítka a kružítka.

Tento problém se dá matematicky přeformulovat na nalezení délky strany krychle o objemu 2, pokud je délka strany jednotkové krychle definována jako 1. Jelikož objem krychle je daný třetí mocninou délky její strany, hledáme stranu krychle *x*, pro kterou platí $X^3 = 2$. To vede na rovnici $X = \sqrt[3]{2}$.[47]

Nicméně, i když je toto matematické řešení jednoduché, konstrukce tohoto čísla pomocí pravítka a kružítka je mnohem složitější. Jako u ostatních klasických úloh řecké matematiky, i u této úlohy bylo dokázáno, že taková konstrukce je nemožná za daných podmínek.

Klíčovým krokem v důkazu je ukázat, že čísla, která lze sestrojit pomocí pravítka a kružítka, jsou přesně ta, která lze získat z celých čísel pomocí sčítání, odečítání, násobení, dělení a druhých odmocnin. Tato skutečnost je známa jako teorie konstruovatelných čísel.

Kubická odmocnina ze 2, která je potřebná k vyřešení úlohy zdvojení krychle, však do této třídy čísel nespadá. Proto konstrukce délky strany krychle o dvojnásobném objemu pomocí pravítka a kružítka nelze provést.

Tento problém byl předmětem mnoha studií a pokusů o řešení po celá staletí a vedl k významným pokrokům v oblasti algebry, včetně objevu nelineárních rovnic a rozvoje teorie polí a Galoisovy teorie. Problém zdvojení krychle byl také inspirací pro vývoj nových geometrických nástrojů a technik mimo klasické euklidovské konstrukce.[48]

---

[47] KNORR, W. R. The Cube Duplication and Angle Trisection by Abū Sahl al-Qūhī.
[48] ARTMANN, Benno. *Euclid—The Creation of Mathematics*.

5.1 Důkaz neřešitelnosti

Teorie konstruovatelných čísel, která je klíčová pro pochopení, proč úloha zdvojení krychle nelze vyřešit pomocí pravítka a kružítka, vyplývá z teorie těles a Galoisovy teorie, což jsou dva významné obory moderní algebry.

Podle teorie konstruovatelných čísel lze s pravítkem a kružítkem sestrojit pouze takové délky, které odpovídají číslům, jež lze získat z celých čísel pomocí sčítání, odečítání, násobení, dělení a extrakce druhých odmocnin. Jinými slovy, konstruovatelné číslo je jakékoli číslo, které lze vyjádřit pomocí konečného počtu těchto operací.[49]

Pokud se vrátíme k problému zdvojení krychle, hledáme $\sqrt[3]{2}$. Kubické odmocniny však nelze získat z celých čísel pomocí sčítání, odečítání, násobení, dělení a extrakce druhých odmocnin. Takže kubická odmocnina z 2 není konstruovatelným číslem.

Zároveň Galoisova teorie, pojmenovaná po Évaristu Galoisovi, nám umožňuje určit, které rovnice lze vyřešit pomocí konstrukcí pravítkem a kružítkem. Konkrétně, Galoisova teorie nám říká, že můžeme řešit rovnici pomocí pravítka a kružítka právě tehdy, když je stupeň rovnice mocninou čísla 2. Rovnice, která definuje kubickou odmocninu z 2, má ale stupeň 3, a tak nevyhovuje této podmínce.[50]

Tím pádem je zdvojení krychle nemožné provést pouze s pravítkem a kružítkem, a to kvůli základním vlastnostem čísel a operací, které jsou dostupné v euklidovských konstrukcích.

5.2 Historie pokusů o nalezení řešení

Problém zdvojení krychle je jeden z nejstarších v historii matematiky. Jde o úlohu, kterou řecký matematici sledovali po několik staletí, a která inspirovala mnoho významných pokroků v matematice.

[49] KOŘÍNEK, Vladimír. *Základy algebry*.
[50] KNORR, W. R. The Cube Duplication and Angle Trisection by Abū Sahl al-Qūhī.

První záznamy o úloze zdvojení krychle se datují do 5. století před naším letopočtem. Zdá se, že úloha byla inspirována skutečnou stavební výzvou - potřebou zdvojnásobit objem oltáře na ostrově Delos během morové epidemie. To je důvod, proč se někdy tato úloha nazývá "problém Delos".

Známo je, že slavný řecký matematik Eudoxos z Knidu, žák Platónův, se pokusil řešit tento problém, ale bez úspěchu.

Hippiás ze Smyrny, jenž žil v 5. století před naším letopočtem, je známý svým pokusem o řešení problému pomocí speciální křivky, kterou dnes nazýváme Hippiásův kvadratrix.

Mimořádný pokrok byl dosažen v 3. století před naším letopočtem, kdy matematici z Alexandrijské školy, jako byl Menaechmus, použili sečny a paraboly k řešení problému zdvojení krychle. Menaechmus je pravděpodobně první, kdo dokázal, že řešení lze najít pomocí průsečíků dvou parabol.

