Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra algebry a geometrie

Diplomová práce

Podgrupy uspořádaných grup

Vypracoval:	Bc. Lukáš Klouda
Studijní program:	N1701 Fyzika
Studijní obor:	Fyzika-Matematika
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí práce:	prof. RNDr. Jiří Rachůnek, DrSc.
Rok obhajoby:	2015

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Lukáš Klouda
Název práce	Podgrupy uspořádaných grup
Typ práce	diplomová
Pracoviště	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce	prof. RNDr. Jiří Rachůnek, DrSc.
Rok obhajoby práce	2015
Abstrakt	Práce se zabývá uspořádanými grupami, zvláště svazově uspořádanými. Teorie je ilustrována na příkladech.
Klíčová slova	svazově uspořádaná grupa, konvexní podgrupa, prvopodgrupa, regulární podgrupa, polára
Počet stran	39
Počet příloh	0
Jazyk	český

Bibliographical identification

Author's first name and surname	Lukáš Klouda
Thesis title	Subgroups of partially ordered groups
Type of thesis	Master
Department	Department of Algebra and Geometry
Supervisor	prof. RNDr. Jiří Rachůnek, DrSc.
Year of presentation	2015
Abstract	The thesis is an introduction to the theory of partially ordered groups, especially lattice ordered groups. The theory is illustrated in examples.
Key words	lattice ordered group, convex subgroup, prime subgroup, regular subgroup, polar
Number of pages	39
Number of appendices	0
Language	Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením prof. RNDr. Jiřího Rachůnka, DrSc., a použil výhradně zdroje uvedené v oddílu Literatura.

V Olomouci, ... , Lukáš Klouda.

Podpis:

Poděkování

Děkuji vedoucímu práce, prof. RNDr. Jiřímu Rachůnkovi, DrSc., za rady a připomínky. Děkuji rodině za podporu ve studiu.

Obsah

Úvod

Tato diplomová práce se zabývá uspořádanými grupami, zejména svazově uspořádanými grupami. Je rozdělena do jedenácti oddílů. V prvních čtyřech oddílech jsou definovány základní pojmy – uspořádaná grupa, svazově uspořádaná grupa, absolutní hodnota, l-homomorfismus – a uvedeny jejich vlastnosti. Dalších šest oddílů je zaměřeno na význačné třídy podgrup svazově uspořádaných grup – l-podgrup, konvexních l-podgrup, l-ideálů, prvopodgrup, regulárních podgrup a polár. Jedenáctý oddíl obsahuje řešené příklady, ilustrující teorii.

Autor zpracovává již existující teorii. Přínosem může být řešení příkladů.[1]

Práce je psána v systému LaTeX, obrázky vytvořeny v programu Ipe a v systému LaTeX.

[1] až na příklady 15, 16, 17, 18, jejichž řešení je převzato z [1].

Vysvětlivky, značení, zkratky

Vysvětlivky

Ohledně formulace tvrzení. První věta (gramaticky) tvrzení začínající slovem ‘nechť’ představuje výčet předpokladů implikace. Věty následující jsou jejím závěrem.

Značení, zkratky

$\overline{\wedge}$	logická spojka ‘a’
$\underline{\vee}$	logická spojka ‘nebo’
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \ldots\}$ – množina všech přirozených čísel
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\boldsymbol{n}$	$\{1, 2, \ldots, n\}$
f_*	je-li $f: A \to B$, pak $f_*: P(A) \to P(B)$, $M \mapsto \{b \in B; (\exists m \in M)(b = fm)\}$, kde $P(X)$ značí potenční množinu množiny X
f^*	je-li $f: A \to B$, pak $f^*: P(B) \to P(A)$, $M \mapsto \{a \in A; fa \in M\}$
U, resp. D	horní, resp. dolní kužel (množiny)
$\uplus$	disjunktní sjednocení
BÚNO	bez újmy na obecnosti
IP	indukční předpoklad
NTJE	následující tvrzení jsou ekvivalentní

1 Uspořádané grupy

Úmluva 1. Prvky nosiče algebry budeme značit malými písmeny. Nebude-li hrozit nedorozumění, vynecháme příslušné obecné kvantifikátory. Například v definici 1 nerozepisujeme

$$(\forall g \in G)(\forall h \in G)(\forall x \in G)(\forall y \in G)(g \le h \Rightarrow xgy \le xhy)\,.$$

Definice 1. Nechť $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa, nechť $(G, \le)$ je uspořádaná množina.
Dvojici $(\mathbf{G}, \le)$ nazveme *uspořádanou grupou* (po-grupou), právě když $g \le h \Rightarrow xgy \le xhy$.

Označme L_x levou translaci prvkem x, tedy zobrazení $G \to G$, $y \mapsto x \cdot y$. Analogicky, pravou translaci prvkem x označme P_x.

Tvrzení 1. *Nechť $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa, nechť $(G, \le)$ je uspořádaná množina. $(\mathbf{G}, \le)$ je po-grupa, právě když L_x a P_x jsou izotónními operátory.*

Důkaz. $xgy = (xg)y = (P_y \circ L_x)g$. Volíme-li $y = 1$, pak $P_y = 1_G$, tedy L_x je izotónní. Analogicky pro P_x. Obráceně, složení izotónních operátorů je izotónním operátorem. □

Speciálně, vnitřní automorfismus grupy je izotónním operátorem.

Izotonie translací umožňuje násobení nerovností. Pokud $g \le h$ a $x \le y$, pak $gx \le hx$ a zároveň $hx \le hy$, tedy $gx \le hy$.

Tvrzení 2. *Je-li $(\mathbf{G}, \le)$ po-grupa, pak $(\mathbf{G}, \le^{-1})$ je po-grupa.*

Důkaz. Je-li φ izotónní operátor $(G, \le)$, pak je též izotónním operátorem $(G, \le^{-1})$, neboť $x \le^{-1} y \Rightarrow y \le x \Rightarrow \varphi y \le \varphi x \Rightarrow \varphi x \le^{-1} \varphi y$. □

Po-grupu $(\mathbf{G}, \le^{-1})$ pak nazveme *duální po-grupou* k $(\mathbf{G}, \le)$.

Tvrzení 3. *Je-li $(\mathbf{G}, \le)$ po-grupa, pak (grupová) inverze je izomorfismem uspořádaných množin $(G, \le)$, $(G, \le^{-1})$.*

Důkaz. Inverze je zřejmě bijekcí $G \to G$. Je-li $x \le y$, pak aplikací $L_{x^{-1}} \circ P_{y^{-1}}$ dostaneme $y^{-1} \le x^{-1}$, tedy $x^{-1} \le^{-1} y^{-1}$. Analogicky obráceně. □

Tvrzení 4. *Nechť $\mathbf{G}$ je grupa. Existuje relace $\le$ na G taková, že $(\mathbf{G}, \le)$ je po-grupa, právě když existuje $P \subseteq G$ splňující současně: $P^2 \subseteq P$, $P \cap P^{-1} = \{1\}$, P je invariantní na vnitřní automorfismy grupy.*

Důkaz. '$\Rightarrow$': Označme $\mathrm{U}\{x\}$ horní kužel x, $\mathrm{U}\{x\} = \{y \in G; x \le y\}$. Pak $P := \mathrm{U}\{1\}$ splňuje všechny požadavky. Pokud $g, h \in P$, pak $1 \le g$ a $1 \le h$, odkud $1 \le gh$, tedy $gh \in P$. Dle tvrzení 3, $P^{-1} = \{x \in G; x^{-1} \in P\}$ je dolní kužel 1, označme jej $\mathrm{D}\{1\}$. Z antisymetrie '$\le$' plyne $P \cap P^{-1} = \{1\}$. Nakonec, vnitřní automorfismus je izotónní operátor, $1 \le g \Rightarrow 1 = (1)^h \le (g)^h$.
'$\Leftarrow$': Definujme

$$g \le h \iff hg^{-1} \in P\,. \tag{1}$$

Relace $\le$ je reflexivní: $gg^{-1} = 1 \in P$, antisymetrická: $(g \le h) \wedge (h \le g) \Rightarrow hg^{-1}, gh^{-1} \in P$, kde $gh^{-1} = \left(hg^{-1}\right)^{-1}$, tedy $hg^{-1} \in P \cap P^{-1} = \{1\}$, odkud $g = h$. Relace $\le$ je tranzitivní: $x \le y$ a $y \le z$ implikuje yx^{-1}, $zy^{-1} \in P$, tedy $zy^{-1}yx^{-1} \in P^2 \subseteq P$, takže $x \le z$. Nakonec, je-li $g \le h$, pak $(xh)(xg)^{-1} = \left(hg^{-1}\right)^x \in P$ a podobně, pokud $g \le h$, pak $(hx)(gx)^{-1} = hg^{-1} \in P$. Translace grupy jsou izotónní. □

Definice 2. Nechť $(\mathbf{G}, \leq)$ je po-grupa. *Kladným*, resp. *záporným kuželem* po-grupy nazveme množinu $\mathrm{U}\{1\}$, resp. $\mathrm{D}\{1\}$ a značíme G^+, resp. G^-.

Ze vztahu $g \leq h \iff hg^{-1} \in G^+$ z důkazu věty 4 plyne, že znalost uspořádání je ekvivalentní znalosti kladného kuželu po-grupy.

Poznamenejme, že v (1) můžeme bez obav přehodit pořadí násobení, neboť kladný kužel je invariantní na vnitřní automorfismy: $hg^{-1} \in P \iff \left(hg^{-1}\right)^{g^{-1}} = g^{-1}h \in P$.

Poznámka 1. Nechť $(\mathbf{G}, \leq)$ je po-grupa a $g \in G$. Pak $g \in G^+$, právě když L_g je extenzivní. Dále, $\mathrm{U}\{g\} = L_{g*}G^+ = gG^+$.

Důkaz. Je-li $g \in G^+$, pak $1 \leq g$, tedy $x \leq gx$. Je-li L_g extenzivní, pak pro libovolné x je $x \leq gx$, takže $1 \leq g$. Ekvivalence je dokázána. Z implikace doprava plyne $gG^+ \subseteq \mathrm{U}\{g\}$. Obráceně, je-li $g \leq x$, pak $x = g\left(g^{-1}x\right) \in gG^+$. □

Tvrzení 5. *Nechť* $\mathbf{G}$ *je grupa. Existuje relace* $\leq$ *na* G *taková, že* $(\mathbf{G}, \leq)$ *je po-grupa a* $(G, \leq)$ *je lineárně uspořádaná množina, právě když existuje* $P \subseteq G$ *splňující současně podmínky z tvrzení 4 a navíc* $P \cup P^{-1} = G$.

Důkaz. '⇒': Pro $P = \mathrm{U}\{1\}$ dle tvrzení 3 platí $P^{-1} = \mathrm{D}\{1\}$ a z linearity je $\mathrm{U}\{1\} \cup \mathrm{D}\{1\} = G$.
'⇐': Stačí ověřit, že uspořádání $\leq$ definované vztahem (1), je lineární. Pro $g, h \in G$ je $hg^{-1} \in G = P \cup P^{-1}$, tedy $hg^{-1} \in P$ nebo $hg^{-1} \in P^{-1}$. Takže $g \leq h$ nebo $h \leq g$. □

Úmluva 2. Abychom mohli psát méně závorek, budou mít operace grupy přednost před svazovými operacemi, resp. infimem/supremem.

Tvrzení 6. *Nechť* $(\mathbf{G}, \leq)$ *je po-grupa,* $\{h_\lambda\}_\Lambda \subseteq G$ *a* $g \in G$.[2]

$$\exists \bigwedge_\Lambda h_\lambda \iff \exists \bigwedge_\Lambda gh_\lambda\,.$$

Je-li pravdivá aspoň jedna strana ekvivalence, pak $g \bigwedge_\Lambda h_\lambda = \bigwedge_\Lambda gh_\lambda$.

Důkaz. '⇒': Označme $i_\Lambda \coloneqq \bigwedge_\Lambda h_\lambda$. Je $gi_\Lambda \leq \{gh_\lambda\}_\Lambda$ díky izotonii L_g. Ať $k \leq \{gh_\lambda\}_\Lambda$. Díky izotonii $L_{g^{-1}}$ je $g^{-1}k \leq \{h_\lambda\}_\Lambda$, tedy $g^{-1}k \leq i_\Lambda$, odkud $k \leq gi_\Lambda$.
'⇐': Důsledek obrácené implikace a existence g^{-1}. □

Platí duální tvrzení (pro supremum) a též tvrzení pro násobení zprava. Toto dále nebudeme připomínat.

Tvrzení 7. *Nechť* $(\mathbf{G}, \leq)$ *je po-grupa a* $\{h_\lambda\}_\Lambda \subseteq G$.

$$\exists \bigwedge_\Lambda h_\lambda \iff \exists \bigvee_\Lambda {h_\lambda}^{-1}\,.$$

Je-li pravdivá aspoň jedna strana ekvivalence, pak $\left(\bigwedge_\Lambda h_\lambda\right)^{-1} = \bigvee_\Lambda {h_\lambda}^{-1}$.

Důkaz. Důsledek tvrzení 3. □

[2] Nemá smysl uvažovat prázdný systém, neboť netriviální po-grupa nemá největší prvek. Kdyby g byl největším prvkem, pak $\forall h \in G$ je $gh^{-1} \in G^+$, tedy $L_{g*}G = G^+$. Na druhou stranu je $L_{g*}G = G$, odkud $G^+ = G = G^-$, takže $\{1\} = G^+ \cap G^- = G$.

Definice 3. Nechť $(P, \leq)$ je uspořádaná množina. Řekneme, že $(P, \leq)$ je *shora (zdola) usměrněná*, právě když pro každé dva prvky P existuje společná horní (dolní) závora. Řekneme, že $(P, \leq)$ je *usměrněná*, právě když $(P, \leq)$ je shora i zdola usměrněná.

Tvrzení 8 (Clifford). *Nechť $(\mathbf{G}, \leq)$ je po-grupa. Následující tvrzení jsou ekvivalentní (NTJE):*

1. *$(G, \leq)$ je usměrněná.*
2. *$(G, \leq)$ je shora usměrněná.*
3. *$\mathrm{U}\{1, g\} \neq \varnothing$.*
4. *Pro každé $g, h \in G$ existují $x, y \in \mathrm{U}\{g\}$ tak, že $h = xy^{-1}$.*

Důkaz. Zřejmě platí *1.* $\Rightarrow$ *2.* $\Rightarrow$ *3.*, dokažme *3.* $\Rightarrow$ *4.*: Volme $z \in \mathrm{U}\{1, h\}$. Pak $1 \leq z$, tedy $g \leq zg$. Položme $x := zg$. Dosazením do rovnice $h = xy^{-1}$ dostaneme $y = h^{-1}zg$, přičemž požadujeme, aby $g \leq y = h^{-1}zg$, tj. $1 \leq h^{-1}z$, tj. $h \leq z$, což je splněno.
4. $\Rightarrow$ *3.*: Existují $x, y \in \mathrm{U}\{1\}$ tak, že $g = xy^{-1}$. Je $y^{-1} \leq 1$, $g = xy^{-1} \leq x$, tedy $x \in \mathrm{U}\{1, g\}$.
3. $\Rightarrow$ *2.*: Volme $g, h \in G$, nechť $g' \in \mathrm{U}\{1, g\}$, $h' \in \mathrm{U}\{1, h\}$. Pak (poznámka 1) $g'h' \in \mathrm{U}\{g, h\}$.
2. $\Rightarrow$ *1.*: Volme $g, h \in G$. Je $\varnothing \neq \mathrm{U}\{g^{-1}, h^{-1}\}$ a dle tvrzení 3 je $\left(\mathrm{U}\{g^{-1}, h^{-1}\}\right)^{-1} = \mathrm{D}\{g, h\}$. □

V bodě 4 můžeme bez obav přehodit pořadí násobení. Stačí jej formulovat v duální po-grupě (usměrněnost je samoduální pojem) a aplikovat grupovou inverzi.

Důsledek 1. *Nechť $(\mathbf{G}, \leq)$ je po-grupa. Pak $(\mathbf{G}, \leq)$ je usměrněná, právě když $\langle G^+ \rangle_{\mathbf{G}} = G$.*

Důkaz. '$\Rightarrow$': Stačí v tvrzení 8 v bodě 4 položit $g = 1$.
'$\Leftarrow$': $\langle G^+ \rangle_{\mathbf{G}} = \{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n;\, n \in \mathbb{N}, x_i \in G^+ \cup G^-\}$. Pro každé $g \in G$ najdeme $g' \in G^+$ tak, aby $g \leq g'$ (třetí bod tvrzení 8). Dokažme indukcí podle n. Nechť $g = x_1$. Je-li $x_1 \in G^+$, položme $g' = x_1$. Je-li naopak $x_1 \in G^-$, položme $g' = 1$. IP: Tvrzení platí pro všechna $k \in \boldsymbol{n}$,[3] kde $n \in \mathbb{N}$. Je-li $g = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1}$, pak dle IP a díky izotonii translace je $g \leq h' \cdot x_{n+1}$, kde $1, x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq h'$. Je-li $x_{n+1} \in G^+$, položme $g' = h'x_{n+1}$. Pokud naopak $x_{n+1} \in G^-$, položme $g' = h' \cdot 1$. □

Pro usměrněnou po-grupu tedy platí

$$G = \{x_1 x_2;\ x_1 \in G^+,\ x_2 \in G^-\}\,. \tag{2}$$

2 l-grupy

Definice 4. Nechť $\mathbf{G}$ je grupa a $(G, \leq)$ uspořádaná množina. Řekneme, že $(\mathbf{G}, \leq)$ je *svazově uspořádaná grupa (l-grupa)*, právě když $(\mathbf{G}, \leq)$ je po-grupa a $(G, \leq)$ je svazově uspořádaná množina.

Úmluva 3. Nebude-li řečeno jinak, l-grupu budeme chápat jako algebru $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1, \wedge, \vee)$, kde $(G, \wedge, \vee)$ je svaz odpovídající svazovému uspořádání $\leq$. Nebudeme striktně symbolicky rozlišovat algebru a její nosič.

Tvrzení 9. *Nechť $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa a $(G, \wedge, \vee)$ svaz. $(G, \cdot, ^{-1}, 1, \wedge, \vee)$ je l-grupa, právě když grupové násobení je distributivní z obou stran k oběma svazovým operacím.*

[3] $\boldsymbol{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$

Důkaz. '⇒': Viz tvrzení 6. '⇐': Je-li $h \leq k$, pak pro $g \in G$ je $gh \wedge gk = g(h \wedge k) = gh$, tedy $gh \leq gk$. L_g je izotónní. Analogicky pro P_g. □

Tvrzení 10. *Nechť G je l-grupa. Pak $(g \wedge h)^{-1} = g^{-1} \vee h^{-1}$.*

Důkaz. Důsledek tvrzení 7. □

Tvrzení 11. *Nechť $(G, \leq)$ je po-grupa. NTJE:*

1. *G je l-grupa.*
2. *G je horní polosvaz.*
3. $(\forall g \in G)(\exists g \vee 1)$.
4. *G je usměrněná a G^+ je svazově uspořádaná.*

Důkaz. Zřejmě platí *1.* ⇒ *2.* ⇒ *3.*, dokažme *3.* ⇒ *4.*: Dle tvrzení 8 je G usměrněná. Pro libovolnou $X \subseteq G^+$ platí

$$\exists \sup_G X \barwedge \sup_G X \in G^+ \;\Rightarrow\; \sup_{G^+} X = \sup_G X\,.$$

Volme $g, h \in G^+$. Existuje $1 \vee g^{-1}h$, tedy $g(1 \vee g^{-1}h) = g \vee h$ a zřejmě $g \vee h \in G^+$. Podobně, existuje $1 \vee hg^{-1}$, tedy $h^{-1}(1 \vee hg^{-1}) = h^{-1} \vee g^{-1} = (h \wedge g)^{-1}$. Je $g \wedge h \in G^+$.

4. ⇒ *3.*: G je usměrněná, tedy pro $g \in G$ existují $x, y \in G^+$ tak, že $g = x^{-1}y$. G^+ je svazově uspořádaná a $\sup_{G^+}\{x, y\} = \sup_G\{x, y\}$, odkud $x^{-1}(x \vee y) = 1 \vee x^{-1}y = 1 \vee g$.

3. ⇒ *2.*: $g \vee h = g(1 \vee g^{-1}h)$. *2.* ⇒ *1.*: $g \wedge h = (g^{-1} \vee h^{-1})^{-1}$. □

Tvrzení 12. *Nechť G je l-grupa, $n \in \mathbb{N}_0$, $g \in G$. Platí $(g \vee 1)^n = \bigvee_{i=0}^{n} g^i$.*

Důkaz. Indukcí. $n = 0$: triviálně. Indukční předpoklad (IP): platí pro $0, \ldots, k$, kde $k \in \mathbb{N}_0$.

$$(g \vee 1)^{n+1} = (g \vee 1)(g \vee 1)^n = (g \vee 1) \bigvee_{i=0}^{n} g^i = \left(g \bigvee_{i=0}^{n} g^i\right) \vee \left(1 \bigvee_{i=0}^{n} g^i\right) =$$
$$= \bigvee_{i=0}^{n} g^{i+1} \vee \bigvee_{i=0}^{n} g^i = \bigvee_{i=0}^{n+1} g^i\,.$$
□

Tvrzení 13. *Pokud G je l-grupa, pak G je bez torze*[4].

Důkaz. Ať $g \in G$ je konečného řádu, tj. $(\exists n \in \mathbb{N})(g^n = 1)$. Pak $g^n \wedge 1 = g^n \vee 1 = 1$. Dle tvrzení 12

$$(1 \vee g)^n = \bigvee_{i=0}^{n} g^i = \bigvee_{i=0}^{n-1} g^i = (1 \vee g)^{n-1}\,,$$

takže $1 \vee g = 1$. Analogicky, $1 \wedge g = 1$. Odtud, $g = 1$. □

Nově definované pojmy budou obvykle samoduální, tak jako pojem polouzavřenosti.

Definice 5. Nechť G je po-grupa. Řekneme, že G je *polouzavřená*, právě když $(\forall n \in \mathbb{N})(g^n \in G^+ \Rightarrow g \in G^+)$.

[4] jediný prvek konečného řádu je jednotkový.

Tvrzení 14. *Nechť G je l-grupa. G je polouzavřená.*

Důkaz. Pokud $n \in \mathbb{N}$ a $g^n \in G^+$, pak $g^n \wedge 1 = 1$, tedy (důkaz tvrzení 13) $1 \wedge g = 1$, tj. $g \in G^+$. $\square$

Podle tvrzení 13 je sice každá l-grupa bez torze, ale existuje grupa bez torze, kterou nelze svazově uspořádat (viz příklad 15).

Tvrzení 15. *Nechť $(G, \leq)$ je po-grupa. Je-li grupa G komutativní a bez torze, pak*

$$(\exists \preceq \supseteq \leq)((G, \preceq) \text{ je lineárně uspořádaná grupa}) .$$

Důkaz. Označme G^+ kladný kužel $(G, \leq)$. Najdeme rozšíření $H \supseteq G^+$ tak, aby H byl kladným kuželem G a $H \cup H^{-1} = G$. Pak pro uspořádání $\preceq$ indukované H je $(G, \preceq)$ lineárně uspořádaná a navíc je $\preceq$ lineárním rozšířením $\leq$, neboť $g \leq h \Rightarrow hg^{-1} \in G^+ \Rightarrow hg^{-1} \in H \Rightarrow g \preceq h$.

Je-li $G = \{1\}$, jsme hotovi. Nechť je grupa netriviální. Definujeme $T \subseteq G$ následovně.

(a) Pokud $G^+ = \{1\}$, volme $x \in G \setminus \{1\}$, $T \coloneqq \{x^n;\ n \in \mathbb{N}\}$.[5]

(b) Pokud $G^+ \supsetneq \{1\}$, položme $T \coloneqq G^+ \setminus \{1\}$.

Je $T^2 \subseteq T$, $T \cap T^{-1} = \emptyset$ a T je invariantní na vnitřní automorfismy (G je komutativní).

$$\mathcal{S} \coloneqq \{T' \supseteq G^+ \setminus \{1\};\ {T'}^2 \subseteq T' \ \wedge\ T' \cap {T'}^{-1} = \emptyset\} .$$

Je $T \in \mathcal{S}$ a je-li $\mathcal{C}$ neprázdný řetězec v $\mathcal{S}$, pak $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{S}$ je horní závorou $\mathcal{C}$, tedy podle Zornova lemmatu existuje maximální prvek $\mathcal{S}$. Jeden takový vyberme a označme W.

Platí $W \cup W^{-1} \cup \{1\} = G$ – dokažme sporem. Volme $y \in G \setminus \big(W \cup W^{-1} \cup \{1\}\big)$. Položme

$$Q_+ \coloneqq WY_0 \cup Y , \quad Q_- \coloneqq W{Y_0}^{-1} \cup Y^{-1} ,$$

kde $Y \coloneqq \{y^n;\ n \in \mathbb{N}\}$, $Y_0 = Y \cup \{y^0\}$. Je $Q_+, Q_- \supsetneq W$ a Q_+, Q_- jsou pologrupy (využijme komutativitu G):

$${Q_+}^2 = (WY_0 \cup Y) \cdot (WY_0 \cup Y) = W^2 Y_0^2 \cup WY_0 Y \cup Y^2 \subseteq WY_0 \cup Y = Q_+ ,$$

analogicky pro Q_-. Z maximality W plyne, že $Q_+, Q_- \notin \mathcal{S}$, tedy $Q_\pm \cap {Q_\pm}^{-1} \neq \emptyset$, tudíž z uzavřenosti $Q_\pm$ na násobení, $1 \in Q_+ \cap Q_-$. Protože G je bez torze, $1 \notin Y, Y^{-1}$, takže existují $w_1, w_2 \in W$ a $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ tak, že

$$1 = w_1 y^{n_1} = w_2 y^{-n_2} ,$$

odkud $w_1 = y^{-n_1}$, $w_2 = y^{n_2}$, tedy $n_1, n_2 > 0$ a

$$1 = (yy^{-1})^{n_1 n_2} = y^{n_1 n_2} y^{-n_1 n_2} = w_2^{n_1} w_1^{n_2} \in W ,$$

neboť W je pologrupa. Z definice ale W neobsahuje prvek 1 – spor. $\square$

V důsledku, každou komutativní grupu bez torze lze lineárně uspořádat.

---

[5]Tedy $1 \notin T$ (bez torze).

Tvrzení 16. *Nechť G je l-grupa.*

1. $g(g \wedge h)^{-1}h = g \vee h$.
2. $g, h \in G^+ \Rightarrow g \vee h \leq gh$.
3. *Pokud g, h komutují, pak $g, g \wedge h, g \vee h$ komutují.*
4. *Pokud g, h komutují, pak $gh = (g \wedge h)(g \vee h)$.*

Důkaz.

1. $g(g \wedge h)^{-1}h = g(g^{-1} \vee h^{-1})h = (1 \vee gh^{-1})h = h \vee g$.
2. Dle poznámky 1 je $g, h \leq gh$.
3. $g(g \wedge h) = g^2 \wedge gh = g^2 \wedge hg = (g \wedge h)g$, duálně pro $g, g \vee h$. $(g \wedge h)(g \vee h) = [(g \wedge h)g] \vee [(g \wedge h)h] = [g(g \wedge h)] \vee [h(g \wedge h)] = (g \vee h)(g \wedge h)$.
4. $(g \wedge h)(g \vee h) = (g \wedge h)g(g \wedge h)^{-1}h = g(g \wedge h)(g \wedge h)^{-1}h = gh$. □

Poznámka 2. Nechť G je l-grupa a $Z(G)$ její centrum. Zobrazení $Z(G) \to Z(G)$, $g \mapsto g^{-1}$ je grupovým automorfismem a izomorfismem podsvazu původního a duálního svazu.

Důkaz. Je korektně definované (centrum je podgrupou), bijektivní a je grupovým homomorfismem. Nechť $g, h \in Z(G)$ a $x \in G$. Pak $x(g \wedge h) = xg \wedge xh = gx \wedge hx = (g \wedge h)x$, tedy $g \wedge h \in Z(G)$, analogicky pro $\vee$. $Z(G)$ je podsvazem původního a duálního svazu, tedy zobrazení výše je restrikcí svazového izomorfismu z tvrzení 3. □

Tvrzení 17. *Nechť G je l-grupa. Je-li $g \wedge h = 1$, pak $gh = hg = g \vee h$.*

Důkaz. $g \vee h = g(g \wedge h)^{-1}h = g1h = gh = h \vee g = \ldots = hg$. □

Tvrzení 18 (Riesz)**.** *Nechť G je l-grupa a $n \in \mathbb{N}$.*

$$(\forall i \in \boldsymbol{n})(d_i \in G^+) \barwedge (1 \leq g \leq d_1 \cdot \ldots \cdot d_n) \Rightarrow (\forall i \in \boldsymbol{n})(\exists c_i)\big((1 \leq c_i \leq d_i) \barwedge (g = c_1 \cdot \ldots \cdot c_n)\big) .$$

Důkaz. Indukcí. Je-li $n = 1$, $c_1 := g$ $(= g \wedge d_1)$. IP: věta platí pro $k \in \mathbb{N}$ pevné. Mějme g, $\{d_i; i \in \boldsymbol{k+1}\}$ splňující předpoklady. Položme

$$c_{k+1} := g \wedge d_{k+1} , \quad g' := g\,(c_{k+1})^{-1} .$$

Je $1 \leq c_{k+1} \leq d_{k+1}$. Před aplikací IP na g' ověřme, že $g' \leq d_1 \cdot \ldots \cdot d_k$.

$$\begin{aligned} g' &= g\,(c_{k+1})^{-1} = g\,(g \wedge d_{k+1})^{-1} = g\left(g^{-1} \vee {d_{k+1}}^{-1}\right) = 1 \vee g{d_{k+1}}^{-1} \leq \\ &\leq 1 \vee d_1 \cdot \ldots \cdot d_k \cdot d_{k+1} \cdot {d_{k+1}}^{-1} = 1 \vee d_1 \cdot \ldots \cdot d_k = d_1 \cdot \ldots \cdot d_k . \end{aligned}$$

Je tedy $g' = c_1 \cdot \ldots \cdot c_k$, tudíž $g = g'c_{k+1} = c_1 \cdot \ldots \cdot c_k \cdot c_{k+1}$. □

Tvrzení 19. *Nechť G je l-grupa. Pokud $1 \le x, y, z$, pak $x \wedge yz \le (x \wedge y)(x \wedge z)$.*

Důkaz. $1 \le x, y, z$ implikuje $1 \le x \wedge yz$. Je

$$1 \le x \wedge yz \le yz \,, \tag{3a}$$

$$1 \le x \wedge yz \le x \,. \tag{3b}$$

Podle (3a) a tvrzení 18, $(\exists c_y)(\exists c_z)\big((1 \le c_y \le y,\ 1 \le c_z \le z) \ \wedge\ (x \wedge yz = c_y c_z)\big)$.
Z (3b), $c_y \le c_y c_z = x \wedge yz \le x$. Aplikací $\wedge y$ dostaneme $c_y \le x \wedge y$. Analogicky, $c_z \le (x \wedge z)$, tedy

$$x \wedge yz = c_y c_z \le (x \wedge y)(x \wedge z) \,.$$ □

Důsledek 2. *Nechť G je l-grupa, $m, n \in \mathbb{N}$. Pokud $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n \in G^+$, pak*

$$g_1 g_2 \dots g_m \wedge h_1 h_2 \dots h_n \le \prod_{i \in \boldsymbol{m}} \prod_{j \in \boldsymbol{n}} (g_i \wedge h_j) \,.$$

Důkaz. Dokažme indukcí, že $g_1 g_2 \dots g_m \wedge h_1 h_2 \dots h_n \le \prod_{i \in \boldsymbol{m}} (g_i \wedge h_1 h_2 \dots h_n)$.[6] Pro $m = 1$ platí tvrzení triviálně. IP: tvrzení platí pro $m \in \mathbb{N}$ pevné.

$$\prod_{\boldsymbol{m+1}} g_i \wedge \prod_{\boldsymbol{n}} h_j \overset{\text{T19}}{\le} \left(\prod_{\boldsymbol{m}} g_i \wedge \prod_{\boldsymbol{n}} h_j\right)\left(g_{m+1} \wedge \prod_{\boldsymbol{n}} h_j\right) \overset{\text{IP}}{\le} \prod_{i \in \boldsymbol{m+1}} \left(g_i \wedge \prod_{j \in \boldsymbol{n}} h_j\right) .$$

Tedy (indukcí podle n) pro každé $i \in \boldsymbol{m}$ je $g_i \wedge \prod\limits_{\boldsymbol{n}} h_j \le \prod\limits_{j \in \boldsymbol{n}} (g_i \wedge h_j)$, což dá dokazované. □

Definice 6. Nechť L je svaz. Řekneme, že L je *Brouwerův*, právě když

$$(\forall g \in L)(\forall \{h_\lambda\}_\Lambda \subseteq L)\left(\exists \bigvee_\Lambda h_\lambda \Rightarrow g \wedge \bigvee_\Lambda h_\lambda = \bigvee_\Lambda (g \wedge h_\lambda)\right) .$$

Řekneme, že L je *duálně Brouwerův*, právě když svaz duální k L je Brouwerův. Řekneme, že L je *úplně distributivní*, právě když pro každou podmnožinu $\{g_{ij}\}_{I,J} \subseteq L$ platí

$$\left(\exists \bigvee_I \bigwedge_J g_{ij} \,,\ \exists \bigwedge_{J^I} \bigvee_I g_{i,fi}\right) \Rightarrow \bigvee_I \bigwedge_J g_{ij} = \bigwedge_{J^I} \bigvee_I g_{i,fi} \,.$$

Poznámka 3. Nechť L je svaz. Je-li L úplně distributivní, pak je L distributivní. Je-li L Brouwerův, pak je L distributivní.

Důkaz. První implikace je zřejmá. Nechť L je Brouwerův, $a, b, c \in L$. $\Lambda := \mathbf{2}$, $h_1 = a$, $h_2 = b$, $g = c$. Z definice, $c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$. V L je $\wedge$ distributivní vzhledem k $\vee$, tedy i obráceně. L je distributivní. □

[6] Zachováváme pořadí v součinu.

Tvrzení 20. *Svaz l-grupy je Brouwerův a duálně Brouwerův.*

Důkaz. Dokážeme, že je Brouwerův. Nechť $\varnothing \subsetneq \{h_\lambda\}_\Lambda \subseteq G$, existuje $\bigvee_\Lambda h_\lambda$ a $g \in G$.

$$1 = \left(\bigvee_\Lambda h_\lambda\right)\left(\bigvee_\Lambda h_\lambda\right)^{-1} = \underbrace{\left(\bigvee_\Lambda h_\lambda\right)}_{x}\left(\bigwedge_\Lambda {h_\lambda}^{-1}\right) = \bigwedge_\Lambda x{h_\lambda}^{-1} . \tag{4}$$

Zabývejme se $x{h_\lambda}^{-1}$.

$$1 \le x{h_\lambda}^{-1} \overset{\cdot g}{\Rightarrow} g \le x{h_\lambda}^{-1}g \overset{\wedge x}{\Rightarrow} g \wedge x \le x{h_\lambda}^{-1}g \wedge x = \left(x{h_\lambda}^{-1}\right)(g \wedge h_\lambda) \overset{\cdot(g\wedge h_\lambda)^{-1}}{\Rightarrow}$$
$$1 \overset{h_\lambda \le x}{\le} (g \wedge x)(g \wedge h_\lambda)^{-1} \le x{h_\lambda}^{-1} . \tag{5}$$

Z (4) a (5) máme

$$1 = \bigwedge_\Lambda (g \wedge x)(g \wedge h_\lambda)^{-1} = (g \wedge x)\bigwedge_\Lambda (g \wedge h_\lambda)^{-1} = (g \wedge x)\left(\bigvee_\Lambda (g \wedge h_\lambda)\right)^{-1} .$$

Aplikací $\cdot \bigvee_\Lambda (g \wedge h_\lambda)$ dostaneme dokazované – svaz je Brouwerův. Svaz duální l-grupy je Brouwerův a je duálním svazem svazu původního, který je tudíž duálně Brouwerův. □

Důsledek 3. *Je-li G l-grupa, pak její svaz je distributivní.*

Existuje l-grupa, jejíž svaz není úplně distributivní [1].

Důsledek 4. *Nechť G je l-grupa, $n \in \mathbb{N}$ a $g_i \in G$ pro $i \in \boldsymbol{n}$. Pak*

$$((\forall i \in \boldsymbol{n})(\forall j \in \boldsymbol{n})(i \neq j \Rightarrow g_i \wedge g_j = 1)) \Rightarrow \prod_{\boldsymbol{n}} g_i = \bigvee_{\boldsymbol{n}} g_i .^7$$

Důkaz. $n = 1$: zřejmé, $n = 2$: tvrzení 17. IP: platí pro n. Ať $\{g_i\}_{\boldsymbol{n+1}} \subseteq G$, $g_i \wedge g_j = 1$ pro $i \neq j$.

$$g_{n+1} \wedge (g_1 \dots g_n) \overset{\text{IP}}{=} g_{n+1} \wedge \bigvee_{\boldsymbol{n}} g_i = \bigvee_{\boldsymbol{n}} (g_{n+1} \wedge g_i) = 1 ,$$

tedy

$$\prod_{\boldsymbol{n+1}} g_i = \left(\prod_{\boldsymbol{n}} g_i\right) g_{n+1} = \left(\prod_{\boldsymbol{n}} g_i\right) \vee g_{n+1} = \left(\bigvee_{\boldsymbol{n}} g_i\right) \vee g_{n+1} = \bigvee_{\boldsymbol{n+1}} g_i . \qquad \square$$

3 Absolutní hodnoty a trojúhelníkové nerovnosti

Definice 7. Nechť G je l-grupa, $g \in G$. Definujeme $g_+ := g \vee 1$, $g_- := g^{-1} \vee 1$, $|g| := g_+ g_-$. g_+, resp. g_-, resp. $|g|$ nazýváme *kladnou částí*, resp. *zápornou částí*, resp. *absolutní hodnotou* prvku g.

Důsledek 5. *$g, g_+, g_-, |g|$ komutují.*

Důkaz. Dle tvrzení 16 ($1, g$ komutují) g, g_+, g_- komutují. Je $|g| = g_+ g_-$. □

V situaci z definice nechť g_{+_d} značí kladnou část g v duální l-grupě (analogicky ostatní).

[7] Tedy g_i, $i \in \boldsymbol{n}$ komutují.

Tvrzení 21. *Nechť G je l-grupa. Pak*

1. $g^{-1}{}_{\pm_{\mathrm{d}}} = g_{\pm}{}^{-1}$,
2. $g_{-} = g^{-1}{}_{+}$,
3. $|g|_{\mathrm{d}} = |g|^{-1}$.

Důkaz. Dokažme poslední vztah: $|g|_{\mathrm{d}} = g_{+_{\mathrm{d}}} g_{-_{\mathrm{d}}} = g^{-1}{}_{+}{}^{-1} g^{-1}{}_{-}{}^{-1} = g_{-}{}^{-1} g_{+}{}^{-1} = |g|^{-1}$. □

Tvrzení 22. *Nechť G je l-grupa.*

1. *Zobrazení $G \to G$, $g \mapsto g_{+}$ je svazový endomorfismus, extenzivní, idempotentní, $(G)_{+} = G^{+}$ a $g_{+} = 1 \iff g \in G^{-}$.*
2. *Zobrazení $G \to G$, $g \mapsto |g|$ je extenzivní a idempotentní.*

Důkaz.
1. Díky důsledku 3, $(g \wedge h)_{+} = (g \wedge h) \vee 1 = (g \vee 1) \wedge (h \vee 1) = g_{+} \wedge h_{+}$. Díky absorpci, $(g \vee h)_{+} = (g \vee h) \vee 1 = (g \vee 1) \vee (h \vee 1) = g_{+} \vee h_{+}$. Ostatní je zřejmé.
2. Je $g \leq g_{+}$ a $1 \leq g_{-}$, tedy $g \leq g_{+} g_{-} = |g|$. Protože $|g| \in G^{+}$, je $|g|_{+} = |g|$ a $|g|_{-} = 1$, tedy $||g|| = |g|$. □

Tvrzení 23. *Nechť G je l-grupa a $g \in G$. Platí*

$$g_{+} g_{-}{}^{-1} = g \,,$$
$$g_{+} \wedge g_{-} = 1 \,.$$

Důkaz. Je $g g_{-} = g(g^{-1} \vee 1) = 1 \vee g = g_{+}$, tedy $g_{+} \wedge g_{-} = g g_{-} \wedge g_{-} = (g \wedge 1) g_{-} = (g \wedge 1)(g^{-1} \vee 1) = (g \wedge 1)\,(g \wedge 1)^{-1} = 1$. □

Důsledek 6. *Nechť G je l-grupa a $g \in G$. Pak $|g| = g_{+} \vee g_{-}$.*

Důkaz. Dle tvrzení 17 je $g_{+} g_{-} = g_{+} \vee g_{-}$. □

Pro daný prvek g jsou jeho kladná a záporná část jediná dvojice prvků s vlastnostmi z tvrzení 23.

Tvrzení 24. *Nechť G je l-grupa, $g, a, b \in G$. Platí*

$$(g = ab^{-1}) \ \barwedge \ (1 = a \wedge b) \ \Rightarrow \ (a = g_{+}) \ \barwedge \ (b = g_{-}) \,.$$

Důkaz. $g_{-} = ba^{-1} \vee 1 = b(a^{-1} \vee b^{-1}) = b(a \wedge b)^{-1} = b$. Odtud $g_{+} = g g_{-} = gb = (ab^{-1})b = a$. □

Tvrzení 25. *Nechť $((G, \cdot, {}^{-1}, 1), \leq)$ je po-grupa. Pak $((G, \cdot, {}^{-1}, 1), \leq)$ je l-grupa, právě když*

$$(\forall g \in G)(\exists a \in G)(\exists b \in G)\big((a \wedge b = 1) \barwedge (g = ab^{-1})\big) \,.$$

Důkaz. Zbývá dokázat '$\Leftarrow$'. Pro libovolné $g \in G$ najdeme $1 \vee g$ (tvrzení 11). Očekáváme, že $1 \vee g = a$.

$$a = a \cdot 1 = a \cdot 1^{-1} = a \cdot (a \wedge b)^{-1} = a\left(a^{-1} \vee b^{-1}\right) = 1 \vee ab^{-1} = 1 \vee g \,.$$ □

Úmluva 4. Do konce oddílu, $g, h, \ldots$ nechť jsou libovolné prvky nějaké l-grupy G.