Archytas z Tarentu, současník Platónův, navrhl složité třírozměrné řešení problému, které spočívalo v rotaci polokruhu kolem osy.

Na konci 19. století se problémem intenzivně zabýval Évariste Galois a ukázal, že tento problém nelze řešit pomocí pravítka a kružítka. Jeho práce vedla k vývoji Galoisovy teorie, což je základní nástroj moderní algebry.

I když problém zdvojení krychle zůstal po staletí nevyřešený v tradičních euklidovských konstrukcích, byl pramenem mnoha významných pokroků v matematice. Jeho studium vedlo k objevu nelineárních rovnic, rozvoje teorie těles a teorie Galoisovy, a inspirovalo matematiky k vývoji nových geometrických nástrojů a technik.[51]

5.3 Úprava podmínek a možná řešitelnost

Pokud jsou nám k dispozici další nástroje kromě pravítka a kružítka, můžeme problém zdvojení krychle vyřešit. Dva slavné způsoby řešení tohoto problému jsou založené na použití křivek, které nejsou kružnicemi ani přímkami. Tato řešení však přesahují rámec klasických euklidovských konstrukcí.

[51] STRUIK, Dirk J. *Dějiny matematiky*.

Kvadratrix Hippiáse:

Tento nástroj, který vynalezl Hippiás ze Smyrny v 5. století před naším letopočtem, je křivka generovaná kombinací dvou rovnoměrných pohybů. V praxi se jedná o nástroj, který spojuje bod pohybující se po přímce s bodem pohybujícím se po kružnici. Hippiásova kvadratrix lze použít k řešení problému zdvojení krychle, ale také k trisekci úhlu, jak již bylo výše popsáno.

Řešení pomocí parabol a sečen: [52]

Řecký matematik Menaechmus v 4. století před naším letopočtem vyřešil problém zdvojení krychle pomocí průsečíků dvou parabol. Toto řešení představuje jedno z prvních historických použití algebraických křivek k řešení geometrických problémů.

Menaechmus, žák Eudoxa a učitel Alexandra Velikého, objevil tři typy konických řezů: hyperbolu, parabolu a elipsu. Paraboly využil právě k řešení problému zdvojení krychle.

Představme si parabolu jako množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdáleny od daného bodu (nazývaného ohnisko) a dané přímky (nazývané řídící přímka). Menaechmus zjistil, že pokud máme krychli o objemu 1 a chceme najít délku hrany krychle o objemu 2, lze toto najít jako průsečík dvou parabol.

Konkrétněji, Menaechmus definoval dvě paraboly tak, že jejich vrcholy byly na jedné přímce a jejich osy byly k sobě rovnoběžné. Dále definoval paraboly tak, že pokud y je vzdálenost od vrcholu jedné paraboly k osy, pak y^2 je vzdálenost od vrcholu druhé paraboly k ose. Tímto způsobem byl průsečík těchto dvou parabol bodem, jehož souřadnice (x, y) splňovaly rovnici $y^2 = 2x$, což je rovnice krychle o objemu 2, pokud hledáme délku hrany x.

Tato metoda je zajímavá nejen proto, že řeší problém zdvojení krychle, ale také proto, že je jedním z prvních známých příkladů použití algebraických křivek - v tomto případě parabol - k řešení geometrických problémů. Zároveň je ale také jasné, že tato metoda vyžaduje použití technik, které přesahují tradiční euklidovské konstrukce, které jsou omezené na použití pravítka a kružítka.

Dále existují metody, které používají jen pravítko, ale s možností měření délek, nebo metody s použitím kružítka s pevnou šířkou, které však nejsou klasickými euklidovskými

[52] LOMTATIDZE, Lenka. *Historický vývoj pojmu křivka*.

konstrukcemi. Proto i když lze tyto metody použít k řešení problému zdvojení krychle, nejsou považovány za řešení v rámci původního omezení problému.

5.4 Antonín Fail

Ve svých dílech se zabýval konstrukcemi, které vedly k řešení kvadratury kruhu, zdvojení krychle a trisekcí úhlu. Avšak nedodržel pravidla pro eukleidovskou konstrukci, protože používal buďto dvě pravítka a nebo ohebné pravítko.