Tvrzení 26.

$$(gh)_+ \leq g_+ h_+ \,,$$
$$(gh)_- \leq h_- g_- \,.$$

Důkaz. $g \leq g_+$, $h \leq h_+$, tedy $gh \leq g_+ h_+ \in G^+$. Z izotonie $(\cdot)_+$ plyne $(gh)_+ \leq g_+ h_+$. Duálně, $(gh)_-{}^{-1} = (gh)^{-1}{}_+{}^{-1} = (gh)_{+_\mathrm{d}} \geq g_{+_\mathrm{d}} h_{+_\mathrm{d}} = g^{-1}{}_+{}^{-1} h^{-1}{}_+{}^{-1} = g_-{}^{-1} h_-{}^{-1}$. □

Tvrzení 27. $g \wedge |h| = 1 \iff g \wedge h_+ = 1 = g \wedge h_-$.

Důkaz. $g \wedge |h| = 1 \Rightarrow 1 \leq g, h_\pm \Rightarrow 1 \leq g \wedge h_\pm \leq g \wedge (h_+ \vee h_-) = g \wedge |h| = 1$. Obráceně, $1 = g \wedge h_\pm \leq g \wedge |h| = g \wedge h_+ h_- \overset{\mathrm{D2}}{\leq} (g \wedge h_+)(g \wedge h_-) = 1$. □

Tvrzení 28. *Pokud* $|g| \wedge |h| = 1$*, pak* g, h *komutují.*

Důkaz. Dvojím použitím tvrzení 27 dostaneme $g_\pm \wedge h_+ = 1 = g_\pm \wedge h_-$. Dle tvrzení 17 komutují g_+, g_-, h_+, h_-. □

Tvrzení 29.

1. $|g| = 1 \iff g = 1$,

2. $\left|g^{-1}\right| = |g|$,

3. $|g| = g_+ \vee g_- = g \vee g^{-1}$,

4. $|h| \leq |g| \iff |g|^{-1} \leq h \leq |g|$.

Důkaz. 1. '$\Rightarrow$': $g_+ g_- = 1 \Rightarrow g_+ = g_-{}^{-1} \overset{G^+ \cap G^- = \{1\}}{\Rightarrow} g_+ = g_-{}^{-1} = 1 = g$. '$\Leftarrow$': Zřejmé.

2. $\left|g^{-1}\right| = g^{-1}{}_+ g^{-1}{}_- = g_- g^{-1}{}^{-1}{}_+ = g_- g_+ = |g|$.

3. První vztah viz důsledek 6. Je $|g| = g_+ \vee g_- = (1 \vee g) \vee (1 \vee g^{-1}) = \left(g \vee g^{-1}\right) \vee 1$. Ukažme, že $1 \leq g \vee g^{-1}$. Protože $g \vee g^{-1} \geq g$, je $\left(g \vee g^{-1}\right)^2 \geq \left(g \vee g^{-1}\right) g = g^2 \vee 1 \geq 1$. Díky polouzavřenosti (tvrzení 14) $g \vee g^{-1} \geq 1$.

4. $|h| \leq |g| \iff h \vee h^{-1} \leq |g| \iff \left(h, h^{-1} \leq |g|\right) \iff |g|^{-1} \leq h \leq |g|$. □

Definice 8. g, h nazveme *disjunktní*, právě když $|g| \wedge |h| = 1$.

Jsou-li g, h disjunktní, pak jsou disjunktní v duální l-grupě: $|g|^{-1} \vee |h|^{-1} = (|g| \wedge |h|)^{-1}$.

Tvrzení 30. $\left|gh^{-1}\right| = (g \vee h)(g \wedge h)^{-1}$.

Důkaz. $(g \vee h)(g \wedge h)^{-1} = (g \vee h)\left(g^{-1} \vee h^{-1}\right) = (g \vee h) g^{-1} \vee (g \vee h) h^{-1} = \left(1 \vee hg^{-1}\right) \vee \left(gh^{-1} \vee 1\right) = \left(gh^{-1}\right)_- \vee \left(gh^{-1}\right)_+ = \left|gh^{-1}\right|$. □

Tvrzení 31. $(\forall g \geq 1)(\forall h \geq 1)\left(g \wedge h = 1 \iff gh = \left|gh^{-1}\right|\right)$.

Důkaz. $\left|gh^{-1}\right| = (g \vee h)(g \wedge h)^{-1} = g \vee h = gh$. Obráceně, $gh = \left|gh^{-1}\right| = (g \vee h)(g \wedge h)^{-1}$. Protože $1 \leq g, h$, je $g \vee h \leq gh = (g \vee h)(g \wedge h)^{-1}$, odkud $g \wedge h \leq 1$ (opačná nerovnost zřejmá). □

Tvrzení 32. $|g \wedge h|, |g \vee h| \leq |g| \vee |h| \leq |g|\,|h|$.

Důkaz. $1 \leq |g|, |h|$ implikuje druhou nerovnost. První plyne z následujícího:

$$
\begin{aligned}
|g| \vee |h| &= \left(g \vee g^{-1}\right) \vee \left(h \vee h^{-1}\right) = (g \vee h) \vee \left(g^{-1} \vee h^{-1}\right) , \\
|g \wedge h| &= (g \wedge h) \vee (g \wedge h)^{-1} = (g \wedge h) \vee \left(g^{-1} \vee h^{-1}\right) , \\
|g \vee h| &= (g \vee h) \vee (g \vee h)^{-1} = (g \vee h) \vee \left(g^{-1} \wedge h^{-1}\right) .
\end{aligned}
$$

□

Tvrzení 33.

1. $(\forall n \in \mathbb{N})\ (1 \vee g)^n = 1 \vee g^n$
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ |g^n| = |g|^n$

Důkaz. 1. Je $g^n = \left(g_+ {g_-}^{-1}\right)^n = ({g_+}^n)\,({g_-}^n)^{-1}$. Dále, $1 \leq {g_+}^n \wedge {g_-}^n \overset{\mathrm{D2}}{\leq} (g_+ \wedge g_-)^{n^2} = 1$. Dle tvrzení 24 je ${g^n}_\pm = {g_\pm}^n$.

2. $|g^n| = {g^n}_+ {g^n}_- = {g_+}^n {g_-}^n = (g_+ g_-)^n = |g|^n$. □

Tvrzení 34 (Trojúhelníková nerovnost)**.** $|gh| \leq |g|\,|h|\,|g|$.

Důkaz. $g \leq |g|$, $h \leq |h|$, tedy $gh \leq |g|\,|h| \leq |g|\,|h|\,|g|$. Duálně, $g \geq |g|_{\mathrm{d}}$, $h \geq |h|_{\mathrm{d}}$, tedy $gh \geq |g|^{-1}|h|^{-1} \geq |g|^{-1}|h|^{-1}|g|^{-1} = (|g|\,|h|\,|g|)^{-1}$. Dle tvrzení 29 je $|gh| \leq |g|\,|h|\,|g|$. □

Mohli jsme násobit zleva $|h|$ – platí $|gh| \leq |h|\,|g|\,|h|$.

Tvrzení 35. *Jestliže g, h komutují, pak $|gh| \leq |g|\,|h|$.*

Důkaz. $|g|\,|h| = \left(g \vee g^{-1}\right)\left(h \vee h^{-1}\right) = g\left(h \vee h^{-1}\right) \vee g^{-1}\left(h \vee h^{-1}\right) = gh \vee gh^{-1} \vee g^{-1}h \vee g^{-1}h^{-1} = gh \vee gh^{-1} \vee g^{-1}h \vee h^{-1}g^{-1} \geq gh \vee h^{-1}g^{-1} = |gh|$. □

Obrácená implikace obecně neplatí (viz příklad 16).

Tvrzení 36. *Nechť G je l-grupa. G je komutativní grupa, právě když pro každé $g, h \in G$ platí $|gh| \leq |g|\,|h|$.*

Důkaz. Zbývá dokázat '$\Leftarrow$'. Nechť $1 \leq g, h$. Pak $|gh| = (gh) \vee (gh)^{-1} = gh = \left|(gh)^{-1}\right| = \left|h^{-1}g^{-1}\right| \leq \left|h^{-1}\right|\left|g^{-1}\right| = \left(h^{-1} \vee h\right)\left(g^{-1} \vee g\right) = hg$. Záměnou $g \leftrightarrow h$ též $gh \geq hg$, tedy $gh = hg$. G^+ je komutativní pologrupa.

Pro $g, h \in G$ je $gh = g_+ {g_-}^{-1} h_+ {h_-}^{-1} = g_+ h_+ {g_-}^{-1} {h_-}^{-1} = \ldots = h_+ {h_-}^{-1} g_+ {g_-}^{-1} = hg$. □

Tvrzení 37. *Jsou-li x, y a x, z disjunktní, pak x, yz jsou disjunktní.*

Důkaz. $1 \leq |x| \wedge |yz| \leq |x| \wedge |y|\,|z|\,|y| \overset{\mathrm{D2}}{\leq} (|x| \wedge |y|)(|x| \wedge |z|)(|x| \wedge |y|) = 1$. □

Množina všech prvků disjunktních s daným prvkem je nosičem podgrupy.

Tvrzení 38. *Pro každé g, h existují x, y splňující současně $x \wedge y = 1$, $g = (g \wedge h)x$ a $h = (g \wedge h)y$.*

Důkaz. Pro $x = (g \wedge h)^{-1}g$, $y = (g \wedge h)^{-1}h$ je $x \wedge y = (g \wedge h)^{-1}(g \wedge h) = 1$. □

4 l-permutace, l-homomorfismy

Tvrzení 39. *Nechť G je l-grupa a $g \in G$. Pak L_g a P_g jsou svazové automorfismy.*

Důkaz. L_g je bijekce, protože G je grupa. Ostatní plyne z tvrzení 9. □

Definice 9. Nechť G je l-grupa a $\varphi: G \to G$. Řekeneme, že φ je *l-permutace G*, právě když φ je svazový automorfismus a $\varphi 1 = 1$.

Svazový automorfismus, resp. l-permutace l-grupy, je též svazovým automorfismem, resp. l-permutací duální l-grupy.

Označme $\mathrm{Aut}\,(G, \wedge, \vee)$ množinu všech automorfismů svazu l-grupy G. Ta je nosičem kompoziční grupy $\mathbf{Aut}\,(G, \wedge, \vee)$.

Tvrzení 40. *Nechť G je l-grupa. Pak platí následující.*

1. $\{\varphi \in \mathrm{Aut}\,(G, \wedge, \vee);\ \varphi$ *l-permutace*$\} \leq \mathrm{Aut}\,(G, \wedge, \vee)$.

2. *Je-li $\varphi \in \mathrm{Aut}\,(G, \wedge, \vee)$, pak existuje l-permutace ψ a $g \in G$ takové, že $\varphi = P_g \psi$ a tento rozklad je jednoznačný.*

Důkaz. 1. 1_G je l-permutace G. Jsou-li φ, ψ l-permutace G, pak $(\varphi\psi^{-1})1 = 1$, tedy $\varphi\psi^{-1}$ je l-permutace G.

2. Je-li ψ l-permutace, pak $\varphi 1 = (P_g \psi)1 = g$. Musíme položit $g = \varphi 1$ a $\psi = P_{g^{-1}}\varphi = P_{(\varphi 1)^{-1}}\varphi$. Je $\psi \in \mathrm{Aut}\,(G, \wedge, \vee)$ (složení svazových automorfismů) a $\psi 1 = (\varphi 1)(\varphi 1)^{-1} = 1$. □

Podobně, pro rozklad $\varphi = \psi P_g$ bychom dostali $g = (\varphi^{-1}1)^{-1}$, $\psi = \varphi P_{\varphi^{-1}1}$. Stejně pro L_g.

Tvrzení 41. *Nechť G je l-grupa a φ l-permutace. Pro libovolné $g \in G$ je*

$$(\varphi g)_+ = \varphi(g_+)\,,$$
$$(\varphi g)_- = \left(\varphi({g_-}^{-1})\right)^{-1}\ .$$

Důkaz. $(\varphi g)_+ = \varphi g \vee 1 = \varphi g \vee \varphi 1 = \varphi(g \vee 1) = \varphi(g_+)$. Odtud, $(\varphi g)_- = {(\varphi g)_{+_\mathrm{d}}}^{-1} = (\varphi(g_{+_\mathrm{d}}))^{-1} = \left(\varphi\left({g_-}^{-1}\right)\right)^{-1}$. □

Tvrzení 42. *Nechť G je l-grupa, φ l-permutace G, $g \in G$ a $n \in \mathbb{N}$. Je-li $g \wedge \varphi g = 1$, pak $g^n \wedge \varphi\left(g^n\right) = 1$.*

Důkaz. Aplikujme φ^{-1} na rovnost z předpokladu: $\varphi^{-1}(g \wedge \varphi g) = \varphi^{-1}g \wedge g = \varphi^{-1}1 = 1$. Podle důsledku 2 ($1 \leq g, \varphi^{-1}g$) je $1 \leq \varphi^{-1}g \wedge g^n \leq \left(\varphi^{-1}g \wedge g\right)^n = 1^n = 1$ a díky izotonii φ je $1 \leq g \wedge \varphi\left(g^n\right) \leq 1$, tedy $g \wedge \varphi g^n = 1$.

Podle důsledku 2 ($1 \leq g, \varphi g^n$) je $1 \leq g^n \wedge \varphi g^n \leq (g \wedge \varphi g^n)^n = 1^n = 1$, tedy $g^n \wedge \varphi g^n = 1$. □

Úmluva 5. Nechť $\mathbf{A} = (A, F)$, $\mathbf{B} = (B, F)$ jsou algebry (stejného typu). Fakt, že φ je homomorfismem algeber $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, pišme jako $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

Definice 10. Nechť $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1, \wedge, \vee)$, $\mathbf{H} = (H, \cdot, ^{-1}, 1, \wedge, \vee)$ jsou l-grupy a $\varphi: G \to H$. Řekneme, že φ je *l-homomorfismus* $\mathbf{G}$ do $\mathbf{H}$, právě když $\varphi: \mathbf{G} \to \mathbf{H}$.

Důsledek 7. *Nechť G je l-grupa. Pak každý vnitřní automorfismus grupy je l-automorfismem l-grupy.*

Tvrzení 43. *Nechť* $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ *jsou l-grupy a* $\varphi\colon G \to H$ *je grupový homomorfismus. Pak NTJE*

1. φ *je l-homomorfismus.*
2. $|\varphi g| = \varphi|g|$.
3. $g \wedge h = 1 \Rightarrow \varphi g \wedge \varphi h = 1$.
4. $(\varphi g)_+ = \varphi(g_+)$.

Důkaz. *1.* $\Rightarrow$ *2.*: $|\varphi g| = (\varphi g)_+(\varphi g)_- = (1 \vee \varphi g)\left(1 \vee (\varphi g)^{-1}\right) = (\varphi 1 \vee \varphi g)\left(\varphi 1 \vee \varphi g^{-1}\right) = \varphi(1 \vee g)\varphi(1 \vee g^{-1}) = \varphi\left(g_+ g_-\right) = \varphi|g|$.
2. $\Rightarrow$ *3.*: Využijme tvrzení 31. $\left|\varphi g(\varphi h)^{-1}\right| = \left|\varphi g\, \varphi h^{-1}\right| = \left|\varphi\left(gh^{-1}\right)\right| = \varphi\left|gh^{-1}\right| = \varphi(gh) = \varphi g\, \varphi h$. Je $1 \leq \varphi g, \varphi h$, neboť $\varphi g = \varphi|g| = |\varphi g|$. Dle tvrzení 31 je $\varphi g \wedge \varphi h = 1$.
3. $\Rightarrow$ *4.*: Je $g_+ \wedge g_- = 1$ a $g_+ {g_-}^{-1} = g$, tedy $\varphi g_+ \wedge \varphi g_- = 1$ a $\varphi g = \varphi\left(g_+ {g_-}^{-1}\right) = \varphi g_+ \left(\varphi g_-\right)^{-1}$. Tvrzení 24: $(\varphi g)_+ = \varphi g_+$.
4.$\Rightarrow$*1.*: $\varphi(g \vee h) = \varphi\left(\left(gh^{-1} \vee 1\right) h\right) = \varphi\left(gh^{-1} \vee 1\right)\varphi h = \left(\varphi\left(gh^{-1}\right) \vee 1\right)\varphi h = \varphi\left(gh^{-1}\right)\varphi h \vee \varphi h = \varphi g \vee \varphi h$. Dále, $\varphi(g \wedge h) = \varphi\left(g^{-1} \vee h^{-1}\right)^{-1} = \left(\varphi\left(g^{-1} \vee h^{-1}\right)\right)^{-1} = \left(\varphi g^{-1} \vee \varphi h^{-1}\right)^{-1} = \left((\varphi g)^{-1} \vee (\varphi h)^{-1}\right)^{-1} = \varphi g \wedge \varphi h$. □

Tvrzení 44. *Nechť* $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ *jsou l-grupy a* $\varphi\colon G^+ \to H^+$. *Je-li* φ *svazový homomorfismus, pologrupový homomorfismus a* $\varphi 1 = 1$, *pak existuje jediný l-homomorfismus* $\psi\colon \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ *takový, že* $\psi|_{G^+} = \varphi$.

Důkaz. Definujme $\psi\colon G \to H$, $\psi g = \varphi g_+ \left(\varphi g_-\right)^{-1}$.

1. Je-li $g \in G^+$, pak $\psi g = \varphi g (\varphi 1)^{-1} = \varphi g$, tedy $\psi|_{G^+} = \varphi$.
2. ψ je grupový homomorfismus.
   (a) $\psi g^{-1} = (\psi g)^{-1}$.
   $$\psi g^{-1} = \varphi {g^{-1}}_+ \left(\varphi {g^{-1}}_-\right)^{-1} = \varphi g_- \left(\varphi g_+\right)^{-1} = \left(\varphi g_+ \left(\varphi g_-\right)^{-1}\right)^{-1} = (\psi g)^{-1}\ .$$
   (b) $(\psi g\, \psi h)_+ = \varphi(gh)_+$.[8]
   $$(\psi g\, \psi h)_+ = \varphi g_+ \left(\varphi g_-\right)^{-1} \varphi h_+ \left(\varphi h_-\right)^{-1} \vee 1 = \left(\varphi g_-\right)^{-1} \varphi g_+ \varphi h_+ \left(\varphi h_-\right)^{-1} \vee 1\ ,$$
   neboť g_+, g_- komutují, φ je pologrupový homomorfismus, takže $\varphi g_+, \varphi g_-$ komutují. Na rovnost výše aplikujme $L_{\varphi g_-} \circ P_{\varphi h_-}$.
   $$\begin{aligned}\varphi g_- (\psi g\, \psi h)_+ \varphi h_- &= \varphi g_+ \varphi h_+ \vee \varphi g_- \varphi h_- = \varphi(g_+ h_+) \vee \varphi(g_- h_-) = \varphi(g_+ h_+ \vee g_- h_-) = \\ &= \varphi\left(g_-\left(g_+ {g_-}^{-1} h_+ {h_-}^{-1}\right) h_- \vee g_- 1 h_-\right) = \varphi g_- \varphi(gh \vee 1)\varphi h_- = \varphi g_- \varphi(gh)_+ \varphi h_-\end{aligned}$$
   a krácením dostaneme požadované.
   (c) $\psi(gh) = \psi g\, \psi h$.
   $$\begin{aligned}\psi(gh) &= \varphi(gh)_+ \left(\varphi(gh)_-\right)^{-1} = (\psi g\, \psi h)_+ \left(\varphi {(gh)^{-1}}_+\right)^{-1} = (\psi g\, \psi h)_+ \left(\varphi \left(h^{-1} g^{-1}\right)_+\right)^{-1} = \\ &= (\psi g\, \psi h)_+ \left(\left(\psi h^{-1}\, \psi g^{-1}\right)_+\right)^{-1} = (\psi g\, \psi h)_+ {\left[(\psi h)^{-1} (\psi g)^{-1}\right]_+}^{-1} = \\ &= (\psi g\, \psi h)_+ {(\psi g\, \psi h)^{-1}}_+^{\;-1} = (\psi g\, \psi h)_+ {(\psi g\, \psi h)_-}^{-1} = \psi g\, \psi h\ .\end{aligned}$$

[8] $(\psi g\, \psi h) \vee 1 = \varphi(gh \vee 1)$, podle předchozího $\varphi(gh \vee 1) = \psi(gh \vee 1)$.

3. ψ je l-homomorfismus.

$$\begin{aligned}(\psi g)_+ &= \varphi g_+ (\varphi g_-)^{-1} \vee 1\,,\\ \psi g_+ &= \varphi g_{++} (\varphi g_{+-})^{-1} = \varphi g_+\,.\end{aligned}$$

Na obě rovnosti aplikujme $P_{\varphi g_-}$. Je $\varphi g_+ \vee \varphi g_- = \varphi(g_+ \vee g_-) = \varphi(g_+ g_-) = \varphi g_+ \varphi g_-$. Podle tvrzení 43 je ψ l-homomorfismus.

4. Unicita: Nechť τ je l-homomorfismus, rozšíření φ.

$$\tau g = \tau\left(g_+ {g_-}^{-1}\right) = \tau g_+ (\tau g_-)^{-1} = \varphi g_+ (\varphi g_-)^{-1} = \psi g$$

□

5 l-podgrupy

Definice 11. Nechť $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1, \wedge, \vee)$ je l-grupa. *Podgrupou*, resp. *podsvazem*, resp. *l-podgrupou* l-grupy $\mathbf{G}$ nazýváme podgrupu grupy $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$, resp. podsvaz svazu $(G, \wedge, \vee)$, resp. podalgebru algebry $\mathbf{G}$.

Tvrzení 45. *Nechť G je l-grupa a H podgrupa grupy G. NTJE*

1. *H je l-podgrupa G.*
2. *$(\forall a \in H)(\forall b \in H)(a \vee b \in H)$.*
3. *$(\forall a \in H)(\forall b \in H)(a \wedge b \in H)$.*
4. *$(\forall a \in H)(a \wedge 1 \in H)$.*
5. *$(\forall a \in H)(a \vee 1 \in H)$.*

Důkaz. *1.* ⇒ *2.*: Zřejmé. *2.* ⇒ *3.*: $(a \wedge b) = \left(a^{-1} \vee b^{-1}\right)^{-1} \in H$. *3.* ⇒ *4.* ⇒ *5.*: Zřejmé. *5.* ⇒ *1.*: $a \vee b = b\left(b^{-1}a \vee 1\right)$, $a \wedge b = b\left(a^{-1}b \vee 1\right)^{-1}$. □

Příklad 1. Nechť G je l-grupa. Centrum grupy G, $Z(G)$, je l-podgrupou G. Dokaž.

Řešení: Nechť $z \in Z(G)$. Pak $g(1 \vee z) = g \vee gz = g \vee zg = (1 \vee z)g$ pro g libovolné, tedy $1 \vee z \in Z(G)$.

Poznámka 4. Nechť G je l-grupa a $\{a_{ij}\}_{IJ}, \{b_{kl}\}_{KL} \subseteq G$, kde I, J, K, L jsou neprázdné konečné množiny. Pak

$$\left(\bigvee_I \bigwedge_J a_{ij}\right)\left(\bigvee_K \bigwedge_L b_{kl}\right) = \bigvee_I \bigwedge_J \bigvee_K \bigwedge_L a_{ij} b_{kl} = \bigvee_K \bigwedge_L \bigvee_I \bigwedge_J a_{ij} b_{kl}\,.$$

Důkaz. Pro první rovnost využijeme distributivitu '·' ke svazovým operacím – nejdříve dvakrát pravou, poté dvakrát levou (obráceně pro druhou rovnost).

$$\left(\bigvee_I \bigwedge_J a_{ij}\right)\left(\bigvee_K \bigwedge_L b_{kl}\right) = \bigvee_I \left(\left(\bigwedge_J a_{ij}\right)\left(\bigvee_K \bigwedge_L b_{kl}\right)\right) = \bigvee_I \bigwedge_J \left(a_{ij}\left(\bigvee_K \bigwedge_L b_{kl}\right)\right) =$$
$$\bigvee_I \bigwedge_J \bigvee_K \left(a_{ij} \bigwedge_L b_{kl}\right) = \bigvee_I \bigwedge_J \bigvee_K \bigwedge_L a_{ij} b_{kl}$$

□

Tvrzení 46 (Weinberg)**.** *Nechť* **G** *je l-grupa a* $S \subseteq G$. *Je-li* S *podgrupou* G, *pak*

$$\langle S\rangle_{\mathbf{G}} = \left\{ \bigvee_I \bigwedge_J a_{ij};\ I, J \text{ konečné, neprázdné, } a_{ij} \in S \right\} .$$

Důkaz. Označme M_S množinu, jež je v rovnosti napravo. Ta je podsvazem $(G, \wedge, \vee)$.[9] Tento podsvaz je navíc podgrupou, tedy l-podgrupou. Dokažme obojí.

1. M_S je podsvaz generovaný S. Zjevně obsahuje S. Ukažme uzavřenost na operace.

$$\left(\bigvee_I \bigwedge_J a_{ij}\right) \wedge \left(\bigvee_K \bigwedge_L b_{kl}\right) = \bigvee_I \left(\bigwedge_J a_{ij} \wedge \bigvee_K \bigwedge_L b_{kl}\right) = \bigvee_I \bigvee_K \left(\bigwedge_J a_{ij} \ \wedge \ \bigwedge_L b_{kl}\right) =$$

$$= \bigvee_{m \in I \times K} \ \bigwedge_{n \in J \cup L} c_{mn} ,$$

kde $c_{mn} = \begin{cases} a_{m_1, n} & \text{, pokud } n \in J , \\ b_{m_2, n} & \text{, pokud } n \in L . \end{cases}$

$$\left(\bigvee_I \bigwedge_J a_{ij}\right) \vee \left(\bigvee_K \bigwedge_L b_{kl}\right) = \bigvee_{n \in I \cup K} \ \bigwedge_{m \in J \times L} c_{mn} ,$$

kde $c_{mn} = \begin{cases} a_{n, m_1} & \text{, pokud } n \in I , \\ b_{n, m_2} & \text{, pokud } n \in K . \end{cases}$

2. Tento podsvaz je podgrupou.

$$\left(\bigvee_I \bigwedge_J a_{ij}\right)\left(\bigvee_K \bigwedge_L b_{kl}\right) = \bigvee_I \bigwedge_J \bigvee_K \bigwedge_L a_{ij} b_{kl} = \bigvee_I \bigvee_{K^J} \bigwedge_J \bigwedge_L a_{ij} b_{fj,l} = \bigvee_{m \in I \times K^J} \ \bigwedge_{n \in J \times L} c_{mn} ,$$

kde $c_{(i,f),(j,l)} = a_{ij} b_{fj,l} \in S$.

$$\left(\bigvee_I \bigwedge_J a_{ij}\right)^{-1} = \bigwedge_I \bigvee_J {a_{ij}}^{-1} = \bigvee_{J^I} \bigwedge_I {a_{i,fi}}^{-1} = \bigvee_{f \in J^I} \bigwedge_{i \in I} c_{f,i} ,$$

kde $c_{f,i} = {a_{i,fi}}^{-1} \in S$. □

Tedy pro $S \in \mathrm{Sub}(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je $\langle S\rangle_{(G,\wedge,\vee)} = \langle S\rangle_{\mathbf{G}}$.

Důsledek 8. *Nechť* **G** *je l-grupa. Je-li* H *komutativní podgrupa* G, *pak* $\langle H\rangle_{\mathbf{G}}$ *je komutativní.*

Důkaz. Podle poznámky 4

$$\left(\bigvee_I \bigwedge_J g_{ij}\right)\left(\bigvee_K \bigwedge_L h_{kl}\right) = \bigvee_I \bigwedge_J \bigvee_K \bigwedge_L g_{ij} h_{kl} = \bigvee_I \bigwedge_J \bigvee_K \bigwedge_L h_{kl} g_{ij} = \left(\bigvee_K \bigwedge_L h_{kl}\right)\left(\bigvee_I \bigwedge_J g_{ij}\right) .$$ □

Důsledek 9. *Nechť* **G** *je l-grupa. Je-li* $H \trianglelefteq G$, *pak* $\langle H\rangle_{\mathbf{G}} \trianglelefteq G$.

Důkaz.

$$g\left(\bigvee_I \bigwedge_J h_{ij}\right)g^{-1} = \bigvee_I \bigwedge_J \underbrace{g h_{ij} g^{-1}}_{c_{ij} \in H} .$$ □

[9] V distributivním svazu je množina M_S podsvaz, generovaný libovolnou neprázdnou podmnožinou S.

6 Konvexní l-podgrupy

Definice 12. Nechť $(T, \leq)$ je uspořádaná množina a $S \subseteq T$. Řekneme, že S je *konvexní*, právě když $(\forall a \in S)(\forall b \in S)(\forall t \in T)(a \leq t \leq b \Rightarrow t \in S)$. Množinu všech konvexních l-podgrup l-grupy G značme $\mathfrak{C}(G)$.

Úmluva 6. Nechť G značí libovolnou l-grupu.

Tvrzení 47. *Nechť $S \leq (G, \cdot, ^{-1}, 1)$. NTJE*

1. $S \in \mathfrak{C}(G)$.
2. *S je usměrněná a konvexní.*
3. $(\exists s \in S)(|g| \leq |s|) \Rightarrow g \in S$.
4. $(S \leq G) \barwedge (\exists s \in S)(1 \leq g \leq s) \Rightarrow g \in S$.

Důkaz. *1.* $\Rightarrow$ *2.*: zřejmé. *2.* $\Rightarrow$ *3.*: Nechť pro $g \in G$ a $s \in S$ platí $|g| \leq |s|$. Z usměrněnosti S plyne existence $s^+, s^- \in S$ takových, že $1, s \leq s^+$, resp. $1, s^{-1} \leq s^-$. Odtud, $s_\pm \leq s^\pm$ a $|s| \leq s^+ \vee s^- \leq s^+s^- \in S$. Dle tvrzení 29, $(s^+s^-)^{-1} \leq g \leq s^+s^-$. Z konvexity S, $g \in S$. *3.* $\Rightarrow$ *4.*: Je-li $1 \leq g \leq s$, pak $|g| \leq |s|$, takže $g \in S$. Volme $s \in S$, $g := |s|$. Protože $|g| \leq |s|$, je $g = |s| \in S$, a protože $|s_+| \leq |s|$, je $s_+ \in S$. S je l-podgrupa. *4.* $\Rightarrow$ *1.*: Nechť $s, t \in S$ a $s \leq g \leq t$. Pak $1 \leq g_+ \leq t_+$, $1 \leq g_- \leq s_-$, tedy $g_+, g_- \in S$, odkud $g \in S$. $\square$

Tvrzení 48. *$\mathfrak{C}(G)$ je uzávěrovým systémem G.*

Důkaz. Zřejmě $G \in \mathfrak{C}(G)$. Nechť $\varnothing \subsetneq \{C_\lambda\}_\Lambda \subseteq \mathfrak{C}(G)$. Pak $\bigcap_\Lambda C_\lambda \leq G$ a pokud pro $s, t \in \bigcap_\Lambda C_\lambda$ a $g \in G$ platí $s \leq g \leq t$, pak $(\forall \lambda \in \Lambda)(g \in C_\lambda)$, takže $g \in \bigcap_\Lambda C_\lambda$. $\square$

Tvrzení 49. *Je-li $\{C_\lambda\}_\Lambda \subseteq \mathfrak{C}(G)$, pak $\langle \bigcup_\Lambda C_\lambda \rangle_{\mathfrak{C}(G)} = \langle \bigcup_\Lambda C_\lambda \rangle_{(G, \cdot, ^{-1}, 1)}$.*

Důkaz. Označme množinu vpravo jako B. Je-li $x \in B$, pak $x = \prod_{\boldsymbol{n}} x_i$, kde $x_i \in \bigcup_\Lambda C_\lambda$ a $n \in \mathbb{N}$. Dle tvrzení 26, $x_+ \leq \prod_{\boldsymbol{n}} x_{i+}$. Podle tvrzení 18 (Riesz) existují $1 \leq y_i \leq x_{i+}$ takové, že $x_+ = \prod_{\boldsymbol{n}} y_i$. Díky konvexitě l-podgrup jsou $y_i \in \bigcup_\Lambda C_\lambda$, takže $x_+ \in B$. Je B l-podgrupa G.

Je-li $1 \leq g \leq x$ pro jisté $g \in G$, pak z předchozího již máme $g \leq x = \prod_{\boldsymbol{n}} y_i$. Podle tvrzení 18 existují $1 \leq z_i \leq y_i$ tak, že $g = \prod_{\boldsymbol{n}} z_i$. Díky konvexitě l-podgrup jsou $z_i \in \bigcup_\Lambda C_\lambda$, takže $g \in B$. Dle tvrzení 47 je $B \in \mathfrak{C}(G)$. Dokázali jsme netriviální inkluzi. $\square$

Důsledek 10. *Nechť $\varnothing \subsetneq \{C_\lambda\}_\Lambda \subseteq \mathfrak{C}(G)$.*
Pokud $g \in \langle \bigcup_\Lambda C_\lambda \rangle_{\mathfrak{C}(G)}{}^+$, pak existují $c_1, \ldots, c_n \in \bigcup_\Lambda C_\lambda{}^+$ takové, že $g = \prod_{\boldsymbol{n}} c_i$.

Důsledek 11. *Je-li $\varnothing \subsetneq \{C_\lambda\}_\Lambda \subseteq \mathfrak{C}(G)$ shora usměrněná, pak $\bigcup_\Lambda C_\lambda \in \mathfrak{C}(G)$.*

Důkaz. Jsou-li $a, b \in \bigcup_\Lambda C_\lambda$, pak existují $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ takové, že $a \in C_{\lambda_1}$, $b \in C_{\lambda_2}$. Systém množin $\{C_\lambda\}_\Lambda$ je shora usměrněný, takže existuje $\lambda_3 \in \Lambda$ takový, že $a, b \in C_{\lambda_3}$. Pak $ab^{-1} \in C_{\lambda_3} \subseteq \bigcup_\Lambda C_\lambda$, tudíž $\bigcup_\Lambda C_\lambda$ je podgrupou a dle tvrzení 49 je konvexní l-podgrupou. $\square$

Tvrzení 50. *Nechť A, B, C jsou l-grupy. Jestliže $A \in \mathfrak{C}(B)$ a $B \in \mathfrak{C}(C)$, pak $A \in \mathfrak{C}(C)$.*

Důkaz. Relace 'býti podalgebrou' je tranzitivní, takže $A \leq C$. Ať $1 \leq c \leq a$ pro jisté $a \in A$ a $c \in C$. Je $A \subseteq B$, odkud $a \in B$. Z $B \in \mathfrak{C}(C)$ plyne $c \in B$. Z $A \in \mathfrak{C}(B)$ plyne $c \in A$. $\square$

Tvrzení 51. *Je-li $C \in \mathfrak{C}(G)$, pak $(C^+, \cdot, 1) \le (G^+, \cdot, 1)$ a C^+ je konvexní v G. Je-li $(A, \cdot, 1) \le (G^+, \cdot, 1)$ konvexní, pak $\langle A\rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)} \in \mathfrak{C}(G)$ a ${\langle A\rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)}}^+ = A$.*

Existuje izotónní bijekce mezi $\mathfrak{C}(G)$ a systémem všech konvexních podmonoidů $(G^+, \cdot, 1)$.

Důkaz. Zřejmě $(C^+, \cdot, 1) \le (G^+, \cdot, 1)$. C^+ je průnikem konvexních množin C, $G^+ = \mathrm{U}\{1\}$, tedy konvexní. Dále, má-li být A kladným kuželem l-podgrupy $H \le G$, pak $H = \{ab^{-1}; a, b \in A\}$. Označme $T := \{ab^{-1}; a, b \in A\}$. Je $T \subseteq \langle A\rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)}$ a $A \subseteq T$. Dokažme, že T je grupa. Zřejmě je uzavřená na inverzi a obsahuje 1. Nechť $ab^{-1}, cd^{-1} \in T$. Aplikujme tvrzení 38 na b, c: existují $x, y \in G$ taková, že $x \wedge y = 1$, $b = (b \wedge c)x$, $c = (b \wedge c)y$. Protože $1 \le (b \wedge c)$, je $x \le (b \wedge c)x = b$. Konvexita A implikuje $x \in A$, analogicky $y \in A$. Díky komutativitě x, y

$$ab^{-1}cd^{-1} = a\left((b \wedge c)x\right)^{-1}(b \wedge c)yd^{-1} = ax^{-1}yd^{-1} = (ay)(dx)^{-1} \in T\,.$$

Je tedy $T = \langle A\rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)}$. Je-li $1 \le g \le ab^{-1}$ pro nějaké $ab^{-1} \in T$, $g \in G$, pak $1 \le g \le a$ a z konvexity A je $g \in A \subseteq T$, takže T je konvexní. T je shora usměrněná – $ab^{-1} \le a$, tedy usměrněná (tvrzení 8) a podle věty 47 $T \in \mathfrak{C}(G)$. Je-li $1 \le ab^{-1}$, pak $1 \le ab^{-1} \le a$, tedy $ab^{-1} \in A$, tudíž $T^+ \subseteq A$. Obrácená inkluze je zřejmá – $A \subseteq T, G^+$ a $T^+ = T \cap G^+$.

Zobrazení $C \mapsto C^+ = C \cap G^+$, resp. $A \mapsto \langle A\rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)}$ jsou hledané navzájem inverzní bijekce,[10] obě zřejmě izotónní. □

Tvrzení 52. *Svaz $\mathfrak{C}(G)$ je Brouwerův.*

Důkaz. Uvažme $\{C_\lambda\}_\Lambda$. Dle tvrzení 48 je $\mathfrak{C}(G)$ úplný svaz. Nechť $C \in \mathfrak{C}(G)$. Je-li $g \in \bigvee_\Lambda (C \wedge C_\lambda) = \langle \bigcup_\Lambda C \cap C_\lambda\rangle_{\mathfrak{C}(G)}$, pak $g \in C$, resp. $g \in \bigvee_\Lambda C_\lambda$, protože $\bigcup_\Lambda C \cap C_\lambda \subseteq C, \bigcup_\Lambda C_\lambda$. Obráceně, pokud $1 \le g \in C \wedge \bigvee_\Lambda C_\lambda$, pak dle důsledku 10 $g = \prod_{\boldsymbol{n}} h_i$, kde pro každé $i \in \boldsymbol{n}$ existuje $\lambda_i \in \Lambda$ tak, že $h_i \in {C_{\lambda_i}}^+$. Pro každé $i \in \boldsymbol{n}$ je $1 \le h_i \le g$, tedy $h_i \in C$. Pak ovšem $g \in \bigvee_\Lambda (C \wedge C_\lambda) = \langle \bigcup_\Lambda (C \cap C_\lambda)\rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)}$. Je $\left(\bigvee_\Lambda (C \wedge C_\lambda)\right)^+ \supseteq \left(C \wedge \bigvee_\Lambda C_\lambda\right)^+$ a dle tvrzení 51 též $\bigvee_\Lambda (C \wedge C_\lambda) \supseteq C \wedge \bigvee_\Lambda C_\lambda$. □

Svaz $\mathfrak{C}(G)$ nemusí být duálně Brouwerův (viz příklad 17).

Tvrzení 53.

1. *Je-li $S \subseteq G$, pak $\langle S\rangle_{\mathfrak{C}(G)} = \langle \langle S\rangle_G\rangle_{\mathfrak{C}(G)}$.*
2. *Je-li $S \subseteq G^+$, pak $\langle S\rangle_{\mathfrak{C}(G)} = \{g \in G; |g| \le s_1 s_2 \dots s_n,\ \text{kde } s_i \in S\}$.*

Důkaz. 1. Zřejmé.

2. Označme množinu vpravo jako T. Podle tvrzení 47, $S \subseteq T \subseteq \langle S\rangle_{\mathfrak{C}(G)}$. T je uzavřena na inverzi, i na binární grupovou operaci – $|gh| \le |g|\,|h|\,|g|$ – je tudíž grupou. Pokud pro nějaké $h \in G$ a $t \in T$ platí $|h| \le |t|$, pak z definice T je $|h| \le |t| \le s_1 s_2 \dots s_n$ pro jistá $s_i \in S$, tedy $h \in T$. Podle tvrzení 47 je $T \in \mathfrak{C}(G)$. □

Tvrzení 54.

1. *Je-li A podgrupou G, pak $\langle A\rangle_{\mathfrak{C}(G)} = \{g; (\exists a \in A)(|g| \le |a|)\}$.*
2. *Je-li A l-podgrupou G, pak $\langle A\rangle_{\mathfrak{C}(G)} = \{gh^{-1}; (\exists a \in A^+)(\exists b \in A^+)(1 \le g \le a \barwedge 1 \le h \le b)\}$.*

[10] $\langle C^+\rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)} = C$ plyne z důsledku 1, ${\langle A\rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)}}^+ = A$ jsme dokázali.

Důkaz. 1. Množinu vpravo označme T. Je $A \subseteq T$. Podle tvrzení 47 je $T \in \mathfrak{C}(G)$. Je-li $g \in T$, pak $|g| \leq |a|$ pro jisté $a \in A \subseteq \langle A \rangle_{\mathfrak{C}(G)}$, tedy $|a|^{-1} \leq g \leq |a|$ a z konvexity $\langle A \rangle_{\mathfrak{C}(G)}$ plyne $g \in \langle A \rangle_{\mathfrak{C}(G)}$.

2. Převedeme na předchozí případ. Je-li $|g| \leq |a|$, pak $g = g_+ {g_-}^{-1}$, kde $g_\pm \leq g_+ \vee g_- = |g| \leq |a|$. Obráceně, je-li $1 \leq g \leq a$ a $1 \leq h \leq b$, pak $|gh^{-1}| \leq |g|\,|h|\,|g| \leq aba$. □

Definice 13. Nechť $C \in \mathfrak{C}(G)$. Řekneme, že C je *hlavní*, právě když $(\exists g \in G)(C = \langle g \rangle_{\mathfrak{C}(G)})$. Množinu všech hlavních konvexních l-podgrup G značme $\mathfrak{C}_{\mathrm{P}}(G)$.

Tvrzení 55. $\langle g \rangle_{\mathfrak{C}(G)} = \langle |g| \rangle_{\mathfrak{C}(G)} = \{h \in G; (\exists n \in \mathbb{N})(|h| \leq |g|^n)\}$.