Při řešení zdvojení krychle, kdy hledáme, jakým způsobem zkonstruovat $\sqrt[3]{2}$, si nejprve zavedeme kartézskou soustavu souřadnic *(O, x, y)*. V soustavě zaznačíme body A = [0, -1], B = [-1,25, 0], X = [2, 0]. Dále sestrojíme úsečku *AB* a kolmici na ní procházející bodem B a protínající osu *y* v bodě *C*. Z bodu *C* vedeme kolmici na úsečku *BC*, která protíná osu *x* v bodě *Y*. Vznikl zde pravoúhlý trojúhelník *DEF* s pravým úhlem při vrcholu *D*, na ose *x* leží bod *D* tak, že úsečka *DF* prochází bodem *A*. Druhý pravoúhlý trojúhelník *RSC*, kde úsečka *CS* prochází bodem *Y*. Nyní na pravoúhlé trojúhelníky přiložíme pravítka tak, aby kopírovaly dané trojúhelníky. Pravítka posuneme tak, aby bod *A* zůstal na straně *DF*, bod *C* se pohyboval po ose *y*, bod *D* se pohyboval po straně *x* a strana *CS* procházela bodem *X*. Poté bod *D* leží na souřadnicích $[-\sqrt[3]{2}, 0]$.[53]

[53] *Historie matematiky.*

6 Rektifikace kružnice

Rektifikace kružnice, také známá jako kvadratura obvodu kruhu, je problém sestrojení úsečky, jejíž délka je rovna obvodu daného kruhu, použitím pouze neznačeného pravítka a kružítka. Tento problém je jeden z klasických úloh řecké matematiky.

Jak již bylo uvedeno, délka obvodu kruhu je dána výrazem 2πr, kde *r* je poloměr kruhu. Číslo π je iracionální, což znamená, že nemůže být vyjádřeno jako poměr dvou celých čísel a nemá konečný ani periodický desetinný rozvoj. Tyto vlastnosti π činí sestrojení úsečky rovné délce obvodu kruhu nemožným pomocí pouze pravítka a kružítka.[54]

Základní myšlenkou je, že jak pravítko, tak kružítko mohou vytvářet pouze délky a úhly, které jsou konstruovatelné čísla - to jest, čísla, která mohou být sestrojena z jednotkové délky pomocí konečného počtu kroků pomocí aritmetických operací a odmocňování. Protože π není konstruovatelné číslo, nelze sestrojit úsečku, jejíž délka je rovna obvodu kruhu.

Formálně, jakékoli konstruovatelné číslo musí být algebraické číslo, které je řešením nějaké polynomiální rovnice s racionálními koeficienty. Navíc, stupně těchto polynomiálních rovnic musí být mocninou dvou. Protože π je transcendentní číslo, což znamená, že není řešením žádné polynomiální rovnice s racionálními koeficienty, nelze ho sestrojit pomocí pravítka a kružítka.

I když rektifikace kružnice není možná pomocí pravítka a kružítka, existují moderní matematické metody, které umožňují aproximovat π s libovolnou přesností, a tedy také sestrojit úsečku, jejíž délka se libovolně blíží k obvodu kruhu. Tyto metody však přesahují rámec klasické euklidovské konstrukce.[55]

[54] FENCL, Josef. *Rektifikace kružnice, kvadratura kruhu, jeho měrné číslo ve světle nových poznatků a důkaz, že Ludolfovo číslo není měrným číslem kruhu*.

[55] PLESKOT, A. Poznámka k rektifikaci kruhu.

6.1 Důkaz neřešitelnosti

Odborný důkaz, že nelze provést rektifikaci kružnice pomocí euklidovských konstrukcí, je založen na dvou hlavních teoriích: teorii konstrukcí pomocí pravítka a kružítka a Lindemannově-Weierstrassově teorému. Představení těchto teorií vyžaduje určitou znalost abstraktní algebry.[56]

Teorie konstrukcí pomocí pravítka a kružítka nám umožňuje formalizovat, co lze a nelze provést s těmito nástroji. Pro naše účely stačí vědět, že každé číslo, které lze zkonstruovat pomocí pravítka a kružítka, musí být konstruovatelné číslo, což znamená, že je to kořen nějakého polynomu s racionálními koeficienty, jehož stupeň je mocnina dvou.

Lindemannův-Weierstrassův teorém nám pak říká, že π je transcendentní číslo, což znamená, že není kořenem žádného polynomu s racionálními koeficienty. To také znamená, že žádné mocniny π, včetně √π, nejsou kořeny takových polynomů.

Pokud bychom chtěli provést rektifikaci kruhu o poloměru 1, potřebovali bychom najít délku strany čtverce o ploše π, což by znamenalo najít hodnotu √π. Ale jak již bylo zmíněno, √π není kořenem žádného polynomu s racionálními koeficienty, takže není konstruovatelné číslo. Proto nemůžeme najít délku strany takového čtverce pomocí euklidovských konstrukcí.[57]

To je zjednodušený popis důkazu, ale přesný matematický důkaz vyžaduje hlubší pochopení konceptů z abstraktní algebry, včetně teorie těles a algebry polynomů.

6.2 Historie pokusů o nalezení řešení

Při hledání řešení rektifikace kružnice bylo důležité najít hodnotu π co nejpřesněji. Proto se matematici při řešení tohoto problému zabývali především π.

[56] KOŘÍNEK, Vladimír. *Základy algebry*.
[57] ŠRŮTEK, J. Nový způsob rektifikace čáry kruhové.

Historie kvadratury kruhu sahá až do starověkého Egypta a Babylónie, kde se zdá, že matematikové předpokládali, že π má hodnotu 3 nebo dokonce 4/3. To vedlo k velmi hrubým aproximacím plochy kruhu.

Eudoxos z Knidu byl jeden z prvních, kdo se vážně zabýval kvadraturou kruhu. Použil metodu vyčerpání, která spočívá v přibližování kruhu pomocí mnohoúhelníků se stále více stranami. Tato metoda v podstatě vede k limitám a je jedním z předchůdců moderního kalkulu.

Archimedes vylepšil Eudoxovu metodu vyčerpání a použil ji k odhadu hodnoty π. Jeho odhad byl mezi 3 1/7 a 3 10/71, což bylo nejpřesnější po tisíciletí.

Ludolph van Ceulen strávil většinu svého života výpočtem hodnoty π na 35 desetinných míst. Použil k tomu polygony s velkým počtem stran.

François Viète je známý tím, že představil první známý nekonečný produkt pro π, který využívá geometrickou posloupnost kosinů.

John Wallis představil první známou nekonečnou sérii pro π, která využívá faktoriálů a mocniny dvou. Tato série byla později vylepšena Leonardem Eulerem a dalšími.

Leonhard Euler udělal mnoho příspěvků k pochopení π, včetně zavedení symbolu π pro toto číslo. Používal také různé nekonečné řady a produkty k aproximaci π.[58]

I když už je problém rektifikace kružnice v dnešní době dávno vyřešen, matematici stále hledají nové a inovativní způsoby, jak pochopit a aproximovat π. Například pomocí počítačů bylo možné vypočítat biliony desetinných míst π.

6.3 Úprava podmínek a možná řešitelnost

Konstrukce s použitím křivky[59]

Použití speciální křivky zvané kvadratrix bylo poprvé popsáno Hippiasem z Elis.

[58] STRUIK, Dirk J. *Dějiny matematiky*.

[59] FENCL, Josef. *Rektifikace kružnice, kvadratura kruhu, jeho měrné číslo ve světle nových poznatků a důkaz, že Ludolfovo číslo není měrným číslem kruhu*.

Představme si čtverec s danými stranami, uvnitř kterého je kruh s průměrem rovným straně čtverce. Křivka kvadratrix se vytváří tak, že necháme jednu přímku padat vertikálně dolů a druhá se otáčí. Obě tyto akce probíhají současně a stejnou rychlostí. Křivka, kterou vytvoří spodní konec padající čáry, se nazývá kvadratrix.

Konkrétněji, pokud je strana čtverce i průměr kruhu délky 1, pak kvadratrix v bodě, kde se protíná s kružnicí, má délku π/4. Když tuto délku vynásobíme čtyřmi, dostanete délku, která je rovna obvodu kruhu.

Jedním z problémů s tímto přístupem je, že se přesahuje rámec klasických euklidovských konstrukcí, které jsou omezeny na použití pravítka a kružítka. Křivka kvadratrix je více než jen kruh nebo rovná čára a vyžaduje určité pohyby, které jsou komplikovanější než ty, které můžeme vytvořit s pravítkem a kružítkem. Proto, i když může být tato metoda teoreticky schopna vypočítat obvod kruhu, nepovažuje se za platné řešení v kontextu klasických euklidovských konstrukcí.

Planimetr

Planimetr je nástroj, který měří plochu plánů nebo křivek. Principem fungování planimetru je sledování kontury dané plochy s jednou částí nástroje, zatímco druhá část zůstává pevně na místě. Pohyb nástroje pak generuje rotaci kola, které je spojeno s počítačem. Tímto způsobem lze určit plochu, kterou nástroj obkreslil.

Ačkoli planimetr měří plochu, a ne obvod, lze jej použít k výpočtu obvodu kruhu nepřímo. Toho lze dosáhnout tím, že změříme plochu kruhu a pak použijeme vzorec pro plochu kruhu k výpočtu poloměru $S = \pi r^2$ a následně použijeme tento poloměr k výpočtu obvodu $o = 2\pi r$.

Opět je třeba zdůraznit, že tato metoda vyžaduje více než jen pravítko a kružítko a nevyhovuje tak klasickým euklidovským konstrukcím. Toto omezení bylo stanoveno, aby se zabránilo přesnému výpočtu iracionálních čísel, jako je π, což by v rámci těchto omezení bylo nemožné.[60]

[60] *Historie matematiky.*

Limity

Třetí možností je použití limit a kalkulu, což je vlastně přesně to, co udělali starověcí Řekové pomocí metody vyčerpání. Ačkoli to nebylo formálně rozvinuto do nástroje kalkulu, jak jej známe dnes, základní principy byly stejné.