Důkaz. Podgrupa generovaná g je $\{g^z; z \in \mathbb{Z}\}$. Dle tvrzení 54, konvexní l-podgrupa generovaná $\{g^z; z \in \mathbb{Z}\}$ obsahuje právě prvky h takové, že $|h| \leq |g^z|$ pro jisté $z \in \mathbb{Z}$. Ovšem (tvrzení 33) $|g^z| = |g|^{|z|}$ a $|g^0| \leq |g^1|$, odkud plyne dokazované. □

Tvrzení 56. *Nechť $C \in \mathfrak{C}(G)$. Je-li C konečně generovaná (v $\mathfrak{C}(G)$), pak je hlavní.*

Důkaz. Nechť $C = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle_{\mathfrak{C}(G)}$. Je $\bigvee_{\boldsymbol{n}} |g_i| \in C$, takže $\langle \bigvee_{\boldsymbol{n}} |g_i| \rangle_{\mathfrak{C}(G)} \subseteq C$. Obráceně, pro každé $j \in \boldsymbol{n}$ je $|g_j| \leq |\bigvee_{\boldsymbol{n}} |g_i||$, odkud $g_j \in \langle \bigvee_{\boldsymbol{n}} |g_i| \rangle_{\mathfrak{C}(G)}$. □

Tvrzení 57. *$\mathfrak{C}_{\mathrm{P}}(G)$ je podsvazem svazu $\mathfrak{C}(G)$.*

Důkaz. Nechť $g, h \in G$, bez újmy na obecnosti (BÚNO) (tvrzení 55) $1 \leq g, h$. Pak dle tvrzení 56

$$\left\langle \langle g \rangle_{\mathfrak{C}(G)} \cup \langle h \rangle_{\mathfrak{C}(G)} \right\rangle_{\mathfrak{C}(G)} = \langle g, h \rangle_{\mathfrak{C}(G)} = \langle g \vee h \rangle_{\mathfrak{C}(G)} \in \mathfrak{C}_{\mathrm{P}}(G)\,,$$

tedy $\mathfrak{C}_{\mathrm{P}}(G)$ je horním podpolosvazem $\mathfrak{C}(G)$.

$$\langle g \rangle_{\mathfrak{C}(G)} \cap \langle h \rangle_{\mathfrak{C}(G)} = \langle g \wedge h \rangle_{\mathfrak{C}(G)}\,,$$

kde '$\supseteq$' plyne z toho, že $g \wedge h \leq g, h$ a '$\subseteq$' dokážeme. Nechť $x \in \langle g \rangle_{\mathfrak{C}(G)} \cap \langle h \rangle_{\mathfrak{C}(G)}$. Pak existují $m, n \in \mathbb{N}$ takové, že $|x| \leq g^m, h^n$. Označme $k = \max\{m, n\}$. Je $|x| \leq g^k \wedge h^k \overset{\mathrm{D2}}{\leq} (g \wedge h)^{k^2}$, odkud $x \in \langle g \wedge h \rangle_{\mathfrak{C}(G)}$. □

Definice 14. Nechť L je úplný svaz a $a \in L$. Řekneme, že a je *kompaktní*, právě když pro každou podmnožinu $X \subseteq L$ platí $(a \leq \bigvee X) \Rightarrow ((\exists Y \subseteq X)(Y \text{ je konečná } \barwedge\ a \leq \bigvee Y))$.

Tvrzení 58. *Množina všech kompaktních prvků svazu $\mathfrak{C}(G)$ je právě $\mathfrak{C}_{\mathrm{P}}(G)$.*

Důkaz. Nechť $\langle g \rangle_{\mathfrak{C}(G)} \leq \bigvee_\Lambda C_\lambda$ a BÚNO $1 \leq g$. Podle důsledku 10 existují $c_1, \ldots, c_n \in \bigcup_\Lambda {C_\lambda}^+$ takové, že $g = \prod_{\boldsymbol{n}} c_i$. Lze vybrat $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tak, aby $c_i \in C_{\lambda_i}$. Pak $g \in \bigvee_{\boldsymbol{n}} C_{\lambda_i}$, tedy $\langle g \rangle_{\mathfrak{C}(G)} \leq \bigvee_{\boldsymbol{n}} C_{\lambda_i}$.

Nechť $C \in \mathfrak{C}(G)$ je kompaktní. Je $C = \bigvee_C \langle c \rangle_{\mathfrak{C}(G)}$, tedy existuje podpokrytí $C \leq \bigvee\limits_{\boldsymbol{n}} \langle c_i \rangle_{\mathfrak{C}(G)} \leq \bigvee\limits_{C} \langle c \rangle_{\mathfrak{C}(G)} = C$. C je konečně generovaná v $\mathfrak{C}(G)$, tudíž je hlavní. □

Tvrzení 59. *Nechť $C \in \mathfrak{C}(G)$, $a \in G^+$. Je $\langle C, a \rangle_{\mathfrak{C}(G)} = \{x \in G; |x| \leq c_1 a c_2 a \ldots a c_n,$ kde $c_i \in C^+\}$.*

Důkaz. Množinu vpravo označme T. Zjevně $T \subseteq \langle C, a \rangle_{\mathfrak{C}(G)}$ a $C \cup \{a\} \subseteq T$. Označme $T^\times = T \cap G^+$. $T^\times$ je konvexní podmonoid G^+. Odtud, $\langle T^\times \rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)} \in \mathfrak{C}(G)$. Ukažme, že $\langle T^\times \rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)} = T$.
'$\subseteq$': Je-li $g \in \langle T^\times \rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)}$, pak $g = xy^{-1}$, kde $x, y \in T^\times$. Pak $|g| \leq |x|\,|y|\,|x|$, odkud $g \in T$.
'$\supseteq$': Je-li $g \in T$, pak $g_\pm \in T^\times$, tedy $g \in \langle T^\times \rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)}$. □

Tvrzení 60. *Nechť $C \in \mathfrak{C}(G)$, $a, b \in G^+$. Je $\langle C, a\rangle_{\mathfrak{C}(G)} \cap \langle C, b\rangle_{\mathfrak{C}(G)} = \langle C, a \wedge b\rangle_{\mathfrak{C}(G)}$.*

Důkaz. '$\subseteq$': Pokud $x \in \langle C, a\rangle_{\mathfrak{C}(G)} \cap \langle C, b\rangle_{\mathfrak{C}(G)}$, pak dle tvrzení 59 $|x| \le s_1 a s_2 a \dots a s_m$, $|x| \le t_1 b t_2 b \dots b t_n$, kde $s_i, t_j \in C^+$, takže

$$\begin{aligned}
&|x| \le (s_1 a s_2 a \dots a s_m) \wedge (t_1 b t_2 b \dots b t_n) \overset{\text{D2}}{\le} (s_1 \wedge t_1 b t_2 b \dots b t_n)\,(a \wedge t_1 b t_2 b \dots b t_n) \dots \\
&\dots (a \wedge t_1 b t_2 b \dots b t_n)(s_m \wedge t_1 b t_2 b \dots b t_n) \le \\
&\le (s_1 \wedge t_1 b t_2 b \dots b t_n)\,[(a \wedge t_1)(a \wedge b) \dots (a \wedge b)(a \wedge t_n)] \dots \\
&\dots [(a \wedge t_1)(a \wedge b) \dots (a \wedge b)(a \wedge t_n)]\,(s_m \wedge t_1 b t_2 b \dots b t_n)\ ,
\end{aligned}$$

tedy $x \in \langle C, a \wedge b\rangle_{\mathfrak{C}(G)}$.

'$\supseteq$': Je-li $x \in \langle C, a \wedge b\rangle_{\mathfrak{C}(G)}$, pak $|x| \le c_1(a \wedge b) \dots (a \wedge b)c_k \le c_1 a \dots a c_k$, kde $c_k \in C^+$, tedy $x \in \langle C, a\rangle_{\mathfrak{C}(G)}$. Podobně, $x \in \langle C, b\rangle_{\mathfrak{C}(G)}$. □

Tvrzení 61. *Pokud $C \in \mathfrak{C}(G)$, pak C je izolovanou podgrupou*[11] *G.*

Důkaz. Tvrzení 33: ${g^n}_\pm = {g_\pm}^n \in C$. Pak $1 \le g_\pm \le {g_\pm}^n$, tedy $g_\pm \in C$, takže $g \in C$. □

Z vlastností svazu $\mathfrak{C}(G)$ nelze určit vlastnosti G – existují l-grupy, jejichž svazy konvexních l-podgrup jsou izomorfní, avšak grupy samotné se liší ve všech 'podstatných' vlastnostech [1].

7 l-ideály, faktorové l-grupy

Nechť G je l-grupa a θ její kongruence. Pak θ je kongruence její grupy a jejího svazu (úmluva 3), $H \coloneqq [1]_\theta \trianglelefteq (G, \cdot, ^{-1}, 1)$. Na (levých) rozkladových třídách grupy G podle H je faktorizací G podle θ definováno uspořádání. Je-li $xH \le yH$, pak lze zkonstruovat řetězec implikací $xH \wedge yH = xH \Rightarrow (x \wedge y)H = xH \Rightarrow x^{-1}(x \wedge y) \in H \Rightarrow (\exists h \in H)(1 \wedge x^{-1}y = h) \Rightarrow (\exists h \in H)(h \le x^{-1}y)$, tedy existuje $h \in H$ takové, že $xh \le y$. Obráceně, předpokládejme, že $xh \le y$ pro jisté $h \in H$. Pak $xh \wedge y = xh$, tedy $(xh \wedge y)H = (xh)H$, odkud snadno dostaneme $xH \le yH$. Přirozeně se nabízí rozšíření ve smyslu definice 15.

Pro podgrupu H grupy G značme $\mathcal{L}(H)$, resp. $\mathcal{R}(H)$ množinu všech levých, resp. pravých rozkladových tříd G podle H.

Tvrzení 62. *Nechť $(G, \le)$ je po-grupa a S konvexní podgrupa G. Relace $\le$ na $\mathcal{L}(S)$, definovaná níže, je uspořádání.*

$$xS \le yS \iff (\exists s \in S)(xs \le y)$$

Důkaz. Nechť $xS \le yS$ a $xS = x'S$, $yS = y'S$. Pak existuje $s \in S$ takové, že $xs \le y$, $x^{-1}x' = t \in S$, $y^{-1}y' = u \in S$. Pak $x't^{-1}s \le y'u^{-1}$, takže $x't^{-1}su \le y'$, tedy $x'S \le y'S$. Relace je definována korektně.

Je-li $x \in G$, pak $x \cdot 1 \le x$, takže $xS \le xS$. Pokud $xS \le yS$ a $yS \le xS$, je $xs \le y$ a $yt \le x$ pro jistá $s, t \in S$. Pak $s \le x^{-1}y \le t^{-1}$ a z konvexity S je $x^{-1}y \in S$, tedy $xS = yS$. Nechť $xS \le yS$ a $yS \le zS$. Je $xs \le y$ a $yt \le z$ pro nějaká $s, t \in S$. Pak $xst \le yt \le z$, odkud $xS \le zS$. □

Definice 15. Nechť S je konvexní podgrupa po-grupy G. Uspořádání na $\mathcal{L}(S)$ z tvrzení 62 nazveme *uspořádáním (levého) rozkladu G* podle S, či *rozkladovým uspořádáním.*

[11] Nechť H je podgrupou G. Řekneme, že H je *izolovaná*, právě když $(\forall g \in G)(\forall n \in \mathbb{N})(g^n \in H \Rightarrow g \in H)$.

Analogicky definujeme uspořádání pravého rozkladu G podle S.

Připomeňme, že dodržujeme úmluvu 6.

Tvrzení 63. *Je-li $S \in \mathfrak{C}(G)$, pak rozkladové uspořádání $\mathcal{L}(S)$ je distributivní svaz.*

Důkaz. Dokažme, že $xS \wedge yS = (x \wedge y)S$. Je $(x \wedge y)S \leq xS, yS$, protože $x \wedge y \leq x, y$. Pokud $zS \leq xS, yS$, pak $zs \leq x$ a $zs' \leq y$ (pro jistá $s, s' \in S$). Pak $z(s \wedge s') \leq x \wedge y$, odkud $zS \leq (x \wedge y)S$. Z duality plyne $xS \vee yS = (x \vee y)S$.

Dokažme distributivitu. $xS \wedge (yS \vee zS) = xS \wedge (y \vee z)S = [x \wedge (y \vee z)]S = [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)]S = (x \wedge y)S \vee (x \wedge z)S = (xS \wedge yS) \vee (xS \wedge zS)$. □

Tvrzení 64. *Nechť $A, B \in \mathfrak{C}(G)$. Je-li $A \subseteq B$, pak zobrazení $\mathcal{L}(A) \to \mathcal{L}(B)$, $xA \mapsto xB$, je svazový epimorfismus.*

Důkaz. Zobrazení je zřejmě surjektivní. Označme jej φ. Je $\varphi(xA \wedge yA) = \varphi(x \wedge y)A = (x \wedge y)B = xB \wedge yB = (\varphi xA) \wedge (\varphi yA)$. Analogicky pro '$\vee$'. □

Definice 16. *l-ideálem* l-grupy G rozumíme její normální konvexní l-podgrupu. Množinu všech l-ideálů G značme $\mathfrak{l}(G)$.

Tvrzení 65. *Nechť $L \in \mathfrak{l}(G)$. Pak G/L (s rozkladovým uspořádáním) je l-grupa a přirozená projekce $G \to G/L$, $g \mapsto gL$, je l-homomorfismus.*

Důkaz. $(xL)(yL \wedge zL) = (xL)[(y \wedge z)L] = [x(y \wedge z)]L = (xy \wedge xz)L = (xyL) \wedge (xzL)$, podobně pro distributivitu násobení vzhledem k '$\vee$' a pravé distributivity. Dle tvrzení 9 je G/L l-grupa. Z důkazu tvrzení 63 víme, že $(xL) \vee L = (x \vee 1)L$, takže (tvrzení 43) přirozená projekce $G \to G/L$ je l-homomorfismus. □

Důsledek 12. $\mathfrak{l}(G) = \{[1]_\theta;\ \theta \in \operatorname{Con} G\}$.

Důkaz. '$\subseteq$': Tvrzení 65. '$\supseteq$': Jádro kongruence grupy je normální podgrupou, rozkladová třída svazu podle kongruence je konvexním podsvazem. □

Tvrzení 66. *$\mathfrak{l}(G)$ je uzávěrovým systémem G, podsvazem $\mathfrak{C}(G)$ a je-li $\{L_\lambda\}_\Lambda \subseteq \mathfrak{l}(G)$, pak $\langle \bigcup\limits_\Lambda L_\lambda \rangle_{\mathfrak{l}(G)} = \langle \bigcup\limits_\Lambda L_\lambda \rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)}$.*

Důkaz. Je $\mathfrak{l}(G) = \mathfrak{C}(G) \cap \operatorname{Sub}_{\mathrm{N}}(G,\cdot,^{-1},1)$, kde $\operatorname{Sub}_{\mathrm{N}}(G,\cdot,^{-1},1)$ je uzávěrový systém všech normálních podgrup. Oba svazy jsou úplné a libovolné spojení v každém z nich splývá se spojením v $\operatorname{Sub}(G,\cdot,^{-1},1)$.[12] □

Následuje analogie věty o korespondenci pro grupy.

Tvrzení 67. *Pokud $L \in \mathfrak{l}(G)$, $A \leq (G,\cdot,^{-1},1)$ a $L \subseteq A$, pak*

1. $A \leq G \iff A/L \leq G/L$,
2. $A \in \mathfrak{C}(G) \iff A/L \in \mathfrak{C}(G/L)$,
3. $A \in \mathfrak{l}(G) \iff A/L \in \mathfrak{l}(G/L)$.

[12] Pro $\mathfrak{C}(G)$ viz tvrzení 49. Pro $\operatorname{Sub}_{\mathrm{N}}(G,\cdot,^{-1},1)$: Je-li $\{H_\lambda\}_\Lambda \subseteq \operatorname{Sub}_{\mathrm{N}}(G,\cdot,^{-1},1)$, pak pro $x \in \langle \bigcup_\Lambda H_\lambda \rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)}$ je $x = \prod_{\boldsymbol{n}} h_i$, kde $h_i \in \bigcup_\Lambda H_\lambda$. Pro $g \in G$ je $gxg^{-1} = \prod_{\boldsymbol{n}} (gh_ig^{-1}) \in \langle \bigcup_\Lambda H_\lambda \rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)}$, tedy $\langle \bigcup_\Lambda H_\lambda \rangle_{(G,\cdot,^{-1},1)} \in \operatorname{Sub}_{\mathrm{N}}(G,\cdot,^{-1},1)$.

Důkaz. Z předpokladů plyne: $L \trianglelefteq A$, L je konvexní v po-grupě A, A/L je podgrupou G/L.

1. Nechť $a \in A$. Protože $(a \vee 1)L = aL \vee L$, je $a \vee 1 \in A \iff aL \vee L \in A/L$.

2. Stačí dokázat tvrzení o konvexitě. Je-li $1 \leq g \leq a$, pak $L \leq gL \leq aL$. Obráceně, pokud $L \leq gL \leq aL$, pak existují $l_1, l_2 \in L$ tak, že $l_1 \leq g \leq al_2$. Protože $L \subseteq A$, je $l_1, al_2 \in A$.

3. Tvrzení o normalitě je obsahem věty o korespondenci pro grupy. □

Jako důsledek předchozích tvrzení, vět o izomorfismu z univerzální algebry a vět o izomorfismu pro grupy dostaneme věty o izomorfismu pro l-grupy. Pro formulaci využijeme úmluvu 5.

Tvrzení 68 (Věty o izomorfismu)**.**

1. *Pokud* $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ *jsou l-grupy a* $\varphi: \mathbf{G} \to \mathbf{H}$, *pak* $\varphi_* \mathbf{G} \cong \mathbf{G}/\mathrm{Ker}\, \varphi$.

2. *Pokud* $A \leq G$ *a* $B \in \mathfrak{l}(G)$, *pak* $AB \leq G$ *a* $AB/B \cong A/(A \cap B)$.

3. *Pokud* $A, B \in \mathfrak{l}(G)$ *a* $A \subseteq B$, *pak* $B/A \in \mathfrak{l}(G/A)$ *a* $G/B \cong (G/A)/(B/A)$.

8 Prvopodgrupy

Definice 17. Nechť $P \in \mathfrak{C}(G)$. Řekneme, že P je *prvopodgrupou*, právě když pro libovolná $a, b \in G^+$ vlastnost $a \wedge b \in P$ implikuje $a \in P$ nebo $b \in P$.

Prvopodgrupa l-grupy je prvopodgrupou duální l-grupy.

Tvrzení 69. *Nechť $P \in \mathfrak{C}(G)$. NTJE*

1. *P je prvopodgrupa.*

2. $g \wedge h = 1 \Rightarrow (g \in P \veebar h \in P)$.

3. $g, h \in G^+ \setminus P \Rightarrow 1 < g \wedge h$.

4. *$\mathcal{L}(P)$ je lineárně uspořádaná.*

5. *Pokud pro* $A, B \in \mathfrak{C}(G)$ *je* $P \subseteq A, B$, *pak* $A \subseteq B$ *nebo* $B \subseteq A$.

6. *Pokud pro* $A, B \in \mathfrak{C}(G)$ *je* $P \subsetneq A, B$, *pak* $P \subsetneq A \cap B$.

7. $g, h \in G^+ \setminus P \Rightarrow g \wedge h \in G^+ \setminus P$.

Důkaz. *1.* ⇒ *2.* ⇒ *3.*: Zřejmé. *3.* ⇒ *4.*: Dle tvrzení 38 pro g, h existují x, y tak, že $g = (g \wedge h)x$, $h = (g \wedge h)y$ a $x \wedge y = 1$. Pak ale není pravda, že $x, y \in G^+ \setminus P$, tedy $x \in P$ nebo $y \in P$. Pokud například $x \in P$, pak $gP = (g \wedge h)xP = (g \wedge h)P = gP \wedge hP$, tedy $gP \leq hP$.

4. ⇒ *5.*: Sporem – zvolme $a \in A^+ \setminus B^+$, $b \in B^+ \setminus A^+$. Je $a = (a \wedge b)x$, $b = (a \wedge b)y$, kde $x \wedge y = 1$. BÚNO $xP \leq yP$. Pak $P = (x \wedge y)P = xP$, tedy $x \in P \subseteq B$. Z $1 \leq a \wedge b \leq b$ a konvexity B plyne, že $a \wedge b \in B$, tedy $a = (a \wedge b)x \in B$, což je spor.

5. ⇒ *6.*: Ať BÚNO $A \subseteq B$. Pak $A \cap B = A \supsetneq P$.

6. ⇒ *7.*: Je $P \subsetneq \langle P, g \rangle_{\mathfrak{C}(G)}, \langle P, h \rangle_{\mathfrak{C}(G)}$, tedy $P \subsetneq \langle P, g \rangle_{\mathfrak{C}(G)} \cap \langle P, h \rangle_{\mathfrak{C}(G)} \overset{\text{T60}}{=} \langle P, g \wedge h \rangle_{\mathfrak{C}(G)}$.

7. ⇒ *1.*: Zřejmé. □

Důsledek 13. *Nechť $P, C \in \mathfrak{C}(G)$. Pokud $P \subseteq C$ a P je prvopodgrupa, pak C je prvopodgrupa.*

Důkaz. Zřejmé z bodu *2*. □

Důsledek 14. *Jestliže P je prvopodgrupa G, pak horní kužel P v $\mathfrak{C}(G)$ je řetězec.*

Definice 18. Nechť L je svaz a $a \in L$. Řekneme, že a je *průsekově ireducibilní* ($\wedge$-ireducibilní), právě když pro každé prvky b, c z L vlastnost $a = b \wedge c$ implikuje $a = b$ nebo $a = c$. Řekneme, že a je *úplně průsekově ireducibilní*, právě když $a = \bigwedge_\Lambda b_\lambda$ implikuje $a \in \{b_\lambda\}_\Lambda$ pro každou $\{b_\lambda\}_\Lambda$, neprázdnou podmnožinu L.

Poznámka 5. a je $\wedge$-ireducibilní, právě když $(\forall b \in L)(\forall c \in L)(a < b, c \Rightarrow a < b \wedge c)$.

Důsledek 15. *Nechť $C \in \mathfrak{C}(G)$. C je prvopodgrupa, právě když C je $\wedge$-ireducibilní v $\mathfrak{C}(G)$.*

Množina všech prvopodgrup l-grupy (uspořádaná inkluzí) nemusí být svazem (viz příklad 18).