Představme si, že máme kruh a chceme najít jeho obvod. Avšak namísto toho, abychom se pokusili měřit obvod přímo, začneme s něčím jednoduchým, jako je pravidelný šestiúhelník vepsaný do kruhu. Šestiúhelník je jednoduchý, protože všechny jeho strany jsou stejné délky a všechny jeho úhly jsou stejné. Obvod šestiúhelníku je jednoduchý na výpočet - je to jen šestkrát délka strany.

Poté můžeme postupně zvyšovat počet stran. Ze šestiúhelníku uděláme dvanáctiúhelník, poté dvacetičtyřúhelník, a tak dále. Každým tímto krokem se obvod mnohoúhelníku stává lepším odhadem obvodu kruhu.

V limitě, když počet stran mnohoúhelníku jde k nekonečnu, obvod mnohoúhelníku se blíží obvodu kruhu. Toto je základní myšlenka limit a je to základní nástroj kalkulu.

Tímto způsobem lze přesně vypočítat obvod kruhu. Avšak i tato metoda přesahuje rámec klasických euklidovských konstrukcí, které jsou omezeny na použití pravítka a kružítka.[61]

6.4 Antonín Pleskot

Hledal přibližnou konstrukci, pomocí níž by vyřešil rektifikaci kružnice.

Je dána kružnice *k* se středem S a poloměrem *r = 1.* Na kružnici *k* zvolme libovolně bod *X*. Sestrojme kružnici *l* se středem *X* a poloměrem *r*. Body, kde kružnice *l* protne kružnici *k* označíme *A, B*, střed této úsečky označíme *Y*. Na ose úsečky *AB* sestrojíme bod *C* tak, že $|YC| = 2|AB|$. Od úsečky *BC* odečteme dvojnásobek *r,* takže dostaneme bod *D.* Délka úsečky *BD* je přibližně $\frac{\pi}{2}$.[62]

[61] ŠRŮTEK, J. Nový způsob rektifikace čáry kruhové.
[62] PLESKOT, A. Poznámka k rektifikaci kruhu.

6.5 Jan Šrůtek

Zabýval se řešením přibližné rektifikace kružnice. Jeho primárním poznatkem, ze kterého vychází, je fakt, že $\sqrt{10} \doteq 3{,}16227$ a $\frac{1}{2}\sqrt{39} \doteq 3{,}12249$. Aritmetický průměr těchto dvou hodnot je přibližně stejný jako hodnota π.

K rektifikaci kružnice o poloměru 1 využijeme tyto dvě hodnoty $\sqrt{10}$ a $\frac{1}{2}\sqrt{39}$, které když sečteme, dostaneme požadovanou délku. [63]

[63] ŠRŮTEK, J. Nový způsob rektifikace čáry kruhové.

7 Pravidelné mnohoúhelníky

Úkolem sestrojení pravidelných mnohoúhelníků je konstrukce pravidelného n-úhelníku pomocí pravítka a kružítka. Pravidelný mnohoúhelník je mnohoúhelník, který má všechny své strany stejně dlouhé a všechny své úhly stejně velké.

Nejjednodušším příkladem je pravidelný trojúhelník neboli rovnostranný trojúhelník, který lze snadno sestrojit pravítkem a kružítkem. Další pravidelné mnohoúhelníky, které lze snadno sestrojit, jsou čtverec a pravidelný šestiúhelník.

Avšak věc se komplikuje, pokud se pokusíme sestrojit pravidelný sedmiúhelník, devítiúhelník, jedenáctiúhelník a tak dále. Tyto mnohoúhelníky jsou velmi obtížné sestrojit pomocí pravítka a kružítka, a v některých případech je to dokonce nemožné.[64]

Eukleides v Základech ukázal, jak sestrojit pravidelný pětiúhelník, desetiúhelník a šestnáctiúhelník. To vedlo k otázce, jaké jiné pravidelné mnohoúhelníky lze sestrojit pomocí pravítka a kružítka.[65]

Tato otázka byla zodpovězena v 19. století německým matematikem Carl Friedrich Gaussem, který ukázal, že pravidelný n-úhelník lze sestrojit pravítkem a kružítkem právě tehdy, když n je součin různých mocnin dvou různých Fermatových čísel, tedy čísel ve tvaru $2^{2^n} + 1$. Toto byl významný pokrok v teorii konstrukcí pravítkem a kružítkem.

Gaussův důkaz je velmi složitý a vyžaduje pokročilé znalosti algebry. Ovšem díky tomu, jak daleko tato otázka byla prozkoumána, dnes máme velmi dobré porozumění tomu, jaké pravidelné mnohoúhelníky lze sestrojit a jaké ne.[66]

---

[64] GARDINER, A. Sides and Diagonals of Regular Polygons.
[65] EUKLEIDÉS. *Eukleidovy Základy [Elementa]*.
[66] KOŘÍNEK, Vladimír. *Základy algebry*.