Tvrzení 70. *Je-li $\{P_\lambda\}_\Lambda$ neprázdný řetězec prvopodgrup G, pak $\bigcap_\Lambda P_\lambda$ je prvopodgrupa.*

Důkaz. Nechť $g \wedge h = 1$. Předpokládejme, že $g, h \notin \bigcap_\Lambda P_\lambda$. Pak $g \notin P_{\lambda_1}$ a $h \notin P_{\lambda_2}$ pro jistá $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. BÚNO $P_{\lambda_1} \subseteq P_{\lambda_2}$. Pak $g, h \notin P_{\lambda_1}$, tedy P_{λ_1} není prvopodgrupou – spor. □

Tvrzení 71. *Existuje minimální prvopodgrupa G. Každá prvopodgrupa obsahuje aspoň jednu minimální prvopodgrupu.*

Důkaz. G je prvopodgrupou G. Nechť P je prvopodgrupou G. Uvažme $\mathcal{S}$ množinu všech prvopodgrup, jež jsou obsaženy v P, uspořádanou inkluzí. Dle tvrzení 70 je každý neprázdný řetězec z $\mathcal{S}$ zdola omezený v $\mathcal{S}$. Podle Zornova lemmatu existuje minimální prvek $\mathcal{S}$. □

Definice 19. Nechť $(P, \leq)$ je uspořádaná množina. Řekneme, že $(P, \leq)$ je *kořenový systém*, právě když $(\forall p \in P)(\forall q \in P)(p, q$ jsou neporovnatelné $\Rightarrow \mathrm{D}\{p, q\} = \varnothing)$.

Poznámka 6. $(P, \leq)$ je kořenový systém, právě když $(\forall p \in P)(\mathrm{U}\{p\}$ je řetězec$)$.

Důkaz. '$\Rightarrow$': Volme $a, b \in \mathrm{U}\{p\}$. Pak $p \in \mathrm{D}\{a, b\}$, tedy a, b jsou porovnatelné. '$\Leftarrow$': obměnou, pokud $c \leq a, b$, pak $\mathrm{U}\{c\} \ni a, b$ je řetězec a a, b jsou porovnatelné. □

Tvrzení 72. *Množina všech prvopodgrup G je kořenovým systémem.*

Důkaz. Viz důsledek 14 a poznámka 6 □

Prvopodgrupu, jež je zároveň l-ideálem, nazývejme *l-prvoideálem*.

Tvrzení 73. *Množina všech l-prvoideálů G je kořenovým systémem. Každý l-prvoideál obsahuje aspoň jeden minimální l-prvoideál.*

Důkaz. Množina všech l-prvoideálů je podmnožinou kořenového systému prvopodgrup, je tudíž kořenovým systémem. Průnik neprázdného řetězce l-prvoideálů je l-prvoideálem. Dále analogicky jako v důkazu tvrzení 71. □

Tvrzení 74. *Nechť $L \in \mathfrak{l}(G)$. L je l-prvoideálem, právě když G/L je lineárně uspořádaná.*

Tvrzení 75. *Nechť $L \in \mathfrak{l}(G)$, $P \in \mathfrak{C}(G)$. P je prvopodgrupa, právě když P/L je prvopodgrupa G/L.*

Důkaz. '$\Rightarrow$': Pokud $gL \wedge hL = L$, pak $g \wedge h \in L \subseteq P$. BÚNO $g \wedge h = 1$. Pak $g \in P$ nebo $h \in P$, tedy $gL \in P/L$ nebo $hL \in P/L$. '$\Leftarrow$': Pokud $g \wedge h = 1$, pak $gL \wedge hL = L$, tedy $gL \in P/L$ nebo $hL \in P/L$. Ať $gL \in P/L$. Pak $gL = pL$ pro jisté $p \in P$, tedy $p^{-1}g \in L \subseteq P$, odkud $g \in P$. □

9 Regulární podgrupy a hodnoty

Tvrzení 76. *Nechť $C \in \mathfrak{C}(G)$ a $g \in G \setminus C$. Množina $\mathcal{S} = \{A \in \mathfrak{C}(G); (C \subseteq A) \barwedge (g \notin A)\}$ (uspořádaná inkluzí) má maximální prvek.*

Důkaz. Je $C \in \mathcal{S}$. Je-li $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ neprázdný řetězec, pak $\mathcal{T}$ je v $\mathcal{S}$ shora omezen $\langle \bigcup \mathcal{T} \rangle_{\mathfrak{C}(G)}$. Zřejmě $C \subseteq \langle \bigcup \mathcal{T} \rangle_{\mathfrak{C}(G)}$. Kdyby $g \in \langle \bigcup \mathcal{T} \rangle_{\mathfrak{C}(G)}$, pak dle tvrzení 49 je $g = t_1 \cdot \ldots \cdot t_n$, kde pro $i \in \boldsymbol{n}$ existují $T_i \in \mathcal{T}$ tak, že $t_i \in T_i$. Je ovšem $\bigcup_{\boldsymbol{n}} T_i \in \mathcal{T}$, tedy $g \in \bigcup_{\boldsymbol{n}} T_i$, což je spor. □

Definice 20. Nechť $M \in \mathfrak{C}(G)$ a $g \in G$. Řekneme, že M je *hodnotou* g, právě když M je maximální konvexní l-podgrupa neobsahující g. Řekneme, že M je *regulární podgrupou*, právě když M je hodnotou nějakého prvku z G. Definujeme $M^* = \bigcap_{\substack{C \in \mathfrak{C}(G) \\ M \subsetneq C}} C$.

Tvrzení 77. *Nechť $M \in \mathfrak{C}(G)$. NTJE:*

1. *M je regulární.*
2. *M je úplně $\wedge$-ireducibilní a $M \subsetneq G$.*
3. *$M \subsetneq M^*$.*

Důkaz. *1.* $\Rightarrow$ *2.*: Dokažme sporem. Nechť M je hodnotou g. Mějme systém $\{C_\lambda\}_\Lambda \subseteq \mathfrak{C}(G)$ takový, že $M = \bigcap_\Lambda C_\lambda$ a $M \notin \{C_\lambda\}_\Lambda$. Pak $M \subsetneq C_\lambda$, tedy $g \in C_\lambda$ pro každé λ. Odtud $g \in \bigcap_\Lambda C_\lambda = M$, což je spor. *2.* $\Rightarrow$ *3.*: Platí analogie poznámky 5 pro úplnou $\wedge$-ireducibilitu. *3.* $\Rightarrow$ *1.*: Volme $g \in M^* \setminus M$. Dle tvrzení 76 existuje N, hodnota g, taková, že $M \subseteq N$. Kdyby však $M \subsetneq N$, pak z definice M^* plyne $M^* \subseteq N$, tedy $g \notin M^*$, což je spor s výběrem g. □

Důsledek 16. *Nechť M je regulární. M je hodnotou g, právě když $g \in M^* \setminus M$.*

Důsledek 17. *Je-li M regulární, pak M je prvopodgrupou.*

Tvrzení 78. *Nechť $L \in \mathfrak{l}(G)$, $L \subseteq M$ a $g \in G \setminus M$. M je hodnotou g, právě když M/L je hodnotou gL v G/L.*

Důkaz. '$\Rightarrow$': $g \notin M$, tedy $gL \notin M/L$. Existuje N/L, hodnota gL taková, že $M/L \subseteq N/L$. Kdyby $M/L \subsetneq N/L$, pak $M \subsetneq N$, tedy $g \in N$, takže $gL \in N/L$ – spor. '$\Leftarrow$': $gL \notin M/L$, tedy $g \notin M$. Existuje N, hodnota g taková, že $M \subseteq N$. Kdyby $M \subsetneq N$, pak $M/L \subsetneq N/L$, tedy $gL \in N/L$, odkud $g \in N$ – spor. □

Tvrzení 79. *Nechť $C \in \mathfrak{C}(G)$. Je-li $C \subsetneq G$, pak $C = \bigcap\{M \in \mathfrak{C}(G); M$ regulární $\barwedge$ $C \subseteq M\}$.*

Důkaz. Zřejmě je $C \subseteq \bigcap\{M \in \mathfrak{C}(G); M \text{ regulární } \barwedge C \subseteq M\}$. Obráceně, pokud $g \in G \setminus C$, pak existuje hodnota g, N, taková, že $C \subseteq N$, tedy $g \notin \bigcap\{M \in \mathfrak{C}(G); M \text{ regulární } \barwedge C \subseteq M\}$. □

Důsledek 18. *Nechť $C \in \mathfrak{C}(G)$. C je prvpododgrupou, právě když C je průnikem řetězce regulárních podgrup.*

Důkaz. '$\Rightarrow$': U$\{C\}$ (v $\mathfrak{C}(G)$) je řetězec. Je-li $C \subsetneq G$, jsme díky tvrzení 79 hotovi. Jinak je $C = G$. Můžeme formálně považovat G jako průnik prázdného řetězce. '$\Leftarrow$': Je-li řetězec prázdný, je průnikem G. Jinak použijeme tvrzení 70. □

Definice 21. Množinu všech regulárních podgrup G značíme $\Gamma(G)$.

Tvrzení 80. $\Gamma(G)$ *je kořenový systém.*

Důkaz. Je podmnožinou kořenového systému – všech prvopodgrup G. $\square$

Tvrzení 81. *Minimální prvopodgrupy jsou právě průniky maximálních řetězců z* $\Gamma(G)$.

Důkaz. Je-li $P \in \mathfrak{C}(G)$ minimální prvopodgrupa, pak $\mathrm{U}\{P\}$ (v $\Gamma(G)$) je maximální řetězec a $P = \bigcap \mathrm{U}\{P\}$. Obráceně, je-li $\mathcal{C}$ maximální řetězec regulárních podgrup, pak $\bigcap \mathcal{C}$ je prvopodgrupa. Existuje minimální prvopodgrupa $P \subseteq \bigcap \mathcal{C}$. Z maximality $\mathcal{C}$ je $\mathcal{C} = \{M \in \mathfrak{C}(G); M \text{ regulární } \barwedge P \subseteq M\}$, tedy $\bigcap \mathcal{C} = P$. $\square$

Příklad 2. Označíme-li jako G postupně l-grupy $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, pak vždy $\mathfrak{C}(G) = \{\{0\}, G\}$. Oba prvky svazu jsou $\wedge$-ireducibilní, jsou tudíž prvopodgrupami. Jediná regulární podgrupa je $\{0\}$. Zadané l-grupy izomorfní nejsou, ale svazy konvexních l-podgrup ano.

Příklad 19 též ilustruje problematiku regulárních podgrup.

10 Poláry

Tvrzení 82. *Nechť* $A \in \mathfrak{C}(G)$. *Je* $A^\perp := \{g \in G; (\forall a \in A)(|g| \wedge |a| = 1)\} \in \mathfrak{C}(G)$.

Důkaz. Průnikem podgrup (tvrzení 38), $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \{g \in G; |g| \wedge |a| = 1\}$, je podgrupa. Je-li $h \in A^\perp$ a $|g| \le |h|$, pak $1 \le |g| \wedge |a| \le |h| \wedge |a| = 1$ pro libovolné $a \in A$, tedy $A^\perp \in \mathfrak{C}(G)$. $\square$

Definice 22. Nechť $A \subseteq G$. Definujeme *poláru* A jako $A^\perp = \{g \in G; (\forall a \in A)(|g| \wedge |a| = 1)\}$. Množinu všech polár G (uspořádanou inkluzí) značme $\mathfrak{P}(G)$.

Tvrzení 83. *Je-li* $A \subseteq G$ *normální podmnožinou*[13], *pak* $A^\perp \in \mathfrak{l}(G)$.

Důkaz. Stačí dokázat normalitu podgrupy. Nechť $b \in A^\perp$, $g \in G$ a $a \in A$. Pak $|(b)^g| \wedge |a| \overset{\text{D7}}{=} (|b|)^g \wedge |a| = \left(|b| \wedge (|a|)^{g^{-1}}\right)^g = \left(|b| \wedge \left|(a)^{g^{-1}}\right|\right)^g = 1$. $\square$

Tvrzení 84. *Nechť* $A, B \subseteq G$. *Platí:*

1. $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
2. $A \subseteq A^{\perp\perp}$.
3. $A^\perp = (A^\perp)^{\perp\perp}$.
4. $\mathfrak{P}(G) = \mathfrak{C}(G)^\perp = \{C^\perp; C \in \mathfrak{C}(G)\}$.

Důkaz. 1. Zřejmé.

2. Je-li $a \in A$ a $x \in A^\perp$, pak $|a| \wedge |x| = 1$, tedy $a \in A^{\perp\perp}$.
3. Je $(A^\perp) \subseteq (A^\perp)^{\perp\perp}$. Protože $A \subseteq A^{\perp\perp}$, je $(A^{\perp\perp})^\perp \subseteq A^\perp$.
4. Ukažme, že $A^{\perp\perp} \in \mathfrak{C}(G)$. Je-li $x \in A^{\perp\perp}$ a $g \in G$ takové, že $|g| \le |x|$, pak pro $y \in A^\perp$ platí $|g| \wedge |y| \le |x| \wedge |y| = 1$, tedy $g \in A^{\perp\perp}$. $\square$

[13] tj. $(\forall g \in G)((A)^g = A)$, neboli A je sjednocením (některých) tříd konjugací

V důsledku, $\mathfrak{P}(G) \subseteq \mathfrak{C}(G)$.

Tvrzení 85. *Je-li $A \in \mathfrak{C}(G)$, pak $A^\perp$ je největší prvek $B \in \mathfrak{C}(G)$ splňující $A \cap B = \{1\}$.*

Důkaz. Je-li $g \in (A \cap A^\perp)^+$, pak $1 = g \wedge g = g$, odkud $(A \cap A^\perp)^+ = \{1\} \overset{\text{T51}}{=} A \cap A^\perp$. Nechť pro $C \in \mathfrak{C}(G)$ platí $A \cap C = \{1\}$. Pak pro $c \in C^+$, $a \in A^+$ platí $a \wedge c = 1$, tedy $c \in A^\perp$. Je $C^+ \subseteq (A^\perp)^+$, takže $C \subseteq A^\perp$. □

Tvrzení 86. *Jsou-li $A, B \in \mathfrak{C}(G)$, pak $(A \cap B)^{\perp\perp} = A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp}$. Pokud navíc $A \cap B = \{1\}$, pak $A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp} = \{1\}$.*

Důkaz. '$\subseteq$': $A \cap B \subseteq A, B \Rightarrow (A \cap B)^{\perp\perp} \subseteq A^{\perp\perp}, B^{\perp\perp} \Rightarrow (A \cap B)^{\perp\perp} \subseteq A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp}$. '$\supseteq$': Pokud $x \in (A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp})^+$ a $y \in (A \cap B)^{\perp +}$, pak $x \wedge y \in A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp} \cap (A \cap B)^\perp$. Volme $a \in A^+$, $b \in B^+$. Je $x \wedge y \wedge a \wedge b \in A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp} \cap \underbrace{(A \cap B)^\perp \cap (A \cap B)}_{=\{1\}} = \{1\}$, takže $x \wedge y \wedge a \in B^{\perp\perp} \cap B^\perp = \{1\}$, odkud $x \wedge y \in A^{\perp\perp} \cap A^\perp = \{1\}$, tedy $x \in (A \cap B)^{\perp\perp}$. Je $(A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp})^+ \subseteq (A \cap B)^{\perp\perp +}$.

Je-li navíc $A \cap B = \{1\}$, pak $A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp} = (A \cap B)^{\perp\perp} = \{1\}^{\perp\perp} \overset{\text{T85}}{=} G^\perp = \{1\}$. □

Poznámka 7. První část tvrzení 86 lze zobecnit i v případě, kdy B zaměníme za $\bigcup_\Lambda B_\lambda$ (zkracujme $\bigcup B_\lambda$), kde $\{B_\lambda\}_\Lambda \subseteq \mathfrak{C}(G)$.

Důkaz. Důkaz pro '$\subseteq$' je přímočarý. Upravme důkaz pro '$\supseteq$': Pokud $x \in (A^{\perp\perp} \cap \left(\bigcup B_\lambda\right)^{\perp\perp})^+$ a $y \in (A \cap \bigcup B_\lambda)^{\perp +}$, pak $x \wedge y \in A^{\perp\perp} \cap \left(\bigcup B_\lambda\right)^{\perp\perp} \cap (A \cap \bigcup B_\lambda)^\perp$. Volme $a \in A^+$, $b \in \left(\bigcup B_\lambda\right)^+ = G^+ \cap \bigcup B_\lambda$. Je $b \in (B_{\lambda'})^+$ pro jisté λ', tedy $x \wedge y \wedge a \wedge b \in A^{\perp\perp} \cap \left(\bigcup B_\lambda\right)^{\perp\perp} \cap (A \cap \bigcup B_\lambda)^\perp \cap (A \cap B_{\lambda'}) \subseteq A^{\perp\perp} \cap \left(\bigcup B_\lambda\right)^{\perp\perp} \cap (A \cap B_{\lambda'})^\perp \cap (A \cap B_{\lambda'}) = \{1\}$, takže $x \wedge y \wedge a \in B_{\lambda'}{}^{\perp\perp} \cap B_{\lambda'}{}^\perp = \{1\}$, odkud $x \wedge y \in A^{\perp\perp} \cap A^\perp = \{1\}$, tedy $x \in (A \cap \bigcup B_\lambda)^{\perp\perp}$. Je $\left(A^{\perp\perp} \cap \left(\bigcup B_\lambda\right)^{\perp\perp}\right)^+ \subseteq (A \cap \bigcup B_\lambda)^{\perp\perp +}$. □

Tvrzení 87. *Je-li $\{A_\lambda\}_\Lambda \subseteq \mathfrak{P}(G)$, pak $\left(\bigcup\limits_\Lambda A_\lambda\right)^\perp = \bigcap\limits_\Lambda A_\lambda{}^\perp$.*

Důkaz. $x \in (\bigcup\limits_\Lambda A_\lambda)^\perp \iff (\forall y \in \bigcup\limits_\Lambda A_\lambda)(|x| \wedge |y| = 1) \iff (\forall \lambda \in \Lambda)(\forall y \in A_\lambda)(|x| \wedge |y| = 1) \iff (\forall \lambda \in \Lambda)(x \in A_\lambda{}^\perp) \iff x \in \bigcap\limits_\Lambda A_\lambda{}^\perp$. □

Z tvrzení 87 plyne, že průnikem polár je polára.

Tvrzení 88. *Svaz $\mathfrak{P}(G)$ je úplný a Brouwerův. $\mathfrak{P}(G)$ je nosičem Booleovy algebry s operacemi průseku $\sqcap_\Lambda A_\lambda = \bigcap_\Lambda A_\Lambda$, spojení $\bigsqcup A_\Lambda = \left(\bigcup_\Lambda A_\lambda\right)^{\perp\perp}$, komplementu $A \mapsto A^\perp$ a s nejmenším, resp. největším prvkem $\{1\}$, resp. G.*

Důkaz. Zřejmě je $\mathfrak{P}(G)$ uzávěrovým systémem G, tedy $\bigsqcup_\Lambda A_\lambda = \langle \bigcup_\Lambda A_\lambda \rangle_{\mathfrak{P}(G)}$. Je $\bigcup_\Lambda A_\lambda \subseteq \left(\bigcup_\Lambda A_\lambda\right)^{\perp\perp} \in \mathfrak{P}(G)$ a pokud $\bigcup_\Lambda A_\lambda \subseteq B$ pro nějaké $B \in \mathfrak{P}(G)$, pak $\left(\bigcup_\Lambda A_\lambda\right)^{\perp\perp} \subseteq B^{\perp\perp} = B$.

Je-li $A \in \mathfrak{P}(G)$, pak $A \sqcap A^\perp \overset{\text{T85}}{=} \{1\}$, $A \sqcup A^\perp = (A \cup A^\perp)^{\perp\perp} \overset{\text{T87}}{=} (A^\perp \cap A)^\perp = \{1\}^\perp = G$.

Nechť $\{A_\lambda\}_\Lambda \subseteq \mathfrak{P}(G)$ a $B \in \mathfrak{P}(G)$. Pak

$$\bigsqcup_\Lambda \left(B \sqcap A_\lambda\right) = \left(\bigcup_\Lambda \left(B \cap A_\lambda\right)\right)^{\perp\perp} = \left(B \cap \bigcup_\Lambda A_\lambda\right)^{\perp\perp} \overset{\text{P7}}{=} B \cap \left(\bigcup_\Lambda A_\lambda\right)^{\perp\perp} = B \sqcap \bigsqcup_\Lambda A_\lambda\,.$$ □

Přestože obecně není $\mathfrak{P}(G)$ podsvazem $\mathfrak{C}(G)$ [1], lze poláry charakterizovat v rámci svazu $\mathfrak{C}(G)$.

Definice 23. Nechť L je svaz, $0 \in L$ je jeho nejmenší prvek a $a \in L$. Řekneme, že *a má pseudo-komplement*, právě když množina $\{x \in L; x \wedge a = 1\}$ má největší prvek. Tento prvek pak označujeme a^p a nazýváme ho *pseudo-komplementem a*. Řekneme, že L je *pseudo-komplementární*, právě když každý prvek L má pseudo-komplement.

Tvrzení 89. *Nechť L je pseudo-komplementární svaz.*

1. *L má největší prvek – 1, $0^p = 1$, $1^p = 0$.*

2. *$L \to L$, $a \mapsto a^p$ je antitónní, $L \to L$, $a \mapsto a^{pp}$ je uzávěrový.*

3. *$a^p = a^{ppp}$.*

Důkaz. 1. Zřejmé.

2. Je-li $a \leq b$, pak $(x \wedge b = 0 \Rightarrow x \wedge a = 0)$, odkud $b^p \leq a^p$. Operátor $(\cdot)^{pp}$ je izotónní. Je extenzivní – protože $a \in \{x \in L; a^p \wedge x = 0\}$, je $a \leq a^{pp}$. Jeho idempotence plyne z vlastnosti dokázané níže.

3. $a^p \leq (a^p)^{pp}$, na druhou stranu $a \leq a^{pp}$, tedy $(a^{pp})^p \leq a^p$. □

Definice 24. Nechť L je pseudo-komplementární svaz. Množinu $\{a^p; a \in L\}$ nazveme *kostrou*, její prvky nazveme *kosterní*.

Zřejmě je prvek a kosterní, právě když $a^{pp} = a$.

Tvrzení 90. *$\mathfrak{C}(G)$ je pseudo-komplementární svaz a jeho kostrou je $\mathfrak{P}(G)$.*

Důkaz. $\{1\}$ je nejmenší prvek svazu $\mathfrak{C}(G)$. Podle tvrzení 85, $C^p = C^\perp$. Podle tvrzení 84 je kostra $\mathfrak{C}(G)$ rovna $\mathfrak{P}(G)$. □

Tvrzení je využito v příkladu 21.

11 Příklady

Příklad 3. Nechť $(G, \leq_G)$, $(H, \leq_H)$ jsou po-grupy. Dokaž, že $(G \times H, \leq)$, kde $\leq$ je direktní uspořádání, je po-grupa.

Řešení: Z $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ plyne $(x_1, x_2)(a_1, a_2) = (x_1 a_1, x_2 a_2) \leq (x_1 b_1, x_2 b_2) = (x_1, x_2)(b_1, b_2)$. Analogicky pro pravou translaci. $(G \times H, \leq)$ je po-grupa.

Řešení lze přímočaře zobecnit na direktní součin libovolně mnoha po-grup.

Příklad 4. Nechť $(G, \leq_G)$, $(H, \leq_H)$ jsou po-grupy. Dokaž, že $(G \times H, \leq)$, kde $\leq$ je lexikografické uspořádání, je po-grupa.

Řešení: Definujme lexikografické uspořádání následovně:

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \iff \big(a_1 <_1 b_1\big) \veebar \big(a_1 = b_1 \barwedge a_2 \leq_2 b_2\big).$$

Nechť $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$. Je-li $a_1 <_1 b_1$, pak $x_1 a_1 <_1 x_1 b_1$, takže $(x_1, x_2)(a_1, a_2) \leq (x_1, x_2)(b_1, b_2)$. Jinak je $a_1 = b_1$ a $a_2 \leq_2 b_2$, tedy $x_1 a_1 = x_1 b_1$ a $x_2 a_2 \leq_2 x_2 b_2$, odkud opět $(x_1, x_2)(a_1, a_2) \leq (x_1, x_2)(b_1, b_2)$.

Příklad 5. Nechť G, H jsou l-grupy (úmluva 3). Dokaž, že $G \times H$ je l-grupa.

Řešení: Distributivní zákony jsou identitami, direktní součin l-grup je tudíž l-grupa. Uspořádání odpovídá direktnímu uspořádání: $(a_1, a_2) \le (b_1, b_2) \iff (a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) = (a_1, a_2) \iff (a_1 \wedge b_1 = a_1) \barwedge (a_2 \wedge b_2 = a_2) \iff (a_1 \le b_1) \barwedge (a_2 \le b_2)$.

Příklad 6. Aditivní grupa $\mathbb{R}$ s obvyklým uspořádáním je lineárně uspořádaná. Každá její podgrupa je lineárně uspořádaná.

Řešení: Podgrupa lineárně uspořádané grupy je lineárně uspořádanou grupou, neboť každé dva její prvky jsou porovnatelné a translace podgrupy jsou restrikcemi translací grupy.

Příklad 7. Označme G aditivní grupu komplexních čísel. Ověř, že každá z níže zadaných množin je kladným kuželem a vyšetři, jaké uspořádání definuje (lineární, svazové, usměrněné).

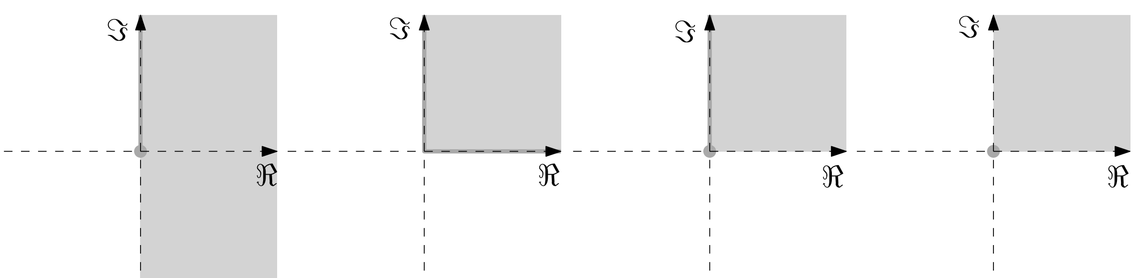
(a) $x + iy \in G^+ \iff (0 < x) \veebar (x = 0 \barwedge 0 \le y)$

(b) $x + iy \in G^+ \iff 0 \le x \barwedge 0 \le y$

(c) $x + iy \in G^+ \iff \big(0 \le x \barwedge 0 < y\big) \veebar (x + iy = 0)$

(d) $x + iy \in G^+ \iff \big(0 < x \barwedge 0 < y\big) \veebar (x + iy = 0)$

Řešení: K ověření toho, že zadané množiny jsou kladnými kužely, použijeme tvrzení 4. Zjevně jsou to pologrupy. Protože G je komutativní, jsou množiny invariantní na vnitřní automorfismy. Může pomoci grafické znázornění zadaných množin v Gaussově rovině (viz obrázek 1). Inverzi v G odpovídá středová souměrnost v počátku. Odtud je vidět, že ve všech případech $G^+ \cap -G^+ = \{0\}$. Zadané množiny jsou kladnými kužely. K dalším výpočtům se hodí grafická představa horního kužele prvku, $\mathrm{U}\{g\} = g + G^+$.



Obrázek 1: G^+ v Gaussově rovině (příklad 7)

(a) Evidentně, po-grupa G je izomorfní po-grupě $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s lexikografickým uspořádáním. Protože uspořádání komponent je lineární, je lexikografické uspořádání lineární, takže G je lineárně uspořádaná po-grupa (alternativně, $G^+ \cup G^- = G$), tedy l-grupa.

(b) Zřejmě jde o l-grupu, neboť je izomorfní direktnímu součinu dvou l-grup $(\mathbb{R}, \le)$ s obvyklým uspořádáním. Uspořádání není lineární – obě (lineárně uspořádané) komponenty jsou netriviální. Například $(1 - i)$ a $(-1 + i)$ nejsou porovnatelné. Alternativně, $G^+ \cup G^- = \{x + iy;\ (0 \le x \barwedge 0 \le y) \veebar (x \le 0 \barwedge y \le 0)\} \ne G$.

(c) Ať $g \in G$. Volíme-li $h \in G$ tak, že[14] $\Re h > 0 \vee \Re g$, $\Im h > 0 \vee \Im g$, pak $0,\ g \le h$. Podle tvrzení 8 je G usměrněná. Z grafického náhledu odtušíme, že $g \vee 0$ existuje, právě když $g \in G^+ \cup G^-$ (tehdy $0 \in g + G^+$). Implikace doleva je triviální. Ukažme, že prvky $g \in G \setminus (G^+ \cup G^-)$ nemají s 0 supremum. Je-li $0,\ g \le x + iy$, pak $0,\ g \le x + iy' < x + iy$, kde y' lze volit libovolně z intervalu $(0 \vee \Im g, y)$. G není l-grupa.

(d) G je usměrněná (můžeme vzít horní závoru stejnou jako v předešlém případě). Z grafického náhledu odtušíme, že $g \vee 0$ existuje, právě když $g \in G^+ \cup G^-$. Odůvodnění viz předchozí případ. G není l-grupa.

Příklad 8. Nechť G je aditivní grupa komplexních čísel a α, $\beta \in \mathbb{R}$ splňují $0 \le \beta - \alpha < \pi$. Ověř, že níže zadaná množina G^+ je kladný kužel, a vyšetři, jaké uspořádání definuje.

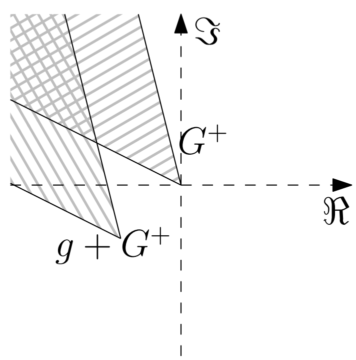
$$x + iy \in G^+ \iff \arg z \in [\alpha, \beta]\,.$$

Řešení: G^+ znázorněná v Gaussově rovině je ostrým (nebo degenerovaným) úhlem, průnikem dvou uzavřených polorovin, s vrcholem v počátku. Je tedy pologrupou. Díky ostrosti úhlu je $G^+ \cap -G^+ \subseteq \{0\}$ a $G^+ \cup -G^+ \subsetneq G$. G^+ je kladný kužel G a definuje nelineární uspořádání.

Po-grupa G je l-grupou, právě když $0 < \beta - \alpha$ (nedegenerovaný úhel). Problém nalezení $g \vee 0$ převedeme na geometrický problém průniku shodných rovnoběžně posunutých úhlů – kužele $\mathrm{U}\{g\} = g + G^+$ a $\mathrm{U}\{0\} = G^+$. Tento průnik je roven $\mathrm{U}\{0, g\}$.

(i) Je-li $0 < \beta - \alpha$, pak průnikem je opět úhel shodný s původními, rovnoběžně posunutý, a je horním kuželem svého vrcholu. Vrchol úhlu je hledaným supremem. G je l-grupa.

(ii) Je-li $\beta - \alpha = 0$, pak horní kužel prvku $g \notin G^+ \cup G^-$ má prázdný průnik s G^+ (dvě rovnoběžné polopřímky), takže G není usměrněná.



Obrázek 2: Konstrukce $g \vee 0$ pro $0 < \beta - \alpha$ (příklad 8)

Příklad 9. Nechť G značí grupu $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$. Ověř, že $P = \mathbb{N}$ je kladným kuželem G a vyšetři vlastnosti po-grupy. V případě, že je l-grupou, vyjádři operace průseku a spojení.

Řešení: $\mathbb{N}$ je podpologrupa G, $\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^{-1} = \{1\}$ a G je komutativní. P je kladným kuželem G.

Je $\mathrm{U}\{1, g\} = \mathrm{U}\{1\} \cap \mathrm{U}\{g\} = \mathbb{N} \cap g\mathbb{N}$. Nechť $g = \frac{p}{q}$, kde p, $q \in \mathbb{N}$ a jsou nesoudělná. Pokud $\dfrac{p}{q} n = m \in \mathbb{N}$, je $pn = qm$, tedy $p \mid m$.[15] Odtud plyne $\frac{p}{q}\mathbb{N} \cap \mathbb{N} \subseteq p\mathbb{N}$. Opačná inkluze plyne z rovnosti $\frac{p}{q}(qn) = pn$. Dokázali jsme, že $1 \vee \frac{p}{q} = p$. G je l-grupou.

[14] V zápisu použito supremum v obvykle uspořádané množině $\mathbb{R}$.

[15] Máme na mysli relaci dělitelnosti v $\mathbb{N}$.

Značme největšího společného dělitele, resp. nejmenší společný násobek přirozených čísel a, b jako (a, b), resp. $[a, b]$. Nechť $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ jsou prvky G ve tvaru kanonických zlomků. Pak

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} \vee \frac{p'}{q'} &= \frac{p}{q}\left(1 \vee \frac{qp'}{pq'}\right) = \frac{p}{q} \cdot \frac{qp'}{(qp', pq')} = \frac{pp'}{(p,p')(q,q')} = \frac{[p,p']}{(q,q')}\,, \\ \frac{p}{q} \wedge \frac{p'}{q'} &= \left(\frac{q}{p} \vee \frac{q'}{p'}\right)^{-1} = \frac{(p,p')}{[q,q']}\,.\end{aligned}$$

Příklad 10. Nechť $G = (\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ a $f \in P \overset{\text{def}}{\iff} 0 \leq f(x)$ v $[a, b]$.[16] Je P kladným kuželem G? Pokud ano, vyšetři vlastnosti uspořádání. Diskutuj totéž pro $G' = (\mathbb{R}^{[0,1]}, +)$.

Řešení: Zřejmě, P je podpologrupa G, $P \cap -P = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}; f(x) = 0 \text{ v } [a,b]\}$ a G je komutativní. Požadavek $P \cap -P = \{0\}$ je ekvivalentní požadavku na interval $[a, b]$ – musí být roven definičnímu oboru funkcí. Zaměřme se pouze na případy, kdy G, resp. G' je po-grupa – když $a = -\infty$ a $b = \infty$, resp. $a = 0$ a $b = 1$. Tehdy je zřejmě po-grupa izomorfní direktnímu součinu po-grup $(\mathbb{R}, +)$ s obvyklým uspořádáním a její uspořádání je direktní. Podle příkladu 5 dostaneme v obou případech l-grupy a $f \vee g = h$, $(\forall x \in D_f)\big(h(x) = f(x) \vee g(x)\big)$.

Příklad 11. Nechť $H = (\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}};\ f \text{ spojitá}\}, +)$, $H' = (\{f \in \mathbb{R}^{[0,1]};\ f \text{ spojitá}\}, +)$. Jsou následující množiny kladnými kužely příslušných grup? $P = \{f \in H;\ 0 \leq f(x)\}$, $P' = \{f \in H';\ 0 \leq f(x)\}$. Pokud ano, jaké vlastnosti má uspořádání?

Řešení: Zřejmě je H podgrupou $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$ a P je průnikem H s kladným kuželem $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$. To znamená, že P je kladným kuželem H a definuje na ní uspořádání, které je rovno uspořádání na $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$ zúženému na H. Proto, pokud pro libovolná $f, g \in H$ je $f \vee g \in H$ (spojení z l-grupy $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$), pak je toto spojení spojením i v po-grupě H.

Dokažme spojitost $f \vee g$. Nechť $x' \in \mathbb{R}$. Pak buďto $f(x') = g(x')$, ale pak je $(f \vee g)(x)$ spojitá v x', neboť $f(x), g(x) \xrightarrow{x \to x'} (f \vee g)(x')$. Anebo je BÚNO $f(x') < g(x')$. Pak ale existuje okolí x', v němž $f(x) < g(x)$. Ze spojitosti g v x' plyne spojitost $(f \vee g)$ v x'.

H je l-grupa a je l-podgrupou $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ z příkladu 10. Analogicky, H' je l-podgrupou $\mathbb{R}^{[0,1]}$.

Příklad 12. Mějme grupu $G = (\mathbb{R}[x], +)$ a definujme $f \in G^+ \overset{\text{def}}{\iff} 0 \leq f(x)$ v $[0, 1]$. Je G^+ kladným kuželem grupy? Pokud ano, vyšetři uspořádání.

Řešení: Zobrazení $\varphi\colon f \in \mathbb{R}[x] \mapsto f|_{[0,1]}$ je injekcí $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^{[0,1]}$.[17] Pod-po-grupa po-grupy $\mathbb{R}^{[0,1]}$ z příkladu 10 s nosičem $\varphi_*\mathbb{R}[x]$ má jako kladný kužel množinu $\varphi_* G^+$. Odtud hned plyne, že G je po-grupa izomorfní zmíněné pod-po-grupě.

G je usměrněná. Prvek $p \in G$ nabývá globálního maxima v $[0, 1]$, označme maximální hodnotu p jako m. Konstantní polynom s hodnotou $\max\{m, 0\}$ je horní závorou množiny $\{p, 0\}$.

G není l-grupou. Například pro $p(x) = 1$, $q(x) = 2x$ je $\varphi p \vee \varphi q \notin \varphi_*\mathbb{R}[x]$. Je totiž

$$(\varphi p \vee \varphi q)(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/2] \\ 2x & x \in (1/2, 1] \end{cases}\,,$$

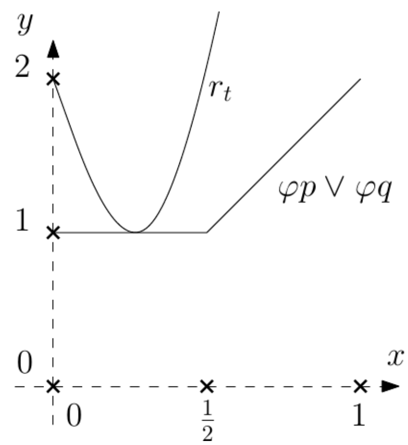
takže analytické rozšíření (vzor v φ) by se muselo identicky rovnat jak p, tak i q. Tudíž G není izomorfní l-podgrupě l-grupy $\mathbb{R}^{[0,1]}$ (na rozdíl od grupy v příkladu 11).

[16] Je-li $a = -\infty$, $b = \infty$, máme na mysli interval $(-\infty, \infty)$.
[17] Dva polynomy mající stejné obrazy pro nekonečně mnoho vzorů se sobě rovnají.

Dokažme, že supremum $p(x)$ a $q(x)$ v G neexistuje. Chceme pro všechna $t \in [0,1/2)$ zkonstruovat $r_t(x) \in \mathrm{U}\{p,q\}$ tak, aby $r_t(t) = 1$. Vše splníme, požadujeme-li, aby grafem r_t byla parabola s vrcholem v $(t,1)$, procházející bodem $(1/2,2)$ (viz obrázek 3). Z první podmínky máme $r_t(x) = a_t(x-t)^2 + 1$, z druhé vyjádříme číslo a_t. Je

$$r_t(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-t\right)^2}(x-t)^2 + 1\,.$$

Předpokládejme, že $s = p \vee q$. Je $(\forall t \in [0,1/2))(p \le s \le r_t)$, tedy s zobrazuje interval $[0,1/2)$ konstantně na 1. Takže $s = 1$, což je spor s tím, že $q \le s$.



Obrázek 3: Konstrukce k příkladu 12

Příklad 13. Nechť G je grupa všech reálných horních trojúhelníkových matic, s jedničkami na diagonále, s obvyklým násobením matic. Definujme množinu $G^+ \subseteq G$ vztahem

$$\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \in G^+ \iff (0 < a) \veebar \big(0 = a \barwedge 0 < b\big) \veebar \big(0 = a = b \barwedge 0 \le c\big)\,.$$

Je G^+ kladným kuželem G? Pokud ano, jaké uspořádání indukuje?

Řešení: Vyjádřeme součin a inverzi v G.

$$\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & x & z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a+x & c+z+ay\\ 0 & 1 & b+y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -a & ab-c\\ 0 & 1 & -b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Ať jsou oba činitelé v (6) z G^+. Je-li $0 < a$ nebo $0 < x$, pak $0 < a + x$. Jinak musí být $a = x = 0$. Pokud navíc $0 < b$ nebo $0 < y$, pak $0 < b + y$. Jinak musí být $a = x = b = y = 0$. Pak $0 \le c$ a $0 \le z$, takže $0 \le c + z$. Ověřili jsme, že v každém případě je součin v G^+.

Předpokládejme, že v (7) jsme invertovali prvek z G^+. Podmínka, aby i jeho inverze byla z G^+, implikuje $a = b = c = 0$. Je $G^+ \cap (G^+)^{-1} = \{1\}$.

Nechť v (6) je činitel vpravo z G^+. Vynásobením rovnice zprava inverzí k činiteli vlevo dostaneme

$$\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & x & z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -a & ab-c\\ 0 & 1 & -b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+x & c+z+ay\\ 0 & 1 & b+y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -a & ab-c\\ 0 & 1 & -b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}1 & x & bx+c+z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

takže v každém případě je výsledek z G^+. Dokázali jsme, že G^+ je kladným kuželem G.

Srovnáním (7) s definicí G^+ dostaneme, že $G^+ \cup G^- = G$. Uspořádání je lineární.

Příklad 14. K binární operaci $\cdot$ na $G = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, definovanou níže, dodefinuj operaci inverze $^{-1}$ a neutrálního prvku 1 tak, aby $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ byla grupa.

$$(k,l,m)\cdot(k',l',m') = \begin{cases}(k+k', l+l', m+m') & \text{, pokud } 2 \mid m'\,,\\ (l+k', k+l', m+m') & \text{, pokud } 2 \nmid m'\,.\end{cases} \tag{8}$$

Ověř, že s uspořádáním níže je G l-grupa (tzv. *Scrimgerova* 2-*grupa*).

$$(k,l,m)\vee(0,0,0) = \begin{cases}(k,l,m) & m > 0\,,\\ (k\vee 0, l\vee 0, 0) & m = 0\,,\\ (0,0,0) & m < 0\,.\end{cases} \tag{9}$$

Řešení: Ať $(k,l,m), (k',l',m'), (k'',l'',m'') \in G$. Chceme dokázat, že

$$(k,l,m)\cdot\big((k',l',m')\cdot(k'',l'',m'')\big) = \big((k,l,m)\cdot(k',l',m')\big)\cdot(k'',l'',m'')\,.$$

Učiňme několik pozorování.

(i) Vynásobením (v libovolném pořadí) dostaneme prvek (x,y,z) takový, že každá jeho složka je termem obsahujícím tři proměnné – po jedné s nula/jednou/dvěma čárami.

(ii) Součiny výše mají třetí složku rovnou $m + m' + m''$.

(iii) $k''/l''/m''$ je při násobení vždy v pravo, zůstává v původní složce.

Stačí zjistit, v jakých složkách skončí k, k'. Jejich pohyb určuje parita m' a m''. Existují čtyři možnosti:

(a) m', m'' jsou sudé, $m' + m''$ je sudé. Sčítá se po složkách.