7.1 Důkaz neřešitelnosti

Prokázat, že pravidelný n-úhelník lze sestrojit pravítkem a kružítkem právě tehdy, když n je součin různých mocnin dvou různých Fermatových čísel, vyžaduje pokročilé znalosti abstraktní algebry.

Základní myšlenka důkazu je následující:

Každý pravidelný n-úhelník je určen svým hlavním úhlem 2π/n. Jestliže je tento úhel konstruovatelný, tak je i pravidelný n-úhelník konstruovatelný. To znamená, že musíme dokázat, že cos(2π/n) je konstruovatelné číslo, to znamená, že je kořenem nějakého polynomu s celočíselnými koeficienty a stupněm mocninou dvojky.

Carl Friedrich Gauss ukázal, že cos(2π/n) je konstruovatelné číslo právě tehdy, když n je součin mocnin dvojky a různých Fermatových prvočísel. Toto bylo později zobecněno na obecnou podmínku pro konstruovatelnost úhlů a délek.

Tento důkaz je založen na teorii Galoisových grup, která je pokročilou oblastí abstraktní algebry. Tato teorie nám umožňuje studovat rovinné konstrukce pomocí algebry a poskytuje nám nástroje pro dokázání výše uvedeného tvrzení.[67]

7.2 Historie pokusů o nalezení řešení

Sestrojení pravidelných mnohoúhelníků pravítkem a kružítkem bylo předmětem zájmu mnoha matematiků v průběhu historie. Zde jsou někteří z nejdůležitějších:

Eukleides ve svých Základech ukázal, jak sestrojit některé pravidelné mnohoúhelníky.

Archimédes byl schopen sestrojit pravidelné mnohoúhelníky s $3 \cdot 2^n$ stranami pro n = 1, 2, 3, ..., a tak dále, až po 5, tedy mnohoúhelníky s 96 stranami.

Ptolemaios sestrojil pravidelný pětadvacetistranný mnohoúhelník.[68]

[67] KOŘÍNEK, Vladimír. *Základy algebry*.
[68] STRUIK, Dirk J. *Dějiny matematiky*.

Al-Hajjāj ibn Yūsuf ibn Matar přeložil Eukleidovy Základy do arabštiny a přidal sestrojení pravidelného třicetidvoustranného mnohoúhelníku.[69]

Ibn al-Haytham sestrojil pravidelný sedmnáctistranný mnohoúhelník, což bylo velmi významné, protože to bylo poprvé, co byl sestrojen pravidelný mnohoúhelník s počtem stran, který není výsledkem mocnin dvou a čísel ve tvaru $2^{2^n} + 1$.

Carl Friedrich Gauss dokázal, že pravidelný sedmnáctiúhelník je možné sestrojit pravítkem a kružítkem. Později vytvořil obecnou teorii konstrukcí, která ukázala, že pravidelný n-úhelník je možné sestrojit právě tehdy, když n je součin různých mocnin dvou a různých Fermatových čísel.

Pierre Wantzel dokázal, že konstrukce pravítkem a kružítkem jsou ekvivalentní řešení určitých algebraických rovnic a dal tím definitivní odpověď na otázku, které pravidelné mnohoúhelníky je možné sestrojit.

Jestliže se díváme na moderní dobu, sestrojení pravidelných mnohoúhelníků již není považováno za významný matematický problém, protože díky Galoisově teorii už známe odpověď. Ale historicky bylo sestrojení těchto mnohoúhelníků velmi důležité pro rozvoj geometrie a algebra.[70]

7.3 Úprava podmínek a možná řešitelnost

V Eukleidovských konstrukcích můžeme používat pouze dva nástroje - pravítko a kružítko, které nám umožňují sestrojit pouze rovné čáry a kružnice. Avšak, pokud bychom povolili použití dalších křivek, mohli bychom sestrojit více pravidelných mnohoúhelníků. Takové křivky jsou známé jako konické řezy, které zahrnují kruhy, elipsy, paraboly a hyperboly.

---

[69] STRUIK, Dirk J. *Dějiny matematiky*.
[70] KOŘÍNEK, Vladimír. *Základy algebry*.

Využití hyperboly[71]

Konkrétně, s použitím křivky zvané hyperbola, můžeme sestrojit pravidelný sedmiúhelník. Postup je následující:

Nejprve vytvoříme dvě přímky, které se protínají v pravém úhlu.

Na jedné z přímek označíme dva body, které budou ohnisky hyperboly.

Poté sestrojíme hyperbolu kolem těchto dvou bodů. Hyperbola je množina všech bodů v rovině, pro které je rozdíl vzdáleností od dvou daných bodů – ohnisek konstantní.