(b) m' je sudé, m'' je liché, $m' + m''$ je liché. Levá strana (L): $k \to 2$, $k' \to 2$. Pravá strana (P): $k \to 1 \to 2$, $k' \to 2$.

(c) m' je liché, m'' je sudé, $m' + m''$ je liché. L: $k \to 2$, $k' \to 1$. P: $k \to 2 \to 2$, $k' \to 1$.

(d) m', m'' jsou lichá, $m' + m''$ je sudé. L: $k \to 1$, $k' \to 2$. P: $k \to 2 \to 1$, $k' \to 2$.

Binární operace je asociativní.

G není komutativní: $(1,0,0)\cdot(0,0,1) = (0,1,1) \neq (0,0,1)\cdot(1,0,0) = (1,0,1)$.

Neutrálním prvkem vzhledem k '$\cdot$' je zřejmě $(0,0,0)$.

Unární operace inverze je

$$(k,l,m)^{-1} = \begin{cases} (-k,-l,-m) & \text{, pokud } 2 \mid m\,, \\ (-l,-k,-m) & \text{, pokud } 2 \nmid m\,. \end{cases}$$

V případě $2 \mid m$ je to zřejmé. Pokud $2 \nmid m$, pak též $2 \nmid -m$.

Předpisu (9) rozumějme tak, že nám definuje kladný kužel grupy. Ověřme, že $G^+ = (G)_+ = \{g \vee 1;\ g \in G\}$ je vskutku kladný kužel G.

$$G^+ = \big\{(k,l,m) \in G; (0 < m) \veebar (0 = m \barwedge 0 \le k,l)\big\}\,. \tag{10}$$

(a) Nechť $g = (k,l,m), g' = (k',l',m')$ a $g,g' \in G^+$. Je-li $0 < m + m'$, pak $g + g' \in G^+$. Jinak je $m = m' = 0$, tedy $0 \le k,k',l,l'$, takže $g \cdot g' \in G^+$. G^+ je pologrupa.

(b) Je-li $(k,l,m) \in G^+ \cap (G^+)^{-1}$, pak i $(k,l,m)^{-1} \in G^+$. Odtud, $m = 0$. Tedy $(k,l,m)^{-1} = (-k,-l,-m)$, proto $k = l = 0$. $G^+ \cap (G^+)^{-1} = \{1\}$.

(c) Nechť $g = (x,y,z) \in G$, $h = (k,l,m) \in G^+$. Třetí složka $(h)^g$ je $z + m - z = m$. V případě $0 < m$, $(h)^g \in G^+$. Pokud $m = 0$, mohou nastat dvě situace.

  (i) z je sudé – pak g,h komutují a $(h)^g = h \in G^+$.

  (ii) z je liché – pak $(h)^g = ((x,y,z)\cdot(k,l,0))\cdot(-y,-x,-z) = (x+k, y+l, z)\cdot(-y,-x,-z) = (l,k,0) \in G^+$.

G^+ je invariantní na vnitřní automorfismy grupy.

Chceme ukázat, že pro každé $g \in G$ existuje $\sup\{1,g\}$ vzhledem k uspořádání daném G^+ z (10). Ověřme, že tímto suprémem je $1 \vee g$ z (9). Nechť $g = (k,l,m)$. Zřejmě pro $g \in G^+ \cup G^-$ je vše v souladu. Nechť $g \in G \setminus \big(G^+ \cup G^-\big)$. Pak $m = 0$ a $k < 0 < l$ nebo $l < 0 < k$. V prvním případě počítáme

$$\mathrm{U}\{g\} = \big\{(x,y,z); (0 < z) \veebar (z = 0 \barwedge k \le x \barwedge l \le y)\big\}\,,$$
$$\mathrm{U}\{1,g\} = \big\{(x,y,z); (0 < z) \veebar (z = 0 \barwedge 0 \le x \barwedge l \le y)\big\}\,.$$

Má být $1 \vee g = (0,l,0)$. Vidíme, že $\mathrm{U}\{1 \vee g\} = \mathrm{U}\{1,g\}$, což bylo třeba dokázat. Analogicky pro případ $l < 0 < k$.

Příklad 15. Grupa $G = \mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$, kde $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \operatorname{Aut}\mathbb{Z}$ je homomorfismus $n \mapsto (-1)^n\cdot$, je bez torze a nelze ji svazově uspořádat. Rozumějme

$$(-1)^n\cdot = \begin{cases} 1_{\mathbb{Z}} & \text{, pokud } 2 \mid n\,, \\ - & \text{, pokud } 2 \nmid n\,, \end{cases}$$

kde '$-$' značí inverzi v $\mathbb{Z}$ – ta je vskutku automorfismem, díky komutativitě $\mathbb{Z}$. φ je homomorfismus: $\varphi(n+n') = (-1)^{n+n'}\cdot = (-1)^n\left((-1)^{n'}\cdot\right) = (\varphi n)\circ(\varphi n')$. Definice je korektní, binární operace G je

$$(m,n)(m',n') = (m + (-1)^n m', n + n')\,.$$

1. Dokažme, že G je bez torze. Buď $k \in \mathbb{N}$. Druhá složka $(m,n)^k$ je rovna $k \times n$ (aditivní symbolika). Je-li tedy $n \neq 0$, je $(m,n)^k \neq (0,0)$. Pokud $n = 0$, pak $(m,0)^k = (k \times m, 0)$ a rovná se neutrálnímu prvku jen tehdy, když $(m,n) = (0,0)$.

2. Dokažme, že G nelze svazově uspořádat. Každý prvek grupy G lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $(0,1)^n(1,0)^m$, kde $m,n \in \mathbb{Z}$. Je totiž $(0,1)^n(1,0)^m = (0,n)(m,0) = ((-1)^n m, n)$. Předpokládejme, že grupa je svazově uspořádaná. Nechť tedy

$$(0,1)^n(1,0)^m = (1,0) \vee (0,0)\,. \tag{11}$$

Počítejme:

$$\begin{array}{ll}
i & (-1,0) \vee (0,0) = [(0,0) \vee (1,0)](-1,0) = (0,1)^n(1,0)^m(-1,0) = (0,1)^n(1,0)^{m-1}\,, \\
ii & (0,1)\,[(0,0) \vee (1,0)]\,(0,-1) = (0,0) \vee (0,1)(1,0)(0,-1) = \\
 & \quad = (0,0) \vee (-1,0) \overset{i}{=} (0,1)^n(1,0)^{m-1}\,, \\
iii & (0,1)\,[(0,1)^n(1,0)^m]\,(0,-1) = (0,1)^n(0,1)(1,0)^m(0,-1) = \\
 & \quad = (0,1)^n \left((1,0)^{(0,1)}\right)^m = (0,1)^n(-1,0)^m = (0,1)^n(1,0)^{-m}\,, \\
iv & (0,1)^n(1,0)^m = (0,1)^n(1,0)^{m-1}(1,0) \overset{i}{=} [(-1,0) \vee (0,0)](1,0) = (1,0) \vee (0,0)\,. \\
v & (0,1)^n(1,0)^{-m} \overset{iii}{=} (0,1)\,[(0,1)^n(1,0)^m]\,(0,-1) \overset{(11)}{=} \\
 & \quad = (0,1)[(1,0) \vee (0,0)](0,-1) \overset{ii}{=} (0,1)^n(1,0)^{m-1}\,.
\end{array}$$

Z poslední rovnosti dostaneme spor: $(1,0)^{2m-1} = (0,0)$ a $2m-1 \neq 0$.

Příklad 16. Ověř na protipříkladu Scrimgerovy 2-grupy (viz příklad 14), že obrácená implikace z tvrzení 35 neplatí.

Řešení: Volme $g = (0,0,-1)$, $h = (1,0,1)$. Je $gh = (1,0,0) \neq (0,1,0) = hg$ a $|gh| = |(1,0,0)| = (1,0,0) < (1,0,2) = (0,0,1)(1,0,1) = |g|\,|h|$.

Příklad 17. Ověř, že svaz $\mathfrak{C}(G)$ l-grupy $G = \prod_{-\infty}^{\infty} \mathbb{Z}$ (direktní součin) není duálně Brouwerův. Využij podgrup $A = \{g \in G; g_i = 0 \text{ až na konečně mnoho indexů}\}$, $B_i = \{g \in G; g_i = 0\}$.

Řešení: A je zřejmě podgrupou G. Je-li $g \in A$ a právě pro indexy $i \in I$ je $g_i \neq 0$, pak $0 \vee g$ má složky nulové, až na indexy z podmnožiny I, tedy $0 \vee g \in A$, takže A je l-podgrupa. Podobnou úvahou zjistíme, že $0 \leq g \leq a$ pro nějaké $g \in G$ a $a \in A$ implikuje $g \in A$. Je $A \in \mathfrak{C}(G)$. Zřejmě je $B_i \in \mathfrak{C}(G)$.

Ve svazu $\mathfrak{C}(G)$ je $A \vee \bigwedge_{\mathbb{Z}} B_i = A \vee (\bigcap_{\mathbb{Z}} B_i) = A \vee \{0\} = A$. Protože $A \vee B_i \supseteq A \cup B_i = G$, je $\bigwedge_{\mathbb{Z}}(A \vee B_i) = G$.

Příklad 18. Dokaž, že (inkluzí uspořádaná) množina všech prvopodgrup l-grupy nemusí být svaz.

Řešení: Uvažujme l-grupu $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z} \times \{0\}$, $B = \{0\} \times \mathbb{Z}$. Zjevně $A, B \in \mathfrak{C}(G)$. Nechť $(0,0) = (x_1,x_2) \wedge (y_1,y_2) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2)$. Pak z linearity $\mathbb{Z}$ plyne $x_2 = 0$ nebo $y_2 = 0$, tedy A je prvopodgrupa G (B rovněž). Avšak $A \cap B = \{(0,0)\}$ není prvopodgrupa, neboť $(1,0) \wedge (0,1) = (0,0)$.

Příklad 19. Urči $\Gamma(G)$ l-grupy $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (direktní součin grup) s uspořádáním

$$(k,l,m) \vee (0,0,0) = \begin{cases} (k,l,m) & \text{, pokud } 0 < m\,, \\ (k \vee 0, l \vee 0, 0) & \text{, pokud } 0 = m\,, \\ (0,0,0) & \text{, pokud } m < 0\,. \end{cases} \tag{12}$$

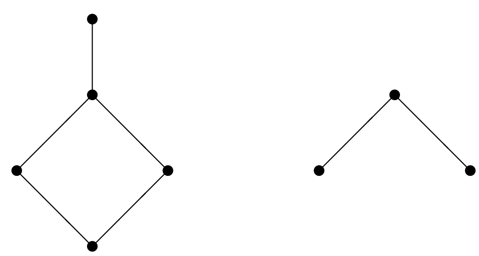
Řešení: Postupujme jako v příkladu 14. Množina $G^+ = \{(x,y,z); (0 < z) \veebar (z = 0 \barwedge 0 \le x,y)\}$ má být kladným kuželem G. Zřejmě je pologrupou a je invariantní na vnitřní automorfismy grupy (G je komutativní). Zřejmě $G^+ \cap (-G^+) = \{(0,0,0)\}$.

Ověřme, že (12) je konzistentní s kladným kuželem výše. Zbývá vyšetřit $(k,l,m) \in G \setminus (G^+ \cup G^-)$. Tehdy $m = 0 \barwedge k < 0 < l$ nebo $m = 0 \barwedge l < 0 < k$. Vzhledem k symetrii příkladu stačí ověřit první možnost – tehdy $(k,l,m) \vee (0,0,0) = (0,l,0)$ a

$$\mathrm{U}\{(k,l,m)\} = \{(x,y,z); (0 < z) \veebar (0 = z \barwedge k \le x \barwedge l \le y)\}\,,$$
$$\mathrm{U}\{(k,l,m),(0,0,0)\} = \{(x,y,z); (0 < z) \veebar (0 = z \barwedge 0 \le x \barwedge l \le y)\} = \mathrm{U}\{(0,l,0)\}\,.$$

Nyní najdeme $\mathfrak{C}(G)$. Předpokládejme, že $C \in \mathfrak{C}(G)$ a $(k,l,m) \in C^+$. Kdyby $0 < m$, pak $G^+ \subseteq C^+$, neboť pro $(k',l',m') \in G^+$ existuje $q \in \mathbb{N}$ takové, že $m' < qm$, tedy $(k',l',m') < q \times (k,l,m) \in C^+$. Kdyby $m = 0$, pak $0 \le k,l$. Kdyby byly obě nerovnosti ostré, učiníme pro $k \wedge l$ úvahu podobnou jako v případě $0 < m$ a zjistíme, že $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \{0\} \subseteq C^+$. Zbytek je již zřejmý.

Probrali jsme všechny prvky G^+ a zjistili, že $\mathfrak{C}_{\mathrm{P}}(G) = \{\{0\}, \mathbb{Z} \times \{0\} \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{Z} \times \{0\}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \{0\}, G\}$. Protože $\mathfrak{C}_{\mathrm{P}}(G)$ je konečný, je $\mathfrak{C}_{\mathrm{P}}(G) = \mathfrak{C}(G)$. Označme po řadě prvky svazu jako $0, A, A', B, 1$. Jediný prvek $\mathfrak{C}(G)$, jenž není $\wedge$-ireducibilní, je 0. Odtud, $\Gamma(G) = \{A, A', B\}$ a minimální prvopodgrupy jsou A, A'. Hasseho diagramy viz obrázek 4.



$\mathfrak{C}(G)$ $\quad\quad$ $\Gamma(G)$

Obrázek 4: Hasseho diagramy (příklad 19)

Příklad 20. Označme $\mathbb{Z} \leftthreetimes \mathbb{Z}$ grupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ uspořádanou lexikograficky ($\le_{\mathrm{lex}}$). Dle příkladu 4 je $\mathbb{Z} \leftthreetimes \mathbb{Z}$ po-grupa. Navíc je lineárně uspořádaná, tedy je l-grupa. Direktní součin

$$G = (\mathbb{Z} \leftthreetimes \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \leftthreetimes \mathbb{Z})$$

je tudíž l-grupa. Pišme její prvky jako matice řádu dva.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \iff (a,b) \le_{\mathrm{lex}} (a',b') \barwedge (c,d) \le_{\mathrm{lex}} (c',d')\,, \tag{13}$$

$$G^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \big((0 < a) \veebar (0 = a \barwedge 0 \le b)\big) \barwedge \big((0 < c) \veebar (0 = c \barwedge 0 \le d)\big) \right\}. \tag{14}$$

Chceme sestrojit $\mathfrak{C}_{\mathrm{P}}(G)$. Projdeme G^+ a vygenerujeme hlavní konvexní l-podgrupy. Nechť $C \in \mathfrak{C}(G)$ a $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in C^+$. V závislosti na tvaru g vyvodíme důsledky pro C.

1. $(0,0) <_{\mathrm{lex}} (a,b)$ a $(c,d) = (0,0)$.

    (i) $0 < a$, pak $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \\ 0\times 0 \end{pmatrix} \subseteq C$.[18]

    (ii) $0 = a$, pak $\begin{pmatrix} 0\times\mathbb{Z} \\ 0\times 0 \end{pmatrix} \subseteq C$.

2. $(0,0) <_{\mathrm{lex}} (a,b), (c,d)$.

    (i) $0 < a, c$, pak $G \subseteq C$.

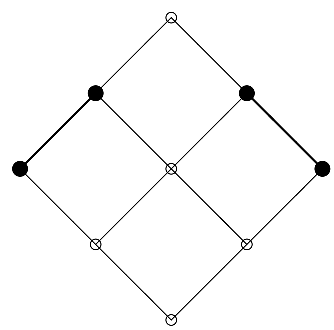
    (ii) $0 < a$, $c = 0$ a $0 < d$, pak $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \\ 0\times \mathbb{Z} \end{pmatrix} \subseteq C$.

    (iii) $0 = a = c$, $0 < b, d$, pak $\begin{pmatrix} 0\times\mathbb{Z} \\ 0\times \mathbb{Z} \end{pmatrix} \subseteq C$.

Ostatní případy jsou analogické. Svaz $\mathfrak{C}_{\mathrm{P}}(G)$ je konečný, tedy je roven $\mathfrak{C}(G)$ a má následující prvky (středníkem oddělujeme maximální antiřetězce):

$$0;\ \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}; G\,.$$

Hasseho diagram $\mathfrak{C}(G)$ a $\Gamma(G)$ viz obrázek 5.



$\mathfrak{C}(G)$

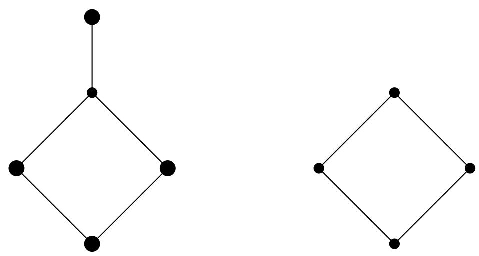
Obrázek 5: Hasseho diagram $\mathfrak{C}(G)$, zvýrazněny prvky $\Gamma(G)$, příklad 20

Příklad 21. Urči $\mathfrak{P}(G)$ pro l-grupy z příkladů 2, 19, 20.

Řešení: Pomocí tvrzení 90 ve svazu $\mathfrak{C}(G)$ identifikujeme poláry.

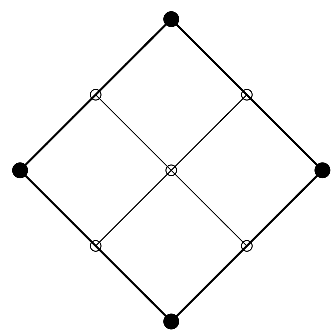
Protože $\mathfrak{C}(G)$ je distributivní, je každý komplement i pseudo-komplementem. V příkladu 2 je $\mathfrak{C}(G)$ dvouprvkový řetězec, tedy $\mathfrak{P}(G) = \mathfrak{C}(G)$. Pro $\mathfrak{P}(G)$ z příkladu 19 viz obrázek 6. V příkladu 20 je na obrázku 7 zvýrazněna kostra $\mathfrak{C}(G)$ – jsou to právě všechny komplementy v $\mathfrak{C}(G)$. Další pseudo-komplementy svaz nemá: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}^p = 0$.

[18] Prosím laskavého čtenáře o prominutí neformálního značení ve zbytku řešení.



$\mathfrak{C}(G)$ $\mathfrak{P}(G)$

Obrázek 6: Identifikace $\mathfrak{P}(G)$ v rámci $\mathfrak{C}(G)$ (příklad 19, 21), poláry v $\mathfrak{C}(G)$ zvýrazněny



$\mathfrak{C}(G)$

Obrázek 7: Identifikace $\mathfrak{P}(G)$ v rámci $\mathfrak{C}(G)$ (příklad 20, 21), poláry v $\mathfrak{C}(G)$ zvýrazněny

Příklad 22. Urči $\mathfrak{C}(G)$, $\Gamma(G)$ a $\mathfrak{P}(G)$ l-grupy $G = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$.
Řešení: Uvažujme $g \in G^+$ takové, že $0 < g_i$ právě pro indexy $i \in I \subseteq \mathbb{N}$. Pak $\langle g \rangle_{\mathfrak{C}(G)} = \prod_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}^{\chi_I j}$, kde χ_I je charakteristická funkce množiny I a pokládáme $\mathbb{Z}^1 = \mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}^0 = \{0\}$. Zřejmě,

$$\mathfrak{C}_{\mathrm{P}}(G) = \Big\{ \prod_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}^{\chi_I j}; I \in P(\mathbb{N}) \Big\}, \tag{15}$$

kde $P(\mathbb{N})$ je potenční množina $\mathbb{N}$. Je $\mathfrak{C}(G) = \mathfrak{C}_{\mathrm{P}}(G)$, protože pro $C \in \mathfrak{C}(G)$ je $C = \bigvee_{g \in C} \langle g \rangle_{\mathfrak{C}(G)}$ a pro $\mathcal{I} \in P(P(\mathbb{N}))$ platí

$$\bigvee_{I \in \mathcal{I}} \prod_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}^{\chi_I j} = \prod_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}^{(\chi_{\cup \mathcal{I}}) j}. \tag{16}$$

Vztah (15) nabízí izomorfismus $\mathfrak{C}(G) \to P(\mathbb{N})$, $C \mapsto I$.

$\mathfrak{C}(G)$ je Booleův, takže $\mathfrak{P}(G) = \mathfrak{C}(G)$.

Hledejme $\wedge$-ireducibilní prvky v reprezentaci z $P(\mathbb{N})$. Je-li $I \in P(\mathbb{N})$, $x, y \in G \setminus I$ a $x \neq y$, pak $I = (I \cup \{x\}) \cap (I \cup \{y\})$, takže I není $\wedge$-ireducibilní. Množina $\mathcal{A} = \{\mathbb{N} \setminus \{x\}; x \in \mathbb{N}\}$ je (maximálním) antiřetězcem v $P(\mathbb{N})$. Pro $X \in \mathcal{A}$ platí $X \subsetneq Y \Rightarrow Y = \mathbb{N}$, takže z analogie poznámky 5 plyne, že všechny prvky $\mathcal{A}$ jsou úplně $\wedge$-ireducibilní.

V reprezentaci z $P(\mathbb{N})$ je $\Gamma(G) = \mathcal{A}$. Je to též množina všech minimálních prvopodgrup.

Literatura

[1] Darnel, M. R.: *Theory of Lattice-Ordered Groups*, Marcel Dekker, New York 1995

[2] Fuchs, L.: *Partially Ordered Algebraic Systems*, Pergamon Press, Oxford 1963

[3] Glass, A. M. W.: *Partially Ordered Groups*, World Scientific, Singapore 1999