Když máme hyperbolu, můžeme na ní najít bod, který je rovnoměrně vzdálený od jednoho z ohnisek a od přímky kolmé na přímku spojující obě ohniska. Tento bod je jedním z vrcholů sedmiúhelníku

Tento postup opakujeme ještě šestkrát, abychom získali zbývající vrcholy sedmiúhelníku.

Postup je výrazně složitější než Eukleidovské konstrukce a vyžaduje zručnost a přesnost při kreslení hyperbol. Navíc tento postup je kontroverzní, protože někteří matematici považují konstrukci pomocí křivek za neeukleidovskou a tedy za "nečistou". Ale pokud jsme ochotni přijmout takové metody, pak se nám otevírá celý nový svět možných konstrukcí.

Konstrukce pomocí algebraických operací

Eukleidovské konstrukce jsou základně omezeny na operace, které lze provést pomocí pravítka a kružítka, což v podstatě odpovídá operacím sčítání, odečítání, násobení, dělení a extrakci druhé odmocniny. Pokud bychom rozšířili naše nástroje a povolili další algebraické operace, mohli bychom sestrojit více pravidelných mnohoúhelníků.

Představme si například, že můžeme provádět operaci třetí odmocniny. Tato operace nám umožňuje vypočítat třetí odmocninu z libovolného čísla. Jaký má to vliv na naše konstrukce?

Vezměme si pravidelný třináctiúhelník. Pro jeho sestrojení potřebujeme vyřešit rovnici $\cos(2\pi/13) = 0$. To je algebraická rovnice třetího stupně. S pomocí operace třetí odmocniny

[71] LOMTATIDZE, Lenka. *Historický vývoj pojmu křivka*.

můžeme najít řešení této rovnice, a pak použít toto řešení k sestrojení pravidelného třináctiúhelníku.

Toto je samozřejmě zjednodušený popis procesu. Ve skutečnosti je sestrojení pravidelného třináctiúhelníku pomocí třetí odmocniny velmi složité a vyžaduje pokročilé znalosti algebry. Ale tato metoda nám ukazuje, jak bychom mohli rozšířit naše schopnosti konstrukce tím, že do našeho nástrojového souboru přidáme další algebraické operace.

Pro zjednodušení, můžeme říci, že hledáme kořeny rovnice $x^3 - x - 1 = 0$. Jedním z kořenů této rovnice je cos(2π/13). Pokud dokážeme najít tento kořen, můžeme použít Kosinovu větu pro výpočet délky strany pravidelného třináctiúhelníku.

S využitím třetí odmocniny můžeme následovně najít kořen:

1. Nejprve vypočítáme diskriminant rovnice:
2. Poté najdeme tři možné hodnoty kořene rovnice.
3. Třetí odmocninu můžeme vypočítat pomocí matematických tabulek, kalkulátoru nebo jiného nástroje.
4. Když máme hodnotu x, můžeme použít Kosinovu větu pro výpočet délky strany pravidelného třináctiúhelníku.
5. Nakonec, pomocí této délky strany, můžeme sestrojit pravidelný třináctiúhelníku.

Je důležité poznamenat, že toto je velmi zjednodušený popis procesu. Ve skutečnosti je sestrojení pravidelného třináctiúhelníku pomocí třetí odmocniny velmi složité a vyžaduje pokročilé znalosti algebry. Nicméně, tato metoda ukazuje, jak bychom mohli rozšířit naše schopnosti konstrukce tím, že do našeho nástrojového souboru přidáme další algebraické operace.[72]

Využití paraboly

Další možností, jak sestrojit pravidelné mnohoúhelníky, které nejsou konstruovatelné pouze pomocí pravítka a kružítka, je využití paraboly.

Představme si, že máme k dispozici pravítko, kružítko, a kromě toho také pravítko s parabolou. To znamená, že můžeme použít nejen přímky a kružnice, ale také paraboly. Tento

---

[72] KOŘÍNEK, Vladimír. *Základy algebry*.

dodatečný nástroj nám umožní provádět další algebraické operace při konstrukci - konkrétně extrakci n-té odmocniny.

Představme si, že chceme sestrojit pravidelný sedmiúhelník. K tomu potřebujeme vyřešit rovnici $\cos(2\pi/7) = 0$, což je rovnice třetího stupně. Bez třetí odmocniny bychom tento úkol nemohli pomocí pravítka a kružítka vyřešit. Nicméně s pomocí paraboly můžeme tuto rovnici vyřešit a sestrojit pravidelný sedmiúhelník.

Parabola má tu výhodu, že umožňuje konstrukci odmocnin jakéhokoli stupně, což rozšiřuje možnosti sestrojení pravidelných mnohoúhelníků. Takovéto konstrukce ovšem vyžadují pokročilé matematické dovednosti a porozumění principům algebraických křivek.[73]

[73] LOMTATIDZE, Lenka. *Historický vývoj pojmu křivka*.

Závěr

Práce v průběhu zkoumala některé z nejvýznamnějších problémů starověké řecké matematiky, a přitom jsme se seznámili s mnoha koncepty a nástroji, které tvoří základ našeho moderního chápání matematiky. Klasické problémy, jako je kvadratura kruhu, trisekce úhlu, zdvojení krychle, rektifikace kružnice a sestrojení pravidelných mnohoúhelníků, jsou nejen fascinující matematické záhady, ale také klíčové milníky v historii matematického myšlení.

Zatímco tyto problémy nebyly za daných eukleidovských omezení řešitelné, jejich význam je obrovský. Provedli nás historií matematiky, přičemž každá epocha přidala novou vrstvu porozumění a inovací. Ukázaly, jak výzvy vedou k pokroku, k novým myšlenkám a novým přístupům.

Pokusy o řešení těchto problémů vedly k vytvoření nových matematických disciplín a přispěly k rozvoji abstraktního myšlení, což je klíčové pro moderní matematiku. Právě tyto výzvy a nezodpovězené otázky inspirovaly generace matematiků k objevování nových konceptů a nástrojů.

Přestože tyto problémy zůstávají nerozřešené v kontextu starověkých řeckých omezení, jejich studium nám otevřelo dveře k širšímu pochopení matematiky a její role v našem poznání světa. Díky nim se můžeme dívat na matematiku jako na neustále se vyvíjející disciplínu, která se adaptuje se na nové výzvy.

Seznam použitých zdrojů

ARTMANN, Benno. *Euclid—The Creation of Mathematics*. Springer New York, NY, 2012. ISBN 978-1-4612-7134-5.

BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce*. 2., rev. vyd. Přeložil Zdeněk TICHÝ. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1987.

BECKMANN, Petr. *Historie čísla pí*. Vyd. 1. Praha: Academia, 1998. ISBN 80-200-0655-9.

BEČVÁŘ, J. a E. FUCHS. *Historie matematiky I*. Brno: JČMF, 1994.

BEN-ARI, M. Trisection of an Angle. *Mathematical Surprises*. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13566-8_2, 2022.

EUKLEIDÉS. *Eukleidovy Základy [Elementa]*. Praha: Jednota českých mathematiků a fysiků, 1907.

FENCL, Josef. *Rektifikace kružnice, kvadratura kruhu, jeho měrné číslo ve světle nových poznatků a důkaz, že Ludolfovo číslo není měrným číslem kruhu*. V Příbrami: Josef Fencl, 1934.

GARDINER, A. Sides and Diagonals of Regular Polygons. *Infinite Processes*. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5654-0_6: Springer, New York, NY, 1982.

GOODWIN, E. J. Quadrature of the Circle. *Pi: A Source Book*. Springer, New York, NY, 2004.

HERRMANN, Dietmar. *Ancient Mathematics: History of Mathematics in Ancient Greece and Hellenism*. Springer Berlin, 2023. ISBN 978-3-662-66493-3.

Historie matematiky: ... mezinárodní konference .. Praha: Matfyzpress, 2004. ISBN 978-80-7378-234-4.

HUSÁK, J. Přibližné řešení kvadratury kruhu. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*. 1897, (26).

KNORR, W. R. The Cube Duplication and Angle Trisection by Abū Sahl al-Qūhī. *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*. Birkhäuser Boston, 1989. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3690-0_15.

KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. 1. vyd. Přeložil Marcela HEDRLÍNOVÁ. Praha: Academia, 1969.

KOŘÍNEK, Vladimír. *Základy algebry: celostátní vysokoškolská učebnice*. 2. vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1956.

LOMTATIDZE, Lenka. *Historický vývoj pojmu křivka*. V Brně: Nadace Universitas, 2007. Scintilla. ISBN 978-80-7204-492-4.

MARTIN, G. E. *Quadrature of the Circle: The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. Springer, New York, NY, 1975. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5725-7_34.

PLESKOT, A. Poznámka k rektifikaci kruhu. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*. 1893, (22).

SERVÍT, F. *Eukleidovy základy*. Praha: JČM, 1907.

STRUIK, Dirk J. *Dějiny matematiky*. 1. vyd. Praha: Orbis, 1963. Malá moderní encyklopedie (Orbis).

ŠOFR, Bedřich. *Euklidovské geometrické konštrukcie*. 1. vyd. Bratislava: Alfa, 1976. Polytechnická knižnica (Alfa).

ŠRŮTEK, J. Nový způsob rektifikace čáry kruhové. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*. 1892, (21).

ŠVEHLA, J. *Moje dělení úhlu (kruhu) kružítkem a pravítkem*. Plzeň, 1941.

VAŇOUS, J. Trisektorie. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*. 1881, (10).

Seznam obrázků